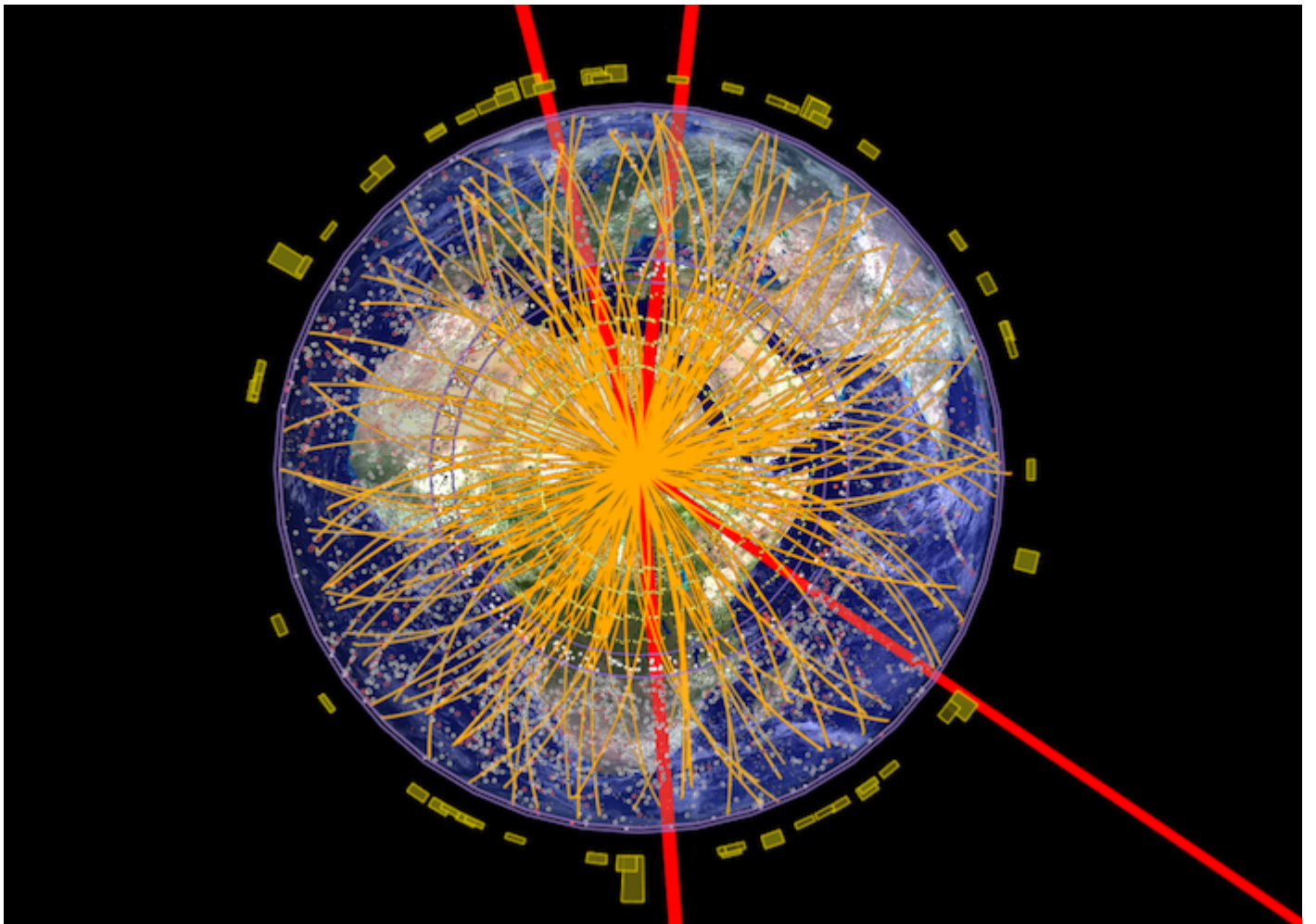


Scattering e decadimenti
in
Teoria dei Campi (QFT)

E. Iacopini

Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Firenze
e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Firenze

1 gennaio 2025



Libri consigliati da consultare:

- D. Griffiths: Introduction to elementary particles
- W.R. Frazer : Elementary particles
- D.H. Perkins: Introduction to high energy physics
- I.J.R. Aitchinson: Gauge theory in particle physics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum mechanics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum fields
- S. Weinberg : The Quantum Theory of Fields
- H. Muirhead : The Physics of elementary particles

*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.

Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623).

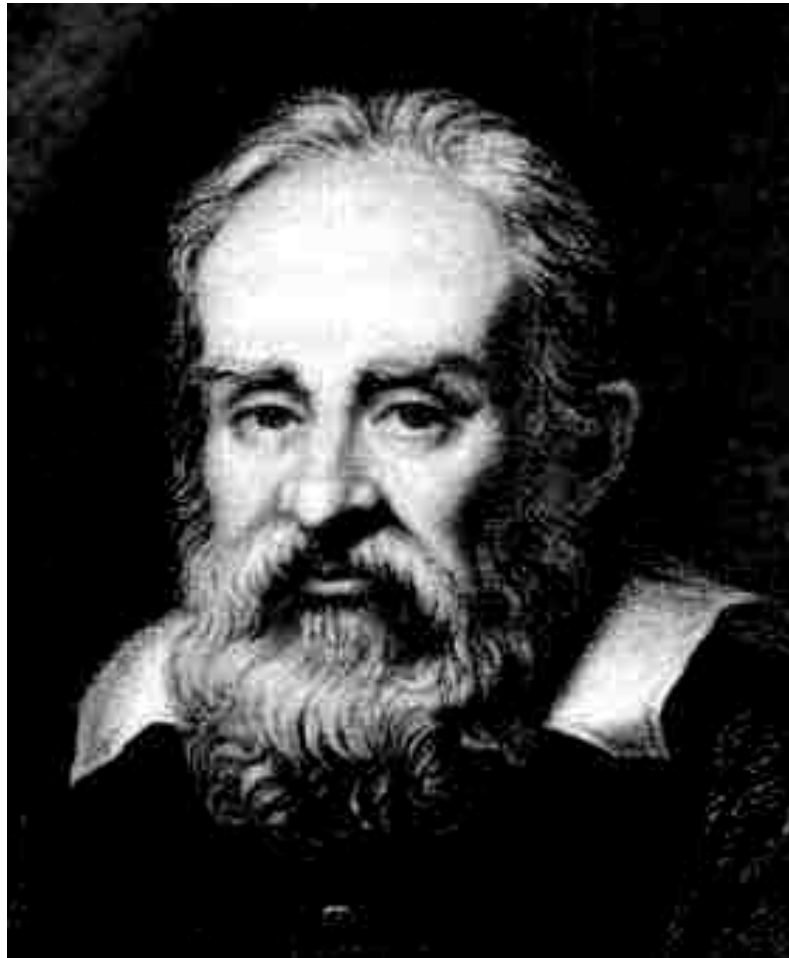


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

Indice

1	Introduzione allo scattering e ai decadimenti	9
1.1	Richiami di teoria dello scattering in MQ	10
1.2	Proprietà di S sotto CPT	16
2	Scattering e decadimenti in QFT	19
2.1	Lo Scattering in QFT	19
2.2	Proprietà generali	30
2.2.1	Simmetria di crossing	30
2.2.2	Simmetria particella/antiparticella	32
2.3	Lo spazio delle fasi	33
2.3.1	Lo spazio delle fasi di due particelle	33
2.3.2	Lo spazio delle fasi di tre particelle: il plot di Dalitz	42
2.3.3	Lo spazio delle fasi di n particelle	51
3	Scattering: esempi	53
3.1	Lo scattering (quasi-)elastico	53
3.2	Lo scattering elettrone-protone	62
3.3	Lo spin del pione π^+	79
3.4	Lo scattering quasi-elastico $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$	82
4	Decadimenti: alcuni esempi	99
4.1	Il decadimento del pione carico	99
4.2	Il decadimento del muone	126
4.3	Il decadimento del neutrone	144
5	Un decadimento sui generis	155
5.1	La radiazione Cerenkov: teoria quantistica	155
A	Appendix: Generalità	165
A.1	Le unità di misura	165
A.2	Le notazioni	168

Capitolo 1

Introduzione allo scattering e ai decadimenti

1.1 Richiami di teoria dello scattering in MQ

I processi di scattering, insieme a quelli di decadimento (che, quanto a trattazione formale, sono molto simili a quelli d'urto), costituiscono la via naturale che fornisce accesso alla dinamica delle interazioni fra le particelle elementari.

Come si ricorderà, l'operatore che in Meccanica Quantistica descrive i processi d'urto (e di decadimento) è la matrice S , che abbiamo introdotto nello schema della prima quantizzazione nel *Vol.VI*, della quale faremo adesso un breve richiamo.

E' noto che se $|\psi, t\rangle$ è il *ket* che rappresenta, nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ separabile associato al sistema considerato, un certo stato fisico al tempo t , allora esso soddisfa l'equazione

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (1.1.1)$$

dove H è l'operatore hamiltoniano del sistema che, per ipotesi è autoaggiunto. Quando H non dipende esplicitamente dal tempo (sistemi conservativi) l'equazione precedente si integra facilmente nel modo seguente:

$$|\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi, 0\rangle \quad (1.1.2)$$

e l'operatore unitario

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (1.1.3)$$

viene chiamato *operatore di evoluzione temporale*.

Se adesso A è una qualsiasi osservabile del sistema, cioè un qualsiasi operatore autoaggiunto, allora, gli elementi di matrice di A fra stati del sistema al tempo t saranno dati da

$$\begin{aligned} \langle \phi, t | A | \psi, t \rangle &= \langle \phi, 0 | e^{iHt} A e^{-iHt} | \psi, 0 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle \phi, 0 | U^{-1}(t) A U(t) | \psi, 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Come si vede, e come è ben noto dalla Meccanica Quantistica elementare, i due diversi punti di vista secondo cui

- *i)* evolvono solo gli stati secondo la legge $|\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi, 0\rangle$,
- *ii)* evolvono solo le osservabili del sistema, secondo la legge $A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$

sono equivalenti ai fini della valutazione della dipendenza temporale delle ampiezze di transizione indotte da operatori dell'algebra delle osservabili. Come al punto di vista *i*) (Schrödinger Picture *SP*) corrisponde l'equazione di moto per lo stato (equazione di Schrödinger)

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \Rightarrow |\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle \quad (1.1.5)$$

così al punto di vista *ii*) (Heisenberg Picture *HP*) corrisponde l'equazione di moto per le osservabili (equazione di Heisenberg)

$$i \frac{\partial}{\partial t} A(t) = [A(t), H] \Rightarrow A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (1.1.6)$$

Sia ora data $U(\alpha)$ una famiglia di operatori unitari, parametrizzata dalla variabile reale α . Tanto nello schema di Heisenberg come in quello di Schrödinger è banale rendersi conto che la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$|\psi\rangle \Rightarrow |\psi, \alpha\rangle = U^{-1}(\alpha) |\psi\rangle \quad (1.1.7)$$

$$A \Rightarrow A_\alpha = U^{-1}(\alpha) A U(\alpha) \quad (1.1.8)$$

lascia invarianti tutti i valori di aspettazione, infatti

$$\begin{aligned} \langle \psi, \alpha | A_\alpha | \psi, \alpha \rangle &= \langle \psi | U^{\dagger-1}(\alpha) U^{-1}(\alpha) A U(\alpha) U^{-1}(\alpha) | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | A | \psi \rangle \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Se poniamo adesso

$$U(\alpha) \equiv U^{-1}(t) = e^{iHt} \quad (1.1.10)$$

ecco che questa trasformazione unitaria ci fa passare dallo schema di Heisenberg a quello di Schrödinger, visto infatti che risulta

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_S &= U(t) |\psi\rangle \equiv U(t) |\psi\rangle_H \\ A_S &= U(t) A_H U^{-1}(t) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Ponendo invece

$$U(\alpha) \equiv U(t) = e^{-iHt} \quad (1.1.12)$$

ovviamente passiamo dallo schema di Schrödinger a quello di Heisenberg.

Supponiamo adesso che l'hamiltoniana del sistema possa essere posta nella forma seguente

$$H = H_0 + H' \quad (1.1.13)$$

dove H_0 rappresenta la parte "libera", cioè quella che solitamente sappiamo trattare per ciò che riguarda l'evoluzione del sistema (autostati, etc ...) e H' rappresenta la perturbazione, ovvero un'interazione.

Ammettiamo che H_0 come H non dipendano esplicitamente dal tempo e definiamo

$$U_0(t) \equiv e^{-iH_0 t}, \quad U(t) \equiv e^{-iH t} \quad (1.1.14)$$

Indichiamo con $|\psi, t\rangle_S$ e A_S , rispettivamente, gli stati e le osservabili nella SP e con $|\psi\rangle_H$, $A_H(t)$ i medesimi nella HP .

Accanto a questi due schemi se ne pone un altro, quello che è denominato in letteratura *rappresentazione di interazione* (Interaction Picture, IP) che è una specie di via di mezzo fra i due ed è molto comodo per trattare, appunto, il problema legato agli effetti dell'interazione stessa.

Facciamo per questo la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$\begin{array}{lll} |\psi, t\rangle_S & \rightarrow & |\psi, t\rangle_I \equiv U_0^{-1}(t) |\psi, t\rangle_S = e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H \\ A_S & & A_I(t) \equiv U_0^{-1}(t) A_S U_0(t) \end{array} \quad (1.1.15)$$

Per quanto detto prima, evidentemente gli stati $|\psi, t\rangle_I$ e le osservabili $A_I(t)$ sono "buoni" quanto gli stati $|\psi, t\rangle_S$ e le osservabili A_S , oppure gli stati $|\psi\rangle_H$ e le osservabili $A_H(t)$ per ciò che concerne lo studio dell'evoluzione del sistema, cioè per quanto riguarda la valutazione dei valori medi delle osservabili, in funzione del tempo. Questi valori medi¹ saranno ovviamente dati infatti da²

$$\langle \psi, t | A_I(t) | \psi, t \rangle_I \quad (1.1.16)$$

Vediamo ora come evolvono gli stati nella IP : si ha

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_I &= i \frac{\partial}{\partial t} U_0^{-1}(t) U(t) |\psi\rangle_H = i \frac{\partial}{\partial t} e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H = \\ &= -H_0 e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H + e^{iH_0 t} H e^{-iH t} |\psi\rangle_H = \\ &= -H_0 |\psi, t\rangle + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H = \\ &= e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH_0 t} |\psi, t\rangle \equiv H'_I(t) |\psi, t\rangle_I \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

¹Nel seguito, per comodità di notazione, ometteremo, quando questo non produrrà possibili confusioni, l'indice I .

²Questo schema, naturalmente, coincide con quello di Heisenberg quando l'interazione è assente.

mentre per le osservabili risulta

$$i \frac{\partial}{\partial t} A_I(t) = i \frac{\partial}{\partial t} U_0(t') A_S U_0(t) = [A_I(t), H_0] \quad (1.1.18)$$

In sostanza, quindi, nella IP , mentre gli stati evolvono con l'hamiltoniana $H'_I(t)$, che, ricordiamolo ancora, è definita come

$$H'_I(t) = U_0(-t) H' U_0(t) = U_0(t)^{-1} H' U_0(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (1.1.19)$$

le osservabili evolvono secondo l'hamiltoniana libera H_0 , *esattamente* come accade nella Heisenberg Picture in assenza di interazione.

Definiamo adesso l'operatore³ unitario $U(t, t')$ nel modo seguente

$$U(t, t') |\psi, t' \rangle_S \equiv |\psi, t \rangle_S \quad (1.1.20)$$

Dalla definizione si ottiene immediatamente che

$$U(t, t') U(t') |\psi \rangle_H = U(t) |\psi \rangle_H \quad \forall |\psi \rangle \in \mathcal{H} \quad (1.1.21)$$

ovvero risulta

$$U(t, t') = U(t) U^{-1}(t') \quad (1.1.22)$$

per cui è immediato dimostrare che

$$\begin{aligned} U(t, t') U(t', t'') &= U(t, t'') \\ U(t, t')^{-1} &= U(t', t) \\ U(t, 0) &= U(t) \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Analogamente definiamo l'operatore $U_I(t, t')$ nel modo seguente

$$U_I(t, t') |\psi, t' \rangle_I \equiv |\psi, t \rangle_I \quad (1.1.24)$$

e si ottiene di nuovo che risulta

$$U_I(t, t') = U_I(t) U_I^{-1}(t') \quad (1.1.25)$$

come pure che valgono, anche per questo operatore, le proprietà (1.1.23).

Poichè dalla definizione (1.1.15) è evidente che risulta

$$U_I(t) \equiv U_0^{-1}(t) U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iH t}$$

ne segue altresì che

$$\begin{aligned} U_I(t, t') &= U_I(t) U_I^{-1}(t') = U_0^{-1}(t) U(t) U^{-1}(t') U_0(t') \\ &= U_0^{-1}(t) U(t, t') U_0(t') \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

³Esso è l'operatore unitario che trasforma il vettore che, nella SP rappresenta lo stato assegnato al tempo t' , in quello che l'evoluzione con l'hamiltoniana completa H lo porta a essere al tempo t .

E veniamo adesso alla matrice S .

Sia dunque α un set completo di osservabili che commutano, relative al sistema considerato, comprendente l'hamiltoniana imperturbata H_0 .

Indichiamo con $|\alpha\rangle$ la base da esso definita, vista nello schema di Heisenberg relativamente al caso imperturbato (hamiltoniana H_0).

Supponiamo adesso che uno stato $|\alpha\rangle$ si sia evoluto liberamente da $-\infty$ fino al tempo t' e quindi, fra t' e t , si sia evoluto secondo l'hamiltoniana completa (perturbata dall'interazione H').

Ci chiediamo qual è l'ampiezza relativa alla transizione dallo stato così ottenuto verso uno stato $|\beta\rangle$, libero da t a $+\infty$, causata dall'interazione stessa. In altre parole, ci facciamo la seguente domanda: assumendo di considerare il sistema come libero sia prima di t' che dopo t , lo stato che si è ottenuto dopo t a partire dallo stato $|\alpha\rangle$ al tempo t' , come è connesso con gli stati che risulterebbero da un'evoluzione libera del sistema, regolata solo da H_0 ? Per quanto concerne l'ampiezza di transizione di cui sopra, evidentemente avremo

$$A_{\beta\alpha}(t, t') = {}_S\langle\beta, t, lib| U(t, t') |\alpha, t', lib\rangle_S \quad (1.1.27)$$

dove $|\alpha, t', lib\rangle_S$ è lo stato $|\alpha\rangle$ che si è evoluto liberamente fino al tempo t' e, analogamente $|\beta, t, lib\rangle_S$ è lo stato $|\beta\rangle$ che si è evoluto liberamente fino al tempo t . Poichè, in generale, risulta

$$|\alpha, t', lib\rangle_S = U_0(t') |\alpha\rangle_H; \quad |\beta, t, lib\rangle_S = U_0(t) |\beta\rangle_H \quad (1.1.28)$$

abbiamo evidentemente che

$$A_{\beta\alpha}(t, t') = {}_H\langle\beta| U_0^{-1}(t) U(t, t') U_0(t') |\alpha\rangle_H \quad (1.1.29)$$

ovvero, per la (1.1.26),

$$A_{\beta\alpha}(t, t') = \langle\beta| U(t, t')_I |\alpha\rangle \quad (1.1.30)$$

Passando al limite la (1.1.30) per t che va a $+\infty$ e t' che va a $-\infty$ otteniamo proprio, per la sua stessa definizione, l'elemento di matrice S fra i due stati considerati, cioè

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle\beta| S |\alpha\rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty, t' \rightarrow -\infty} A_{\beta\alpha}(t, t') = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle\beta| U_I(t, -t) |\alpha\rangle \quad (1.1.31)$$

ovvero

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I(t, -t) = U_I(\infty, -\infty) \quad (1.1.32)$$

La matrice S , evidentemente unitaria vista la definizione di cui sopra, viene così legata all'operatore di evoluzione temporale in rappresentazione

di interazione. Essa, per come l'abbiamo definita, descrive quindi l'azione determinata dalla presenza dell'interazione H' su un set completo di autostati dell'hamiltoniana libera, definiti in rappresentazione di Heisenberg.

Chiaramente poi, per conoscere effettivamente gli elementi di matrice $S_{\beta\alpha}$, occorrerà in qualche modo riuscire a esplicitare l'operatore $U_I(t, t')$ e quindi passare al limite. D'altronde, per la (1.1.25), risulta

$$U_I(t, t') = U_I(t) U_I^{-1}(t') \quad (1.1.33)$$

dove, per la (1.1.15), se H_0 e H sono indipendenti dal tempo, è

$$U_I(t) = U_0^{-1}(t) U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iH t} \quad (1.1.34)$$

Ne segue quindi che

$$\frac{dU_I(t, t')}{dt} = \left[\frac{dU_I(t)}{dt} \right] U_I^{-1}(t') \quad (1.1.35)$$

Ma, evidentemente l'operatore $U_I(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} i \frac{dU_I}{dt} &= -H_0 e^{iH_0 t} e^{-iH t} + e^{iH_0 t} H e^{-iH t} = \\ &= e^{iH_0 t} [H - H_0] e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iH t} = H'_I(t) U_I(t) \\ \Rightarrow \frac{dU_I}{dt} &= -i H'_I(t) U_I(t) \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

Quindi, sostituendo nella (1.1.35), si ha

$$\frac{dU_I(t, t')}{dt} = -i H'_I(t) U_I(t) U_I^{-1}(t') \equiv -i H'_I(t) U_I(t, t') \quad (1.1.37)$$

D'altronde, evidentemente, $U_I(t', t') = I$ e con questa condizione al contorno l'equazione (1.1.37) può essere formalmente integrata in serie nel modo seguente:

$$U_I(t, t') = I + (-i) \int_{t'}^t H'_I(\tau) d\tau + (-i)^2 \int_{t'}^t H'_I(\tau) d\tau \int_{t'}^{\tau} H'_I(\tau') d\tau' + \dots$$

per cui, data la (1.1.32), risulta infine

$$\begin{aligned} S &= I + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} H'_I(\tau) d\tau + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H'_I(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} H'_I(\tau') d\tau' + \dots \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1, \dots, d\tau_n \mathcal{T} \left(H'_I(\tau_1) \dots H'_I(\tau_n) \right) = \\ &\equiv \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H'_I(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

dove $\mathcal{T}(H'_I(\tau_1) \dots H'_I(\tau_n))$ è il *prodotto cronologico*⁴ (*time-ordered*) degli operatori in parentesi, introdotto da Dyson, che coincide con il prodotto degli stessi operatori, con il tempo che decresce da sinistra verso destra, cioè $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n$.

1.2 Proprietà di S sotto CPT

Consideriamo un sistema inizialmente libero, retto dall'hamiltoniana H_0 , per il quale venga accesa l'interazione descritta dall'hamiltoniana H' indipendente esplicitamente dal tempo.

In *QFT*, sotto ipotesi molto generali, come la località e l'invarianza sotto il gruppo di Lorentz, si dimostra che la simmetria⁵ $CPT \equiv \Theta$ è conservata ovvero l'operatore Θ commuta sia con l'hamiltoniana imperturbata H_0 che con quella di interazione H' .

La matrice S che descrive, in rappresentazione di interazione, le transizioni fra gli autostati di H_0 (stati imperturbati), come abbiamo visto prima, è data da

$$S = \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H'_I(t) \right) \right) \quad (1.2.39)$$

dove $H'_I(t)$ è l'hamiltoniana di interazione in rappresentazione di interazione, cioè

$$H'_I(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (1.2.40)$$

Osserviamo per prima cosa che l'operatore Θ , per via del suo carattere antiunitario legato a T , *non* commuta con $H'_I(t)$. Abbiamo, infatti, che

$$\begin{aligned} \Theta e^{iH_0 t} \Theta^{-1} &= \Theta \left[I + \frac{(iH_0 t)}{1!} + \frac{(iH_0 t)^2}{2!} + \dots \right] \Theta^{-1} = \\ &= I + \frac{(-iH_0 t)}{1!} + \frac{(-iH_0 t)^2}{2!} + \dots = e^{-iH_0 t} \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

dove si è usato il fatto che Θ commuta con H_0 .

Ne segue allora che, poiché per ipotesi Θ commuta anche con H' , risulta

$$\begin{aligned} \Theta H'_I(t) \Theta^{-1} &= \Theta e^{iH_0 t} \Theta^{-1} \Theta H' \Theta^{-1} \Theta e^{-iH_0 t} \Theta^{-1} = \\ &= e^{-iH_0 t} H' e^{iH_0 t} = H'_I(-t) \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

⁴Questo ordinamento fa sì che lo stesso termine compaia nell'espressione da integrare tante volte quante sono le permutazioni del loro numero, da cui la divisione per $n!$.

⁵Quanto concluderemo adesso per Θ vale anche per l'inversione temporale T , se essa è una simmetria conservata del sistema, poiché, come Θ , essa è antiunitaria, ed è proprio questo, come vedremo, l'aspetto cruciale che ci consente di giungere al risultato.

Torniamo adesso alla matrice S .

Vogliamo stabilire l'effetto che ha la trasformazione Θ su di essa.

Per fare questo, immaginiamo per prima cosa di ottenere, al solito, la matrice S come limite per $t \rightarrow \infty$ di $S(t, -t)$, dove

$$S(t, -t) \equiv U_I(t, -t) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-t}^{+t} d\tau H'_I(\tau) \right) \right) \quad (1.2.43)$$

essendo l'operatore $S(t, -t)$ niente altro che l'operatore di evoluzione temporale, scritto in rappresentazione di interazione, fra $-t$ e $+t$.

Volendo conoscere adesso questo operatore fra $-t$ e $t + \delta$, cioè l'operatore $S(t + \delta, -t)$, questo si otterrà applicando al vettore di stato prima l'operatore $S(t, -t)$ e quindi l'operatore $S(t + \delta, t)$, ovvero risulterà

$$S(t + \delta, -t) = S(t + \delta, t) S(t, -t) \quad (1.2.44)$$

da cui segue evidentemente che, fissato comunque un intero N e posto

$$\delta = t/N \quad (1.2.45)$$

abbiamo

$$S(t, -t) = S(t, t - \delta) S(t - \delta, t - 2\delta) \dots S(-t + \delta, -t) \quad (1.2.46)$$

D'altronde, nel limite in cui $\delta \rightarrow 0$, l'operatore $S(t + \delta, t)$ potrà essere scritto anche come (al primo ordine in δ) come

$$S(t + \delta, t) \approx I - i H'_I(t) \delta \approx I - i H'_I(t + \delta) \delta \quad (1.2.47)$$

per cui avremo

$$\begin{aligned} S(t, -t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (I - i H'_I(t_1) \delta) (I - i H'_I(t_2) \delta) \dots (I - i H'_I(t_{2N}) \delta) \equiv \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}(N, t) \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

dove abbiamo posto, per comodità

$$t_n = t - n \delta \equiv t - n t/N; \quad n = 1, \dots, 2N \quad (1.2.49)$$

e il prodotto di cui sopra, nella forma in cui i vari fattori sono linearizzati al primo ordine, definisce la quantità $\hat{S}(N, t)$. Risulta allora che

$$\begin{aligned} \Theta S \Theta^{-1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}(N, t) \right) \Theta^{-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \Theta [I - i H'_I(t_1) \delta] \Theta^{-1} \dots \Theta [I - i H'_I(t_{2N}) \delta] \Theta^{-1} \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} [I + i H'_I(-t_1) \delta] \dots [I + i H'_I(-t_{2N}) \delta] \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} [I + i H'_I(-t + \delta) \delta] \dots [I + i H'_I(t) \delta] \right\} \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

Ma, essendo δ reale e H_I' hermitiana, risulta

$$I + i H_I'(t) \delta = \left(I - i H_I'(t) \delta \right)^\dagger \quad (1.2.51)$$

per cui l'espressione di sopra, a meno di termini del secondo ordine in δ , diviene

$$\begin{aligned} \Theta S \Theta^{-1} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \{ [I - i H_I'(t) \delta] \dots [I - i H_I'(-t + \delta) \delta] \}^\dagger = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \{ [I - i H_I'(t - \delta) \delta] \dots [I - i H_I'(-t) \delta] \}^\dagger \equiv \\ &\equiv S^\dagger = S^{-1} \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

Dunque possiamo concludere che, essendo Θ una simmetria antiunitaria conservata, la matrice S , sotto Θ , è tale per cui

$$\Theta S \Theta^{-1} = S^\dagger \quad (1.2.53)$$

Da questa conclusione segue allora che, dati comunque due stati imperturbati $|A\rangle$ e $|B\rangle$, poiché l'ampiezza di transizione fra uno e l'altro risulta data da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{A \leftarrow B} \equiv \langle A | S | B \rangle &\equiv \langle A | S B \rangle = \langle \Theta^{-1} \Theta A | \Theta^{-1} \Theta S \Theta^{-1} \Theta B \rangle = \\ &= \langle \Theta^{-1} \Theta A | \Theta^{-1} S^\dagger \Theta B \rangle \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

e poiché Θ^{-1} è antiunitario, si ha infine che

$$\begin{aligned} \langle A | S | B \rangle &= \langle \Theta^{-1} \Theta A | \Theta^{-1} S^\dagger \Theta B \rangle = \langle \Theta A | S^\dagger \Theta B \rangle^* = \\ &= \langle S^\dagger \Theta B | \Theta A \rangle \end{aligned} \quad (1.2.55)$$

D'altronde S è un operatore lineare e quindi

$$\langle S^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | S \psi \rangle \quad (1.2.56)$$

per cui, in definitiva, in termini di ampiezze di transizione, abbiamo che

$$\mathcal{A}_{A \leftarrow B} = \langle A | S | B \rangle = \langle \Theta B | S \Theta A \rangle \equiv \langle \Theta B | S | \Theta A \rangle \equiv \mathcal{A}_{\Theta B \leftarrow \Theta A} \quad (1.2.57)$$

ovvero, se H' (e H_0) sono Θ -invarianti, allora l'ampiezza di transizione indotta dalla interazione H' dallo stato $|B\rangle$ allo stato $|A\rangle$ è uguale a quella che la stessa interazione induce dallo stato $\Theta|A\rangle$ allo stato $\Theta|B\rangle$. Per esempio, se consideriamo un processo di scattering come il seguente

$$A(\vec{p}, s_a) + B(\vec{q}, s_b) \rightarrow C(\vec{P}, s_c) + D(\vec{Q}, s_d) \quad (1.2.58)$$

allora, per via della simmetria $CPT \equiv \Theta$, ne segue che

$$\begin{aligned} &\langle C(\vec{P}, s_c), D(\vec{Q}, s_d) | S | A(\vec{p}, s_a), B(\vec{q}, s_b) \rangle = \\ &= \langle \bar{A}(\vec{p}, -s_a), \bar{B}(\vec{q}, -s_b) | S | \bar{C}(\vec{P}, -s_c), \bar{D}(\vec{Q}, -s_d) \rangle \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

visto che, dalle relative definizioni segue che la simmetria $CPT \equiv \Theta$ trasforma lo stato di particella in quello di antiparticella, non cambia l'autovalore dell'impulso e inverte il segno dell'autovalore della componente di spin.

Capitolo 2

Scattering e decadimenti in QFT

2.1 Lo Scattering in QFT

Nello schema della prima quantizzazione, abbiamo visto che, se un sistema fisico è retto da un'hamiltoniana $H = H_0 + H'$, dove H_0 è l'hamiltoniana del sistema imperturbato e H' è l'hamiltoniana di interazione, allora, se $|i\rangle$ ed $|f\rangle$ sono due autostati¹ dell'hamiltoniana H_0 nella HP , l'ampiezza di transizione da $|i\rangle$ ad $|f\rangle$ indotta dalla perturbazione H' è data da

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle \equiv \langle f|U_I(\infty, -\infty)|i\rangle \quad (2.1.1)$$

dove la forma esplicita della matrice S è data dalla espressione (1.1.38).

Questo risultato, dedotto nello schema della prima quantizzazione, vale anche quando il processo di interazione è più complicato di quello di un semplice scattering elastico da potenziale, come nel caso, per esempio, in cui, a causa dell'interazione, le particelle non si conservano, come succede nei processi di decadimento e in quelli di scattering non elastico.

¹Come abbiamo già detto, gli stati $|i\rangle$ e $|f\rangle$ sono chiamati *stati asintotici* e, come rappresentativi del sistema completo, vanno pensati in rappresentazione di interazione, i.e. in rappresentazione di Heisenberg riguardo ad H_0 .

Per descrivere questo tipo di processi, in cui il numero delle particelle non necessariamente si conserva, occorre far uso della Teoria dei Campi. In questo schema, adopereremo come spazio di Hilbert quello generato dalla somma diretta degli spazi di Fock² di tutte le particelle libere coinvolte nel processo considerato.

Finchè con c'è interazione, non c'è molto di più da dire: questi stati sono stazionari, per cui, fra di loro non è permessa alcuna transizione.

Ma supponiamo ora che sia presente una interazione H' .

In questo caso, uno stato dei precedenti non rimarrà più necessariamente uguale a se stesso e l'interazione potrà consentire transizioni fra stati diversi.

Per analizzare queste transizioni useremo, come abbiamo già detto, stati stazionari³ dell'hamiltoniana libera e calcoleremo l'ampiezza di transizione indotta fra di loro a causa dell'interazione.

Considereremo quindi più precisamente

- uno stato $|\chi_a\rangle$, che chiameremo *iniziale*, comprendente vari frammenti (uno, se si tratta di un processo di decadimento, due se è un processo di scattering) in un canale⁴ definito, indicato con la lettera a ;
- uno stato *finale* $|\chi_b\rangle$ comprendente, in generale, altri frammenti in un altro canale, che indicheremo con la lettera b .

Per $t \rightarrow -\infty$ lo stato $|\chi_a\rangle$ sarà fatto dalle particelle non interagenti del canale a : per esempio, nel caso di uno scattering fra due particelle "1" e "2" aventi, rispettivamente, impulso $\vec{p}$ e $\vec{q}$, avremo evidentemente

$$|\chi_a\rangle = a_1^\dagger(\vec{p}) a_2^\dagger(\vec{q}) |\Omega\rangle \quad (2.1.3)$$

dove gli operatori $a_{1,2}^\dagger$ sono gli operatori di creazione dei frammenti *liberi* presenti nel canale a di ingresso (per semplicità di notazione e senza perdita di generalità, non stiamo qui indicando lo stato di spin).

Per $t \rightarrow +\infty$, analogamente, se assumiamo di essere interessati al canale b

²Ricordiamo che, per definizione, ciascun spazio di Fock ha per base i seguenti vettori di stato di (multi)particella libera:

$$\begin{array}{ll} |\Omega\rangle & \text{vuoto} \\ a^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle & \text{una particella} \\ a^\dagger(p)a^\dagger(\vec{q})|\Omega\rangle & \text{due particelle} \\ \dots & \end{array} \quad (2.1.2)$$

³Non avrebbe senso, ovviamente, trattare con stati stazionari dell'hamiltoniana completa, dato che, come è ovvio, fra questi, per definizione di stazionarietà, non potrebbero avvenire mai transizioni !

⁴Un canale è definito come uno specifico insieme di frammenti separati, ognuno in uno stato quantico ben definito, non interagenti fra di loro quando la loro distanza di separazione è molto grande (con la sola possibile eccezione dell'interazione coulombiana che, essendo a lungo range, non è mai lecito considerare *spenta*).

fatto ancora da due particelle "3" e "4", non necessariamente coincidenti con quelle di partenza e aventi, rispettivamente, impulso $\vec{P}$ e $\vec{Q}$, sarà

$$|\chi_b\rangle = a_3^\dagger(\vec{P}) a_4^\dagger(\vec{Q})|\Omega\rangle \quad (2.1.4)$$

dove gli operatori $a_{3,4}^\dagger$ si riferiscono ora ai frammenti nel canale b di uscita. Evidentemente lo scopo della teoria sarà proprio quello di calcolare l'ampiezza di transizione fra tali stati determinata dall'interazione, cioè la quantità

$$S_{ba} \equiv \langle \chi_b | S | \chi_a \rangle \quad (2.1.5)$$

Per la valutazione di S_{ba} , rifacciamoci ancora al fatto che, almeno nello schema di prima quantizzazione, è stato dimostrato che, lavorando in rappresentazione di interazione, risulta

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H'_I(t) \right) \right) \equiv \\ &\equiv \mathcal{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \dots dt_n H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n) \right) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

dove $H'_I(t)$ è appunto l'hamiltoniana di interazione nella *Interaction Picture*

$$H'_I(t) \equiv e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (2.1.7)$$

e il simbolo $\mathcal{T}$ indica, come abbiamo già detto, l'operatore di ordinamento cronologico, definito in modo tale che

$$\mathcal{T} \left(H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n) \right) \equiv H'_I(t_{i_1}) \dots H'_I(t_{i_n}) \quad \text{con } t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots t_{i_n} \quad (2.1.8)$$

In MQ di prima quantizzazione l'hamiltoniana di perturbazione H' veniva identificata, tipicamente, con il potenziale di scattering V .

Ma che accade in QFT ?

In questo caso l'interazione è espressa usando gli stessi campi che definiscono la teoria. Abbiamo visto che $H'_I(t)$ evolve nel tempo esattamente come nella rappresentazione di Heisenberg libera, dunque $H'_I(t)$ dovrà semplicemente essere scritta usando le soluzioni libere dei campi interessati, dipendenti dal tempo come se l'interazione non fosse presente.

Avremo così

$$H'_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}'(t, \vec{x}) \quad (2.1.9)$$

dove $\mathcal{H}'(x)$ è la densità hamiltoniana di interazione

$$\mathcal{H}'(x) = \mathcal{H}_{tot}(x) - \mathcal{H}_0(x) \quad (2.1.10)$$

e $\mathcal{H}_{tot}(x)$ e $\mathcal{H}_0(x)$ sono, rispettivamente, l'operatore di densità hamiltoniana totale e quello relativo all'evoluzione libera.

Quanto alla matrice di scattering S , risulta quindi che

$$S \equiv \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}'(x) \right) \right) \quad (2.1.11)$$

dove adesso⁵

$$\mathcal{T} \left(\mathcal{H}'(x_1) \dots \mathcal{H}'(x_n) \right) \equiv \mathcal{H}'(x_{i_1}) \dots \mathcal{H}'(x_{i_n}) \quad \text{con} \quad x_{i_1}^0 \geq x_{i_2}^0 \geq \dots x_{i_n}^0 \quad (2.1.12)$$

Dal punto di vista dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz⁶ della matrice S , occorre osservare che, essendo $\mathcal{H} = T^{00}$, dove $T^{\mu\nu}$ è il *tensor* (*densità di energia-impulso*), definito in termini della lagrangiana dalla ben nota relazione

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\rho)} \partial^\nu \phi^\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow T^{00} &\equiv \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\rho} \dot{\phi}^\rho - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

ne segue che la densità hamiltoniana non è, in generale, scalare sotto il gruppo di Lorentz per cui nemmeno S , definita in termini di $\mathcal{H}$, lo sarebbe. C'è però un'importante eccezione che è quella dell'accoppiamento diretto dei

⁵L'ambiguità che consegue nella (2.1.12) quando due coordinate temporali sono uguali è irrilevante poiché

$$[\mathcal{H}'(x), \mathcal{H}'(y)] = 0 \quad \text{se} \quad (x - y)^2 < 0$$

e questo, a sua volta, è conseguenza della microcausalità, cioè delle relazioni di (anti)commutazione dei campi (fermionici) bosonici e del fatto che il numero di campi fermionici che entrano nella lagrangiana di interazione e quindi nella $\mathcal{H}'$ deve essere pari, se vogliamo che l'interazione possa essere relativisticamente invariante.

⁶Come abbiamo visto, fissato un riferimento inerziale, l'ampiezza di transizione da uno stato iniziale $|\chi_\alpha\rangle$ e uno stato finale $|\chi_\beta\rangle$ vale

$$S_{\alpha\beta} = \langle \chi_\alpha | S | \chi_\beta \rangle$$

Se andiamo in un altro sistema di riferimento, legato al precedente da una trasformazione del gruppo di Poincaré $U(a, \Lambda)$, allora se $|\chi'_\alpha\rangle = U(a, \Lambda)|\chi_\alpha\rangle$ e $|\chi'_\beta\rangle = U(a, \Lambda)|\chi_\beta\rangle$ sono gli stessi stati $|\chi_\alpha\rangle$ e $|\chi_\beta\rangle$ visti nel nuovo riferimento, essendo il sistema fisico rimasto il solito e così pure la dinamica dell'interazione, deve evidentemente essere che

$$S_{\alpha\beta} = \langle \chi_\alpha | S | \chi_\beta \rangle = \langle \chi'_\alpha | S | \chi'_\beta \rangle$$

ovvero

$$S = U^{-1}(a, \Lambda) S U(a, \Lambda) \quad (2.1.13)$$

La matrice S deve quindi commutare con tutti gli operatori che, nello spazio di Hilbert degli stati, rappresentano il gruppo di Poincaré (occorre e basta che accada per i generatori della rappresentazione ...) e, in questo senso, deve quindi essere un operatore scalare, invariante per traslazioni.

campi, cioè senza termini che coinvolgono le loro derivate⁷. In questo caso, infatti, per quanto riguarda il contributo dovuto alla sola interazione, risulta

$$T^{\mu\nu}(x) = -\mathcal{L}(x) \delta^{\mu\nu}$$

e quindi (stiamo indicando con $\mathcal{L}(x)$ solo il termine di interazione)

$$\mathcal{H}'(x) = -\mathcal{L}(x) \quad (2.1.15)$$

che è scalare. Questa identità (2.1.15), che riguarda solo la parte di interazione, è assunta valida in ogni circostanza, per cui, in definitiva, si ha

$$S \equiv \mathcal{T} \left(\exp \left(i \int \mathcal{L}(x) d^4x \right) \right) \quad (2.1.16)$$

Riscriviamo adesso la matrice S nel modo seguente

$$S = I + R \quad (2.1.17)$$

separando il termine che descrive l'assenza di interazione da tutti gli altri. Evidentemente, dalla definizione, risulta

$$\begin{aligned} R &= \mathcal{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n) \right) \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{T}(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Consideriamo adesso lo sviluppo della matrice S al primo ordine perturbativo. Si ha

$$S = I + i \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad \Rightarrow \quad R = i \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (2.1.19)$$

Supponiamo adesso che gli stati⁸ iniziali e finali $|\chi_a\rangle$ e $|\chi_b\rangle$ siano anche autostati dell'impulso spaziale e indichiamo con p_a e p_b gli autovalori del quadrimpulso a essi corrispondenti. Risulta

$$R_{ba} = \langle \chi_b | S - I | \chi_a \rangle = i \langle \chi_b | \int d^4x \mathcal{L}(x) | \chi_a \rangle \quad (2.1.20)$$

D'altronde sappiamo che l'operatore di quadrimpulso P^μ è il generatore delle traslazioni spazio-temporali, ovvero

$$U(a) = e^{-iaP} = e^{-ia_\mu P^\mu} \quad (2.1.21)$$

⁷In realtà, già nel caso dell'interazione elettromagnetica con un campo scalare carico, c'è un accoppiamento derivativo. Si dimostra comunque che, anche in questi casi, l'espressione corretta da usare per la matrice S è la (2.1.16).

⁸Si ricordi che per questi stati, essendo liberi, la rappresentazione di interazione coincide con quella di Heisenberg e dunque essi non evolvono nel tempo.

per cui (si ricordi che, per il generico campo $\phi(x)$ abbiamo che $U(a)\phi(x)U^{-1}(a) = \phi(x+a)$)

$$e^{-iPy} \mathcal{L}(x) e^{iPy} = \mathcal{L}(x+y) \quad (2.1.22)$$

e dunque

$$\mathcal{L}(x) = e^{-iPx} \mathcal{L}(0) e^{iPx} \quad (2.1.23)$$

per cui, in definitiva, si ha

$$\begin{aligned} R_{ba} &= i \langle \chi_b | \int d^4x e^{-iPx} \mathcal{L}(0) e^{iPx} | \chi_a \rangle = i \int d^4x e^{-ix(p_b - p_a)} \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle = \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

La struttura di questo risultato

$$R_{ba} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) \mathcal{M}_{ba} \quad (2.1.25)$$

si può dimostrare⁹ che resta sempre valida, indipendentemente dall'ordine dello sviluppo perturbativo, discendendo solo dalle proprietà di trasformazione per traslazioni della densità lagrangiana.

La quantità $\mathcal{M}_{ba}$ viene chiamata *elemento di matrice (invariante) della transizione*.

⁹Consideriamo infatti un generico termine dello sviluppo perturbativo

$$\langle b | \int dx dy \dots dz \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \dots \mathcal{L}(z) | a \rangle$$

Vogliamo dimostrare che esso contiene in modo intrinseco il fattore $\delta^4(p_b - p_a)$. Effettuiamo, infatti, sull'operatore la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} &\int dx dy \dots dz \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \dots \mathcal{L}(z) = \\ &= \int dx dy \dots dz U(x) \mathcal{L}(0) U^{-1}(x) U(x) \mathcal{L}(y-x) U^{-1}(x) \dots U(x) \mathcal{L}(z-x) U^{-1}(x) = \\ &= \int dx dy \dots dz U(x) [\mathcal{L}(0) \mathcal{L}(y-x) \dots \mathcal{L}(z-x)] U^{-1}(x) \end{aligned}$$

per cui, sostituendo (si noti che questo non interferisce con l'ordinamento temporale e quindi con il prodotto T-ordinato) si ha

$$\begin{aligned} &\langle b | \int dx dy \dots dz \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \dots \mathcal{L}(z) | a \rangle = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) \langle b | \int dY \dots dZ \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(Y) \dots \mathcal{L}(Z) | a \rangle \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $Y = y - x$; $\dots Z = z - x$.
Risulta così provato quanto volevamo dimostrare.

Osserviamo che l'espressione di cui alla (2.1.25), da un punto di vista strettamente fisico, discende unicamente dalla conservazione del quadrimpulso¹⁰, cioè dal fatto che gli stati iniziali e finali devono comunque avere $p_a = p_b$.

Nel caso in cui il processo di interazione possa essere rappresentato troncando lo sviluppo al primo ordine, da quanto precede risulta evidentemente che

$$\mathcal{M}_{ba} = \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle \quad (2.1.26)$$

In ogni caso, se P_a e P_b sono gli autovalori del quadrimpulso totale dello stato iniziale e finale, da quanto precede possiamo concludere che risulta¹¹

$$S_{ba} = \delta_{ba} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \mathcal{M}_{ba} \quad (2.1.27)$$

Supponiamo, per il momento, di sapere¹² come fare per determinare l'elemento di matrice invariante $\mathcal{M}_{ba}$: il nostro scopo è comunque quello di arrivare a fare confronti con dati sperimentali ovvero, tipicamente, determinare sezioni d'urto di processi di scattering, vite medie di particelle, etc ... Come è legata $\mathcal{M}_{ba}$ con queste quantità ?

Evidentemente, per quanto detto sopra, la probabilità che dallo stato $|\chi_a\rangle$ si sia passati allo stato $|\chi_b\rangle$, quando $|\chi_b\rangle \neq |\chi_a\rangle$, sarà

$$W_{ba} = |S_{ba}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad (2.1.28)$$

e qui abbiamo una espressione che richiede di essere trattata, dal punto di vista matematico, con una certa cautela ... Abbiamo infatti ottenuto il quadrato di una δ di Dirac che non è un operatore ben definito ! Ma vediamo come si è originato. La delta nasce dall'integrale

$$\int e^{-i(P_b - P_a)x} d^4x \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a)$$

Il quadrato della delta, dunque, significa

$$\begin{aligned} & \int e^{-i(P_b - P_a)x} d^4x \cdot \int e^{-i(P_b - P_a)y} d^4y \rightarrow \\ & \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot \int e^{-i \cdot 0} d^4y = (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot VT \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

¹⁰Nel caso dello scattering da potenziale, avevamo trovato una delta di conservazione solo dell'energia. Questo era dovuto al fatto che, in quel processo, solo l'energia era conservata e non l'impulso spaziale, per via proprio del potenziale esterno.

¹¹Abbiamo indicato formalmente il prodotto scalare $\langle \chi_b | \chi_a \rangle$ con il simbolo δ_{ba} ; ma la sua forma esplicita dipende, naturalmente, dalla normalizzazione degli stati.

¹²Il calcolo di $\mathcal{M}_{ba}$ è, in genere, un'impresa piuttosto laboriosa. Esso viene usualmente effettuato con l'ausilio del metodo dei *grafici di Feynman*, che, fissato l'ordine perturbativo desiderato, consente, attraverso regole abbastanza semplici, caratteristiche dell'interazione studiata, di poter tener conto di tutti i vari contributi all'ampiezza di scattering.

dove il prodotto $V T$ è il quadri-volume di integrazione, che, a stretto rigore, è appunto ∞^4 , ma che noi tratteremo inizialmente come se fosse finito, per poi passare al limite solo alla fine.

Dunque, al prezzo di questi "maltrattamenti" della matematica, abbiamo

$$W_{ba} = (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot V T \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad (2.1.30)$$

Va detto comunque che, siccome in generale lo stato finale $|\chi_b\rangle$ appartiene al continuo, noi in realtà saremo interessati più che alla probabilità di transizione verso un particolare stato $|\chi_b\rangle$, a quella verso un insieme di stati opportunamente *prossimi* allo stato $|\chi_b\rangle$.

La Regola d'oro di Fermi ci dice allora che dovremo moltiplicare W_{ba} per il numero di stati finali permessi, ovvero per il numero di cellette dello spazio delle fasi disponibili, ovvero per la quantità

$$d\mathcal{N} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{h^3} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right) \quad (2.1.31)$$

dove n è il numero di frammenti nello stato finale e abbiamo usato il fatto che, per il principio di indeterminazione, una cella dello spazio delle fasi ha dimensione $h = 2\pi \hbar$ e abbiamo convenuto di porre $\hbar = 1$.

Quindi, con questa precisazione, risulta piuttosto che

$$dW_{ba} = (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot V T \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right) \quad (2.1.32)$$

ovvero otteniamo una probabilità di transizione per unità di tempo pari a

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot V \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right) \quad (2.1.33)$$

Però, l'espressione (2.1.33) vale nel caso in cui i vettori di stato siano normalizzati all'unità in tutto lo spazio; ma in generale non è questo il caso, non foss'altro per il motivo che gli stati $|\chi_a\rangle$ e $|\chi_b\rangle$ sono autostati dell'energia e dell'impulso corrispondenti ad autovalori nel continuo e quindi non hanno né possono avere norma finita !

Per questo, ciò che potremo fare in generale sarà, in realtà, solo di poter scegliere il valore delle densità spaziali ρ_i di particelle descritte dalle funzioni d'onda associate agli stati liberi e quindi occorrerà dividere la (2.1.33) per gli opportuni coefficienti di normalizzazione $\rho_i V$ che ne conseguono per cui avremo piuttosto

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \cdot V}{\prod_{j=1}^k (\rho_j^{in} V)} \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right)}{\prod_{i=1}^n (\rho_i^{out} V)} \quad (2.1.34)$$

dove abbiamo indicato con k il numero di frammenti presenti nello stato iniziale.

Ma la scelta¹³ che abbiamo fatto fin'ora è stata sempre quella di avere $\rho = 2E$ e dunque la probabilità differenziale per unità di tempo $\frac{d}{dt}(dW_{ba})$ diviene

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \right) \cdot \frac{V}{\prod_{j=1}^k (2E_j V)} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad (2.1.35)$$

La quantità $(2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a)$, che descrive semplicemente la conservazione del quadrimpulso nel processo, moltiplicata per la produttoria che la segue nella (2.1.35), ovvero la quantità

$$d\Phi \equiv (2\pi)^4 \delta^4(P_b - P_a) \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \right) \quad (2.1.36)$$

viene chiamata¹⁴ *elemento invariante dello spazio delle fasi* (o anche *dLips: differential Lorentz invariant phase space*) e ha a che fare con la cinematica dello stato finale del processo considerato, fissate le condizioni iniziali, imposte appunto attraverso la delta di conservazione.

La cinematica dello stato iniziale si trova, invece, nel termine $\mathcal{F}$, definito dalla relazione

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \equiv \frac{V}{\prod_{j=1}^k (2E_j V)} \quad (2.1.37)$$

mentre la dinamica del processo resta tutta dentro il modulo quadro dell'elemento di matrice $|\mathcal{M}_{ba}|^2$, legato direttamente all'interazione.

In termini di queste quantità, risulta allora che

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi \quad (2.1.38)$$

¹³Come abbiamo visto, questo corrisponde a prendere, per esempio, nel caso del campo scalare semplicemente le onde piane, cioè

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = e^{-ipx}$$

senza alcun coefficiente davanti.

Nel caso del campo di Dirac, invece, questo corrisponde a normalizzare gli spinori nel modo seguente

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{m + E}} u_0^{(r)} \quad ; \quad v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E}} v_0^{(r)}$$

per cui, per esempio, per la particella, abbiamo

$$\psi_{\vec{p}}^{(s)}(\vec{x}, t) = u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx}$$

¹⁴L.B. Okun: *Leptons and quarks*, North-Holland 1982

A proposito dello stato iniziale, distingueremo sostanzialmente solo due casi, ovvero quello in cui partiamo da una sola o da due particelle.

Nel caso in cui lo stato iniziale sia fatto da una sola particella, cioè nel caso di un *decadimento*, la probabilità (differenziale) per unità di tempo è il *rate* (differenziale) del decadimento, il quale vale quindi, in generale

$$d\Gamma \equiv \frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{V}{2E} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \cdot d\Phi = \frac{1}{2E} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \cdot d\Phi \quad (2.1.39)$$

Nel caso particolare, poi, in cui il decadimento avvenga nel sistema di riferimento dove la particella a (di massa M) che decade si trova a riposo (riferimento del CM), il *rate* differenziale assume ovviamente la forma seguente¹⁵

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \cdot d\Phi \quad (2.1.42)$$

Se invece lo stato iniziale è fatto da due particelle, ovvero si tratta di un processo di *scattering*, allora il processo stesso sarà caratterizzato da una sezione d'urto differenziale, definita come

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = d\sigma \cdot j \quad (2.1.43)$$

dove j è la densità di flusso incidente ($cm^{-2} sec^{-1}$).

Siccome, con la normalizzazione adottata, ci siamo riportati comunque al caso di una sola particella *proiettile* nel volume V , la quale urta contro una sola particella *bersaglio*, ecco che, nel riferimento in cui il bersaglio è fermo, il flusso incidente sarà pari alla densità di particelle proiettile per il modulo della velocità (relativa) proiettile-bersaglio, cioè

$$j = v_{rel} \cdot (densita' \text{ della particella proiettile}) = v_{rel} \times \frac{1}{V}$$

e dunque

$$d\sigma = \frac{d\left(\frac{dW_{ba}}{dt}\right)}{j} = \frac{V}{2M_1 2E_2 V^2} \frac{V}{v} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi = \frac{1}{2M_1 2E_2 v} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi \quad (2.1.44)$$

¹⁵Si osservi che, poiché tanto $|\mathcal{M}_{ba}|^2$ che $d\Phi$ sono invarianti, integrando la (2.1.39) e la (2.1.42) se ne conclude che

$$\Gamma = \frac{M}{E} \Gamma_{CM} = \frac{1}{\gamma} \Gamma_{CM} \quad (2.1.40)$$

ovvero, essendo $\Gamma \tau = \hbar$, la relazione precedente afferma il fatto ben noto secondo cui la vita media di una particella, vista in un riferimento in cui essa è in moto, risulta γ volte maggiore di quella osservata nel riferimento di quiete della particella, cioè

$$\tau = \gamma \tau_{CM} \quad (2.1.41)$$

dove il termine $2M_1 2E_2 v$ è detto *termine di flusso*.

L'espressione ottenuta può essere generalizzata a ogni sistema di riferimento osservando che risulta¹⁶

$$M_1 E_2 v = \sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} \quad (2.1.45)$$

ottenendo così la seguente espressione invariante a vista di $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi \quad (2.1.46)$$

Questo risultato è corretto per particelle senza spin.

Se le particelle che partecipano al processo hanno anche spin, allora, nel caso in cui lo stato iniziale *non* abbia spin definito mentre quello degli stati finali *non* sia osservato, risulta, rispettivamente

$$d\Gamma = \frac{1}{2S_a + 1} \cdot \frac{1}{2E_a} \cdot |\overline{\mathcal{M}}_{ba}|^2 d\Phi \quad (2.1.47)$$

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} |\overline{\mathcal{M}}_{ba}|^2 d\Phi \quad (2.1.48)$$

dove S_a è lo spin della particella che decade, S_1, S_2 quello delle due particelle che collidono e $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ indica *la somma* dei quadrati delle ampiezze di transizione fatta su *tutti* gli stati di spin iniziali e finali.

I fattori $\frac{1}{2S+1}$ servono appunto a tener conto che, in effetti, sugli stati iniziali occorre mediare e non sommare, come invece si deve fare su quelli finali.

¹⁶Valutiamo infatti, nel sistema di riferimento in cui M_1 è ferma, la quantità

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}$$

Evidentemente, in questo riferimento, risulta

$$P_1 = (M_1, \vec{0}), \quad P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$$

dunque

$$(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = (M_1 E_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = M_1^2 (E_2^2 - M_2^2) = M_1^2 |\vec{p}_2|^2$$

ovvero

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_1 p_2$$

D'altronde, in generale, sappiamo che

$$p/E = \beta \equiv v$$

e quindi risulta provato quanto asserito, cioè che nel riferimento in cui la prima particella è in quiete, si ha

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_1 E_2 v$$

2.2 Proprietà generali

Prima di proseguire nei dettagli relativi allo scattering e ai decadimenti in *QFT*, premettiamo alcune proprietà generali che, in una Teoria dei Campi locale e relativisticamente invariante, discendono direttamente dalla struttura stessa dei campi e da quella della lagrangiana.

2.2.1 Simmetria di crossing

Data una reazione qualsiasi, come, per esempio

$$A + B \rightarrow C + D \quad (2.2.49)$$

si può "spostare" una particella/antiparticella dallo stato iniziale a quello finale e viceversa, pur di cambiare contestualmente anche il suo status da quello di particella/antiparticella in quello di antiparticella/particella.

Si tratta della *simmetria di crossing*.

Essa trae la sua origine dal fatto che la covarianza relativistica richiede che il campo il quale possiede, per esempio, l'operatore di annichilazione della particella A (associato alle energie positive), possieda anche l'operatore di creazione dell'antiparticella $\bar{A}$ (associato alle energie negative).

Dunque quel campo, se può descrivere la *scomparsa* della particella A presente nello stato iniziale, è anche in grado di poter descrivere la *comparsa* della antiparticella $\bar{A}$ nello stato finale.

Questo, come si è detto, accade perché gli operatori di creazione/distruzione di particella e di antiparticella entrano nella densità lagrangiana dell'interazione nello stesso modo: è la covarianza relativistica che lo richiede.

Partendo, dunque, dalla reazione (2.2.49), la simmetria di crossing implica l'esistenza anche delle reazioni seguenti

$$A \rightarrow \bar{B} + C + D \quad (2.2.50)$$

$$A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D \quad (2.2.51)$$

$$\bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} + \bar{B} \quad (2.2.52)$$

...

Un caso concreto di reazioni legate fra loro dalla simmetria di crossing, ricordando che il fotone è antiparticella di se stesso, è, per esempio, quello dello scattering Compton e della annichilazione $e^+ e^-$, ovvero

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (2.2.53)$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad (2.2.54)$$

che, infatti, sono descritte dalla stessa densità lagrangiana.

Come abbiamo visto, però, l'esistenza di una dinamica che prevede una certa reazione non ne garantisce l'esistenza ma è solo una condizione necessaria.

Una reazione può avvenire solo se ha anche stati finali cinematicamente permessi, ovvero se ha associato allo stato finale uno *spazio delle fasi* non nullo. Per esempio, negli esempi di cui sopra, il decadimento

$$A \rightarrow \bar{B} + C + D \quad (2.2.55)$$

potrebbe non essere energeticamente permesso, e in questo caso, ovviamente, pur esistendo una dinamica che lo permette, non avverrà per ragioni cinematiche.

Un esempio concreto è quello dello scattering neutrino/neutrone:

$$n + \nu \rightarrow p^+ + e^- \quad (2.2.56)$$

che è equivalente, nel senso della *crossing symmetry*, sia al decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$$

che avviene effettivamente, ma anche a quello dell'antiprotone

$$\bar{p} \rightarrow \bar{n} + \bar{\nu} + e \quad (2.2.57)$$

che invece non avviene, in quanto energeticamente vietato (la massa dell'antiprotone, uguale a quella del protone, è inferiore a quella dell'antineutrone, pari, a sua volta, a quella del neutrone).

2.2.2 Simmetria particella/antiparticella

Un'altra simmetria importante che trae origine direttamente dalla struttura autoaggiunta della Lagrangiana, è quella particella/antiparticella.

Iniziamo osservando che a un processo in cui una data interazione consente di passare dallo stato χ_a allo stato χ_b , viene associato, al primo ordine perturbativo, l'elemento di matrice (cfr.(2.1.26)) seguente

$$\mathcal{M}_{ba} = \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle \quad (2.2.58)$$

Ma la densità lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, costruita a partire da combinazioni relativisticamente invarianti dei campi liberi, *deve* essere un operatore *autoaggiunto*. Questa esigenza, che riflette il fatto che in Fisica Classica la lagrangiana è una grandezza reale, implica che se in $\mathcal{L}(x)$ è presente un termine che contiene il campo generico $\phi(x)$, allora deve essere presente anche il corrispondente termine aggiunto, che conterrà¹⁷ quindi $\phi^\dagger(x)$.

D'altronde, come abbiamo visto, il campo ϕ , in generale, è costruito con gli operatori di distruzione della particella e quelli di creazione dell'antiparticella, mentre $\phi^\dagger$ è fatto con gli operatori di distruzione dell'antiparticella e quelli di creazione della particella. Dunque, riprendendo la reazione (2.2.49), la densità lagrangiana che descrive questo processo deve descrivere anche il processo in cui, però, le particelle sono sostituite dalla antiparticelle, ovvero

$$\bar{A} + \bar{B} \rightarrow \bar{C} + \bar{D} \quad (2.2.59)$$

Quanto agli elementi di matrice, fissati gli impulsi e gli stati di spin, essi possono *non* coincidere per il processo (2.2.49) e il processo (2.2.59): questo accade se la simmetria di coniugazione di carica C *non* è conservata dalla dinamica.

¹⁷Nel caso dei campi di Dirac la presenza del campo ψ implica la presenza anche di $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

2.3 Lo spazio delle fasi

2.3.1 Lo spazio delle fasi di due particelle

Nel caso di due particelle diverse nello stato finale, l'elemento di spazio delle fasi invariante, secondo la definizione (2.1.36), è

$$d\Phi = dLips(p, q; P) = (2\pi)^4 \delta^4(p + q - P) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \quad (2.3.60)$$

dove p, q sono i loro quadrimpulsi, mentre P è quello di tutto il sistema e abbiamo posto

$$E_p \equiv \sqrt{M_1^2 + |\vec{p}|^2}, \quad E_q = \sqrt{M_2^2 + |\vec{q}|^2} \quad (2.3.61)$$

L'elemento di spazio delle fasi (2.3.60) può, dunque, essere riscritto anche come

$$d\Phi = dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + E_q - \mathcal{E}) \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{P}) \frac{d^3p}{E_p} \frac{d^3q}{E_q} \quad (2.3.62)$$

dove $\mathcal{E} \equiv P^0$ è l'energia totale del sistema (valutata nel particolare sistema di riferimento dove stiamo studiando il processo) mentre $\vec{P}$ è il suo impulso totale.

Procediamo adesso a integrare¹⁸ la delta di conservazione.

Supponiamo, come di solito accade, di essere interessati a una particella particolare, per esempio a quella di quadrimpulso p , prescindendo dall'altra particella.

Integrando quindi in d^3q , otteniamo

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{d^3p}{E_p \hat{E}} \quad (2.3.63)$$

dove abbiamo indicato con $\hat{E} \equiv E_q = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$ l'energia della particella che non guardiamo, avente massa M_2 e momento lineare

$$\vec{q} = \vec{P} - \vec{p}$$

Passando in coordinate polari, abbiamo

$$d^3p = p^2 dp d\Omega$$

¹⁸Ricordiamo che $d\Phi$ entra in $d\Gamma$ o in $d\sigma$ insieme a $|\mathcal{M}|^2$ il quale dipenderà anch'esso, tramite invarianti visto che è invariante, dalle variabili $\vec{p}$ e $\vec{q}$. L'integrazione della δ di conservazione implica, naturalmente, la sostituzione anche in $|\mathcal{M}|^2$ dei valori di queste variabili così come vengono fissati dall'integrazione della δ stessa.

e quindi, più esplicitamente

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(\vec{p})} \quad (2.3.64)$$

D'altronde

$$E_p^2 = M_1^2 + p^2 \quad \Rightarrow \quad E_p dE_p = p dp \quad (2.3.65)$$

per cui si ha

$$d^3p = p E_p dE_p d\Omega \quad (2.3.66)$$

e dunque, finalmente

$$\begin{aligned} dLips &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{p E_p dE_p d\Omega}{E_p \hat{E}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) p \frac{dE_p}{\hat{E}} d\Omega \end{aligned} \quad (2.3.67)$$

Questo risultato è corretto qualunque sia il sistema di riferimento in cui si sta operando.

Esso però può essere semplificato se studiamo il processo di scattering nel sistema del CM , dove $\vec{p} + \vec{q} = \vec{P} \equiv \vec{0}$.

Indichiamo con b il modulo del momento lineare delle due particelle uscenti nel sistema del CM e consideriamolo come una variabile libera. Poiché

$$E_p^2 = M_1^2 + b^2 \quad E_q^2 = M_2^2 + b^2 \quad (2.3.68)$$

abbiamo, evidentemente, che

$$b db = E_p dE_p = E_q dE_q \quad (2.3.69)$$

Introduciamo allora la variabile $w = E_p + E_q$. Otteniamo

$$\begin{aligned} dw &= dE_p + dE_q = \frac{b db}{E_p} + \frac{b db}{E_q} = \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} b db \\ &= \frac{w}{E_p E_q} b db = \frac{w}{E_q} dE_p = \frac{w}{E_p} dE_q \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

e dunque

$$\frac{dw}{w} = \frac{dE_q}{E_p} = \frac{dE_p}{E_q} \quad (2.3.71)$$

Sostituendo allora nella espressione (2.3.67), otteniamo ($E_q = \hat{E}$; $w = E_p + \hat{E}$)

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta(w - \mathcal{E}_{CM}) b \frac{dw}{w} d\Omega_{CM} \quad (2.3.72)$$

che può essere facilmente integrata e fornisce

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\mathcal{E}_{CM}} d\Omega_{CM} \quad (2.3.73)$$

dove b , adesso, sta per il particolare valore del modulo dell'impulso delle due particelle uscenti nel CM , che corrisponde all'energia totale $\mathcal{E}_{CM}$.

Ma, per definizione, l'energia totale del sistema nel centro di massa è data da¹⁹

$$\mathcal{E}_{CM} = \sqrt{s} \quad (2.3.75)$$

e, per quanto riguarda il modulo²⁰ dell'impulso b corrispondente, risulta

$$b = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}} \quad (2.3.76)$$

Perciò, dalle (2.3.73), (2.3.75) e (2.3.76) otteniamo finalmente l'espressione seguente, scritta in termini di invarianti di Lorentz^{21,22}

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2s} d\Omega_{CM} \quad (2.3.77)$$

¹⁹Ricordiamo che, per un sistema avente quadrimpulso totale P , si definisce l'invariante di Mandelstam s come la massa invariante quadra a esso corrispondente, ovvero

$$s = P_\mu P^\mu \quad (2.3.74)$$

²⁰Ricordiamo infatti che

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CM} &\equiv \sqrt{M_1^2 + b^2} + \sqrt{M_2^2 + b^2} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{E}_{CM}^2 &= M_1^2 + b^2 + M_2^2 + b^2 + 2\sqrt{M_1^2 + b^2}\sqrt{M_2^2 + b^2} \quad \Rightarrow \\ 2\sqrt{M_1^2 + b^2}\sqrt{M_2^2 + b^2} &= s - M_1^2 - M_2^2 - 2b^2 \quad \Rightarrow \\ 4(M_1^2 + b^2)(M_2^2 + b^2) &= (s - M_1^2 - M_2^2 - 2b^2)^2 \quad \Rightarrow \\ 4M_1^2 M_2^2 + 4M_1^2 b^2 + 4M_2^2 b^2 + 4b^4 &= (s - M_1^2 - M_2^2)^2 + 4b^4 - 4b^2(s - M_1^2 - M_2^2) \\ \Rightarrow 4b^2 s &= (s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

²¹E' forse utile, a questo punto, ricordare che, per la (2.3.76), b esiste se e solo se

$$\begin{aligned} (s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow (s - M_1^2 - M_2^2)^2 &\geq 4M_1^2 M_2^2 \\ \Rightarrow s - M_1^2 - M_2^2 &\geq 2M_1 M_2 \\ \Rightarrow s &\geq (M_1 + M_2)^2 \Rightarrow M_1 + M_2 \leq \sqrt{s} \end{aligned}$$

ovvero se e solo se siamo sopra soglia di produzione ...

²²Nel caso del decadimento a riposo di una particella di massa M senza spin, non essendoci una direzione privilegiata, $|\mathcal{M}|^2$ non può dipendere da variabili angolari nel sistema del CM e dunque il decadimento sarà isotropo.

Nel caso si voglia determinare l'espressione dello spazio delle fasi nel sistema del Laboratorio invece che nel sistema del centro di massa, si può ripartire dall'espressione (2.3.64)

$$d\Phi \equiv dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(\vec{p})} \quad (2.3.78)$$

dove abbiamo voluto mettere chiaramente in evidenza il fatto che non solo E_p , ma anche $\hat{E}$ dipende da $\vec{p}$, essendo, come si è visto

$$\hat{E} \equiv \hat{E}(\vec{p}) = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$$

Per poter aver l'espressione della dipendenza angolare della distribuzione, occorre prima integrare in dp , eliminando così la delta.

Ma l'argomento della δ di Dirac è una funzione di $\vec{p}$, che vale

$$F(\vec{p}) = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} - \mathcal{E} \quad (2.3.79)$$

D'altronde la condizione $F(\vec{p}) = 0$ altri non è che la formalizzazione della conservazione dell'energia nel processo, mentre $\hat{E}_q = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$ contiene la conservazione dell'impulso lineare (integrazione in $d^3q...$), quindi la soluzione

$$\hat{p} = \hat{p}(\theta)$$

dell'equazione $F(\vec{p}) = 0$ è niente altro che la soluzione²³ che esprime l'impulso della particella uscente a cui siamo interessati, in funzione dell'angolo θ di scattering, date le condizioni iniziali del processo, definite da $\mathcal{E}$ e da $\vec{P}$.

²³L'equazione $F(\vec{p}) = 0$, come si è detto, esprime la conservazione dell'energia nel sistema di riferimento del Laboratorio e contiene implicitamente quella dell'impulso.

In questo riferimento, infatti, il sistema delle due particelle ha, per ipotesi, energia totale $\mathcal{E}$ e impulso spaziale $\vec{P}$ che, senza perdita di generalità, potremo assumere sia diretto come l'asse z . Il quadrimpulso del sistema è dunque dato da

$$(P_{Lab}^\mu) = (\mathcal{E}, \vec{P}) = (\mathcal{E}, 0, 0, P) \Rightarrow s = \mathcal{E}^2 - P^2 \quad (2.3.80)$$

Questo significa che la velocità $\vec{\beta}$ del sistema del CM visto dal Laboratorio è diretta lungo l'asse z e vale, in modulo

$$\beta = \frac{P}{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - P^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \quad (2.3.81)$$

D'altronde, visto che la massa invariante del sistema delle due particelle è appunto $\sqrt{s}$ mentre le loro masse sono, rispettivamente, $M_1 \equiv m$ e $M_2 \equiv M$, ecco che, nel sistema del CM , il modulo dell'impulso spaziale di entrambe le particelle vale, come è noto

$$b = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}} \quad (2.3.82)$$

Dunque, nel sistema del CM , l'impulso spaziale della particella $M_1 \equiv m$ sarà dato, in generale, senza perdita di generalità, dalla relazione

$$\vec{p} = b(\sin \Theta, 0, \cos \Theta) \quad (2.3.83)$$

dove Θ è proprio l'angolo di scattering nel sistema del CM .

Trasformando dunque all'indietro, avremo che, nel sistema del Laboratorio, sarà

$$\hat{p}_x = b \sin \Theta; \quad (2.3.84)$$

$$\hat{p}_y = 0; \quad (2.3.85)$$

$$\hat{p}_z = \gamma b \cos \Theta + \gamma \beta \sqrt{m^2 + b^2} \quad (2.3.86)$$

dove $\sqrt{m^2 + b^2}$ è l'energia della particella considerata nel sistema del CM , tale che

$$\begin{aligned} m^2 + b^2 &= m^2 + \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}{4s} = \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2 + 4m^2 s}{4s} = \\ &= \frac{(s - m^2 + M^2)^2}{4s} \Rightarrow \sqrt{m^2 + b^2} = \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (2.3.87)$$

Dunque, in termini dell'angolo di scattering Θ , abbiamo

$$\hat{p}_x = b \sin \Theta \quad (2.3.88)$$

$$\hat{p}_z = \gamma b \cos \Theta + \frac{p}{\sqrt{s}} \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} = \gamma b \cos \Theta + \frac{p}{2s} (s + m^2 - M^2) \quad (2.3.89)$$

Ritroviamo così il fatto ben noto che l'impulso della particella nel sistema del Laboratorio sta su un'ellisse [J. Blaton: *On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes*; Mat.-Fys Medd. vol 24, nr 20, 1 (1950)] avente semiasse minore pari a b , semiasse maggiore pari a γb e centro spostato lungo l'asse z di $\frac{p}{2s}(s + m^2 - M^2)$ (cfr. *Vol.II*).

Questo significa in particolare che se

$$\gamma b > \frac{p}{2s}(s + m^2 - M^2) \quad (2.3.90)$$

allora l'ellisse contiene l'origine e a ogni angolo di scattering Θ nel sistema del CM ($0 \leq \Theta \leq \pi$) corrisponde uno e un solo angolo di scattering θ nel sistema del Laboratorio ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Invece, nel caso in cui sia

$$\gamma b < \frac{p}{2s}(s + m^2 - M^2) \quad (2.3.91)$$

allora l'ellisse non contiene l'origine e dunque non tutti gli angoli θ sono possibili nel sistema del Laboratorio, ma solo quelli che non eccedono un opportuno θ_{max} ; inoltre, a ogni angolo $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$ corrispondono, in generale, due valori di Θ e dunque per ogni angolo di scattering nel sistema del Laboratorio sono possibili due valori di $\hat{p}$.

L'angolo θ_{max} sta nel primo quadrante e si può determinare in base a semplici considerazioni geometriche. Infatti, data in generale l'ellisse di equazione

$$y = b \sin \phi; \quad z = a + b \cos \phi \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z - a}{\gamma b} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad (2.3.92)$$

allora la tangente dell'angolo θ_{max} è la pendenza k della retta $y = kz$ che intercetta l'ellisse in due punti coincidenti. Sostituendo nell'equazione dell'ellisse, si ha

$$(z - a)^2 + k^2 \gamma^2 z^2 = \gamma^2 b^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 (1 + k^2 \gamma^2) - 2za + a^2 - \gamma^2 b^2 = 0 \quad (2.3.93)$$

La condizione di due soluzioni coincidenti è, ovviamente, quella di discriminante nullo, cioè

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= 0 = a^2 - (1 + k^2 \gamma^2)(a^2 - \gamma^2 b^2) \Leftrightarrow a^2 - a^2 + \gamma^2 b^2 - k^2 \gamma^2 (a^2 - \gamma^2 b^2) = 0 \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{b^2}{a^2 - \gamma^2 b^2} \Rightarrow k = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \gamma^2 b^2}} \end{aligned} \quad (2.3.94)$$

Dunque, nel nostro caso ($a = \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)$) è

$$\tan \theta_{max} = \frac{b}{\sqrt{[\frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)]^2 - \gamma^2 b^2}} \quad (2.3.95)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} \left[\frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2) \right]^2 - \gamma^2 b^2 &= \frac{P^2}{4s^2}(s + m^2 - M^2)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{s} \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}{4s} = \\ &= \frac{P^2(s + m^2 - M^2)^2 - (s + P^2) [(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2]}{4s^2} = \\ &= \frac{P^2 [s^2 + m^4 + M^4 + 2sm^2 - 2sM^2 - 2m^2 M^2 - (s^2 - 2sm^2 - 2sM^2 + m^4 + M^4 + 2m^2 M^2 - 4m^2 M^2)]}{4s^2} \\ &= \frac{s [(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2]}{4s^2} = \frac{P^2 4sm^2}{4s^2} - \frac{[(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2]}{4s} = \\ &= \frac{4m^2 P^2 - (s - m^2 - M^2)^2 + 4m^2 M^2}{4s} = \frac{4m^2 (M^2 + P^2) - (s - m^2 - M^2)^2}{4s} \end{aligned} \quad (2.3.96)$$

dunque, ricordando la definizione di b , abbiamo infine

$$\tan \theta_{max} = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}}{\sqrt{4m^2 (M^2 + P^2) - (s - m^2 - M^2)^2}} \quad (2.3.97)$$

Torniamo ora alla condizione che discrimina il caso in cui c'è corrispondenza uno a uno fra Θ e θ e quello in cui questo non accade. Riscriviamo, per questo, la condizione in questione: abbiamo visto che c'è corrispondenza uno a uno se e solo se

$$\gamma b > \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2) \quad (2.3.98)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}}{2\sqrt{s}} > \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2) \\ &\Rightarrow \frac{P}{\mathcal{E}} < \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}}{s + m^2 - M^2} \equiv \frac{b}{\sqrt{b^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (2.3.99)$$

E questo risultato mostra che, come era ovvio che dovesse essere, affinché la condizione (2.3.98) sia soddisfatta occorre e basta che la velocità β_{CM} del sistema del CM ($\beta_{CM} \equiv \frac{P}{\mathcal{E}}$) sia inferiore al modulo della velocità della particella considerata (di massa $M_1 = m$ nel sistema del CM ($\beta_1^{CM} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + m^2}}$)).

Ma riveniamo adesso alla questione da cui eravamo partiti, cioè a quella di esplicitare la funzione $\hat{p} = \hat{p}(\cos \theta)$.

L'espressione trovata in funzione dell'angolo di scattering Θ nel sistema del CM non è la più adatta per questo scopo: ci è servita solo per capire se e quando ci dobbiamo aspettare limitazioni dalla cinematica del processo sul valore stesso dell'angolo di scattering θ nel sistema del Laboratorio.

Ripartiamo dunque dall'equazione $F(\vec{p}) = 0$, dove la funzione F è data dalla (2.3.79), cioè

$$F(\vec{p}) = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} - \mathcal{E} = 0 \quad (2.3.100)$$

la quale fornisce, evidentemente, la relazione

$$\mathcal{E} = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} \quad (2.3.101)$$

Quanto poi alla delta, sappiamo che, in generale, avremo (assumiamo per
dalla quale si ricava che

$$\sqrt{M^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} = \mathcal{E} - \sqrt{m^2 + p^2} \quad (2.3.102)$$

ovvero, elevando al quadrato

$$M^2 + P^2 - 2Pp \cos \theta + p^2 = \mathcal{E}^2 + m^2 + p^2 - 2\mathcal{E}\sqrt{m^2 + p^2} \quad (2.3.103)$$

dove θ è proprio l'angolo di scattering nel sistema del Laboratorio, cioè l'angolo fra l'impulso complessivo del sistema $\vec{P}$ e l'impulso $\vec{p}$ della particella in esame, dopo il processo d'urto. Semplificando, ricordando che $s \equiv \mathcal{E}^2 - P^2$ otteniamo

$$2\mathcal{E}\sqrt{m^2 + p^2} = s + 2Pp \cos \theta - M^2 + m^2 \quad (2.3.104)$$

da cui, quadrando ancora, si ricava

$$\begin{aligned} 4\mathcal{E}^2(m^2 + p^2) &= (s + m^2 - M^2)^2 + 4pP \cos \theta (s + m^2 - M^2) + 4p^2 P^2 \cos^2 \theta \\ \Rightarrow 4p^2(\mathcal{E}^2 - P^2 \cos^2 \theta) - 4pP(s + m^2 - M^2) \cos \theta + 4m^2 \mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.105)$$

D'altronde $\mathcal{E}^2 - P^2 \cos^2 \theta = \mathcal{E}^2 - P^2 + P^2 \sin^2 \theta = s + P^2 \sin^2 \theta$ quindi l'equazione a cui arriviamo infine è la seguente

$$4p^2(s + P^2 \sin^2 \theta) - 4pP(s + m^2 - M^2) \cos \theta + 4m^2 \mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2 = 0 \quad (2.3.106)$$

la quale è un'equazione di secondo grado nell'impulso incognito p della particella di massa m , parametrica in θ (tutte le altre quantità sono fissate dalle condizioni iniziali).

Il discriminante ridotto dell'equazione vale

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= 4P^2(s + m^2 - M^2)^2 \cos^2 \theta - 4(s + P^2 \sin^2 \theta) [4m^2 \mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2] = \\ &= (s + m^2 - M^2)^2 [4P^2 \cos^2 \theta + 4(s + P^2 \sin^2 \theta)] - 4(s + P^2 \sin^2 \theta) 4m^2 \mathcal{E}^2 = \\ &= (s + m^2 - M^2)^2 (4s + 4P^2) - 4m^2 4\mathcal{E}^2 (s + P^2 \sin^2 \theta) = \\ &= 4\mathcal{E}^2 (s + m^2 - M^2)^2 - 4\mathcal{E}^2 4m^2 (s + P^2 \sin^2 \theta) = \\ &= 4\mathcal{E}^2 [(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2 (s + P^2 \sin^2 \theta)] \end{aligned} \quad (2.3.107)$$

Evidentemente questo è sempre positivo, qualunque sia l'angolo θ , se e solo se

$$(s + m^2 - M^2)^2 > 4m^2(s + P^2) \equiv 4m^2 \mathcal{E}^2 \quad (2.3.108)$$

ovvero se e solo se

$$\begin{aligned} (s + m^2 - M^2) &> 2m \mathcal{E} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + b^2} \cdot 2\sqrt{s} > 2m \mathcal{E} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2 + b^2}}{m} &> \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \Leftrightarrow \gamma_1^{(CM)} > \gamma_{CM} \end{aligned} \quad (2.3.109)$$

in accordo con quanto avevamo già ottenuto con la relazione (2.3.99) ($\gamma_1^{(CM)}$ è il γ delle particelle di massa $m = M_1$ nel sistema del CM , mentre γ_{CM} è il γ del sistema del CM visto dal sistema del Laboratorio).

Supponendo adesso che valga la condizione

$$\gamma_1^{(CM)} > \gamma_{CM} \Leftrightarrow \beta_1^{(CM)} > \beta_{CM} \quad (2.3.110)$$

poiché il termine noto dell'equazione di secondo grado è evidentemente negativo, essendo il coefficiente di p^2 positivo, l'equazione ha due radici di segno opposto.

semplicità una sola soluzione $\hat{p} = \hat{p}(\theta)$

$$\delta(F(\vec{p})) = \delta(p - \hat{p}) \frac{1}{\left. \frac{dF}{dp} \right|_{p=\hat{p}}} \quad (2.3.116)$$

Ma, data la (2.3.79), risulta

$$\left. \frac{dF}{dp} \right|_{p=\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{E_{\hat{p}}} + \frac{\hat{p} - P \cos \theta}{\hat{E}_{\hat{p}}} = \frac{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta}{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}} \quad (2.3.117)$$

Siccome la soluzione che cerchiamo deve essere positiva, essendo il modulo di un vettore, essa sarà la maggiore delle due, ovvero coinciderà necessariamente con

$$\begin{aligned} \hat{p}(\theta) &\equiv p_+ = \frac{2P(s + m^2 - M^2) + \sqrt{\Delta/4}}{4(s + P^2 \sin^2 \theta)} = \\ &= \frac{2P(s + m^2 - M^2) + 2\mathcal{E}\sqrt{(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2(s + P^2 \sin^2 \theta)}}{4(s + P^2 \sin^2 \theta)} = \\ &= \frac{P(s + m^2 - M^2) + \mathcal{E}\sqrt{(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2 - 4m^2P^2 \sin^2 \theta}}{2(s + P^2 \sin^2 \theta)} \end{aligned} \quad (2.3.111)$$

Nel caso che sia $\gamma_1^{(CM)} < \gamma_{CM} \Leftrightarrow \beta_1^{(CM)} < \beta_{CM}$ allora, come già sappiamo, non tutti gli angoli di scattering θ nel sistema Laboratorio sono possibili, ma solo quelli per i quali $\Delta/4 \geq 0$, cioè

$$\begin{aligned} (s + m^2 - M^2)^2 &> 4m^2(s + P^2 \sin^2 \theta) \Leftrightarrow (s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2s > 4m^2P^2 \sin^2 \theta \\ &\Leftrightarrow (s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2 > 4m^2P^2 \sin^2 \theta \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \theta \leq \sin^2 \theta_{max} \equiv \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}{4m^2P^2} \end{aligned} \quad (2.3.112)$$

da cui, appunto,

$$\cos^2 \theta_{max} = 1 - \sin^2 \theta_{max} = \frac{4m^2P^2 + 4m^2M^2 - (s - m^2 - M^2)^2}{4m^2P^2} \quad (2.3.113)$$

e dunque, come avevamo già trovato,

$$\tan \theta_{max} = \sqrt{\frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}{4m^2P^2 + 4m^2M^2 - (s - m^2 - M^2)^2}} \quad (2.3.114)$$

essendo θ_{max} nel primo quadrante.

Nel caso, comunque, in cui $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$, cioè quando l'equazione di secondo grado in p ha soluzioni reali, allora, visto che il termine noto dell'equazione è positivo come il coefficiente di p^2 , entrambe le soluzioni devono essere dello stesso segno.

Siccome p_+ è positivo poiché $P(s + m^2 - M^2) > 0$, allora anche p_- è positiva e dunque entrambe le soluzioni sono accettabili. Risultano così due diversi valori di $\hat{p}$ per uno stesso valore di θ ed essi sono tali che

$$\hat{p}_{\pm}(\theta) = \frac{P(s + m^2 - M^2) \pm \mathcal{E}\sqrt{(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2 - 4m^2P^2 \sin^2 \theta}}{2(s + P^2 \sin^2 \theta)} \quad (2.3.115)$$

e quindi, sostituendo nella (2.3.78), si ha

$$\begin{aligned}
d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(\vec{p})} = \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \delta(p - \hat{p}) \frac{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}}{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta} \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(\vec{p})} = \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \frac{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}}{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta} \frac{\hat{p}^2 d\Omega}{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}} = \\
&= \frac{1}{8\pi} \frac{\hat{p}^2 d(-\cos \theta)}{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta} = \frac{1}{8\pi} \frac{\hat{p} d(-\cos \theta)}{\hat{E}_{\hat{p}} + E_{\hat{p}} - E_{\hat{p}} \frac{P}{\hat{p}} \cos \theta} \quad (2.3.118)
\end{aligned}$$

Chiaramente, però

$$\hat{E}_{\hat{p}} + E_{\hat{p}} = \mathcal{E}$$

per cui, finalmente, si può scrivere che, per un sistema di due particelle aventi quadrimpulso totale $(\mathcal{E}, \vec{P})$, l'elemento invariante di spazio delle fasi nel sistema del Laboratorio (integrato nell'angolo azimutale), relativo a una qualunque delle due particelle, è espresso dalla relazione²⁴

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{\hat{p} d(-\cos \theta)}{\mathcal{E} - E_{\hat{p}} \frac{P}{\hat{p}} \cos \theta} \quad (2.3.119)$$

dove $(E_{\hat{p}}, \hat{p})$ è il suo quadrimpulso dopo il processo d'urto, mentre θ è l'angolo polare (di scattering), entrambi misurati nel laboratorio.

²⁴J.D. Bjorken and S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, Ch.16 McGraw Hill, 1965

2.3.2 Lo spazio delle fasi di tre particelle: il plot di Dalitz

Consideriamo per concretezza un processo di decadimento²⁵ a tre corpi

$$X \rightarrow A + B + C$$

dove X abbia massa M , mentre A, B, C abbiano, rispettivamente, masse m_A, m_B ed m_C , con, ovviamente

$$M \geq m_A + m_B + m_C$$

Abbiamo visto dalla (2.1.47) che, mediando sullo spin iniziale e sommando su quelli finali, quanto al rate di decadimento, risulta

$$d\Gamma = \frac{1}{2J+1} \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \quad (2.3.120)$$

dove J è lo spin della particella X , E è la sua energia nel sistema di riferimento scelto, $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma di tutti i moduli quadri degli elementi di matrice presi fra i vari stati di spin iniziali e finali.

L'elemento di spazio delle fasi per tre particelle nello stato finale, data la (2.1.36), si scrive, evidentemente, come

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(p + q + k - P) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \quad (2.3.121)$$

dove p, q, k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi delle particelle A, B, C mentre P è quello della particella X . Assumiamo ora che la particella C non sia osservata. Come si vede, l'elemento $d\Phi$ e quindi $d\Gamma$ (attraverso $d\Phi$ e $|\overline{\mathcal{M}}|^2$) dipendono formalmente da 9 parametri reali, cioè $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$.

L'integrazione della δ^4 ne elimina 4, per cui si resta così con 5 variabili effettive²⁶.

Cerchiamo adesso di capire meglio la natura cinematica di queste variabili restanti e di determinare quali sono quelle su cui si può integrare ulteriormente, certi che $d\Gamma$ non potrà comunque essere da loro dipendente (attraverso $|\overline{\mathcal{M}}|^2$).

Per far questo, mettiamoci nel sistema del CM, ovvero nel sistema di riferimento in cui X è in quiete. In questo riferimento $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$ sono coplanari, visto che la loro somma deve dare il vettore nullo. Inoltre, data una qualunque loro configurazione compatibile con la cinematica, questa configurazione potrà essere ruotata a piacimento senza che $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ possa risentirne, almeno se lo

²⁵Nel caso di un processo di scattering con tre corpi nello stato finale, le considerazioni sullo spazio delle fasi sono del tutto analoghe, solo che, invece di *rate di decadimento* $d\Gamma$ parleremo di *sezione d'urto differenziale* $d\sigma$ e al posto del fattore $\frac{1}{2S+1} \cdot \frac{1}{2E}$ ci sarà, come abbiamo visto, il termine di flusso, ovvero il fattore $\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}$

²⁶Nel caso di due particelle, queste variabili effettive, per gli stessi motivi, saranno $6 - 4 = 2$, come, per esempio, le due variabili angolari nel CM.

stato iniziale non è polarizzato. In questa ipotesi, possiamo quindi pensare, per ciascuna configurazione cinematica fissata delle tre particelle, di ruotarla in modo da allineare per esempio $\vec{p}$ con l'asse z e questo corrisponderà a integrare lo spazio delle fasi nei due angoli di Eulero che definiscono la direzione di $\vec{p}$. Fatto questo, potremo ancora allineare il piano definito dai tre vettori $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$ in modo che coincida, per esempio, con il piano xz , mediante una rotazione azimutale intorno all'asse z , la cui direzione coincide con quella di $\vec{p}$. In conclusione, dei 5 parametri liberi da cui dipende $d\Phi$, 3 sono angoli che *fissano* nel sistema del CM la posizione della terna $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}$, ma da cui $|\mathcal{M}|^2$ (avendo assunto che la particella che decade non sia polarizzata) non può dipendere ...

Integrando su queste tre variabili angolari, arriveremo a un elemento dello spazio delle fasi del sistema che, come pure $|\mathcal{M}|^2$, potrà dipendere solo dai due parametri cinematici restanti, associati al processo studiato.

Vediamo qual è la forma che $d\Phi$ finisce dunque per assumere.

Essendo $d\Phi$ un invariante di Lorentz, operiamo senza perdita di generalità, nel sistema del CM , dove appunto $\vec{P} = 0$. Ripartiamo dalla (2.3.121) e supponiamo di non osservare la particella C e dunque di integrare in d^3k . Si ha

$$d\Phi = \frac{(2\pi^4)}{(2\pi)^9} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_q} \frac{1}{2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) d^3p d^3q \quad (2.3.122)$$

dove, per tener conto che $\vec{p} + \vec{q} + \vec{k} = 0$, abbiamo definito

$$\hat{E} \equiv \sqrt{m_C^2 + |\vec{p} + \vec{q}|^2} \quad (2.3.123)$$

Passando in coordinate polari per quanto riguarda $\vec{p}$, abbiamo

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp d\Omega_p d^3q \quad (2.3.124)$$

Possiamo integrare su $d\Omega_p$, e questo corrisponde a integrare sulle direzioni di $\vec{p}$ nello spazio, originate dalla arbitrarietà di scelta dell'orientamento del sistema di riferimento del CM : otteniamo

$$d\Phi = \frac{4\pi}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp d^3q \quad (2.3.125)$$

Avendo integrato in $d\Omega_p$, abbiamo così "assorbito" i due gradi di libertà relativi all'orientazione del vettore $\vec{p}$ nello spazio (il vettore $\vec{q}$ e quindi $\vec{k}$ sono qui pensati "rigidamente legati" al vettore $\vec{p}$).

Usando ancora le coordinate polari per $\vec{q}$, ma riferite stavolta a $\vec{p}$ come asse polare (per quanto riguarda l'integrazione precedente in d^3p , l'asse polare di riferimento era arbitrario), abbiamo, evidentemente

$$d^3q = q^2 dq \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.3.126)$$

ma sia l'argomento della δ come $|\vec{\mathcal{M}}|^2$ possono dipendere solo dall'angolo θ fra i vettori $\vec{p}$ e $\vec{q}$ attraverso la quantità

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta \quad (2.3.127)$$

e non dall'angolo azimutale ϕ , per cui si può integrare in $d\phi$ (e questo corrisponde appunto alla arbitrarietà di scelta del piano su cui giacciono i tre vettori $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}, \dots$), ottenendo così

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{4\pi}{(2\pi)^5} 2\pi \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp q^2 dq \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp q^2 dq d(-\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.3.128)$$

Possiamo ora integrare in $\cos \theta$ per eliminare la δ di Dirac. Il solo termine nel suo argomento che dipende da $\cos \theta$ è

$$\hat{E} = \sqrt{m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta}$$

e si ha

$$\left| \frac{\partial(E_p + E_q + \hat{E} - M)}{\partial(-\cos \theta)} \right| = \left| \frac{\partial \hat{E}}{\partial(\cos \theta)} \right| = \frac{2pq}{2\hat{E}} = \frac{pq}{\hat{E}} \quad (2.3.129)$$

quindi²⁷

$$d\Phi = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(-\cos \theta + \cos \bar{\theta}) \frac{1}{\frac{pq}{\hat{E}}} p^2 dp q^2 dq d(-\cos \theta) \quad (2.3.130)$$

dove abbiamo indicato con $\cos \bar{\theta}$ la soluzione in $\cos \theta$ dell'equazione²⁸

$$E_p + E_q + \hat{E} - M = 0$$

cioè dell'equazione

$$\sqrt{m_A^2 + p^2} + \sqrt{m_B^2 + q^2} + \sqrt{m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta} = M$$

²⁷Ricordiamo a questo proposito che se $f(x)$ è una funzione derivabile, allora, se indichiamo con x_i i suoi zeri, cioè i punti per i quali $f(x_i) = 0$, se accade che $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_i} \neq 0$, risulta

$$\delta(f(x)) dx = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_i} \right|} dx$$

²⁸L'equazione $E_p + E_q + \hat{E} - M = 0$ implica ovviamente che $\hat{E} = M - E_p - E_q$ e dunque che

$$m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta = (M - E_p - E_q)^2$$

che è risolta da

$$\cos \bar{\theta} = \frac{(M - E_p - E_q)^2 - m_C^2 - p^2 - q^2}{2pq}$$

Ovviamente se e solo se questo risultato è compreso fra -1 e $+1$, p e q sono cinematicamente ammissibili. In questo caso, la soluzione in $\cos \bar{\theta}$ è unica.

Integrando, risulta

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \frac{\hat{E}}{p q} p^2 dp q^2 dq \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q} p dp q dq \end{aligned} \quad (2.3.131)$$

D'altronde, essendo

$$E_p \equiv \sqrt{m_A^2 + p^2}; \quad E_q \equiv \sqrt{m_B^2 + q^2}$$

risulta

$$p dp = E_p dE_p; \quad q dq = E_q dE_q$$

per cui, in conclusione, per l'elemento di spazio delle fasi invariante di un sistema di tre particelle, nel CM si ha semplicemente

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_p dE_q \quad (2.3.132)$$

Poniamo adesso, per comodità di notazione

$$p_1 \equiv p \quad p_2 \equiv q \quad p_3 \equiv k$$

$$m_1 \equiv m_A \quad m_2 \equiv m_B \quad m_3 \equiv m_C$$

e definiamo i seguenti invarianti di Lorentz (masse invarianti quadre delle tre possibili coppie di particelle)

$$s_1 \equiv (p_2 + p_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2(p_2 p_3) \quad (2.3.133)$$

$$s_2 \equiv (p_1 + p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2(p_1 p_3) \quad (2.3.134)$$

$$s_3 \equiv (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 p_2) \quad (2.3.135)$$

Evidentemente, dalla conservazione del quadrimpulso, risulta anche

$$s_1 \equiv (P - p_1)^2 = M^2 + m_1^2 - 2(P p_1) \quad (2.3.136)$$

$$s_2 \equiv (P - p_2)^2 = M^2 + m_2^2 - 2(P p_2) \quad (2.3.137)$$

$$s_3 \equiv (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2(P p_3) \quad (2.3.138)$$

che, nel sistema del CM , diventano²⁹

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1 \quad (2.3.140)$$

$$s_2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_2 \quad (2.3.141)$$

$$s_3 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \quad (2.3.142)$$

Il loro significato fisico è proprio quello descritto nel riferimento del CM dalle relazioni (2.3.140)-(2.3.142): descrivono, a parte costanti, l'energia nel CM delle tre particelle. Risulta

$$ds_1 = -2M dE_1 \equiv -2M dE_p \quad (2.3.143)$$

$$ds_2 = -2M dE_2 \equiv -2M dE_q \quad (2.3.144)$$

e quindi, *poiché* $d\Phi$ è *invariante di Lorentz* e nel CM assume la forma

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_p dE_q = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{ds_1 ds_2}{(2M)^2} \quad (2.3.145)$$

essendo s_1 ed s_2 invarianti, l'espressione (2.3.145) è valida in ogni sistema di riferimento³⁰.

In conclusione, per tre particelle, abbiamo, in generale, che, in qualunque riferimento, risulta

$$d\Phi = \frac{ds_1 ds_2}{16M^2 (2\pi)^3} \quad (2.3.146)$$

e, se sostituiamo questa espressione di $dLips$ nell'espressione completa del *rate* di decadimento e della sezione d'urto differenziale, abbiamo finalmente le espressioni

$$d\Gamma = \frac{1}{2J+1} \frac{1}{2E} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{ds_1 ds_2}{16 M^2 (2\pi)^3} \quad (2.3.147)$$

$$d\sigma = \frac{1}{2J_1+1} \frac{1}{2J_2+1} \frac{1}{4\sqrt{(P_{in1}P_{in2})^2 - M_{in1}^2 M_{in2}^2}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{ds_1 ds_2}{16 s (2\pi)^3} \quad (2.3.148)$$

²⁹I tre invarianti non sono indipendenti fra loro, infatti sommando le (2.3.140)-(2.3.142) e ricordando che nel CM

$$E_1 + E_2 + E_3 \equiv E_A + E_B + E_C \equiv E_p + E_q + E_k = M$$

si ottiene

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 3M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2M(E_1 + E_2 + E_3) = \\ &= M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \end{aligned} \quad (2.3.139)$$

³⁰Naturalmente, dato che i tre invarianti sono linearmente dipendenti fra loro secondo la (2.3.139) una qualunque coppia (s_i, s_j) dei tre va altrettanto bene ...

L'importanza del risultato ottenuto sta nel fatto che, se si fa uno scatter plot degli eventi nelle variabili s_1 ed s_2 , lo spazio delle fasi fornisce un contributo uniforme in tutta la zona cinematicamente accessibile, quindi ogni addensamento/rarefazione di punti che si osservi in essa è dovuto alla dinamica del processo³¹.

Lo scatter plot in questione si chiama³² *plot di Dalitz-Fabri*.

Per esempio, se le particelle B e C originano anche da uno stato risonante di massa M^* , allora, nel plot di Dalitz, si osserverà un addensamento di eventi per $s_1 = (M^*)^2 \dots$

Veniamo infine alla determinazione della zona cinematicamente accessibile del Dalitz plot. Abbiamo visto che

$$s_i = M^2 + m_i^2 - 2M E_i \quad (2.3.149)$$

dunque, essendo $E_i \geq m_i$, risulterà

$$s_i \leq M^2 + m_i^2 - 2M m_i = (M - m_i)^2 \quad (2.3.150)$$

D'altronde³³, posto che (i, j, k) sia una permutazione pari di $(1, 2, 3)$, risulta

$$s_i = m_{jk} = (P - p_i)^2 = (p_j + p_k)^2 \geq (m_j + m_k)^2 \quad (2.3.151)$$

quindi abbiamo da soddisfare simultaneamente le tre disuguaglianze seguenti

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_1 \leq (M - m_1)^2 \quad (2.3.152)$$

$$(m_1 + m_3)^2 \leq s_2 \leq (M - m_2)^2 \quad (2.3.153)$$

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_3 \leq (M - m_3)^2 \quad (2.3.154)$$

³¹Naturalmente stiamo qui assumendo una accettanza e una efficienza del rivelatore perfettamente uniformi: se questo non accade, allora anche queste disuniformità possono provocare disuniformità nel plot in questione e occorre tenerne opportunamente conto attraverso, per esempio, una simulazione Montecarlo.

³²E. Fabri: *A study of tau-meson decay* Il Nuovo Cimento 11, 480 (1954)

R.H. Dalitz: *Decay of τ mesons of known charge* Phys. Rev 94, 1046 (1954)

³³Ricordiamo che la massa invariante del sistema di due particelle è definita come

$$m_{AB}^2 \equiv (p_A + p_B)^2$$

e nel sistema del CM , dove

$$p_A = (E_A, \vec{p}); \quad p_B = (E_B, -\vec{p})$$

si ha

$$m_{AB}^2 = (E_A + E_B)^2$$

e siccome $E_A \geq m_A$, $E_B \geq m_B$, segue che

$$m_{ab}^2 \geq (m_A + m_B)^2$$

e inoltre deve valere l'uguaglianza

$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \equiv 3s_0 \quad (2.3.155)$$

Ne segue che, fissando arbitrariamente, per esempio, s_1 ed s_2 in modo che soddisfino, rispettivamente, la (2.3.152) e la (2.3.153), allora, ponendo

$$s_3 = 3s_0 - s_1 - s_2$$

se questa quantità soddisfa la disuguaglianza (2.3.154), la terna (s_1, s_2, s_3) così individuata verifica le condizioni (2.3.152)-(2.3.155) e questo equivale a dire che, nel CM , la terna delle energie E_1, E_2, E_3 soddisfa le condizioni

$$E_i \geq m_i; \quad \sum_{i=1}^3 E_i = M \quad (2.3.156)$$

Ma questo non significa ancora che la cinematica del decadimento sia rispettata, infatti, se è vero che, dalla (2.3.156) si possono definire i moduli degli impulsi spaziali delle tre particelle, attraverso le relazioni

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2$$

e questi risulteranno sicuramente reali essendo $E_i \geq m_i$, non è affatto detto che questi valori di p_i possano essere tali che la loro somma vettoriale sia nulla. Affinchè questo accada, occorre e basta che i moduli p_1, p_2 e p_3 soddisfino la disuguaglianza triangolare, cioè, per esempio, che essi siano tali che³⁴

$$p_1 + p_2 \geq p_3; \quad |p_1 - p_2| \leq p_3 \quad (2.3.157)$$

e dunque

$$(p_1 + p_2)^2 \geq p_3^2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \geq p_3^2 \quad (2.3.158)$$

$$|p_1 - p_2|^2 \leq p_3^2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \leq p_3^2 \quad (2.3.159)$$

ovvero

$$-2p_1 p_2 \leq p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \leq 2p_1 p_2 \quad \Leftrightarrow \quad |p_1^2 + p_2^2 - p_3^2| \leq 2p_1 p_2 \quad (2.3.160)$$

da cui, quadrando ancora, si ottiene

$$p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 \leq 2(p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2) \quad (2.3.161)$$

D'altronde, per la (2.3.149), si ha

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2 = \left(\frac{M^2 + m_i^2 - s_i}{2M} \right)^2 - m_i^2 \quad (2.3.162)$$

³⁴E' un risultato di geometria che se la disuguaglianza triangolare vale nella forma della (2.3.157), allora vale per qualunque altra permutazione degli indici.

per cui, sostituendo la (2.3.162) nella (2.3.161), in termini solo di s_1 , s_2 e delle masse delle particelle, si ottiene, dopo aver moltiplicato per M^2 , che deve essere

$$\begin{aligned}
& s_1 s_2^2 + s_1^2 s_2 - s_1 s_2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + M^2) + \\
& + s_1 (m_2^2 m_3^2 - M^2 m_3^2 - m_1^2 m_2^2 + M^2 m_1^2) + \\
& + s_2 (m_1^2 m_3^2 - M^2 m_3^2 - m_1^2 m_2^2 + M^2 m_1^2) + \\
& + M^2 m_3^4 - m_1^2 m_2^2 m_3^2 - M^2 m_2^2 m_3^2 - M^2 m_1^2 m_3^2 + \\
& + M^4 m_3^2 + m_1 m_2^4 + m_1^4 m_2^4 - m_1^2 m_2^2 M^2 \leq 0
\end{aligned} \tag{2.3.163}$$

Imponendo allora la condizione in questione, insieme a quella sui limiti per s_1 ed s_2 dati dalle (2.3.152) e (2.3.153), si ha infine la zona cinematicamente accessibile del plot di Dalitz.

Vogliamo infine ricordare che spesso, al posto delle variabili s_1 ed s_2 , si preferisce usare variabili adimensionali³⁵, come, per esempio,

$$\begin{aligned}
u &= \frac{s_1 + s_2}{2M^2} & s_1 &= M^2(u + v) \\
v &= \frac{s_1 - s_2}{2M^2} & s_2 &= M^2(u - v)
\end{aligned} \tag{2.3.164}$$

³⁵Si osservi che nelle variabili u, v definite dalla (2.3.164), l'elemento di spazio delle fasi, essendo

$$ds_1 ds_2 = 2M^4 du dv$$

risulta espresso da

$$d\Phi = \frac{2M^4 du dv}{16M^2(2\pi)^3} = \frac{M^2}{8(2\pi)^3} du dv$$

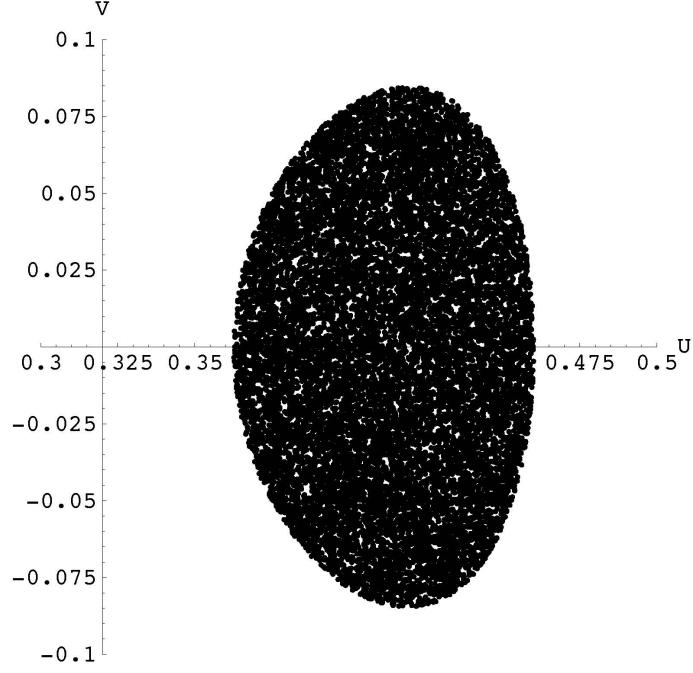


Figura 2.1: *Regione permessa nel Dalitz plot relativo al decadimento $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$.*

In questo caso, ponendo $\mu_i \equiv m_i/M$, la disuguaglianza (2.3.163) diviene

$$\begin{aligned}
 & 2u^3 + v^2 - u^2 - 2uv^2 + u \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\mu_3^2 + \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2 \right) + \\
 & + u^2 \left(-\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 \right) + v \left(\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2 \right) + v^2 \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \right) \\
 & - \mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1^4\mu_2^2 + \mu_1^2\mu_2^4 + \mu_3^2 - \mu_1^2\mu_3^2 - \mu_2^2\mu_3^2 - \mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^4 \leq 0 \quad (2.3.165)
 \end{aligned}$$

La figura 2.1 mostra la regione accessibile nel Dalitz plot nelle variabili u, v sopradefinite, nel caso particolare in cui $\mu_i = \frac{139.57018}{493.677} = 0.2827$, che corrisponde al decadimento

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$$

2.3.3 Lo spazio delle fasi di n particelle

Abbiamo visto che, nel caso di n particelle, risulta

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i - P\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (2.3.166)$$

Questo elemento invariante dello spazio delle fasi può essere riscritto come prodotto di quello relativo a $(n-1)$ particelle per quello di due particelle, in modo da permettere una sua valutazione ricorsiva per qualunque n .

L'idea è che le n particelle dello stato finale considerato potranno essere raggruppate in un insieme di $(n-1)$ particelle, a cui aggiungere poi la n -esima. Considerando l'insieme di $(n-1)$ particelle come un unico soggetto (di quadrimpulso e massa invariante variabili ...), ecco che il sistema iniziale risulterà composto da due "particelle": una *vera*, mentre l'altra è *fittizia* e descrive l'insieme delle restanti $(n-1)$ particelle, la cui struttura interna sarà poi precisata da $\Phi^{(n-1)}$.

Vediamo formalmente come questo accada.

Poniamo, per comodità di notazione

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i - P\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad \equiv \quad d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) \quad (2.3.167)$$

e riscriviamolo, intanto, come segue

$$d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (2.3.168)$$

Osserviamo quindi che, qualunque sia $m \geq 0$, vale la seguente identità

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_m - q) \quad (2.3.169)$$

Facendo $m = n-1$ e sostituendo questa espressione nella (2.3.168), otteniamo

$$\begin{aligned} d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) &= \\ &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} - q) \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \\ &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} - q) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \end{aligned}$$

ma, come sappiamo, risulta

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2q^0}$$

e quindi, in definitiva, abbiamo

$$\begin{aligned} d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} - q) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2q^0} = \\ &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} d\Phi^{(2)}(P; p_n, q) d\Phi^{(n-1)}(q; p_1, \dots, p_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.3.170)$$

che è la formula di ricorrenza cercata.

Per quanto riguarda infine i limiti di integrazione in $d\mu^2$, si osservi che, essendo

$$q = p_1 + \dots + p_{n-1}$$

ne segue che

$$q^2 \equiv \mu^2 \geq m_1^2 + \dots + m_{n-1}^2$$

Capitolo 3

Scattering: esempi

In questo capitolo trattiamo alcune applicazioni di quanto abbiamo appreso circa i processi di scattering, iniziando con qualche considerazione generale rilevante.

3.1 Lo scattering (quasi-)elastico

Consideriamo il processo di scattering fra due particelle A e B (aventi masse M_A e M_B , quadrimpulsi k e p , negli stati di spin α e β , rispettivamente) che dà luogo a due particelle C e D (di masse M_C e M_D , quadrimpulsi k' e p' , negli stati di spin α' e β' , rispettivamente), le quali non coincidono, necessariamente, con quelle incidenti:

$$A(k; \alpha) + B(p; \beta) \rightarrow C(k'; \alpha') + D(p'; \beta') \quad (3.1.1)$$

Abbiamo già visto che questo processo è descritto dalla sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}|^2 d\Phi \quad (3.1.2)$$

dove, come sappiamo

- $\mathcal{F}$ è il termine di flusso incidente, associato alla cinematica delle particelle A e B , dato da

$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(k \cdot p)^2 - M_A^2 M_B^2} \quad (3.1.3)$$

- $d\Phi$ è, per un assegnato impulso totale $P \equiv k + p$, l'elemento di spazio delle fasi invariante di Lorentz, associato alle due particelle C e D , uscenti dall'interazione

$$d\Phi(k', p'; P) = (2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - P) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (3.1.4)$$

con $E_C = \sqrt{M_C^2 + |\vec{k}'|^2}$, $E_D = \sqrt{M_D^2 + |\vec{p}'|^2}$ le energie delle particelle C e D , rispettivamente.

- $|\mathcal{M}|^2$ è il modulo quadro dell'ampiezza di scattering invariante, relativa al processo in esame.

Se poi le due particelle incidenti non sono polarizzate, allora occorre evidentemente mediare sugli stati di spin iniziali, cioè operare nella (3.1.2) la sostituzione

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{2S_A + 1} \frac{1}{2S_B + 1} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')|^2 \quad (3.1.5)$$

mentre, se non osserviamo lo spin delle particelle emergenti, dobbiamo sommare sui possibili stati di spin finali e quindi porre

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \sum_{\alpha', \beta'} |\mathcal{M}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')|^2 \quad (3.1.6)$$

Perciò, se le particelle incidenti non sono polarizzate e non ci curiamo degli stati di spin finali, allora dovremo operare la sostituzione

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{2S_A + 1} \frac{1}{2S_B + 1} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (3.1.7)$$

dove

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\alpha', \beta'} |\mathcal{M}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')|^2 \quad (3.1.8)$$

Poiché $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è un invariante relativistico, esso potrà essere funzione solo di invarianti costruiti, evidentemente, a partire dai quadrimpulsi delle particelle che partecipano al processo. Insieme alla massa invariante quadra $s \equiv P_\nu P^\nu \equiv P^2$ del sistema che già conosciamo, definiamo ora anche gli altri due invarianti di Mandelstam t ed u associati al processo di scattering considerato, ponendo

$$s = (k + p)^2 = M_A^2 + M_B^2 + 2(kp) = (k' + p')^2 = M_C^2 + M_D^2 + 2(k'p') \quad (3.1.9)$$

$$t = (k - k')^2 = M_A^2 + M_C^2 - 2(kk') = (p' - p)^2 = M_D^2 + M_B^2 - 2(pp') \quad (3.1.10)$$

$$u = (k - p')^2 = M_A^2 + M_D^2 - 2(kp') = (k' - p)^2 = M_C^2 + M_B^2 - 2(k'p) \quad (3.1.11)$$

Questo è quanto ci basta e gli invarianti così definiti sono, addirittura "tropicali", infatti essi non sono fra loro indipendenti¹ e soddisfano l'equazione²

$$s + t + u = M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \quad (3.1.20)$$

per cui, fissate le masse delle quattro particelle, per $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ in generale, avremo, per esempio

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}}|^2(s, t) \quad (3.1.21)$$

oppure funzione di un'altra qualunque coppia degli invarianti di Mandelstam.

Quanto poi al termine di flusso (3.1.3), ricavando (kp) dalla (3.1.9) in termini della variabile s , possiamo riscriverlo nel modo seguente

$$\mathcal{F} = 2\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2} \quad (3.1.22)$$

¹Il processo d'urto coinvolge quattro particelle, ma a causa della conservazione del quadrimpulso totale, solo tre quadrimpulsi possono essere indipendenti tra loro. Con tre quadrivettori possiamo costruire sei invarianti, ma quattro combinazioni di questi dovranno coincidere con le masse delle particelle date, per cui non potranno che esistere solo due scalari indipendenti (a parte le masse) costruiti con i quadrimpulsi delle particelle coinvolte nel processo.

²Osserviamo che dalle definizioni (3.1.9)-(3.1.11) segue che, sommando membro a membro le sei equazioni, risulta

$$2s + 2t + 2u = 3 \left(\sum M^2 \right) + 2A \quad (3.1.12)$$

dove abbiamo posto

$$\left(\sum M^2 \right) \equiv M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \quad (3.1.13)$$

$$A \equiv (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) \quad (3.1.14)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} A &= (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) = \\ &= (kp) + (k'p') - k(k' + p') - p(k' + p') = (kp) + (k'p') - (k + p)(k' + p') = \\ &= (kp) + (k'p') - s \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\begin{aligned} A &= (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) = \\ &= -(kk') - (pp') + p(k - k') - p'(k - k') = -(kk') - (pp') - (k - k')(p' - p) = \\ &= -(kk') - (pp') - t \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned} A &= (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) = \\ &= -(kp') - (k'p) + p(k - p') - k'(k - p') = -(kp') - (k'p) - (k - p')(k' - p) = \\ &= -(kp') - (k'p) - u \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Dunque, sommando, otteniamo

$$3A = A - (s + t + u) \Rightarrow 2A = -(s + t + u) \quad (3.1.18)$$

e quindi, sostituendo nella (3.1.12), si ha appunto che

$$(s + t + u) = \left(\sum M^2 \right) \equiv M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \quad (3.1.19)$$

ovvero, usando la (3.1.32) e quindi facendo intervenire il modulo a dell'impulso spaziale delle particelle iniziali nel CM

$$\mathcal{F} = 4a\sqrt{s} \quad (3.1.23)$$

Per quanto riguarda infine l'elemento di spazio delle fasi invariante $d\Phi$, integrando la (3.1.4) in d^3p' e quindi in dk , come sappiamo dalla (2.3.77), si ottiene

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \delta^4(k' + p' - p_{tot}) \frac{d^3k'}{E_C} \frac{d^3p'}{E_D} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2s} d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

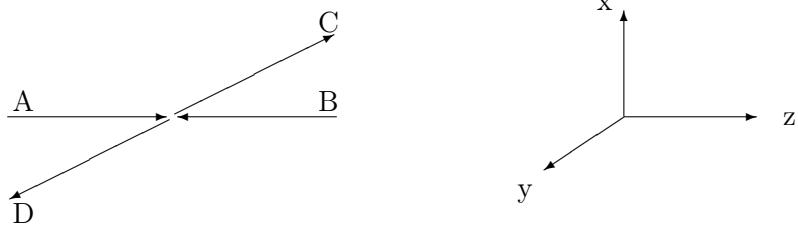
$$= \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \quad (3.1.25)$$

dove

- $d\Omega_{CM}$ è l'elemento di angolo solido associato nel CM a una qualsiasi delle due particelle uscenti;
- la quantità³

$$b \equiv \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2\sqrt{s}} = |\vec{p}'_{CM}| = |\vec{k}'_{CM}| \quad (3.1.27)$$

è il modulo dell'impulso spaziale sia della particella C che D , così come appare nel riferimento del CM .



³Osserviamo ancora una volta che quest'ultima quantità è definita solo se

$$(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \geq (M_C + M_D)^2 \quad (3.1.26)$$

ovvero se ci troviamo sopra soglia di produzione !

Se il sistema⁴ del CM è scelto in modo che l'asse polare coincida con la direzione di volo della particella A (vedi figura sopra riportata), possiamo integrare lo spazio delle fasi $d\Phi$ nella coordinata azimutale ϕ , dato che s e t , da cui potrà eventualmente dipendere $|\mathcal{M}|^2$, risultano indipendenti da ϕ visto che, in termini di quantità definite nel sistema del CM , queste variabili sono date da

$$s = M_A^2 + M_B^2 + 2 \left(\sqrt{M_A^2 + a^2} \sqrt{M_B^2 + a^2} + a^2 \right) \quad (3.1.35)$$

$$t = M_A^2 + M_C^2 - 2 \left(\sqrt{M_A^2 + a^2} \sqrt{M_C^2 + b^2} - a b \cos \theta_{CM} \right) \quad (3.1.36)$$

Effettuando questa integrazione, otteniamo

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{s} d(-\cos \theta_{CM}) \quad (3.1.37)$$

Usando questo risultato nella equazione (3.1.2), insieme con l'espressione del flusso incidente dato dalla equazione (3.1.22), abbiamo infine che

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}} |\mathcal{M}|^2 d(-\cos \theta_{CM}) \quad (3.1.38)$$

e dunque, in termini dei moduli dell'impulso a e b di cui alla (3.1.32), risulta

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} |\mathcal{M}|^2 d(-\cos \theta_{CM}) \quad (3.1.39)$$

⁴La cinematica dell'urto fra due particelle A e B , di massa M_A ed M_B , che danno luogo a due particelle C e D , di massa M_C ed M_D , vista nel sistema del CM , è tale che, se allineiamo gli assi in modo che A si propaghi lungo la direzione dell'asse polare z , risulta

$$A : \quad k = (\sqrt{M_A^2 + a^2}, 0, 0, a) \quad (3.1.28)$$

$$B : \quad p = (\sqrt{M_B^2 + a^2}, 0, 0, -a) \quad (3.1.29)$$

$$C : \quad k' = (\sqrt{M_C^2 + b^2}, b \sin \theta \cos \phi, b \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta) \quad (3.1.30)$$

$$D : \quad p' = (\sqrt{M_D^2 + b^2}, -b \sin \theta \cos \phi, -b \sin \theta \sin \phi, -b \cos \theta) \quad (3.1.31)$$

dove a , b sono, rispettivamente, i moduli degli impulsi lineari delle due coppie (A, B) e (C, D) , legati alla variabile di Mandelstam s (massa invariante quadra del sistema) dalle relazioni

$$a = \frac{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2\sqrt{s}}; \quad b = \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.1.32)$$

per cui possiamo anche scrivere

$$E_A = \sqrt{M_A^2 + a^2} = \frac{s + M_A^2 - M_B^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_B = \sqrt{M_B^2 + a^2} = \frac{s + M_B^2 - M_A^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.1.33)$$

$$E_C = \sqrt{M_C^2 + b^2} = \frac{s + M_C^2 - M_D^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_D = \sqrt{M_D^2 + b^2} = \frac{s + M_D^2 - M_C^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.1.34)$$

la quale, nel caso di scattering elastico (le particelle nello stato finale coincidono con quelle nello stato iniziale) si semplifica, evidentemente, in

$$d\sigma|_{el} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi s} d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.1.40)$$

Invece dell'angolo di scattering $\cos\theta_{CM}$, talvolta è più conveniente usare altre variabili che siano invarianti di Lorentz, come, per esempio, la variabile adimensionale⁵ y definita nella nota riportata sotto, attraverso l'equazione (3.1.42), in termini del momento trasferito

$$q \equiv k - k' = p' - p \quad (3.1.51)$$

⁵Definiamo la variabile y in termini del quadrimpulso trasferito q

$$q \equiv k - k' \quad (3.1.41)$$

il quale, nel caso elastico, fornisce l'impulso trasferito dalla particella A a B . Poniamo

$$y \equiv \frac{pq}{pk} = 1 - \frac{pk'}{pk} = 1 - \frac{2pk'}{2pk} \quad (3.1.42)$$

Ma, dalle equazioni (3.1.29), (3.1.30) e dalle equazioni (3.1.33), (3.1.34), si ha

$$2pk' = 2\sqrt{M_C^2 + b^2}\sqrt{M_B^2 + a^2} + 2ab \cos\theta_{CM} \quad (3.1.43)$$

$$= 2\frac{s + M_C^2 - M_D^2}{2\sqrt{s}} \frac{s + M_B^2 - M_A^2}{2\sqrt{s}} + 2ab \cos\theta_{CM} \quad (3.1.44)$$

mentre, dalla definizione stessa di s in termini dei quadrimpulsi di A e B , risulta

$$2pk = s - M_A^2 - M_B^2 \quad (3.1.45)$$

Perciò, sostituendo nella equazione (3.1.42), otteniamo infine

$$y = \mathcal{A} - \mathcal{B} \cos\theta_{CM} \quad (3.1.46)$$

dove

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2 - M_A^2)}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \quad (3.1.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{2ab}{2pk} = \\ &= \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2} \sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

da cui, evidentemente, per s fissato, risulta

$$d(-\cos\theta_{CM}) = \frac{dy}{\mathcal{B}} \quad (3.1.49)$$

e quindi, in termini della variabile y , risulta

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}} dy \quad (3.1.50)$$

Nella stessa nota abbiamo anche dimostrato (cfr.(3.1.46)) che la variabile y può essere scritta come

$$y = \mathcal{A} - \mathcal{B} \cos \theta_{CM} \quad (3.1.52)$$

dove (cfr.(3.1.47), (3.1.48))

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2 - M_A^2)}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \quad (3.1.53)$$

$$\mathcal{B} = \frac{2ab}{s - M_A^2 - M_B^2} = \quad (3.1.54)$$

$$= \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2} \sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \quad (3.1.55)$$

Perciò, per una energia totale fissata nel CM $\sqrt{s} = \mathcal{E}_{CM}$, abbiamo

$$dy = \mathcal{B} d(-\cos \theta_{CM}) \quad (3.1.56)$$

e dunque, ripartendo dalla relazione (3.1.39)

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} d(-\cos \theta_{CM}) \quad (3.1.57)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{dy}{\mathcal{B}} = \\ &= \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{2ab} dy \\ &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{2a^2} \end{aligned} \quad (3.1.58)$$

ovvero, finalmente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{16\pi} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (3.1.59)$$

con⁶

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \leq y \leq \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad (3.1.68)$$

⁶Si osservi che nel limite di alta energia, cioè quando $s \gg M^2$, risulta comunque che

$$\mathcal{A} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \mathcal{B} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (3.1.60)$$

per cui i limiti di integrazione in dy diventano, rispettivamente, 0 ed 1.

Se accade che $M_A = 0$, ci sono poi alcune semplificazioni.

Quanto alla sezione d'urto differenziale, risulta evidentemente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{(s - M_B^2)} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (3.1.61)$$

Un'altra variabile utile talvolta per esprimere la sezione d'urto differenziale fra due particelle, è l'invariante Q^2 , definito⁷ come

$$Q^2 \equiv -(q q) \equiv -(k - k')^2 = -t \quad (3.1.76)$$

Dalla equazione (3.1.73), abbiamo

$$Q^2 = Q_0^2 - (s - M_A^2 - M_B^2) \mathcal{B} \cos \theta_{CM} \quad (3.1.77)$$

dove Q_0^2 è dato dalla (cfr (3.1.72))

$$Q_0^2 = \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} \quad (3.1.78)$$

e $\mathcal{B}$ è dato dalla (3.1.55).

con

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2)}{2s(s - M_B^2)} \quad (3.1.62)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2s} \quad (3.1.63)$$

le quali, nel caso in cui possa essere trascurata anche la massa M_C , diventano

$$\mathcal{A} \rightarrow 1 - \frac{(s - M_D^2)(s + M_B^2)}{2s(s - M_B^2)} \quad (3.1.64)$$

$$\mathcal{B} \rightarrow \frac{s - M_D^2}{2s} \quad (3.1.65)$$

per cui ne risulta che, quanto agli estremi di integrazione, è

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \rightarrow 1 - \frac{s - M_D^2}{s - M_B^2} \quad (3.1.66)$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow 1 + \frac{s - M_D^2}{s - M_B^2} \frac{M_B^2}{s} \quad (3.1.67)$$

⁷Questa variabile è definita come

$$Q^2 \equiv -q^2 \equiv -t = -(k - k')^\mu (k - k')_\mu = -M_A^2 - M_C^2 + 2(kk') \quad (3.1.69)$$

Dalla (3.1.28) e (3.1.30), abbiamo

$$2(kk') = 2\sqrt{M_A^2 + a^2}\sqrt{M_C^2 + b^2} - 2ab \cos \theta_{CM} \quad (3.1.70)$$

ovvero

$$\begin{aligned} Q^2 &= -M_A^2 - M_C^2 + 2 \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)}{2\sqrt{s}} \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)}{2\sqrt{s}} - 2ab \cos \theta_{CM} \\ &= \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} - 2ab \cos \theta_{CM} \end{aligned} \quad (3.1.71)$$

Se definiamo allora la quantità costante (fissato s)

$$Q_0^2 \equiv \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} \quad (3.1.72)$$

Se l'energia $\mathcal{E} = \sqrt{s}$ nel CM è fissata, allora

$$dQ^2 = -\mathcal{B}(s - M_A^2 - M_B^2) d(\cos\theta_{CM}) = (s - M_A^2 - M_B^2) dy \quad (3.1.79)$$

e perciò, dalla (3.1.58), finalmente si ha

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi [(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2]} \quad (3.1.80)$$

dove

$$Q_0^2 - \mathcal{B}(s - M_A^2 - M_B^2) \leq Q^2 \leq Q_0^2 + \mathcal{B}(s - M_A^2 - M_B^2) \quad (3.1.81)$$

Di nuovo, nel caso poi in cui le particelle incidenti siano non polarizzate e non si osservi lo stato di spin delle particelle prodotte, avremo

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{16\pi} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{[(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2]} \quad (3.1.82)$$

ed esprimiamo $2ab$ in termini di $\mathcal{B}$, usando l'equazione (3.1.48) e l'espressione di $2(pk)$ come data dalla (3.1.45), otteniamo

$$2ab = 2(pk)\mathcal{B} = (s - M_A^2 - M_B^2)\mathcal{B}$$

per cui, finalmente, otteniamo

$$Q^2 = Q_o^2 - (s - M_A^2 - M_B^2)\mathcal{B} \cos\theta_{CM} \quad (3.1.73)$$

e dunque, di nuovo, a s fissato

$$dQ^2 = (s - M_A^2 - M_B^2)\mathcal{B} d(-\cos\theta_{CM}) \equiv (s - M_A^2 - M_B^2) dy \quad (3.1.74)$$

per cui, dalla (3.1.50), risulta infine

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}} dQ^2 \quad (3.1.75)$$

3.2 Lo scattering elettrone-protone

Come primo caso a cui applicare quanto si è imparato fino ad ora, consideriamo quello dello scattering elettrone-protone.

Come è noto dall'elettrodinamica classica, se J^μ è la corrente di probabilità associata a una particella carica, come, per esempio, nel caso di una particella che soddisfa l'equazione di Dirac, dove

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

allora la lagrangiana di interazione con il campo elettromagnetico A^μ si scrive come⁸

$$\mathcal{L}(x) = e J_\mu(x) A^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \quad (3.2.83)$$

Per trattare il problema che ci siamo posti, non seguiremo però la strada classica della *QED* e dei grafici di Feynman, bensì affronteremo il problema cercando di riscrivere l'interazione in modo da riassorbire il campo elettromagnetico, visto che, dopo tutto, non ci sono fotoni né nello stato iniziale né in quello finale. Questo ci condurrà a una espressione che ci tornerà molto utile quando affronteremo lo studio delle interazioni deboli nell'ambito della teoria di Fermi.

Cominciamo considerando la quadricorrente associata al protone, che assumeremo di poter trattare⁹ come una particella di Dirac, per cui si avrà

$$J_{(p)}^\mu(x) = e \bar{\psi}_{(p)}(x) \gamma^\mu \psi_{(p)}(x); \quad e \equiv |e| \quad (3.2.84)$$

e facciamola interagire con il campo elettromagnetico $A^\mu(x)$ prodotto dalla corrente associata all'elettrone (di carica $-e$, vista la (3.2.84))

$$J_{(e)}^\mu(x) = -e \bar{\psi}_{(e)}(x) \gamma^\mu \psi_{(e)}(x) \quad (3.2.85)$$

⁸La lagrangiana completa è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}_D(x) + \mathcal{L}_{EM}(x) + \mathcal{L}(x)_I = \\ &= \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \end{aligned}$$

da cui si ottengono le equazioni del moto seguenti

$$\begin{aligned} \gamma^\mu (i\partial_\mu + e A_\mu) \psi - m \psi &= 0 \\ \square A_\nu - e J_\nu &= 0 \end{aligned}$$

⁹Questo corrisponde a ignorare la struttura interna del protone e quindi qualsiasi suo fattore di forma. Ritorniamo più avanti su questo punto.

Per questo campo, nella gauge di Lorentz¹⁰, si ha

$$\square A^\mu(x) = J_{(e)}^\mu(x) \quad (3.2.86)$$

ovvero, se D_F è la funzione di Green di Feynman del d'alembertiano, cioè

$$\begin{aligned} \square D_F(x-y) &= \delta^4(x-y) \\ \Rightarrow D_F(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iq(x-y)} \hat{D}_F(q^2); \quad \hat{D}_F(q^2) = \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.2.87)$$

¹⁰Vogliamo osservare che la (3.2.86) *non* è scritta nel sistema di unità di misura di Gauss elettrostatico, sistema che abbiamo sempre usato fino a ora (con, eventualmente, la aggiunta delle condizioni $\hbar = c = 1$).

Infatti nel sistema di Gauss, le equazioni di Maxwell per i potenziali si scrivono

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V = -4\pi \rho; \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

per cui, definendo $A^\mu \equiv (V, \vec{A})$ e $J^\mu \equiv (c\rho, \vec{J})$ risulta piuttosto

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

dove, al solito, l'operatore di D'Alembert è definito dalla (A.2.8).

Evidentemente, anche facendo $c = 1$, resta comunque il fattore 4π ...

Per evitare di doverlo portar dietro, l'interazione viene scritta nel sistema di unità di misura di Lorentz-Heaviside (LH), dove, invece, le equazioni di Maxwell si scrivono così

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \rho; & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0; & \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

In questo sistema di unità di misura, evidentemente risulta piuttosto

$$\square A^\mu = \frac{1}{c} J^\mu$$

e il potenziale della carica puntiforme è dato da

$$V(r) = \frac{q}{4\pi r}$$

da cui ne ricaviamo che l'energia potenziale di due cariche elementari (elettroniche) a distanza r , vale

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} \frac{\hbar c}{r} \equiv \alpha \frac{\hbar c}{r}$$

mentre, nel sistema di Gauss, come è noto essa si scrive come

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{r} \equiv \alpha \frac{\hbar c}{r}$$

dove α è la costante di struttura fina, quantità adimensionale pari a

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi \hbar c} \right)_{LH} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76}$$

allora il quadripotenziale prodotto dall'elettrone si può scrivere come

$$A^\mu(x) = \int d^4y D_F(x-y) J_{(e)}^\mu(y) \quad (3.2.88)$$

per cui, sostituendo nella espressione (3.2.83), si ha infine

$$\mathcal{L}(x) = -e^2 J_\mu^{(p)}(x) \int d^4y D_F(x-y) J_{(e)}^\mu(y) \quad (3.2.89)$$

Ricordiamo adesso che

- se lo stato iniziale (per $t \rightarrow -\infty$) è quello di un elettrone libero di quadrimpulso k e stato di spin r , insieme a un protone libero di quadrimpulso p e spin s ;
- se lo stato finale (per $t \rightarrow +\infty$) è quello di un elettrone libero di quadrimpulso k' e stato di spin r' , insieme a un protone libero di quadrimpulso p' e spin s'

allora, al primo ordine perturbativo, per la (2.1.20), risulta

$$\begin{aligned} R_{fi} &\equiv \langle (r' k'), (s' p') | S - I | (r k), (s p) \rangle = \\ &= i \int d^4x \langle (r' k'), (s' p') | \mathcal{L}(x) | (r k), (s p) \rangle = \\ &= -ie^2 \int d^4x d^4y \langle (r' k'), (s' p') | J_\mu^{(p)}(x) \cdot \\ &\quad \cdot D_F(x-y) J_{(e)}^\mu(y) | (r k), (s p) \rangle = \\ &= -ie^2 \int d^4x d^4y D_F(x-y) \cdot \\ &\quad \cdot \langle s', p' | J_\mu^{(p)}(x) | s, p \rangle \langle r', k' | J_{(e)}^\mu(y) | r, k \rangle \end{aligned} \quad (3.2.90)$$

E' opportuno, quindi, nell'ambito della teoria di Dirac, considerare il generico termine

$$\langle s, q | J^\mu(x) | r, p \rangle \equiv \langle s, q | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | r, p \rangle \quad (3.2.91)$$

Dal punto di vista degli operatori di creazione e distruzione, tralasciando quindi ogni altra dipendenza, la corrente $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ è fatta da termini del tipo seguente

$$(b\bar{v} + a^\dagger \bar{u}) \gamma^\mu (au + b^\dagger v) = \bar{v} \gamma^\mu u (ba) + \bar{v} \gamma^\mu v (bb^\dagger) + \bar{u} \gamma^\mu u (a^\dagger a) + \bar{u} \gamma^\mu v (a^\dagger b^\dagger)$$

Però, già il suo valore di aspettazione sul vuoto, per via del termine in $(bb^\dagger)$, non è nullo, anzi risulta infinito !

Per risolvere questa patologia, come abbiamo già avuto modo di vedere nel *Vol. V*, la regola canonica è quella di sostituire l'operatore J con la sua versione N-ordinata : J : cioè con quella¹¹ in cui, usando le regole di commutazione o anticommutazione, comunque tutti gli operatori di creazione sono a sinistra e quelli di distruzione a destra.

Con questa regola, la corrente in esame è fatta piuttosto da termini del tipo

$$: J^\mu := \bar{v}\gamma^\mu u(ba) - \bar{v}\gamma^\mu v(b^\dagger b) + \bar{u}\gamma^\mu u(a^\dagger a) + \bar{u}\gamma^\mu v(a^\dagger b^\dagger) \quad (3.2.92)$$

Si ha allora

$$\langle s, q | J^\mu(x) | r, p \rangle = \langle s, q | \left(\bar{v}\gamma^\mu u(ba) - \bar{v}\gamma^\mu v(b^\dagger b) + \bar{u}\gamma^\mu u(a^\dagger a) + \bar{u}\gamma^\mu v(a^\dagger b^\dagger) \right) | r, p \rangle$$

e chiaramente i termini che contengono operatori di creazione o distruzione di antiparticelle non possono contribuire, per cui l'unico termine che resta è quello in $a^\dagger a$, ed è immediato convincersi che

$$\begin{aligned} \langle s, q | J^\mu(x) | r, p \rangle &= \langle s, q | \left(\bar{v}\gamma^\mu u(ba) - \bar{v}\gamma^\mu v(b^\dagger b) + \bar{u}\gamma^\mu u(a^\dagger a) + \bar{u}\gamma^\mu v(a^\dagger b^\dagger) \right) | r, p \rangle = \\ &= \langle s, q | \bar{u}\gamma^\mu u(a^\dagger a) | r, p \rangle \end{aligned}$$

ovvero

$$\langle s, q | J^\mu(x) | r, p \rangle = \langle s, q | \bar{\psi}(x) | \Omega \rangle \gamma^\mu \langle \Omega | \psi(x) | r, p \rangle \quad (3.2.93)$$

Ma i termini $\langle s, q | \bar{\psi}(x) | \Omega \rangle$ e $\langle \Omega | \psi(x) | r, p \rangle$ (cfr. *Vol. V*) sono semplicemente le funzioni d'onda degli stati $|r, p\rangle$ e $\langle s, q|$, per cui abbiamo

$$\langle s', p' | J_\mu^{(p)}(x) | s, p \rangle = \bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) e^{ix(p'-p)} \quad (3.2.94)$$

$$\langle r', k' | J_{(e)}^\mu(y) | r, k \rangle = \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) e^{iy(k'-k)} \quad (3.2.95)$$

Sostituendo quindi nella (3.2.90), otteniamo

$$\begin{aligned} R_{fi} &= -ie^2 \int d^4x d^4y D_F(x-y) \langle s', p' | J_\mu^{(p)}(x) | s, p \rangle \langle r', k' | J_{(e)}^\mu(y) | r, k \rangle = \\ &= -ie^2 \int d^4x d^4y \frac{1}{(2\pi)^4} d^4q \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} e^{iq(x-y)} e^{ix(p'-p)} e^{iy(k'-k)} \cdot \\ &\quad \cdot \bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \cdot \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \end{aligned} \quad (3.2.96)$$

¹¹Si osservi che questa operazione, poiché somma all'espressione di partenza una quantità reale, non altera il carattere hermitiano della Lagrangiana. Questa proprietà di hermiticità significa, in buona sostanza, che se nella Lagrangiana compare un operatore di creazione, deve comparirvi anche il relativo operatore di distruzione e questo è quanto sta alla base della simmetria di crossing.

Occupiamoci dell'integrale: risulta

$$\begin{aligned}
& -ie^2 \int d^4x d^4y \frac{1}{(2\pi)^4} d^4q \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} e^{iq(x-y)} e^{ix(p'-p)} e^{iy(k'-k)} = \\
& = -ie^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} \int d^4x e^{ix(q+p'-p)} \int d^4y e^{iy(k'-k-q)} = \\
& = -ie^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ix(q+p'-p)} \int d^4q \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta(k' - k - q) = \\
& = ie^2 \int d^4x e^{ix(k'-k+p'-p)} \int d^4q \frac{1}{(k' - k)^2 + i\epsilon} = \\
& = i(2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{e^2}{(k' - k)^2 + i\epsilon} \quad (3.2.97)
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}
R_{fi} &= i(2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{e^2}{(k' - k)^2 + i\epsilon} \cdot \\
&\cdot \bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \cdot \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \quad (3.2.98)
\end{aligned}$$

ovvero, passando al limite per $\epsilon \rightarrow 0$, l'elemento di matrice invariante della transizione $\mathcal{M}_{fi}$, dato dalla (2.1.25), risulta pari a

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{e^2}{(k' - k)^2} \bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \quad (3.2.99)$$

$$\equiv \frac{e^2}{(k' - k)^2} J_\mu^{(p)} J_{(e)}^\mu \quad (3.2.100)$$

dove è inteso comunque che $p' + k' = p + k = P$ e si è posto

$$J_\mu^{(p)} = J_\mu^{(p)}(s', p'; s, p) \equiv \bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \quad (3.2.101)$$

$$J_{(e)}^\mu = J_{(e)}^\mu(r', k'; r, k) \equiv \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \quad (3.2.102)$$

Per calcolare la sezione d'urto del processo, occorre valutare il modulo quadro dell'elemento di matrice $\mathcal{M}_{fi}$.

Supponiamo, per il momento, di non essere interessati agli stati di spin né dell'elettrone né del protone: secondo la (2.1.48), risulta dunque che

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_e + 1)(2S_p + 1)} \frac{1}{F} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} dLips = \frac{1}{4F} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} dLips \quad (3.2.103)$$

dove $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$ è la somma dei moduli quadri delle ampiezze di scattering, per tutti i possibili stati di spin iniziali e finali dell'elettrone e del protone.

Usando la consueta definizione (3.1.41) per cui $q = k - k'$, risulta dunque

$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} &= \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} \left[\bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \cdot \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\nu u_{(p)}^{(s)}(p) \cdot \bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\nu u_{(e)}^{(r)}(k) \right]^* = \\
 &= \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \sum_{s,s'} \left[\bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \right] \left[\bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\nu u_{(p)}^{(s)}(p) \right]^* \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{r,r'} \left[\bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\nu u_{(e)}^{(r)}(k) \right]^* \equiv \\
 &\equiv \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 W_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \tag{3.2.104}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$W_{\mu\nu} \equiv \sum_{s,s'} \left[\bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\mu u_{(p)}^{(s)}(p) \right] \left[\bar{u}_{(p)}^{(s')}(p') \gamma_\nu u_{(p)}^{(s)}(p) \right]^* = \sum_{s,s'} J_\mu^{(p)} J_\nu^{*(p)} \tag{3.2.105}$$

$$L^{\mu\nu} \equiv \sum_{r,r'} \left[\bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\mu u_{(e)}^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_{(e)}^{(r')}(k') \gamma^\nu u_{(e)}^{(r)}(k) \right]^* = \sum_{r,r'} J_{(e)}^\mu J_{(e)}^{*\nu} \tag{3.2.106}$$

Questi due termini sono equivalenti dal punto di vista funzionale: occupiamoci dunque, in generale, di valutare l'espressione

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta} \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) \right] \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\nu u^{(\beta)}(b) \right]^* \tag{3.2.107}$$

dove a, b sono quadrimpulsi della stessa particella di Dirac di massa m .

Evidentemente le quantità entro parentesi quadra sono numeri complessi, e dunque per essi il complesso coniugato equivale all'hermitiano coniugato (un numero complesso si può anche vedere come una matrice quadrata $1 \times 1 \dots$). Possiamo dunque scrivere anche

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta} \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) \right] \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\nu u^{(\beta)}(b) \right]^\dagger \tag{3.2.108}$$

Ricordiamo adesso che, per le proprietà delle matrici γ (A.2.10), (A.2.9) e (A.2.11), si ha

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 &= \gamma^{0\dagger}, & \bar{u} &= u^\dagger \gamma^0 & \Rightarrow & \bar{u}^\dagger = \gamma^{0\dagger} u = \gamma^0 u \\
 (\gamma^0)^2 &= I, & \bar{u} &= u^\dagger \gamma^0 & & u^\dagger = \bar{u} \gamma^0 \\
 (\gamma_\beta)^\dagger &= \gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0 & & & & (\gamma_\beta)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_\beta
 \end{aligned} \tag{3.2.109}$$

ne segue quindi che

$$\begin{aligned}
 \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) \right]^* &= \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) \right]^\dagger = u^{\dagger(\beta)}(b) \gamma_\mu^\dagger (\bar{u}^{(\alpha)}(a))^\dagger = \\
 &= \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \gamma^0 u^{(\alpha)}(a) = \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma_\mu u^{(\alpha)}(a)
 \end{aligned} \tag{3.2.110}$$

e dunque

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \sum_{\alpha,\beta} \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) \right] \left[\bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\nu u^{(\beta)}(b) \right]^\dagger = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \begin{bmatrix} \bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) & \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma_\nu u^{(\alpha)}(a) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.111)$$

Ma questo numero complesso può anche essere visto come la traccia di una matrice 1×1 , ovvero

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= Tr \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \begin{bmatrix} \bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) & \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma_\nu u^{(\alpha)}(a) \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} Tr \left\{ \begin{bmatrix} \bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) & \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma_\nu u^{(\alpha)}(a) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.112)$$

D'altronde una proprietà generale della *traccia*¹² è che risulta

$$Tr \{ A B \dots C D \} = Tr \{ B \dots C D A \} = Tr \{ D A B \dots C \} = \quad (3.2.113)$$

quindi

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \sum_{\alpha,\beta} Tr \left\{ \begin{bmatrix} \bar{u}^{(\alpha)}(a) \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) & \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma_\nu u^{(\alpha)}(a) \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} Tr \left\{ \gamma_\mu u^{(\beta)}(b) \bar{u}^{(\beta)}(b) \gamma_\nu u^{(\alpha)}(a) \bar{u}^{(\alpha)}(a) \right\} = \\ &= Tr \left\{ \gamma_\mu \left(\sum_\beta u^{(\beta)}(b) \bar{u}^{(\beta)}(b) \right) \gamma_\nu \left(\sum_\alpha u^{(\alpha)}(a) \bar{u}^{(\alpha)}(a) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.114)$$

Ma

$$\begin{aligned} \sum_\beta u^{(\beta)}(b) \bar{u}^{(\beta)}(b) &= \sum_\beta \frac{\not{p} + m}{\sqrt{E + m}} u_0^{(\beta)} \bar{u}_0^\beta \frac{\not{p} + m}{\sqrt{E + m}} = \\ &= \frac{1}{E + m} (\not{p} + m) \left(\sum_\beta u_0^{(\beta)} \bar{u}_0^\beta \right) (\not{p} + m) \end{aligned} \quad (3.2.115)$$

¹²Si osservi che la proprietà per cui $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$ non richiede che A e B siano matrici quadrate, ma solo che il loro prodotto AB lo sia. La matrice A può quindi essere una matrice $m \times n$ e dunque B dovrà essere $n \times m$, per cui risulta che AB è $m \times m$ mentre BA è $n \times n$. In ogni caso, evidentemente

$$Tr\{AB\} = \sum_{i=1,m} \sum_{j=1,n} A_{ij} B_{ji} = Tr\{BA\}$$

ed è evidente dalla loro definizione (cfr. Vol. V) che risulta

$$\sum_{\beta} u_0^{(\beta)} \bar{u}_0^{\beta} = \frac{I + \gamma^0}{2} \quad (3.2.116)$$

per cui

$$\sum_{\beta} u^{(\beta)}(b) \bar{u}^{(\beta)}(b) = \frac{1}{E + m} (\not{p} + m) \frac{I + \gamma^0}{2} (\not{p} + m) \quad (3.2.117)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} (\not{p} + m) (\not{p} + m) &= (p_{\mu} \gamma^{\mu} + m) (p_{\nu} \gamma^{\nu} + m) = p_{\mu} p_{\nu} \frac{1}{2} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} + 2m \not{p} + m^2 = \\ &= p^2 + m^2 + 2m \not{p} = m^2 + m^2 + 2m \not{p} = 2m (\not{p} + m) \end{aligned} \quad (3.2.118)$$

mentre per l'altro termine, tenuto conto che

$$\gamma^0 \gamma^{\nu} = -\gamma^{\nu} \gamma^0 + 2\delta^{\nu 0} I \quad (3.2.119)$$

si ha

$$\begin{aligned} (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p} + m) &= (p_{\mu} \gamma^{\mu} + m) \gamma^0 (p_{\nu} \gamma^{\nu} + m) = \\ &= p_{\mu} p_{\nu} \gamma^{\mu} \gamma^0 \gamma^{\nu} + m p_{\mu} \gamma^{\mu} \gamma^0 + m p_{\nu} \gamma^0 \gamma^{\nu} + m^2 \gamma^0 = \\ &= p_{\mu} p_{\nu} \gamma^{\mu} (-\gamma^{\nu} \gamma^0 + 2\delta^{\nu 0} I) + m \not{p} \gamma^0 + m p_{\nu} (-\gamma^{\nu} \gamma^0 + 2\delta^{\nu 0} I) + m^2 \gamma^0 = \\ &= -p^2 \gamma^0 + 2p^0 \not{p} + m \not{p} \gamma^0 - m \not{p} \gamma^0 + 2m p^0 + m^2 \gamma^0 = 2p^0 (\not{p} + m) \end{aligned} \quad (3.2.120)$$

Quindi¹³, finalmente

$$\sum_{\beta} u^{(\beta)}(b) \bar{u}^{(\beta)}(b) = \frac{1}{2(E + m)} 2(m + E) (\not{p} + m) = (\not{p} + m) \quad (3.2.122)$$

Ma allora, tornando all'espressione del tensore $A_{\mu\nu}$, abbiamo finalmente

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= Tr \left\{ \gamma_{\mu} \left(\sum_{\beta} u^{(\beta)}(b) \bar{u}^{(\beta)}(b) \right) \gamma_{\nu} \left(\sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(a) \bar{u}^{(\alpha)}(a) \right) \right\} = \\ &= Tr \{ \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + m) \} \end{aligned} \quad (3.2.123)$$

ovvero

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= Tr \{ \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + m) \} = \\ &= Tr \left\{ \gamma_{\mu} \not{p} \gamma_{\nu} \not{p} + \gamma_{\mu} \not{p} \gamma_{\nu} m + m \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \not{p} + m^2 \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.124)$$

¹³Analogamente si dimostra che

$$\sum_{\beta} v^{(\beta)}(b) \bar{v}^{(\beta)}(b) = (\not{p} - m) \quad (3.2.121)$$

D'altronde, per la proprietà secondo cui la traccia della somma è la somma delle tracce e quella per cui la traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ è nulla, ne segue che

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \text{Tr} \{ \gamma_\mu \not{b} \gamma_\nu \not{a} \} + \text{Tr} \{ m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \} = \\ &= b^\sigma a^\rho \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\rho \} + m^2 \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} \end{aligned} \quad (3.2.125)$$

D'altronde

$$\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 4 \delta^{\mu\nu} \quad (3.2.126)$$

$$\text{Tr} \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 4 (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu} - \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu}) \quad (3.2.127)$$

e quindi, in definitiva, si ha

$$A_{\mu\nu} = 4 (b_\mu a_\nu + a_\mu b_\nu - ab \delta_{\mu\nu} + m^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (3.2.128)$$

Torniamo adesso, dal caso generale considerato fin'ora, a quello particolare dei tensori $W_{\mu\nu}$ e $L^{\mu\nu}$ che entrano nell'espressione del modulo quadro dell'elemento di matrice (3.2.104) che ci interessa.

Evidentemente, da quanto precede, si ha

$$W_{\mu\nu} = 4 (p'_\mu p_\nu + p_\mu p'_\nu - p p' \delta_{\mu\nu} + M^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (3.2.129)$$

$$L^{\mu\nu} = 4 (k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu - k k' \delta^{\mu\nu} + m^2 \delta^{\mu\nu}) \quad (3.2.130)$$

dove M è la massa del protone ed m quella dell'elettrone. Sostituendo dunque nell'espressione del modulo quadro dell'elemento di matrice, si ha

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 W_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = \\ &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 16 [(p'k')(pk) + (p'k)(pk') - (pp')(kk') + m^2(pp') \\ &\quad + (pk')(p'k) + (pk)(p'k') - (kk')(pp') + m^2(pp') \\ &\quad - (pp')(kk') - (pp')(kk') + 4(pp')(kk') - 4m^2(pp') \\ &\quad + M^2(kk') + M^2(kk') - 4M^2(kk') + 4m^2M^2] = \\ &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8 [(2p'k')(2pk) + (2p'k)(2pk') - 2m^2(2pp') - 2M^2(2kk') + 8m^2M^2] \end{aligned}$$

Questa espressione può essere riscritta facendo uso delle variabili di Mandelstam¹⁴, definite dalle (3.1.9)-(3.1.11)

$$\begin{aligned}
 s &= (k+p)^2 = m^2 + M^2 + 2(kp) \\
 &= (k'+p')^2 = m^2 + M^2 + 2(k'p') \\
 t &= (k-k')^2 = 2m^2 - 2(kk') \\
 &= (p'-p)^2 = 2M^2 - 2(pp') \\
 u &= (k-p')^2 = m^2 + M^2 - 2(kp') \\
 &= (k'-p)^2 = m^2 + M^2 - 2(k'p)
 \end{aligned}$$

Essendo lo scattering elastico, abbiamo poi che

$$2kp = 2k'p' \quad (3.2.132)$$

$$2kp' = 2pk' \quad (3.2.133)$$

e dalla definizione (3.1.42) della variabile y risulta

$$y \equiv \frac{pq}{pk} = \frac{pk - pk'}{pk} \Rightarrow (2pk') = (2pk)(1 - y) \quad (3.2.134)$$

mentre dalla definizione di s , dalla conservazione del quadrimpulso e dalle relazioni precedenti, segue che

$$\begin{aligned}
 s &= (p+k)(p'+k') = (pp') + (pk') + (kp') + (kk') = \\
 &= M^2 - \frac{t}{2} + m^2 - \frac{t}{2} + (2pk)(1 - y) = \\
 &= M^2 + m^2 - t + (s - m^2 - M^2)(1 - y) \\
 \Rightarrow t &= -(s - m^2 - M^2)y
 \end{aligned} \quad (3.2.135)$$

Sostituendo nell'espressione di $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$, si ha

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8 [(2p'k')(2pk) + (2p'k)(2pk') - 2m^2(2pp') - 2M^2(2kk') + 8m^2M^2] = \\
 &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8 [(s - m^2 - M^2)^2 + (s - m^2 - M^2)^2(1 - y)^2 \\
 &\quad - 4m^2(M^2 - t/2) - 4M^2(m^2 - t/2) + 8m^2M^2] =
 \end{aligned} \quad (3.2.136)$$

¹⁴Come sappiamo, le variabili di Mandelstam s , t , u non sono indipendenti fra loro e, secondo la (3.1.20), soddisfano l'equazione

$$s + t + u = 2m^2 + 2M^2 \quad (3.2.131)$$

$$= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8 [(s - m^2 - M^2)^2 + (s - m^2 - M^2)^2 (1 - y)^2 + 2(m^2 + M^2)t] \quad (3.2.137)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8 [(s - m^2 - M^2)^2 + (s - m^2 - M^2)^2 (1 - y)^2 \\ &- 2(m^2 + M^2)(s - m^2 - M^2)y] = \\ &= \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8(s - m^2 - M^2) \{ (s - m^2 - M^2)[1 + (1 - y)^2] - 2(m^2 + M^2)y \} \end{aligned} \quad (3.2.138)$$

A questo punto abbiamo tutto quanto ci serve per determinare, finalmente, la sezione d'urto differenziale (3.2.103)

$$d\sigma = \frac{1}{4F} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} dLips \quad (3.2.139)$$

Ricordiamo infatti che, per la (3.1.22), risulta

$$F = 2\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2} \quad (3.2.140)$$

per cui, essendo altresì

$$dLips = \frac{1}{8\pi} \frac{s - m^2 - M^2}{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}} dy \quad (3.2.141)$$

$$t = q^2 = -y(s - m^2 - M^2) \quad (3.2.142)$$

$$e^2 = 4\pi\alpha \quad (3.2.143)$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy} &= \frac{1}{8\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}} \left(\frac{16\pi^2\alpha^2}{t^2} \right) \cdot \\ &\cdot 8(s - m^2 - M^2) \{ (s - m^2 - M^2)[1 + (1 - y)^2] - 2(m^2 + M^2)y \} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{8\pi} \frac{s - m^2 - M^2}{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}} = \\ &= \frac{2\pi\alpha^2}{t^2} \frac{(s - m^2 - M^2)^2}{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2} \{ (s - m^2 - M^2)[1 + (1 - y)^2] - 2(m^2 + M^2)y \} \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{y^2} \frac{(s - m^2 - M^2)[1 + (1 - y)^2] - 2(m^2 + M^2)y}{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2} \quad (3.2.144)$$

Se però vogliamo confrontare il risultato ottenuto adesso con quello che si ottiene classicamente per la sezione d'urto Rutherford, cioè

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = \left(\frac{\alpha \hbar c}{pv}\right)^2 \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} = \left(\frac{\alpha \hbar c}{pv}\right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2} \quad (3.2.145)$$

allora occorre riscrivere la sezione d'urto differenziale usando le variabili del Laboratorio, dove il protone è inizialmente fermo (anzi, nel caso classico, esso aveva massa tale da restare fermo anche dopo ...). In questo riferimento, per la (2.3.119), l'elemento di spazio delle fasi, in funzione dell'angolo polare di scattering, è

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{p' d(-\cos \theta)}{E + M - E' \frac{P}{p'} \cos \theta} \quad (3.2.146)$$

dove E' e p' sono, rispettivamente, l'energia e il modulo dell'impulso dell'elettrone dopo l'urto, mentre E e p sono quelli iniziali.

Prima di calcolare il termine di flusso F , iniziamo calcolando s : si ha

$$\begin{aligned} s &= (E + M, \vec{p})^2 = E^2 + 2EM + M^2 - |\vec{p}|^2 = 2EM + M^2 + m^2 \\ \Rightarrow s - m^2 - M^2 &= 2EM \end{aligned} \quad (3.2.147)$$

Ne segue quindi che

$$F = 2\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2} = 2\sqrt{4E^2M^2 - 4m^2M^2} = 4Mp \quad (3.2.148)$$

Per il calcolo di $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$, ripartiamo dall'espressione (3.2.137)

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 8[(s - m^2 - M^2)^2 + (s - m^2 - M^2)^2(1 - y)^2 + 2(m^2 + M^2)t] \quad (3.2.149)$$

Iniziamo valutando la variabile y : risulta

$$y \equiv \frac{pq}{pk} = \frac{M(E - E')}{ME} = 1 - \frac{E'}{E} \Rightarrow 1 - y = \frac{E'}{E} \quad (3.2.150)$$

e, almeno nel limite relativistico in cui si possa trascurare la massa dell'elettrone in confronto alla sua energia (ovvero nel limite in cui $m \rightarrow 0$), si ha anche

$$t = q^2 = (k - k')^2 = -2EE'(1 - \cos \theta) \quad (3.2.151)$$

per cui ne segue che

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 &= \frac{16\pi^2\alpha^2}{t^2} 8[4E^2M^2 + 4E^2M^2\frac{E'^2}{E^2} - 2M^2 2EE'(1 - \cos \theta)] = \\ &= \frac{16\pi^2\alpha^2}{t^2} 32M^2 [E^2 + E'^2 - EE'(1 - \cos \theta)] = \\ &= \frac{16\pi^2\alpha^2}{t^2} 32M^2 2EE' \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - (1 - \cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (3.2.152)$$

Consideriamo adesso la quantità entro parentesi quadra. Risulta

$$\frac{1}{2} \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - (1 - \cos \theta) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \theta + \frac{(E - E')^2}{EE'} \right] \quad (3.2.153)$$

D'altronde, dalla conservazione del quadrimpulso, se p' è il quadrimpulso del protone dopo l'urto, allora

$$p' = p + k - k' = p + q$$

e dunque

$$\begin{aligned} M^2 &= (p')^2 = p^2 + 2pq + q^2 = M^2 + 2M(E - E') + q^2 \\ \Rightarrow q^2 + 2m(E - E') &= 0 \Rightarrow E - E' = -\frac{q^2}{2M} = \frac{EE'}{M}(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.2.154)$$

Sostituendo allora nella (3.2.153), si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - (1 - \cos \theta) \right] &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \theta + \frac{EE'}{M^2} (1 - \cos \theta)^2 \right] = \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{2EE'(1 - \cos \theta)}{2M^2} \frac{1 - \cos \theta}{2} = \cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \theta/2 \end{aligned} \quad (3.2.155)$$

Dunque, sostituendo nella (3.2.152), otteniamo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 &= \frac{16\pi^2 \alpha^2}{t^2} 32M^2 2EE' \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - (1 - \cos \theta) \right] = \\ &= \frac{16\pi^2 \alpha^2}{t^2} 64M^2 EE' \cdot \left[\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \theta/2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.156)$$

Per quanto riguarda l'elemento di angolo solido dato dalla (3.2.146), nel limite di massa nulla dell'elettrone, per uno scattering isotropo intorno all'asse di scattering, si ha

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{p' d\Omega}{E + M - E' \frac{p}{p'} \cos \theta} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{E' d\Omega}{E + M - E \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{E'}{M} \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos \theta)} d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.157)$$

Quanto al termine di flusso (3.2.148), esso, nel limite di massa nulla dell'elettrone, diviene

$$F = 4Mp \rightarrow F = 4ME \quad (3.2.158)$$

per cui abbiamo infine

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4F} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 d\Phi = \\ &= \frac{1}{16ME} \frac{16\pi^2 \alpha^2}{t^2} 64M^2 EE' \cdot \left[\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \theta/2 \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{16\pi^2} \frac{E'}{M} \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos \theta)} d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.159)$$

ovvero

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{t^2} 4E'^2 \left[\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \theta/2 \right] \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos \theta)} \quad (3.2.160)$$

ovvero, essendo $t = -2EE'(1 - \cos \theta)$, risulta infine

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{E^2(1 - \cos \theta)^2} \left[\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \theta/2 \right] \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \theta/2} \left[\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \theta/2 \right] \frac{1}{1 + \frac{E}{2M} \sin^2 \theta/2} \end{aligned} \quad (3.2.161)$$

e questo è il risultato da confrontare con l'espressione (3.2.145) della sezione d'urto Rutherford (passiamo all'espressione di destra, facendo $\hbar = c = 1$, $p = E$ e $v = c = 1$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \left(\frac{\alpha \hbar c}{pv} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2} \rightarrow \frac{\alpha^2}{(mv)^2} \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2} \quad (3.2.162)$$

Come si vede, anche mandando all'infinito la massa del protone (che corrisponde ad avere il centro di scattering fermo ...) la sezione d'urto che così si ottiene dalla (3.2.161)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta/2}{4E^2 \sin^4 \theta/2} \quad (3.2.163)$$

presenta, al numeratore, il fattore $\cos^2 \theta/2$ che nell'espressione della sezione d'urto Rutherford è assente.

Questo fattore è dovuto al carattere ultrarelativistico dell'elettrone, ovvero al fatto di aver messo $m = 0$.

Infatti, come fu dimostrato N.F. Mott nel 1929, la sezione d'urto di diffusione di un elettrone di energia E e impulso p , nel campo coulombiano di una carica elementare anch'essa puntiforme ma ferma, vale¹⁵

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 E^2}{4p^4 \sin^4 \theta/2} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{E} \right)^2 \sin^2 \theta/2 \right\} \quad (3.2.164)$$

che, evidentemente,

- tende all'espressione (3.2.163) nel limite in cui la massa dell'elettrone sia trascurabile e quindi risulti $E = p$;

¹⁵L. Landau, E. Lifchitz: *Theorie Quantique Relativiste*, 1.ere partie pag 371, Ed.MIR 1972

- tende all'espressione della sezione d'urto Rutherford quando, invece, ci si trovi nella condizione opposta, cioè nella condizione in cui $p \ll E$ per cui possa essere trascurato, nella parentesi graffa, il termine $(\frac{p}{E})^2 \sin^2 \theta / 2$ rispetto a 1, essendo

$$\frac{E^2}{p^4} = \frac{m^2}{(mv)^4} = \frac{1}{(mv^2)^2}$$

Ma vediamo adesso come possiamo arrivare all'espressione della sezione d'urto di Mott e ripartiamo per questo dall'espressione della sezione d'urto differenziale che già conosciamo

$$d\sigma = \frac{1}{4F} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 dLips \quad (3.2.165)$$

ma evitiamo di passare al limite per $m \rightarrow 0$.

Cominciamo a valutare il termine di flusso: abbiamo già visto con la (3.2.148) che, nel riferimento in cui il protone è fermo, risulta

$$F = 2\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2} = 2\sqrt{4E^2M^2 - 4m^2M^2} = 4Mp \quad (3.2.166)$$

Passiamo a considerare, sempre nel riferimento del Laboratorio, dove il protone è e resta fermo, l'elemento di spazio delle fasi invariante: dalla (3.2.145) risulta

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{p' d(-\cos \theta)}{E + M - E' \frac{P}{p'} \cos \theta} \quad (3.2.167)$$

Siccome abbiamo assunto che il protone non subisca rinculo, per l'elettrone l'urto non comporta variazione di energia, cioè $E' = E$, $p' = p$, dunque, nell'ipotesi di urto simmetrico intorno all'asse di scattering e di massa del protone molto maggiore dell'energia dell'elettrone, cioè $M \gg E$, risulta

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{p d\Omega}{E + M - E \cos \theta} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{p}{M} \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos \theta)} d\Omega \\ &\rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \frac{p}{M} d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.168)$$

Veniamo ora all'ultima grandezza che ci manca, cioè a $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$.

Secondo la (3.2.136) risulta

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 = \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 8 [(2p'k')(2pk) + (2p'k)(2pk') - 2m^2(2pp') - 2M^2(2kk') + 8m^2M^2]$$

D'altronde, per la (3.2.135), abbiamo

$$t = -(s - m^2 - M^2)y = -2ME y \Rightarrow y = -\frac{t}{2ME} \quad (3.2.169)$$

e risulta

$$(2pk) = (2p'k') = s - m^2 - M^2 = 2ME \quad (3.2.170)$$

$$(2pk') = (2p'k) = (2pk)(1 - y) = 2ME(1 - y) = 2ME - t \quad (3.2.171)$$

$$(2pp') = 2M^2 - t \quad (3.2.172)$$

$$(2kk') = 2m^2 - t \quad (3.2.173)$$

per cui, sostituendo nella espressione di $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$, si ottiene

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 &= 8 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 [(2ME)^2 + (2ME + t)^2 - 2m^2(2M^2 - t) - 2M^2(2m^2 - t) + 8m^2M^2] = \\ &= 8 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 [(2ME)^2 + (2ME + t)^2 + 2m^2t + 2M^2t] = \\ &= 8 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 [4M^2E^2 + 4M^2E^2(1 + \frac{t}{2ME})^2 + 2m^2t + 2M^2t] = \\ &= 8 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 2M^2 [2E^2 + 2E^2(1 + \frac{t}{2ME})^2 + (\frac{m}{M})^2t + t] \end{aligned} \quad (3.2.174)$$

che nel limite in cui la massa del protone è molto maggiore di E e di m , diventa

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 &= 8 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 2M^2 [2E^2 + 2E^2(1 + \frac{t}{2ME})^2 + (\frac{m}{M})^2t + t] = \\ &\rightarrow 16 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 M^2 [4E^2 + t] \end{aligned} \quad (3.2.175)$$

Sostituendo allora nell'espressione della sezione d'urto differenziale (3.2.165) per F il valore dato dalla (3.2.166), per $d\Phi$ il valore dato dalla (3.2.167) e per $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$ quanto ottenuto con la (3.2.175), si ha

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{16Mp} 16 \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 M^2 [4E^2 + t] \frac{1}{16\pi^2} \frac{p}{M} d\Omega = \\ &= \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{1}{t^2} \frac{M}{p} [4E^2 + t] \frac{p}{M} d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.176)$$

ovvero

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\alpha^2}{t^2} [4E^2 + t] \quad (3.2.177)$$

Ma t è pari a

$$\begin{aligned} t &= (k - k')^2 = (E - E', \vec{p} - \vec{p}')^2 = (0, \vec{p} - \vec{p}')^2 = -2p^2 + 2p^2 \cos \theta = \\ &= -4p^2 \sin^2 \theta/2 \end{aligned} \quad (3.2.178)$$

per cui, sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) &= \frac{\alpha^2}{(-4p^2 \sin^2 \theta/2)^2} 4E^2 \left[1 - \frac{4p^2 \sin^2 \theta/2}{4E^2} \right] \\ &= \frac{\alpha^2 E^2}{4p^4 \sin^4 \theta/2} \left[1 - \left(\frac{p}{E} \right) \sin^2 \theta/2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.179)$$

che è appunto l'espressione della sezione d'urto Mott.

3.3 Lo spin del pione π^+

Oggi sappiamo che i tre pioni sono costituiti da una coppia quark/antiquark della prima generazione (cioè *up* e *down*), e in particolare che risulta

$$|\pi^+ \rangle = |u\bar{d}\rangle, \quad |\pi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \quad |\pi^- \rangle = |d\bar{u}\rangle \quad (3.3.180)$$

Il quark e l'antiquark, che hanno entrambi spin $S = 1/2$, sono legati in uno stato di singoletto di spin e hanno momento angolare orbitale relativo $L = 0$, per cui i pioni hanno, a loro volta, spin nullo¹⁶.

Questo era un fatto messo in evidenza sperimentalmente ben prima che si arrivasse a capire la loro struttura in termini di quarks.

Per questo, si era usato il metodo¹⁷ del *bilancio dettagliato*, che consiste nel confronto fra la sezione d'urto del processo

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d \quad (3.3.181)$$

con quella del processo inverso

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \quad (3.3.182)$$

In entrambi i casi si tratta di un processo di scattering quasi-elastico e, come abbiamo visto, la sezione d'urto differenziale di un generico processo di questo tipo, nel caso in cui lo stato iniziale *non abbia* spin definito e lo spin delle particelle nello stato finale *non venga* osservato, in base alla (2.1.48), può essere scritta nel modo seguente

$$d\sigma = \frac{1}{(2J_a + 1)(2J_b + 1)} \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Omega_{CM} \quad (3.3.183)$$

dove

- $\sqrt{s}$ è la massa invariante del sistema delle due particelle;
- a e b indicano, nel sistema del CM , rispettivamente il modulo dell'impulso delle particelle iniziali e finali;
- J_a e J_b sono gli spin delle due particelle che collidono;

¹⁶Chiaramente lo spin nullo dei pioni, dalla legge di composizione del momento angolare, potrebbe ottenersi anche se i due costituenti fossero legati in uno stato di tripletto di spin e in onda P , cioè con momento angolare relativo $L = 1$.

Questa possibilità è esclusa, però, dalla parità intrinseca del pione, che, come abbiamo visto almeno nel caso del π^0 , risulta essere negativa (il pione è una particella pseudo-scalare): poiché esso è costituito da una coppia particella/antiparticella di Dirac, esso ha comunque parità intrinseca pari a $(-1) \cdot (-1)^L$ e quindi L deve essere pari.

¹⁷Cfr., per esempio, H. Muirhead: *The Physics of elementary Particles*, Pergamon Press 1965, pag. 26.

- $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma di tutti i moduli quadri delle ampiezze invarianti di scattering, relative al processo considerato, fatta su tutti i possibili stati di spin iniziali e finali.

Indicheremo rispettivamente con $\sigma_{\rightarrow}$ e $\sigma_{\leftarrow}$ le sezioni d'urto per il processo diretto e per quello inverso.

Poiché le interazioni forti sono invarianti per *time reversal*, nel caso del processo considerato, che avviene, appunto, via interazione forte, poiché la matrice S soddisfa quindi la relazione $TST^{-1} = S^\dagger$, il modulo quadro degli elementi di matrice per i due decadimenti, *diretto* e *inverso*, sono funzionalmente identici, per cui abbiamo

$$|\overline{\mathcal{M}_{\rightarrow}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_{\leftarrow}}|^2 \quad (3.3.184)$$

quindi, ponendo adesso, per maggior chiarezza

$$\text{processo diretto :} \quad a \equiv p_p; \quad b \equiv p_\pi \quad (3.3.185)$$

$$\text{processo inverso :} \quad a \equiv p_\pi; \quad b \equiv p_p \quad (3.3.186)$$

ecco che dal confronto delle due sezioni d'urto valutate per lo stesso valore di $\sqrt{s}$ (e quindi avendo integrato sugli stessi valori di t , visto che a s fissato anche $t_{\rightarrow} = t_{\leftarrow}$) usando il fatto che $J_p = 1/2$, mentre $J_d = 1$ e tenendo conto infine che lo stato finale, nel caso della reazione "inversa", è fatto da due particelle identiche, che dimezza lo spazio delle fasi, otteniamo

$$\frac{\sigma_{\rightarrow}}{\sigma_{\leftarrow}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{p_\pi}{p_p}}{\frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot (2J+1)} \frac{p_p}{p_\pi}} = \frac{3(2J+1)}{2} \left(\frac{p_\pi}{p_p} \right)^2 \quad (3.3.187)$$

dove J è appunto lo spin ignoto del π^+ .

La prima misura della sezione d'urto del processo diretto fu effettuata da Cartwright¹⁸ e collaboratori nel 1953, ottenendo, per un protone incidente su un bersaglio di idrogeno con energia¹⁹, nel laboratorio, pari a 341 MeV , il valore di

$$\sigma_{\rightarrow} = (1.8 \pm 0.6) \times 10^{-28} \text{ cm}^2 \equiv 0.18 \pm 0.06 \text{ mbarn}$$

¹⁸W.F. Cartwright, C. Richman, M.N. Whitehead, H.A. Wilson: *The production of positive pions by 341-MeV protons on protons* Phys. Rev. 91, 677, (1953)

¹⁹Si osservi che, essendo la massa del deutone pari a $M_d = 1875.6 \text{ MeV}$, quella del protone $M_p = 938.3 \text{ MeV}$ e quella del pione carico pari a $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}$, la soglia della reazione $p + p \rightarrow \pi^+ + d$ si raggiunge per un'energia del protone incidente su bersaglio fisso, pari a

$$2M_p^2 + 2M_p E = (M_d + m_\pi)^2 \Rightarrow E = \frac{(M_d + m_\pi)^2 - 2M_p^2}{2M_p} = 1225.7 \text{ MeV}$$

ovvero per un'energia cinetica del protone pari a $T_{thr} = 287.4 \text{ MeV}$.

L'esperimento di Cartwright operava quindi a poco più di 50 MeV sopra la soglia, a una energia cinetica dei protoni pari a $T_0 = 341 \text{ MeV}$, ovvero a una massa invariante pari a

$$\sqrt{s} = \sqrt{2M_p(M_p + E)} = \sqrt{2M_p(2M_p + T_0)} = \sqrt{4M_p^2 + 2M_p T_0} = 2040.0 \text{ MeV}$$

Da questo conclusero che il processo inverso, valutato per lo stesso valore di massa invariante del sistema, avrebbe dovuto avere una sezione d'urto di

$$\sigma_{\leftarrow} = (3.0 \pm 1.0) \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \equiv 3.0 \pm 1.0 \text{ mbarn}$$

se lo spin del pione fosse stato nullo²⁰, oppure 1/3 di quel valore, in accordo con la (3.3.187), nel caso fosse stato pari a 1, etc

Il confronto con le misure di assorbimento di pioni positivi in deuterio²¹ già effettuate, propendeva decisamente verso un valore nullo dello spin del π^+ .

Questo risultato fu definitivamente stabilito nel 1957 da Cohen²² e collaboratori, i quali, sulla base dei risultati sperimentali sin lì accumulati, poterono concludere che

$$(2J + 1) = 1 \pm 0.1 \quad (3.3.188)$$

a cui corrisponde un impulso del protone nel sistema del CM che è pari a

$$p_p = \frac{\sqrt{(s - 2M_p^2)^2 - 4M_p^4}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s^2 - 4sM_p^2}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s - 4M_p^2}}{2} = \sqrt{\frac{M_p T_0}{2}} = 400 \text{ MeV}/c$$

Circa la reazione inversa $d + \pi^+ \rightarrow p + p$, allo stesso valore di massa invariante, corrisponde un'energia del pione carico su deutone fermo che è pari a

$$s = m_\pi^2 + M_d^2 + 2E_\pi M_d \Rightarrow E_\pi = \frac{s - m_\pi^2 - M_d^2}{2M_d} = 166.4 \text{ MeV}$$

corrispondente a una energia cinetica nel sistema del laboratorio pari a $T_\pi = E_\pi - m_\pi = 26.8 \text{ MeV}$ e a un impulso nel sistema del CM di

$$p_\pi = \frac{\sqrt{(s - m_\pi^2 - M_d^2)^2 - 4m_\pi^2 M_d^2}}{2\sqrt{s}} = 83.3 \text{ MeV}/c$$

per cui il fattore cinematico (per $J = 0$) fra le due sezioni d'urto valeva

$$\frac{\sigma_{\rightarrow}}{\sigma_{\leftarrow}} = \frac{3}{2} \left(\frac{p_\pi}{p_p} \right)^2 = 0.065 \Rightarrow f = \frac{\sigma_{\leftarrow}}{\sigma_{\rightarrow}} = 15.38$$

Al tempo dell'esperimento, le masse non erano note con tutta la precisione con cui le conosciamo oggi, e questo fattore f fu valutato essere pari a 16.7, da cui fu estrapolato il valore di

$$\sigma_{\leftarrow} = (3.0 \pm 1.0) \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ a partire dalla misura di } \sigma_{\rightarrow} = (1.8 \pm 0.6) \times 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

²⁰L'esistenza stessa della reazione implicava, evidentemente, che lo spin del pione fosse comunque intero.

²¹D.L. Clark, A. Roberts, R. Wilson: *Cross section for the reaction $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ and the spin of the π^+ meson* Phys. Rev. 83, 649 (1951)

D.L. Clark, A. Roberts, R. Wilson: *Disintegration of the deuteron by π^+ mesons and the spin of the π^+ meson* Phys. Rev. 85, 523 (1952); i quali avevano misurato $\sigma = (4.5 \pm 0.8) \times 10^{-27} \text{ cm}^2$.

R. Durbin, H. Loar, J. Steinberger: *The absorption of pions by deuterons*

Phys. Rev. 84, 581 (1951); i quali avevano misurato $\sigma = (3.1 \pm 0.3) \times 10^{-27} \text{ cm}^2$.

²²E.R. Cohen, K.M. Crowe, J.M. Dumond: *Fundamental constants of physics* Interscience Publisher, New York, 1957

3.4 Lo scattering quasi-elastico $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$

Ci occuperemo adesso dello scattering quasi-elastico di antineutrino perché, come è noto, fu attraverso questo processo che fu rivelata per la prima volta,

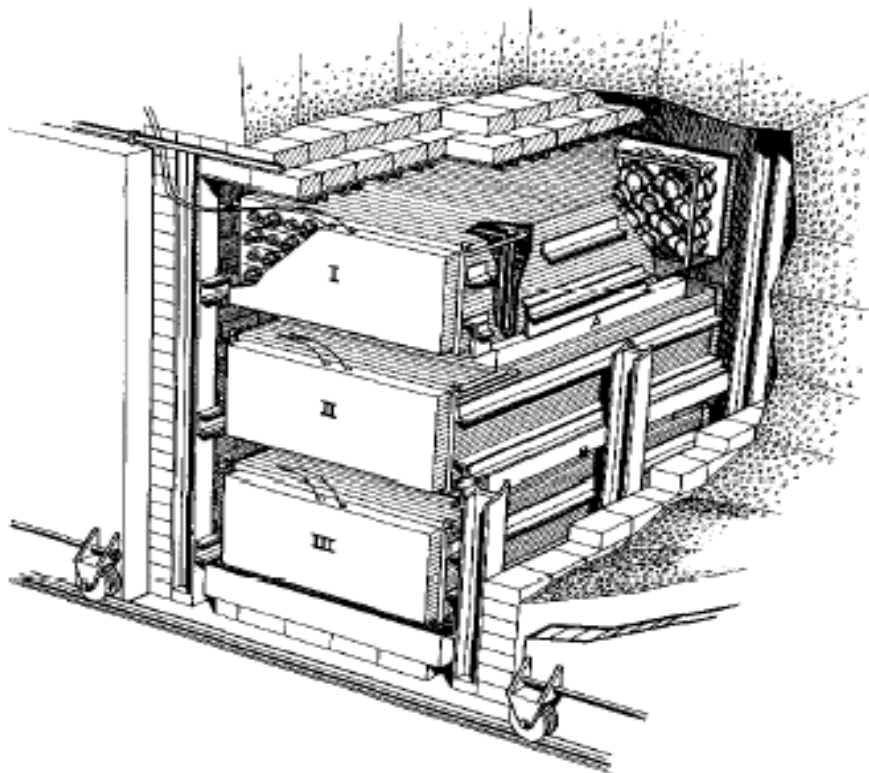


Figura 3.1: *Apparato sperimentale usato da Cowan e Reines*

l'esistenza di questa particella.

L'esperimento che portò alla prima osservazione sperimentale diretta del neutrino (in realtà, dell'antineutrino ...) fu, come è noto, quello di Cowan e Reines²³, i quali osservarono la reazione beta-inversa²⁴

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+ \quad (3.4.189)$$

²³F. Reines, C.L. Cowan jr: *A proposed experiment to detect the free neutrino*, Phys. Rev. 90, 492 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr: *Detection of free neutrino*, Phys. Rev. 92, 830 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr, F.B. Harrison, A.D. McGuire, H.W. Kruse:

Detection of free antineutrino, Phys. Rev. 117, 159 (1960)

²⁴Quanto vale l'energia di soglia che deva avere il neutrino affinché la reazione possa avvenire?

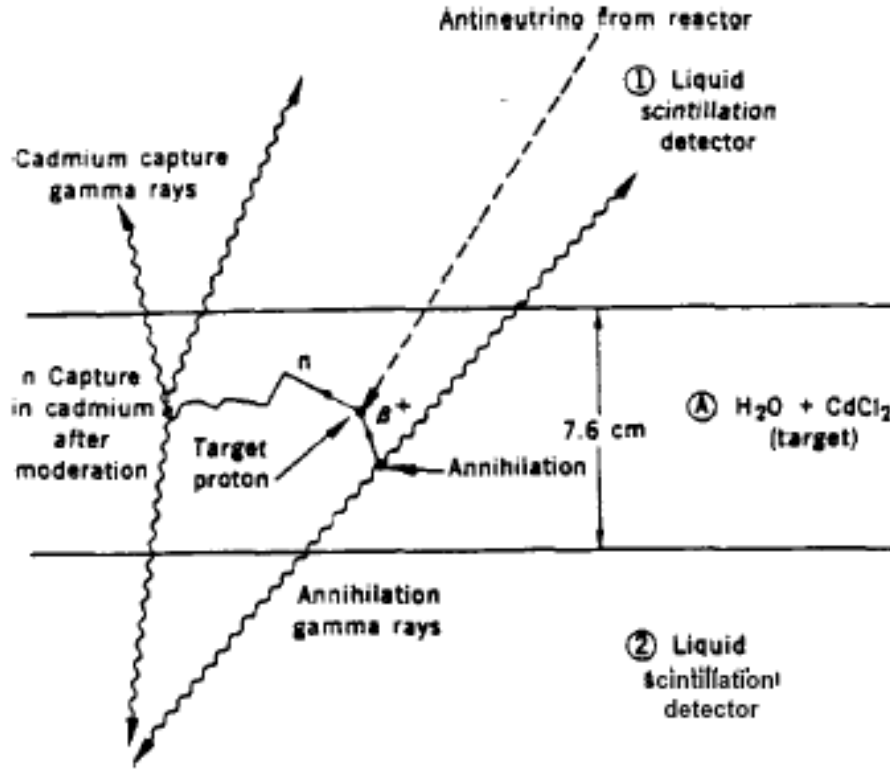


Figura 3.2: Principio di funzionamento dell'esperimento di Cowan e Reines

presso la centrale nucleare di Savannah River, negli USA, in grado di fornire un flusso²⁵ di ben $10^{13} \bar{\nu}/cm^2 \cdot s$ sul bersaglio, costituito da 200 litri di acqua in cui erano disciolti 40 Kg di cloruro di cadmio ($CdCl_2$). Il segnale era costituito dai due gamma da 0.511 MeV di annichilazione del positrone con

²⁵In un processo di fissione neutronica del nucleo ^{235}U , si ottengono tipicamente due nuclei ricchi di neutroni e un paio di neutroni che consentono la prosecuzione della reazione a catena (per es. $^{235}U + n \rightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2n$). I prodotti di fissione danno luogo a decadimenti β di corta vita media (ms), a cascata. In media si hanno circa 6 $\bar{\nu}_e$ di varia energia per ogni fissione e un totale di circa 200 MeV di energia prodotta. Dunque, il numero di antineutrini emessi dal reattore, per secondo, vale

$$N_{\bar{\nu}} \approx 6 N_{fis} = \frac{6 P_{th}}{2 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}$$

dove P_{th} è la sua potenza termica. Assumendo $P_{th} \approx 3 GW$, ne segue che, nell'intero angolo solido, vengono emessi dell'ordine di $\frac{6 \times 3 \cdot 10^9}{3.2 \cdot 10^{-11}} = 5.6 \cdot 10^{20}$ antineutrini per secondo. A una distanza di 20 m dal reattore, il loro flusso $F_{\bar{\nu}}$ vale quindi

$$F_{\bar{\nu}} = \frac{5.6 \cdot 10^{20}}{4\pi(2000)^2} \approx 1.1 \cdot 10^{13} \bar{\nu}/(cm^2 \cdot s)$$

un elettrone del mezzo, osservati in coincidenza ritardata (circa $30 \mu\text{sec}$) con i gamma emessi dal nucleo di Cadmio che catturava il neutrone termalizzato.

Il rivelatore era costituito da 1400 litri di scintillatore liquido disposto intorno al bersaglio, visto da circa un centinaio di fotomoltiplicatori.

Reines e Cowan osservarono che la differenza di conteggi "reattore on" - "reattore off" era di 3 ± 0.2 conteggi all'ora.

Da questo numero di conteggi essi dedussero²⁶ una sezione d'urto totale pari a

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12^{+7}_{-4} \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.4.191)$$

da confrontare con un valore atteso (ricavato a partire dalla teoria originale di Fermi, prima della scoperta della violazione di parità) di

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{th} = (5 \pm 1) \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.4.192)$$

²⁶Il modo per estrarre il valore della sezione d'urto totale del processo si basa sul fatto che il rate di eventi di scattering che si producono è dato, in generale, dall'espressione

$$n = I \sigma N$$

dove I misura il flusso delle particelle incidenti (gli antineutrini, nel nostro caso) ed N rappresenta il numero di particelle bersaglio (protoni, nel caso studiato).

Abbiamo detto che venivano osservati sperimentalmente

$$n \approx 3 \text{ eventi/ora} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ ev/s}$$

mentre abbiamo prima valutato che il flusso degli antineutrini valeva

$$I = 1.1 \times 10^{13} \bar{\nu}/(\text{cm}^2 \text{ s}).$$

Circa il numero di protoni bersaglio, essendo costituito da 200 l di acqua, esso valeva

$$N = 200 \times 1000 \times \frac{2}{18} \times 6.0 \cdot 10^{23} \approx 1.3 \cdot 10^{28}$$

per cui ne segue che

$$\sigma = \frac{n}{I \times N} = \frac{0.8 \cdot 10^{-3}}{1.1 \cdot 10^{13} \times 1.3 \cdot 10^{28}} \approx 0.5 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.4.190)$$

Questo risultato non coincide con il valore di sezione d'urto a cui giunsero Cowan e Reines perchè non abbiamo tenuto conto né dell'accettanza effettiva dell'apparato sperimentale né dell'efficienza di rivelare l'evento stesso. Queste due quantità hanno entrambe l'effetto di aumentare il valore della sezione d'urto calcolato in quanto l'accettanza A diminuisce il numero di centri bersaglio mentre l'efficienza ϵ stabilisce che il numero di eventi effettivamente realizzati è maggiore di quello osservato, ovvero

$$\sigma = \frac{n/\epsilon}{I \times N \cdot A}$$

L'effetto combinato delle due quantità conduce dal valore (3.4.190) a quanto essi valutarono, cioè alla (3.4.191).

Procediamo adesso al calcolo esplicito di questa sezione d'urto. Tratteremo per questo la reazione di scattering quasi-elastico

$$\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n \quad (3.4.193)$$

nell'assunzione che sia il protone come il neutrone possano essere considerati come particelle di Dirac senza struttura interna.

Data la bassa energia²⁷ del neutrino e quindi il basso momento trasferito, la teoria di Fermi è ampiamente sufficiente per descrivere il processo in questione.

Nell'ambito della teoria di Fermi (corretta per la violazione di parità), il termine della Lagrangiana di interazione che descrive il processo di scattering (3.4.193) è il seguente

$$\mathcal{L}_F(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(J_{(had)}^\mu(x) J_\mu^{\dagger(lept)}(x) + J_{(had)}^{\mu\dagger}(x) J_\mu^{(lept)}(x) \right) \quad (3.4.194)$$

dove, con ovvio significato di simboli, si è posto

$$J_\mu^{(lept)}(x) = \bar{\psi}_\nu(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_l(x) \leftrightarrow J_\mu^{\dagger(lept)}(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x)$$

mentre per la parte adronica, nell'assunzione appunto che si possano trattare sia il protone che il neutrone come particelle di Dirac senza struttura, analogamente abbiamo

$$J_{(had)}^\mu(x) = \bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_n(x) \leftrightarrow J_{(had)}^{\mu\dagger}(x) = \bar{\psi}_n(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_p(x)$$

La sezione d'urto in un generico processo quasi-elastico, come si è visto precedentemente, nell'ipotesi di non osservare gli stati di spin, è data da

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \frac{1}{\mathcal{F}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \quad (3.4.195)$$

dove

- S_i sono gli spin delle particelle presenti nello stato iniziale;
- $\mathcal{F}$ è il termine di flusso, legato alla massa invariante $\sqrt{s}$ del sistema e alle due masse delle particelle nello stato iniziale $M_A \equiv m_\nu$ e $M_B \equiv M_p$ dalla ben nota relazione

$$\mathcal{F} = 2\sqrt{(s - m_\nu^2 - M_p^2)^2 - 4m_\nu^2 M_p^2} \quad (3.4.196)$$

che, nel nostro caso in cui la massa dell'anti-neutrino viene considerata nulla, risulta

$$\mathcal{F} \rightarrow 2(s - M_p^2) \quad (3.4.197)$$

²⁷Il limite di applicabilità della teoria di Fermi, come è noto, si raggiunge quando il momento trasferito della reazione diventa confrontabile con la massa del bosone W .

- $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti della reazione;
- $d\Phi$ è lo spazio delle fasi invariante che, nel sistema del CM , come abbiamo già visto, è dato da

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2s} d\Omega_{CM} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} d(-\cos\theta) \quad (3.4.198) \end{aligned}$$

essendo $\theta \equiv \theta_{CM}$ l'angolo (nel CM) fra la direzione dell'antineutrino incidente e quella del positrone uscente e avendo integrato sull'angolo azimutale.

Tenendo quindi conto che di stati di elicità per l'antineutrino assumiamo che ne esista uno solo possibile, abbiamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2} \frac{1}{2(s - M_p^2)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} d(-\cos\theta) = \\ &= \frac{1}{64\pi} \frac{1}{s(s - M_p^2)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2} d(-\cos\theta) \quad (3.4.199) \end{aligned}$$

ovvero, indicando al solito con a e b , rispettivamente, i moduli degli impulsi nel CM delle due particelle nello stato iniziale e finale, poiché

$$a = \frac{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2\sqrt{s}} \rightarrow \frac{s - M_p^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.4.200)$$

$$b = \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2\sqrt{s}} \rightarrow \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.4.201)$$

risulta, come abbiamo già visto trattando la misura dello spin del pione attraverso il metodo del bilancio dettagliato, che

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi s} \frac{b}{a} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d(-\cos\theta) \quad (3.4.202)$$

Passiamo dunque a valutare $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, cioè la somma dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti, effettuata su tutti gli stati di spin delle particelle presenti nello stato iniziale e finale.

Assumiamo dunque di formalizzare la reazione nel modo seguente

$$\bar{\nu}(Q, b) + p(P, r) \rightarrow e^+(q, a) + n(p, s) \quad (3.4.203)$$

ovvero indichiamo, rispettivamente, con $(p, s), (P, r)$ il quadrimpulso e lo spin per il neutrone e il protone, e con $(q, a), (Q, b)$ quelli del positrone e dell'antineutrino. Al primo ordine perturbativo, come sappiamo, si ha

$$\mathcal{M} = \langle out | \mathcal{L}(0) | in \rangle \quad (3.4.204)$$

ovvero, poiché l'unico termine della lagrangiana in grado di fornire un contributo non nullo alla (3.4.204) è solo il secondo termine che compare nella (3.4.194), ecco che, con ovvio significato dei simboli, esplicitamente risulta²⁸

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right] \quad (3.4.218)$$

²⁸Abbiamo infatti, dalla definizione, che

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle n(p, s); e^+(q, a) | \bar{\psi}_n(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_p(0) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{\psi}_\nu(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e(0) | \bar{\nu}(Q, b); p(P, r) \rangle \equiv \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle n(p, s); e^+(q, a) | \bar{n}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) p(0) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{\nu}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(0) | \bar{\nu}(Q, b); p(P, r) \rangle \end{aligned} \quad (3.4.205)$$

dove abbiamo usato il nome delle particelle per indicare il campo che le descrive.

Facendo intervenire adesso gli operatori di creazione/distruzione relativi agli stati delle particelle presenti in $|in\rangle$ e $|out\rangle$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \Omega | a_n^{(s)}(p) b_e^{(a)}(q) \bar{n}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) p(0) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{\nu}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(0) b_\nu^{\dagger(b)}(Q) a_p^{\dagger(r)}(P) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.4.206)$$

Ma gli operatori così introdotti, possono essere "spostati" liberamente all'interno del prodotto operatoriale di cui sopra fino a quando alla loro destra (se operatori di annichilazione) o alla loro sinistra (se operatori di creazione) si trova proprio il campo a cui questi si riferiscono, con cui, naturalmente, essi non commutano. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \Omega | a_n^{(s)}(p) \bar{n}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) p(0) a_p^{\dagger(r)}(P) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{\nu}(0) b_\nu^{\dagger(b)}(Q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b_e^{(a)}(q) e(0) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.4.207)$$

In questo modo abbiamo riordinato l'espressione operatoriale di cui occorre valutare il valor medio sullo stato di vuoto, disponendo gli operatori di creazione/distruzione relativi agli stati $|in\rangle$ e $|out\rangle$ a fianco dei campi a cui essi si riferiscono.

Consideriamo adesso, per un generico campo di Dirac ψ , il seguente operatore $a^{(s)}(p)\bar{\psi}(0)$. Poiché il campo deve essere valutato in $x = 0$, gli esponenziali che descrivono l'onda piana coincidono semplicemente con l'unità, per cui abbiamo

$$\begin{aligned}
a^{(s)}(p)\bar{\psi}(0) &= a^{(s)}(p) \sum_j \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} [b^{(j)}(q)\bar{v}^{(j)}(q) + a^{\dagger(j)}(q)\bar{u}^{(j)}(q)] = \\
&= - \sum_j \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} [b^{(j)}(q)\bar{v}^{(j)}(q) + a^{\dagger(j)}(q)\bar{u}^{(j)}(q)] a^{(s)}(p) + \\
&+ \sum_j \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} (2\pi)^3 \delta_{js} 2E_q \delta(\vec{p} - \vec{q}) \bar{u}^{(j)}(q) = \\
&= -\bar{\psi}(0) a^{(s)}(p) + \bar{u}^{(s)}(p)
\end{aligned} \tag{3.4.208}$$

In modo del tutto simile si ottiene poi che

$$b^{(s)}(p)\psi(0) = -\psi(0)b^{(s)}(p) + v^{(s)}(p) \tag{3.4.209}$$

$$\psi(0)a^{\dagger(s)}(p) = -\psi(0)a^{\dagger(s)}(p) + u^{(s)}(p) \tag{3.4.210}$$

$$\bar{\psi}(0)b^{\dagger(s)}(p) = -b^{\dagger(s)}(p)\bar{\psi}(0) + \bar{v}^{(s)}(p) \tag{3.4.211}$$

Consideriamo ora i nuovi termini che hanno l'operatore di distruzione a oppure b (che indicheremo genericamente con d ...) a destra del campo di riferimento. L'espressione a cui danno luogo è dunque del tipo seguente (con A e B operatori opportuni ...)

$$< \Omega | A \cdot d^{(s)}(p) \cdot B | \Omega > \tag{3.4.212}$$

dove l'operatore di distruzione d commuta con l'operatore B che, per quanto sopra, può riferirsi solo ad altre particelle diverse da quella a cui si riferisce d stesso. Dunque

$$< \Omega | A \cdot d^{(s)}(p) \cdot B | \Omega > = < \Omega | A \cdot B \cdot d^{(s)}(p) | \Omega > = 0 \tag{3.4.213}$$

Per quanto riguarda gli operatori di creazione, indicati genericamente con $c^\dagger$ senza precisare, quindi, se si riferiscono alla particella o all'antiparticella, accade qualcosa di simile. Essi danno luogo a termini del tipo

$$< \Omega | A \cdot c^{\dagger(s)}(p) \cdot B | \Omega > \tag{3.4.214}$$

e commutano con l'operatore alla loro sinistra, per cui si ottiene ancora

$$< \Omega | A \cdot c^{\dagger(s)}(p) \cdot B | \Omega > = < \Omega | c^{\dagger(s)}(p) \cdot A \cdot B | \Omega > = 0 \tag{3.4.215}$$

In conclusione, abbiamo

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P)] \cdot [\bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q)] \tag{3.4.216}$$

che prova la validità della (3.4.218).

E' interessante adesso confrontare quanto ottenuto con la densità lagrangiana $\mathcal{L}(0)$ associata al processo studiato

$$\mathcal{L}(0) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_n(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_p(0) \cdot \bar{\psi}_\nu(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e(0) \tag{3.4.217}$$

Possiamo renderci così conto come la struttura dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$ rifletta perfettamente quello della densità lagrangiana $\mathcal{L}(0)$, con la regola per cui

- là dove in $\mathcal{L}(0)$ ci sono i campi, in $\mathcal{M}$ vanno gli spinori;
- là dove in $\mathcal{L}(0)$ ci sono i campi barrati, in $\mathcal{M}$ vanno gli spinori barrati;
- se nel processo considerato il campo o il suo barrato descrivono particelle, vanno, rispettivamente, gli spinori u o $\bar{u}$;
- se nel processo considerato il campo o il suo barrato descrivono antiparticelle, vanno, rispettivamente, gli spinori v o $\bar{v}$.

e quindi che (si ricordi che ciascun termine in parentesi quadra è un c-numero)

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \sum_{a,b,r,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right]^* \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right]^* \equiv \\ &\equiv \frac{G_F^2}{2} L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.4.219)$$

dove abbiamo definito i due tensori leptonico $L_{\alpha\beta}$ e adronico $W^{\alpha\beta}$ nel modo seguente

$$L_{\alpha\beta} \equiv \sum_{a,b} \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right] \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right]^* \quad (3.4.220)$$

$$W^{\alpha\beta} \equiv \sum_{r,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right]^* \quad (3.4.221)$$

Iniziamo calcolando il tensore leptonico $L_{\alpha\beta}$.

Siccome, come si è già osservato, ogni quantità entro parentesi quadra nella (3.4.220) è un c-numero, ne segue che ciascuna di queste quantità complesse può essere vista anche come l'unico elemento di una matrice 1×1 , e dunque essa coinciderà con la traccia della matrice stessa.

Quanto poi alla coniugazione complessa di una tale quantità, essa può anche essere vista come la coniugazione hermitiana della matrice 1×1 corrispondente, per cui possiamo scrivere, in definitiva, che

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &\equiv Tr \left\{ \sum_{a,b} \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right] \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right]^\dagger \right\} = \\ &= Tr \left\{ \sum_{a,b} \bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \cdot v_e^{\dagger(a)}(q) (1 - \gamma_5^\dagger) \gamma_\beta^\dagger \bar{\nu}_\nu^{\dagger(b)}(Q) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.222)$$

ma, come ben sappiamo

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v^\dagger \gamma^0; \quad (\gamma^0)^2 = I; \quad \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu; \quad \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger; \quad (\bar{v})^\dagger = \gamma^0 v \\ \gamma^0 \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma^0; \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \end{aligned}$$

per cui, sostituendo, si ha

$$L_{\alpha\beta} = Tr \left\{ \sum_{a,b} \bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \cdot \bar{v}_e^{(a)}(q) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta v_\nu^{(b)}(Q) \right\} \quad (3.4.223)$$

e quindi, usando la proprietà della traccia per cui $Tr(AB...CD) = Tr(DAB...C)$, otteniamo²⁹

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= Tr \left\{ \left(\sum_b v_\nu^{(b)}(Q) \bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \right) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \left(\sum_a v_e^{(a)}(q) \bar{v}_e^{(a)}(q) \right) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \right\} = \\
&= Tr \{ (\not{Q} - m_\nu) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\not{q} - m_e) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} = \\
&= Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta - m_\nu \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta - \\
&\quad - m_e \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta + m_\nu m_e \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} \quad (3.4.224)
\end{aligned}$$

Gli ultimi due contributi sono evidentemente nulli, poiché $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 0$. Anche il secondo termine della somma, proporzionale a m_ν , è nullo e non solo perché abbiamo assunto $m_\nu = 0$, infatti risulta

$$\begin{aligned}
Tr \{ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} &= Tr \{ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Tr \{ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = 2 Tr \{ \gamma_\alpha \not{q} \gamma_\beta - \gamma_\alpha \gamma_5 \not{q} \gamma_\beta \} \quad (3.4.225)
\end{aligned}$$

e la traccia del prodotto di un numero dispari di γ^μ è nulla.

Dunque, in definitiva, abbiamo

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} = \\
&= Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha \not{q} \gamma_\beta \} - 2 Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha \gamma_5 \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 \not{Q}^\sigma \not{q}^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \} - 2 \not{Q}^\sigma \not{q}^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\tau \gamma_\beta \} \quad (3.4.226)
\end{aligned}$$

ma, come è dimostrato in Appendice, risulta

$$Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \} = 4 (\delta_{\sigma\alpha} \delta_{\tau\beta} + \delta_{\sigma\beta} \delta_{\alpha\tau} - \delta_{\sigma\tau} \delta_{\alpha\beta}) \quad (3.4.227)$$

$$Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\tau \gamma_\beta \} = Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \gamma_5 \} = 4i \epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \quad (3.4.228)$$

per cui, in definitiva, abbiamo ($\epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}$)

$$L_{\alpha\beta} = 8 [Q_\alpha q_\beta + Q_\beta q_\alpha - (Q \cdot q) \delta_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} Q^\sigma q^\tau] \quad (3.4.229)$$

dove Q è il quadrimpulso dell'antineutrino mentre q è quello del positrone.

Veniamo adesso al tensore adronico e procediamo nel solito modo: si ha

$$\begin{aligned}
W^{\alpha\beta} &= \sum_{r,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \cdot \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right]^* = \\
&= \sum_{r,s} Tr \left\{ \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \cdot \left[\bar{u}_p^{(r)}(P) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta u_n^{(s)}(p) \right] \right\} = \\
&= Tr \left\{ \left(\sum_s u_n^{(s)}(p) \bar{u}_n^{(s)}(p) \right) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \left(\sum_r u_p^{(r)}(P) \bar{u}_p^{(r)}(P) \right) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} = \\
&= Tr \left\{ (\not{p} + M_n) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M_p) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} \quad (3.4.230)
\end{aligned}$$

²⁹Si ricordi che, in generale, per spinori di Dirac, risulta $\sum_r v^{(r)}(p) \bar{v}^{(r)}(p) = \not{p} - m$ mentre, $\sum_r u^{(r)}(p) \bar{u}^{(r)}(p) = \not{p} + m$.

da cui, confrontando con quanto ottenuto per il tensore leptónico, si ottiene immediatamente

$$W^{\alpha\beta} = 8 \left[p^\alpha P^\beta + p^\beta P^\alpha - (p \cdot P) \delta^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} p_\eta P_\rho \right] \quad (3.4.231)$$

dove P è il quadrimpulso del protone e p quello del neutrone.

Sia nel caso del tensore leptónico che in quello del tensore adronico, abbiamo che la parte reale è simmetrica mentre la parte immaginaria risulta antisimmetrica: evidentemente, nella contrazione dei due tensori, le due parte reali si contrarranno fra loro e così pure le due parte immaginarie, ma non potranno esserci³⁰ termini misti.

Osserviamo altresì che i tensori così ottenuti *non* contengono termini proporzionali alle masse delle particelle coinvolte, ma dipendono solo dai loro quadrimpulsi. Risulta

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{2} 64 \left[Q_\alpha q_\beta + Q_\beta q_\alpha - (Q \cdot q) \delta_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} Q^\sigma q^\tau \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[p^\alpha P^\beta + p^\beta P^\alpha - (p \cdot P) \delta^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} p_\eta P_\rho \right] = \\ &= 32 G_F^2 [(Qp)(qP) + (QP)(qp) - (pP)(qQ) + \\ &\quad + (QP)(qp) + (Qp)(qP) - (pP)(qQ) - \\ &\quad - (Qq)(pP) - (Qq)(pP) + 4(pP)(qQ) - \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} p_\eta P_\rho Q^\sigma q^\tau] \end{aligned} \quad (3.4.232)$$

Tenendo conto che

$$\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} = -2 (\delta_\sigma^\eta \delta_\tau^\rho - \delta_\tau^\eta \delta_\sigma^\rho) \quad (3.4.233)$$

abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 32 G_F^2 [2(Qp)(qP) + 2(QP)(qp) + 2p_\eta P_\rho Q^\sigma q^\tau (\delta_\sigma^\eta \delta_\tau^\rho - \delta_\tau^\eta \delta_\sigma^\rho)] = \\ &= 32 G_F^2 [2(Qp)(qP) + 2(QP)(qp) + 2(Qp)(qP) - 2(QP)(qp)] = \\ &= 128 G_F^2 (pQ)(qP) \end{aligned} \quad (3.4.234)$$

Sostituendo dunque la (3.4.234) nell'espressione della sezione d'urto differenziale

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{64\pi s} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{s - M_p^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 (-d \cos \theta) = \\ &= \frac{1}{64\pi s} \frac{b}{a} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d(-\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.4.235)$$

abbiamo quindi

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{2\pi s} \frac{b}{a} (2pQ)(2Pq) d(-\cos \theta) \quad (3.4.236)$$

³⁰Termini misti sarebbero immaginari e si vede male come questi potrebbero esistere in un modulo quadro ... !

Per questo tipo di processo, però, è più utile usare, al posto della variabile $\cos \theta \equiv \cos \theta_{CM}$, la variabile³¹ y che abbiamo introdotto attraverso la (3.1.42) e per la quale abbiamo dimostrato che, a s fissato, risulta

$$d(-\cos \theta) = \frac{1}{\mathcal{B}} dy; \quad \mathcal{A} - \mathcal{B} \leq y \leq \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad (3.4.239)$$

dove, nel caso attuale

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 - \frac{(s + m_e^2 - M_n^2)(s + M_p^2 - m_\nu^2)}{2s(s - M_p^2 - m_\nu^2)} = \\ &\rightarrow 1 - \frac{(s + m_e^2 - M_n^2)(s + M_p^2)}{2s(s - M_p^2)} \end{aligned} \quad (3.4.240)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2} \sqrt{(s - M_p^2 - m_\nu^2)^2 - 4M_p^2 m_\nu^2}}{2s(s - M_p^2 - m_\nu^2)} = \\ &= \frac{2ab}{s - M_p^2 - m_\nu^2} \rightarrow \frac{2ab}{s - M_p^2} \end{aligned} \quad (3.4.241)$$

essendo a e b dati dalle (3.4.200) e (3.4.201).

Le semplificazioni dipendono dal fatto che abbiamo assunto $m_\nu = 0$.

In termini di questa variabile, abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy} &= \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{b}{s} \frac{1}{a} (2pQ)(2Pq) \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{b}{s} \frac{s - M_p^2}{2ab} (2pQ)(2Pq) = \\ &= \frac{G_F^2}{4\pi} \frac{s - M_p^2}{s} \frac{1}{a^2} (2pQ)(2Pq) = \frac{G_F^2}{4\pi} \frac{s - M_p^2}{(s - M_p^2)^2} 4s (2pQ)(2Pq) = \\ &= \frac{G_F^2}{\pi} \frac{1}{(s - M_p^2)} (2pQ)(2Pq) \end{aligned} \quad (3.4.242)$$

D'altronde

$$y = \frac{2(PQ) - 2(Pq)}{2(PQ)} = 1 - \frac{2(Pq)}{2(PQ)} \Rightarrow 2(Pq) = 2(PQ)(1 - y) \quad (3.4.243)$$

³¹Secondo la definizione, la variabile y , che è scalare sotto il gruppo di Lorentz, come si è visto è data da

$$y = \frac{P(Q - q)}{PQ} \quad (3.4.237)$$

Nel riferimento del Laboratorio, dove il protone può essere considerato fermo, essa vale dunque

$$y = \frac{M_p(E_\nu - E_e)}{M_p E_\nu} = \frac{E_\nu - E_e}{E_\nu} \quad (3.4.238)$$

ovvero essa rappresenta proprio la frazione di energia leptonica che viene trasferita al sistema adronico, calcolata nel riferimento in cui l'adrone che subisce l'urto è inizialmente in quiete.

ma

$$s = (P + Q)^2 = 2(PQ) + M_p^2 \quad (3.4.244)$$

e dunque

$$2(Pq) = (s - M_p^2)(1 - y) \quad (3.4.245)$$

per cui abbiamo infine

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} (1 - y) (2pQ) \quad (3.4.246)$$

Fino a questo punto non abbiamo fatto approssimazioni, se non quella di considerare neutrone e protone come particelle di Dirac senza struttura interna e assumere massa nulla per il neutrino. D'altronde

$$\begin{aligned} P + Q &= p + q \Rightarrow P - q = p - Q \Rightarrow \\ \Rightarrow M_p^2 + m_e^2 - 2(Pq) &= M_n^2 - 2(pQ) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(pQ) &= M_n^2 - M_p^2 - m_e^2 + 2(Pq) \end{aligned} \quad (3.4.247)$$

per cui, se confondiamo adesso la massa del protone con quella del neutrone e trascuriamo del tutto la massa dell'elettrone, ecco che $(Pq) = (Qp)$ e dunque risulta

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} (1 - y)^2 (s - M^2) \quad (3.4.248)$$

dove M è appunto la massa del nucleone.

Volendo adesso determinare la sezione d'urto totale relativa al processo di scattering in esame, occorre evidentemente integrare la (3.4.248) fra gli estremi definiti nella (3.4.239).

Nell'approssimazione in cui si trascurano le masse leptoniche e si confondono fra loro quelle adroniche, risulta

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + m_e^2 - M_n^2)(s + M_p^2 - m_\nu^2)}{2s(s - M_p^2 - m_\nu^2)} \rightarrow 1 - \frac{s + M^2}{2s} = \frac{s - M^2}{2s} \quad (3.4.249)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} \rightarrow \frac{s - M^2}{2s} \quad (3.4.250)$$

e dunque l'integrazione in y va fatta fra $\mathcal{A} - \mathcal{B} = 0$ e $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1 - \frac{M^2}{s}$.

Ma

$$\begin{aligned} \int_0^{1 - \frac{M^2}{s}} (1 - y)^2 dy &= \int_{\frac{M^2}{s}}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{M^2}{s} \right)^3 \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{M^2}{s} \right) \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \\ &= \frac{s - M^2}{3s} \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.251)$$

per cui risulta che

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - M^2)^2}{3s} \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \quad (3.4.252)$$

Nel caso del processo studiato da Cowan e Reines, l'energia E_ν del neutrino (nel sistema del laboratorio) era dell'ordine di alcuni MeV , quindi certamente grande rispetto alla massa dell'elettrone ma molto minore di quella del nucleone.

In questo caso (limite di bassa energia), essendo

$$s = 2E_\nu M + M^2 \quad \Rightarrow \quad s - M^2 = 2E_\nu M \quad (3.4.253)$$

risulta

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) &= \frac{G_F^2}{\pi} \frac{4E_\nu^2 M^2}{3s} \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \approx \\ &\approx \frac{G_F^2}{\pi} 4E_\nu^2 \end{aligned} \quad (3.4.254)$$

dove abbiamo usato il fatto che, in questa approssimazione $M^2/s \approx 1$. Numericamente abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) &\approx \frac{G_F^2}{\pi} 4E_\nu^2 \\ &= \frac{(1.166 \times 10^{-5})^2}{\pi} \cdot 4 \times 10^{-6} \left(\frac{E_\nu}{1 MeV} \right)^2 GeV^{-2} = \\ &= 1.73 \times 10^{-16} \left(\frac{E_\nu}{1 MeV} \right)^2 GeV^{-2} \end{aligned} \quad (3.4.255)$$

Volendo esprimere la sezione d'urto totale σ in cm^2 , occorre moltiplicare l'espressione precedente per $(\hbar c)^2$: ricordando che

$$\hbar c = 197.327 MeV \cdot fm = 0.197 \times 10^{-13} GeV \cdot cm$$

otteniamo infine

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) &= 1.73 \times 10^{-16} \cdot (0.197 \times 10^{-13})^2 \left(\frac{E_\nu}{1 MeV} \right)^2 = \\ &= 6.72 \times 10^{-44} \left(\frac{E_\nu}{1 MeV} \right)^2 cm^2 \end{aligned} \quad (3.4.256)$$

in buon accordo con il valore (3.4.191) trovato da Cowan e Reines, cioè

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12_{-4}^{+7} \cdot 10^{-44} cm^2 \quad (3.4.257)$$

Va comunque detto che, in realtà, nemmeno nel caso dell'urto anelastico a bassa energia, quando la lunghezza d'onda di De Broglie del neutrino è comunque ancora molto maggiore delle dimensioni del nucleone, è lecito trascurarne la struttura interna. L'espressione del tensore $W^{\alpha\beta}$ ha altri contributi oltre a quelli visti in precedenza, e anche quelli legati alla parte vettoriale e assiale della corrente dipendono poi da fattori di forma che sono funzione del momento trasferito.

Poi, nel limite di alta energia ($s \gg M^2$), dove l'espressione della sezione d'urto da noi calcolata fornirebbe

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) \approx \frac{G_F^2}{3\pi} s = \frac{G_F^2}{3\pi} 2EM \quad (3.4.258)$$

occorre tenere conto che l'urto avviene sui quarks costituenti (di *valenza* e su quelli virtuali (del *mare*): si parla, in questo caso, di Deep Inelastic Scattering (*DIS*) e la sua trattazione va oltre gli scopi di questo Corso.

E' utile, ora, prima di lasciare l'argomento delle interazioni di neutrino/antineutrino, riprendere la relazione trovata per il modulo quadro dell'elemento di matrice (3.4.234)

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 128 G_F^2 (pQ)(qP) \quad (3.4.259)$$

relativo al processo³²

$$\bar{\nu}(Q) + p(P) \rightarrow e^+(q) + n(p) \quad (3.4.260)$$

che riscriviamo nel modo seguente

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 128 G_F^2 (n \cdot \nu)(e \cdot p) \quad (3.4.261)$$

in modo da mettere in evidenza il tipo di particella a cui il quadrimpulso si riferisce.

Questo risultato, come abbiamo visto, è determinato univocamente dal termine nella densità lagrangiana di interazione rilevante per la descrizione del processo considerato che, nel caso dello scattering di Cowan e Reines, sappiamo essere il seguente:

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_n(0)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_p(0)) (\bar{\psi}_\nu(0)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_e(0)) \quad (3.4.262)$$

E' facile adesso convincersi che, se indichiamo con w gli spinori u o v associati alle varie particelle, per qualunque processo descritto dalla (3.4.262), la struttura dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$ sarà comunque del tipo seguente

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{w}_n\gamma^\mu(1-\gamma_5)w_p) (\bar{w}_\nu\gamma_\mu(1-\gamma_5)w_e) \quad (3.4.263)$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo ommesso sia la dipendenza degli spinori dall'impulso che dallo spin.

Siccome abbiamo visto che, quanto al valore di $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, non conta se gli spinori sono di tipo u oppure v perché l'unica differenza che questo comporta è quella relativa ai termini proporzionali alle masse che non entrano nel risultato finale, ecco che possiamo concludere che, per un generico termine di interazione del tipo³³

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_A\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_B) (\bar{\psi}_C\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_D) \quad (3.4.265)$$

³²Ricordiamo che per il calcolo di $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ si somma sulle variabili di spin e per questo non le indichiamo nella reazione.

³³Confrontando la (3.4.262) con la (3.4.265) è facile capire che una reazione descritta dalla (3.4.265) è proprio

$$\bar{C} + B \rightarrow \bar{D} + A \quad (3.4.264)$$

avremo comunque che

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 128 G_F^2 (AC) (BD) \quad (3.4.266)$$

dove A , B , C , e D sono i quadrimpulsi associati alle particelle corrispondenti.

D'altronde sappiamo che, partendo dalla (3.4.264), per la simmetria di crossing la densità lagrangiana (3.4.265) descrive anche la dinamica³⁴ di tutti i seguenti processi di scattering/decadimento

$$B + D \rightarrow A + C; \quad D \rightarrow A + C + \bar{B} \quad (3.4.267)$$

$$\bar{A} + D \rightarrow \bar{B} + C; \quad B \rightarrow A + C + \bar{D} \quad (3.4.268)$$

$$B + \bar{C} \rightarrow A + \bar{D}; \quad \bar{A} \rightarrow \bar{B} + C + \bar{D} \quad (3.4.269)$$

$$\bar{A} + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + \bar{D}; \quad \bar{C} \rightarrow A + \bar{B} + \bar{D} \quad (3.4.270)$$

per i quali, quindi, varrà comunque la (3.4.266).

Si osservi, infine, che il risultato (3.4.266) continua a valere anche nel caso di processi coniugati di carica rispetto a quelli di cui alle (3.4.267)-(3.4.270) in quanto descritti dal termine di interazione hermitiano coniugato di (3.4.265), ovvero

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_B \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_A) (\bar{\psi}_D \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_C) \quad (3.4.271)$$

Queste considerazioni, però, *non* implicano affatto, per esempio, che le sezioni d'urto dei processi indicati sopra, anche a s fissato, siano tutte uguali. Per rendercene conto, riprendiamo l'espressione (3.4.242) per la sezione d'urto differenziale di antineutrino su protone con

$$M_n = M_p \equiv M; \quad m_e = m_\nu = 0$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dy} \right)_{\bar{\nu}} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{1}{(s - M^2)} (2pQ)(2Pq) \quad (3.4.272)$$

dove Q , P , q e p sono, rispettivamente, gli impulsi dell'antineutrino, del protone, del positrone e del neutrone.

Consideriamo adesso il processo di scattering di un neutrino sul neutrone e manteniamo i nomi degli impulsi che abbiamo già usato per il processo (3.4.203), cioè

$$\nu(Q) + n(p) \rightarrow e^-(q) + p(P) \quad (3.4.273)$$

³⁴Il processo, come abbiamo già messo in evidenza a suo tempo, avverrà se sarà possibile soddisfare anche la cinematica, ovvero, se per i processi di scattering siamo sopra soglia, mentre per i processi di decadimento se la massa della particella che decade è superiore alla somma delle masse delle particelle a cui il processo dà luogo.

Poiché l'interazione adesso è descritta dalla densità lagrangiana

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p(0)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_n(0)) (\bar{\psi}_e(0)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu(0)) \quad (3.4.274)$$

per quanto detto sopra, risulta ancora

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 128 G_F^2 (n \nu) (e p) = 128 G_F^2 (pQ) (Pq) \quad (3.4.275)$$

Dunque, circa la sezione d'urto differenziale di questo processo, sarà ancora

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_\nu = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{1}{s-M^2} (2pQ)(2qP) \quad (3.4.276)$$

Però, stavolta, sempre trascurando la differenza di massa protone-neutrone e la massa del neutrino e dell'elettrone, risulta

$$2pQ = s - M^2 = 2qP \quad (3.4.277)$$

per cui

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_\nu = \frac{G_F^2}{\pi} (s - M^2) \quad (3.4.278)$$

che, integrando al solito fra $y = 0$ ed $y = 1 - M^2/s$, conduce a

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - M^2)^2}{s} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(2EM)^2}{s} \quad (3.4.279)$$

la quale, rispetto all'espressione ottenuta per lo scattering di antineutrino, risulta uguale a bassa energia ma tre volte più grande ad alta energia.

A bassa energia la sezione d'urto trovata continua a dipendere dal quadrato dell'energia del neutrino nel sistema del laboratorio (neutrone fermo), mentre per $s \gg M^2$ dipende da s e dunque diventa lineare con l'energia del neutrino, questo se il neutrone fosse davvero una particella di Dirac point-like e non fatta di quarks ...

Capitolo 4

Decadimenti: alcuni esempi

Passiamo adesso ad applicare quanto abbiamo appreso fin'ora ai processi di decadimento i quali, insieme a quelli di scattering, completano le nostre possibilità di indagine della dinamica delle interazioni fra particelle.

4.1 Il decadimento del pione carico

Consideriamo la reazione di decadimento¹

$$\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l \quad (4.1.1)$$

dove l^- sta per un generico leptone negativo (può trattarsi solo di e^- o μ^- visto che $m_\tau \gg m_\pi$!).

Come abbiamo già avuto modo di osservare (cfr. *Vol III*), esso avviene via interazione debole e precisamente via l'annichilazione dello stato $(d\bar{u})$ in un W^- virtuale che decade quindi in un sistema puramente leptonico, come è mostrato in fig.4.1.

Poiché il processo avviene su una scala di energie ($m_\pi \approx 139 \text{ MeV}$) molto minore della massa² del W , la teoria di Fermi (corretta per la violazione di parità) è perfettamente adeguata a descriverlo e la densità della lagrangiana di interazione corrispondente, come sappiamo, è la seguente

$$\mathcal{L}_W(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x) \quad (4.1.2)$$

dove $J^\mu(x)$ è la somma della corrente adronica e leptonica e, quanto a quest'ultima, come abbiamo già osservato in precedenza, essa risulta

$$J_{lept}^\mu(x) = \bar{\psi}_\nu(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l(x) \Leftrightarrow J_{lept}^{\mu\dagger}(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x) \quad (4.1.3)$$

¹Per il decadimento coniugato di carica $\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l$ valgono ovviamente considerazioni del tutto analoghe.

² $M_W \approx 81 \text{ GeV}$

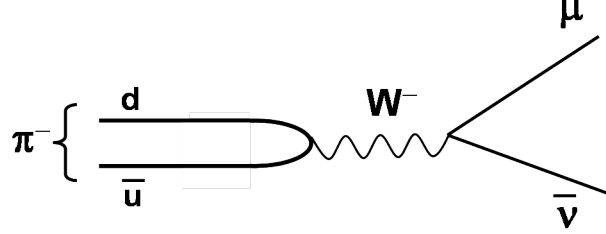


Figura 4.1: *Decadimento del pione negativo in muone e antineutrino muonico*

e, nel caso specifico, solo $J_{lept}^{\mu\dagger}$ è la corrente che può contribuire al processo considerato.

Ricordiamo che, per quanto visto precedentemente, se prescindiamo dallo stato di spin delle particelle nello stato finale, il rate differenziale di decadimento risulta essere dato dall'espressione generale (2.1.47)

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1} \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \quad (4.1.4)$$

dove S è lo spin della particella che decade ($S = 0$ per il pione), E è la sua energia nel sistema di riferimento dove stiamo operando, $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti del decadimento e $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale, che, nel nostro caso, come sappiamo, nel sistema del CM è dato da

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2s} d\Omega_{CM} \equiv \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \quad (4.1.5)$$

essendo $d\Omega_{CM}$ l'elemento di angolo solido relativo a una delle due particelle nello stato finale (la direzione di moto dell'altra è, ovviamente, quella opposta), s la massa invariante quadra del sistema pari, ovviamente, a M^2 e b è il modulo dell'impulso spaziale del neutrino e del leptone carico nel sistema del CM . In questo stesso sistema di riferimento, dove il pione è a riposo, se assumiamo al solito che sia nulla la massa del neutrino, detta m la massa del leptone carico, risulta dunque

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{1} \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M^2 - m^2)}{2M^2} d\Omega_{CM} = \\ &= \frac{1}{32\pi} \frac{M^2 - m^2}{M^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d(-\cos\theta_{CM}) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

dove M è la massa del pione e $d\Omega_{CM}$ è riferito al leptone carico, visto nel sistema del CM , orientato, a priori, in modo arbitrario.

Veniamo adesso al calcolo esplicito dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$. Come sappiamo (cfr.(2.1.26)), risulta

$$\mathcal{M} = \langle out | \mathcal{L}_W(0) | in \rangle \quad (4.1.7)$$

Poiché gli stati adronici e leptonici hanno in comune solo lo stato di vuoto, deve essere

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle l^- \bar{\nu} | J_\mu^{\dagger lept}(0) | \Omega \rangle \cdot \langle \Omega | J_{had}^\mu(0) | \pi^- \rangle \quad (4.1.8)$$

Ma allora, se indichiamo con P^μ il quadrimpulso del pione, essendo esso una particella senza spin, quanto alla quantità quadri-vettoriale $\langle \Omega | J_{had}^\mu(0) | \pi^- \rangle$ essa non può che essere semplicemente proporzionale a P^μ , ovvero

$$\langle \Omega | J_{had}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f P^\mu \quad (4.1.9)$$

dove la costante f , nell'ottica di descrivere con lo stesso formalismo anche i decadimenti deboli di CC degli altri mesoni pseudoscalari, dovendo essere una funzione scalare di Lorentz, potrà dipendere, in questo caso, solo dalla massa del pione. Poiché poi, come oggi sappiamo, la reazione di annichilazione $(d\bar{u}) \rightarrow W^-$ procede attraverso la corrente $\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_C$ e il campo del quark d_C è sostanzialmente pari a $d_C = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$ essendo s il campo del quark strano e θ_C l'angolo di Cabibbo, poniamo

$$f = f(m_\pi) \equiv f_\pi \cos\theta_C \quad (4.1.10)$$

Veniamo ora all'altra quantità che compare nella (4.1.8), ovvero passiamo a considerare l'espressione $\langle l^- , \bar{\nu} | J_\mu^{\dagger lept}(0) | \Omega \rangle$.

Più esplicitamente, se q e k con s , r sono, rispettivamente, gli impulsi e gli stati di spin del leptone carico e dell'antineutrino, dobbiamo valutare l'espressione

$$\langle l^-(q, s), \bar{\nu}(k, r) | \bar{\psi}_l(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(0) | \Omega \rangle \quad (4.1.11)$$

la quale, per quanto già visto nella nota associata alla (3.4.218), vale

$$\begin{aligned} & \langle l^-(q, s), \bar{\nu}(k, r) | \bar{\psi}_l(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(0) | \Omega \rangle = \\ & = \bar{u}_l^{(s)}(q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

per cui, essendo

$$P^\mu = k^\mu + q^\mu \quad (4.1.13)$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C (k^\mu + q^\mu) \bar{u}_l^{(s)}(q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) = \\
&= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) - \\
&- \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 + \gamma_5) \not{k} v_\nu^{(r)}(k)
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

a cui siamo giunti tenendo conto che γ_5 anticommuta con tutte le γ_μ .
D'altronde, se come abbiamo fin'ora ammesso, possiamo considerare il neutrino come avente massa nulla, allora, per l'equazione di Dirac, si ha che

$$\not{k} v_\nu^{(r)}(k) = 0 \tag{4.1.15}$$

mentre, per lo stesso motivo, risulta

$$\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} = m \bar{u}_l^{(s)}(q) \tag{4.1.16}$$

dove m è la massa del leptone carico. Dunque abbiamo infine

$$\mathcal{M} = -m \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \tag{4.1.17}$$

A noi, comunque, per calcolare $d\Gamma$, serve di valutare $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, ovvero serve la quantità

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \left\{ m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 \right\} \tag{4.1.18}$$

ma

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\
&= \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^* = \\
&= \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^\dagger = \\
&= Tr \left\{ \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^\dagger \right\}
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]$ è un numero complesso e come tale può anche essere visto come una matrice 1×1 e quindi come coincidente con la sua stessa traccia.

Dunque, ricordando che $v^\dagger = \bar{v} \gamma^0$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\bar{u}^\dagger = \gamma^0 u$, $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, abbiamo

$$\begin{aligned} & Tr \left\{ \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^\dagger \right\} = \\ & = Tr \sum_{r,s} \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 u_l^{(s)}(q) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Ma $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(B \cdot C \cdot A)$ e quindi

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\ & = Tr \left\{ \left[\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right] (1 - \gamma_5) \left[\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right] (1 + \gamma_5) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

dove abbiamo tenuto conto che γ^0 e γ_5 anticommutano, mentre $\gamma_0^2 = I$. D'altronde, come sappiamo (si ricordi che il neutrino ha massa nulla ...)

$$\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) = \not{q} + m; \quad \sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) = \not{k} \quad (4.1.22)$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = Tr [(q + m)(1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5)] = \\ & = Tr [(q + m) \not{k} (1 + \gamma_5)^2] = 2 Tr [q + m) \not{k} (1 + \gamma_5)] = \\ & = 2 Tr [q \not{k} + q \not{k} \gamma_5 + m \not{k} + m \not{k} \gamma_5] \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

ma

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 \delta_{\mu\nu} \quad (4.1.24)$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5) = 0 \quad (4.1.25)$$

$$Tr(\gamma_\mu) = 0 \quad (4.1.26)$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_5) = 0 \quad (4.1.27)$$

per cui, in definitiva, risulta³

$$m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8 m^2 (k \cdot q) \quad (4.1.28)$$

per cui, nel caso in cui lo stato di spin del leptone carico l^- non interessa, abbiamo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 \right\} = \\ &= 4 m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (k \cdot q) \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

³Si noti che il contributo legato alla presenza della γ_5 è nullo.

Sostituendo nell'espressione del rate differenziale, otteniamo così che

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} 4 m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (k \cdot q) \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{M^2} d\Omega_{CM} \quad (4.1.30)$$

Ma

$$\begin{aligned} (k + q)^2 = M^2 &\Rightarrow M^2 = 0 + 2(k \cdot q) + m^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(k \cdot q) = M^2 - m^2 = 2M E_\nu \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

dove E_ν è l'energia⁴ del neutrino nel sistema del CM .

Sostituendo nella (4.1.29), abbiamo dunque che

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 4M G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C m^2 E_\nu = 2m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (M^2 - m^2) \quad (4.1.32)$$

e quindi

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} \left(2m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (M^2 - m^2) \right) \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{M^2} d\Omega_{CM} \quad (4.1.33)$$

da cui, integrando sull'angolo solido (il decadimento, come è ovvio che debba essere, è isotropo nel CM), si ha finalmente che

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} 2m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (M^2 - m^2) \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{M^2} 4\pi = \\ &= M m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \frac{1}{8\pi} \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Questa relazione consente, in particolare, di determinare il rapporto fra i BR dei due decadimenti in elettrone-neutrino e muone-neutrino. Abbiamo

$$\begin{aligned} R_\pi &\equiv \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left(\frac{M_\pi^2 - m_e^2}{M_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{0.511}{105.7} \right)^2 \left(\frac{139.6^2 - 0.511^2}{139.6^2 - 105.7^2} \right)^2 \approx 2.337 \cdot 10^{-5} \times 5.492 \approx \\ &\approx 1.283 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

che, per gli analoghi decadimenti del K , diventa⁵

$$\begin{aligned} R_K &\equiv \frac{\Gamma(K^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left(\frac{M_K^2 - m_e^2}{M_K^2 - m_\mu^2} \right)^2 \approx 2.337 \cdot 10^{-5} \times 1.098 \approx \\ &\approx 2.567 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

⁴Si ricordi, infatti, che l'energia nel CM del neutrino è pari a $E_\nu = \frac{s+m_\nu^2-m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{M^2-m^2}{2M}$.

⁵Lo SM , tenendo conto di correzioni di ordine superiore, fornisce, rispettivamente

$$R_\pi = 1.235 \cdot 10^{-4}; \quad R_K = 2.47 \cdot 10^{-5} \quad (4.1.36)$$

Questi risultati mostrano come il decadimento in elettrone-neutrino sia estremamente sfavorito rispetto a quello in muone-neutrino, nonostante il vantaggio del maggior spazio delle fasi a disposizione.

La ragione sta nella conservazione del momento angolare, nello spin nullo del mesone e nel fatto che la struttura vettoriale della corrente debole carica implica che la chiralità della particella e della antiparticella prodotte/assorbite debbano essere le stesse e quindi, nel limite di massa nulla, le loro elicità debbano essere opposte.

E' soltanto a causa del fatto che i leptoni carichi hanno massa che essi possono essere prodotti in uno stato di elicità opposto a quanto stabilirebbe, per massa nulla, il proiettore chirale; ma questa possibilità è pesata, nell'ampiezza del processo, con la massa stessa del leptone carico.

Vogliamo che questo punto sia ben chiaro: la soppressione di elicità, descritta, per esempio, dal fattore (4.1.37), nasce sia dal fatto che il mesone che decade ha spin zero come dal carattere vettoriale della corrente (presenza della γ^μ) e non dalla presenza nella corrente stessa del proiettore chirale $\chi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}$.

Per rendercene conto, consideriamo infatti una generica corrente vettoriale⁶

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu \psi_b(x) \quad (4.1.41)$$

e supponiamo per esempio che, nel processo in cui essa è coinvolta, questa corrente sia responsabile della creazione della particella a e della antiparticella b (ricordiamo che ψ possiede l'operatore di creazione di antiparticelle, mentre $\bar{\psi}$ quello di creazione delle particelle), potendo essere, beninteso, anche che a e b siano la stessa particella (come accade in QED).

Ricordando che $\chi_+ + \chi_- = I$ e che $(\chi_\pm)^2 = \chi_\pm$, abbiamo intanto che

$$\begin{aligned} J^\mu &= \bar{\psi}_a \gamma^\mu (\chi_+ \psi_b) + \bar{\psi}_a \gamma^\mu (\chi_- \psi_b) = \bar{\psi}_a \gamma^\mu [(\chi_+)^2 \psi_b] + \bar{\psi}_a \gamma^\mu [(\chi_-)^2 \psi_b] = \\ &= (\bar{\psi}_a \chi_-) \gamma^\mu (\chi_+ \psi_b) + (\bar{\psi}_a \chi_+) \gamma^\mu (\chi_- \psi_b) \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

⁶Se l'interazione responsabile del decadimento del pione fosse, per esempio, scalare allora, essendo

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi + \bar{\psi} \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \psi = \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L \quad (4.1.38)$$

particella e antiparticella prodotte avrebbero chiralità opposte e dunque, nel limite di alta energia, elicità uguali, per cui lo stato finale tenderebbe a essere compatibile con uno stato di spin zero.

In questo caso avremmo

$$\mathcal{M} = \text{cost} \cdot \bar{u}_l^{(s)}(q) v_\nu^{(r)}(k) \Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}|^2 = |\text{cost}|^2 8(k \cdot q) = 4 |\text{cost}|^2 (M^2 - m^2) \quad (4.1.39)$$

ovvero

$$R_\pi \equiv \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{M_\pi^2 - m_e^2}{M_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 \approx 5.492 \quad (4.1.40)$$

Il fatto che sperimentalmente sia $R_\pi = (1.24 \pm) \cdot 10^{-4}$ costituì, ovviamente, un argomento fortissimo a favore della struttura vettoriale dell'interazione.

dove si è usato il fatto che $\gamma^\mu \chi_\pm = \chi_\mp \gamma^\mu$.

Ponendo adesso⁷, come al solito

$$\psi_R \equiv \chi_+ \psi \Leftrightarrow \bar{\psi}_R = \bar{\psi} \chi_-; \quad \psi_L \equiv \chi_- \psi \Leftrightarrow \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \chi_+ \quad (4.1.44)$$

risulta evidentemente che

$$J^\mu = \bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} + \bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b} \quad (4.1.45)$$

Ricordando adesso il legame fra proiettori di elicità e di chiralità, i.e.

$$\Sigma_\pm(\vec{p}) u(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \gamma_5 \frac{E}{p} \left(1 - \frac{m}{E} \gamma^0 \right) \right] u(\vec{p}) \quad (4.1.46)$$

$$\Sigma_\pm(\vec{p}) v(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[1 \mp \gamma_5 \frac{E}{p} \left(1 + \frac{m}{E} \gamma^0 \right) \right] v(\vec{p}) \quad (4.1.47)$$

ne segue che, almeno nel limite in cui $E \gg m$, risulteranno valide le seguenti approssimazioni fra autostati di chiralità definita (R/L) e autostati di elicità definita ($\pm$)

$$u_R \approx u(+) + \frac{m}{E} u(-); \quad u_L \approx u(-) + \frac{m}{E} u(+) \quad (4.1.48)$$

$$v_R \approx v(-) - \frac{m}{E} v(+); \quad v_L \approx v(+) - \frac{m}{E} v(-) \quad (4.1.49)$$

per cui, nel caso considerato (creazione della particella a e della antiparticella b), i pesi relativi dei processi descritti dai due termini di cui alla (4.1.45) risulteranno quelli rappresentati in Fig. 4.2 che, nel caso particolare in cui,

$\bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} \Rightarrow$	$\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$ $\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$ $\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$ $\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$	1 m_a / E_a m_b / E_b $m_a m_b / E_a E_b$
$\Rightarrow \bar{u} \chi_- \gamma^\mu \chi_+ v$		
$\bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b} \Rightarrow$	$\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$ $\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$ $\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$ $\bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow a$	1 m_a / E_a m_b / E_b $m_a m_b / E_a E_b$
$\Rightarrow \bar{u} \chi_+ \gamma^\mu \chi_- v$		

Figura 4.2: Ampiezze di elicità associate alla corrente vettoriale

per esempio, la massa della particella b sia nulla, si riducono come in Fig. 4.3.

⁷Si ricordi che, visto che γ_5 è reale e simmetrica ed anticommuta con γ^0 , risulta

$$\overline{(\chi_\pm \psi)} = \bar{\psi} \chi_\mp \quad (4.1.43)$$

$$\begin{array}{lll}
\bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} \Rightarrow & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \rightarrow a & 1 \\
\Rightarrow \bar{u} \chi_- \gamma^\mu \chi_+ v & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \rightarrow a & m_a / E_a \\
\\
\bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b} \Rightarrow & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \rightarrow a & 1 \\
\Rightarrow \bar{u} \chi_+ \gamma^\mu \chi_- v & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \rightarrow a & m_a / E_a
\end{array}$$

Figura 4.3: Ampiezze di elicità associate alla corrente vettoriale, nel caso in cui una massa sia nulla

In ogni caso, indipendentemente dal valore delle masse delle particelle prodotte, come si vede chiaramente dalla Fig.4.2, se il sistema delle due particelle considerate trae origine (in onda S , come nel caso di interazioni di contatto) da una particella di spin nullo, la conservazione del momento angolare impone che possano contribuire comunque solo le ampiezze relative a processi con particelle/antiparticelle di elicità uguale, in cui, necessariamente, una delle due è soppressa del fattore m/E .

Nel caso poi delle interazioni deboli, per via della struttura $V-A$, accade che sia presente solo il termine L ; ma questo fatto non ha rilevanza diretta sulla questione della soppressione di elicità, bensì si limita soltanto a dimezzare i casi possibili.

Vediamo adesso come si modificano i risultati ottenuti in precedenza, nel caso in cui il neutrino sia una particella di Dirac di massa $\mu \neq 0$.

Iniziamo occupandoci dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$: il punto di partenza è chiaramente l'espressione (4.1.14), cioè

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) + \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 + \gamma_5) \not{k} v_\nu^{(r)}(k) \right] = \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[m \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) - \mu \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 + \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.50)\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} = m \bar{u}_l^{(s)}(q)$ e che $\not{k} v_\nu^{(r)}(k) = -\mu v_\nu^{(r)}(k)$. Poniamo allora

$$R = m(1 - \gamma_5) - \mu(1 + \gamma_5) = (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) = R^\dagger \quad (4.1.51)$$

risulta così

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.52)$$

da cui ricaviamo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)|^2 \quad (4.1.53)$$

ma, al solito, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{r,s} |\bar{u} R v|^2 &= \sum_{r,s} (\bar{u} R v) \cdot (\bar{u} R v)^* = \sum_{r,s} (\bar{u} R v) \cdot (\bar{u} R v)^\dagger = \\ &= Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} R v v^\dagger R^\dagger \bar{u}^\dagger \right] = Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} R v \bar{v} \gamma^0 R \gamma^0 u \right] = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) R \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) \gamma^0 R \gamma^0 \right\} = \\ &= Tr \left\{ (q + m) R (\not{k} - \mu) \hat{R} \right\} \quad (4.1.54)\end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$\hat{R} \equiv \gamma^0 R \gamma^0 = (m - \mu) + \gamma_5(m + \mu) \quad (4.1.55)$$

Siccome sia R che $\hat{R}$ hanno un numero pari di matrici γ , gli unici termini che possono contribuire alla traccia (4.1.54) sono

$$-m \mu Tr(R \hat{R}) + Tr(q R \not{k} \hat{R}) \quad (4.1.56)$$

Risulta

$$\begin{aligned}-m \mu Tr(R \hat{R}) &= -m \mu Tr \{ [(m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)][(m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)] \} = \\ &= -m \mu [4(m - \mu)^2 - 4(m + \mu)^2] = 16 m^2 \mu^2 \quad (4.1.57)\end{aligned}$$

mentre è (si ricordi che $Tr(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 0$)

$$\begin{aligned} Tr(qR \not{k}\hat{R}) &= Tr \{ q'[(m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)] \not{k}[(m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)] \} = \\ &= Tr \left\{ (m - \mu)^2 q' \not{k} - (m + \mu)^2 q' \gamma_5 \not{k} \gamma_5 \right\} = \\ &= 4(m - \mu)^2(qk) + 4(m + \mu)^2(qk) = 8(m^2 + \mu^2)(qk) \quad (4.1.58) \end{aligned}$$

per cui, in definitiva, risulta

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8(m^2 + \mu^2)(qk) + 16 m^2 \mu^2 \quad (4.1.59)$$

e dunque, finalmente⁸

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot 8 \left[(m^2 + \mu^2)(qk) + 2 m^2 \mu^2 \right] = \\ &= 4 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left[(m^2 + \mu^2)(qk) + 2 m^2 \mu^2 \right] = \\ &= 4 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2[\mu^2 + (qk)] + \mu^2[m^2 + (qk)] \right\} = \\ &= 2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2(2\mu^2 + M^2 - m^2 - \mu^2) + \mu^2(2m^2 + M^2 - m^2 - \mu^2) \right\} = \\ &= 2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2 2ME_\nu + \mu^2 2ME_l \right\} = \\ &= 4M G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2 E_\nu + \mu^2 E_l \right\} \quad (4.1.60) \end{aligned}$$

dove E_ν ed E_l sono, rispettivamente, le energie del neutrino e del leptone (da confrontare con la (4.1.32), ottenuta direttamente nel caso in cui $\mu = 0$) nel centro di massa.

Per quanto riguarda infine $d\Gamma$, occorre tenere conto della massa del neutrino anche nell'elemento di angolo solido $d\Phi$: si ha

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{2M^2} d\Omega_{CM} \rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M^2} d\Omega_{CM} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{b_l}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \quad (4.1.61) \end{aligned}$$

⁸In generale, per la conservazione del quadriimpulso espressa dalla (4.1.13), abbiamo

$$P = k + q$$

e dunque

$$P - k = q \Rightarrow M^2 + \mu^2 - 2(P \cdot k) = m^2 \Rightarrow M^2 - m^2 + \mu^2 = 2(P \cdot k)$$

che, nel sistema del CM , diviene

$$2ME_\nu = M^2 - m^2 + \mu^2$$

e, analogamente

$$2ME_l = M^2 - \mu^2 + m^2$$

dove b_l è il modulo dell'impulso spaziale del leptone carico e dell'antineutrino, visti nel sistema del CM . Risulta quindi

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi = \\ &= \frac{1}{2M} \cdot 4M G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \{m^2 E_\nu + \mu^2 E_l\} \cdot \frac{1}{16\pi^2} \frac{b_l}{M} d\Omega_{CM} \end{aligned}$$

ovvero, integrando sull'angolo solido, abbiamo infine

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \{m^2 E_\nu + \mu^2 E_l\} \frac{b_l}{M} = \\ &= \frac{1}{4\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)(m^2 + \mu^2) + 4m^2\mu^2}{M^2} b_l = \\ &= \frac{1}{4\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \frac{m^2(M^2 - m^2) + \mu^2(M^2 + 2m^2 - \mu^2)}{M^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M} \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

che, nel limite di massa nulla del neutrino riproduce la (4.1.34), risultando infatti

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{4\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \frac{m^2(M^2 - m^2) + \mu^2(M^2 + 2m^2 - \mu^2)}{M^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M} \\ &\rightarrow \frac{1}{4\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \frac{m^2(M^2 - m^2)}{M^2} \cdot \frac{(M^2 - m^2)}{2M} = \\ &= \frac{Mm^2}{8\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

Fin qui abbiamo ignorato lo stato di spin delle particelle prodotte. E' però molto istruttivo vedere che cosa accade a $|\mathcal{M}|^2$ quando si fissi lo stato di spin del leptone carico l^- (l'unico leptone osservabile ...). Inizieremo assumendo di nuovo che la massa del neutrino sia nulla. Occorre ripartire dall'espressione (4.1.14) dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$, ma per avere l'ampiezza di transizione verso lo stato di spin scelto, occorre inserire nell'espressione dell'elemento di matrice, l'opportuno proiettore di spin sullo stato voluto del leptone⁹ carico

$$\Pi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \mathcal{N} \quad (4.1.65)$$

descritto dal quadrivettore N^μ , le cui proprietà generali, lo ricordiamo, sono

$$(Nq) = 0; \quad N^2 = -1 \quad (4.1.66)$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi \not{q}' (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) + \right. \\ & \left. + \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 + \gamma_5) \not{k} v_\nu^{(r)}(k) \right] \end{aligned} \quad (4.1.67)$$

ovvero, essendo la massa del neutrino nulla ($\not{k} v_\nu^{(r)}(k) = 0$), risulta adesso

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi \not{q}' (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.68)$$

Ma i proiettori di spin commutano con i proiettori $\Lambda_\pm$ e dunque¹⁰

$$\Pi(q' + m) = (q' + m)\Pi \Rightarrow \Pi \not{q}' = \not{q}' \Pi \quad (4.1.69)$$

per cui, essendo $\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q}' = m \bar{u}_l^{(s)}(q)$, abbiamo infine

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[m \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.70)$$

⁹Si ricordi che (idem per lo spinore v ...)

$$\begin{aligned} \overline{(\Pi u)} & \equiv (\Pi u)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \Pi^\dagger \gamma^0 = \bar{u} \gamma^0 \Pi^\dagger \gamma^0 = \bar{u} \gamma^0 \frac{1 + \mathcal{N}^\dagger \gamma_5}{2} \gamma^0 = \bar{u} \frac{1 - \gamma^0 \mathcal{N}^\dagger \gamma^0 \gamma_5}{2} = \\ & = \bar{u} \frac{1 - \mathcal{N} \gamma_5}{2} = \bar{u} \frac{1 + \gamma_5 \mathcal{N}}{2} = \bar{u} \Pi \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

¹⁰Come è noto, infatti, essendo $(Nq) = 0$, si ha

$$\gamma_5 \mathcal{N} \cdot q' = \gamma_5 N_\alpha q_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta = \gamma_5 N_\alpha q_\beta [-\gamma^\beta \gamma^\alpha + 2\delta^{\alpha\beta}] = -\gamma_5 \not{q}' \mathcal{N} + 2\gamma_5 (Nq) = \not{q}' \cdot \gamma_5 \mathcal{N}$$

e dunque il modulo quadro complessivo dell'ampiezza di transizione verso quel dato stato di spin del leptone carico scelto sarà dato da

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = m^2 \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 \quad (4.1.71)$$

Con l'uso del proiettore di spin abbiamo recuperato interamente la possibilità di far uso dei proiettori $\Lambda_\pm$ e quindi, in definitiva, la potenza dell'uso delle tracce dei prodotti delle matrici gamma che abbiamo visto all'opera fino ad ora. Si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 = \\ &= \sum_{r,s} [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v] [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v]^* = \sum_{r,s} [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v] [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v]^\dagger = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,s} [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v] [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v]^\dagger \right\} = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,s} \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v v^\dagger (1 - \gamma_5) \Pi^\dagger \bar{u}^\dagger \right\} = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,s} \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v \bar{v} \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 \Pi \gamma^0 \gamma^0 u \right\} = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) \Pi (1 - \gamma_5) \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) (1 + \gamma_5) \Pi \right\} = \\ &= Tr \{ (m + \not{q}) \Pi (1 - \gamma_5) (\not{k}) (1 + \gamma_5) \Pi \} = Tr \{ \Pi (m + \not{q}) \Pi (1 - \gamma_5)^2 \not{k} \} = \\ &= 2Tr \{ (m + \not{q}) \Pi^2 (1 - \gamma_5) \not{k} \} = 2Tr \{ (m + \not{q}) \Pi (1 - \gamma_5) \not{k} \} \end{aligned} \quad (4.1.72)$$

dove si è usato il fatto che

$$\begin{aligned} \bar{u}^\dagger &= \gamma^0 u, \quad \Pi^\dagger = \gamma^0 \Pi \gamma^0, \quad (1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5), \quad \Pi^2 = \Pi, \quad \Pi \not{q} = \not{q} \Pi \\ \sum_s u^{(s)}(q) \bar{u}^{(s)}(q) &= \not{q} + m, \quad \sum_r v^{(r)}(k) \bar{v}^{(r)}(k) = \not{k} \end{aligned}$$

Risulta quindi dalla (4.1.72), ricordando la definizione di Π , che

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 = Tr \{ (m + \not{q}) (1 + \gamma_5) \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} \} = \\ &= Tr \{ m(1 + \gamma_5) \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q}(1 + \gamma_5) \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} \} = \\ &= Tr \{ m(1 - \gamma_5) \not{k} + m \gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} \gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \} \end{aligned}$$

Però i termini con un numero dispari di γ hanno traccia nulla, per cui il primo e il terzo addendo dell'espressione di sopra danno contributo nullo alla traccia, e quindi risulta che

$$\sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 = Tr \{ m \gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \} \quad (4.1.73)$$

ma

$$\gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) = - \not{N} \gamma_5 (1 - \gamma_5) = \not{N} (1 - \gamma_5) \quad (4.1.74)$$

e ricordando che la traccia del prodotto di due γ per la γ_5 è nulla, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 &= Tr \{ m \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \} = \\ &= Tr \{ m \not{N} \not{k} + \not{q} \not{k} \} = 4m(N \cdot k) + 4(q \cdot k) \equiv 4(r_+ \cdot k) \end{aligned} \quad (4.1.75)$$

dove si è posto, per definizione¹¹,

$$r_+^\mu \equiv q^\mu + m N^\mu \quad (4.1.76)$$

Sostituendo nella (4.1.71), si ottiene dunque

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= m^2 \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 = \\ &= m^2 \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (4r_+ \cdot k) = 2m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (r_+ \cdot k) \end{aligned} \quad (4.1.77)$$

Osserviamo intanto che il quadrivettore r_+ definito dalla (4.1.76) è comunque un quadrivettore light-like, essendo $N^2 = -1$ e $q \cdot N = 0$.

Ricordando che anche il quadrimpulso dell'antineutrino è light-like, possiamo scegliere $N \equiv \hat{N}$ in modo che sia

$$\hat{N}^\mu = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(q \cdot k)} k^\mu - q^\mu \right) \Rightarrow r_+^\mu = \frac{m^2}{(q \cdot k)} k^\mu \quad (4.1.78)$$

allora $(r_+ \cdot k)$ sarà nullo. Questo significa che la polarizzazione associata a $\hat{N}^\mu$ *non* potrà essere prodotta nel decadimento e quindi che il decadimento produrrà solo lo stato puro corrispondente alla polarizzazione opposta.

Per esplicitare questa polarizzazione è opportuno utilizzare ancora una volta il fatto che $|\mathcal{M}|^2$ è un invariante relativistico e considerarlo nel riferimento del CM del sistema, ovvero in quello dove il pione è in quiete.

In questo riferimento, quanto agli impulsi delle particelle originate dal decadimento, usando le formula consuete, abbiamo che

$$l^- : q = (E, b \vec{n}); \quad \bar{\nu} : k = (b, -b \vec{n}) \quad (4.1.79)$$

con

$$b = \frac{M^2 - m^2}{2M}; \quad E = \frac{M^2 + m^2}{2M} \quad (4.1.80)$$

¹¹Evidentemente se al termine precedente si somma quello corrispondente alla polarizzazione opposta, a cui corrisponde $-N^\mu$, ritroviamo la quantità già ottenuta nel caso non polarizzato, ovvero $8q \cdot k$.

dove M è la massa del mesone ed m è quella del leptone carico.
In questo riferimento abbiamo così che

$$\begin{aligned}
 \hat{N}^\mu &= \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(q \cdot k)} k^\mu - q^\mu \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(q \cdot k)} (b, -b\vec{n}) - (E, b\vec{n}) \right) = \\
 &= \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(Eb + b^2)} (b, -b\vec{n}) - (E, b\vec{n}) \right) = \frac{m}{E + b} (1, -\vec{n}) - \frac{1}{m} (E, b\vec{n}) = \\
 &= \left(\frac{m}{E + b} - \frac{E}{m}, \left(-\frac{m}{E + b} - \frac{b}{m} \right) \vec{n} \right) = \left(\frac{m^2 - E^2 - Eb}{m(E + b)}, -\frac{m^2 + b^2 + Eb}{m(E + b)} \vec{n} \right) = \\
 &= \left(\frac{-b^2 - Eb}{m(E + b)}, -\frac{E^2 + Eb}{m(E + b)} \vec{n} \right) = \left(-\frac{b}{m}, -\frac{E}{m} \vec{n} \right) = -\frac{1}{m} (b, E \vec{n}) \quad (4.1.81)
 \end{aligned}$$

D'altronde, come sappiamo, il quadrivettore che descrive l'elicità positiva del leptone carico negativamente visto nel riferimento del CM è il seguente

$$N_+ = \frac{1}{m} (b, E \vec{n}) \quad (4.1.82)$$

e quello che descrive l'elicità negativa, quindi, è

$$N_- = -N_+ = -\frac{1}{m} (b, E \vec{n}) \quad (4.1.83)$$

Il risultato di cui sopra mostra quindi che, nel CM , il processo di decadimento considerato *non* è in grado di produrre il leptone negativo nello stato di elicità negativa e dunque può produrlo solo con *elicità positiva*.

Questo significa che il leptone carico negativamente risulta necessariamente sempre polarizzato nella sua direzione di volo (visto dal riferimento del CM del sistema), cioè esso ha elicità *opposta* a quella che, per una particella di massa trascurabile, stabilirebbe il proiettore chirale χ_- presente nella densità lagrangiana che descrive le interazioni deboli di corrente carica.

Questa conclusione è esatta nell'ipotesi in cui la massa del neutrino sia nulla.

Ma vediamo che succede nel caso in cui la massa del neutrino μ non è nulla. Il punto di partenza è sempre l'elemento di matrice (4.1.14) che, nel caso in cui $\mu \neq 0$, ha condotto alla (4.1.52), cioè

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.84)$$

Quando si imponga al leptone carico una polarizzazione $\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{N}}{2}$, questo, avendo posto (cfr.(4.1.51))

$$R \equiv (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) \quad (4.1.85)$$

diventa

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.86)$$

da cui

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} \left| \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R v_\nu^{(r)}(k) \right|^2 \quad (4.1.87)$$

e la sommatoria, stavolta, diventa

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 &= \sum_{r,s} (\bar{u} \Pi R v) \cdot (\bar{u} \Pi R v)^* = \sum_{r,s} (\bar{u} \Pi R v) \cdot (\bar{u} \Pi R v)^\dagger = \\ &= Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R v v^\dagger R^\dagger \Pi^\dagger \bar{u}^\dagger \right] = Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R v \bar{v} \gamma^0 R \Pi^\dagger \gamma^0 u \right] = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) \Pi R \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) \gamma^0 R \gamma^0 \Pi \right\} = \\ &= Tr \left\{ (q + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \hat{R} \Pi \right\} = Tr \left\{ \Pi (q + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \hat{R} \right\} = \\ &= Tr \left\{ (q + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \hat{R} \right\} \end{aligned} \quad (4.1.88)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\Pi (q + m) = (q + m) \Pi$ e che $\Pi^2 = \Pi$.

Questa traccia è costituita da quattro termini, che sono i seguenti:

$$1) : \quad Tr \left\{ q \Pi R \not{k} \hat{R} \right\} = Tr \left\{ q \Pi R^2 \not{k} \right\} \quad (4.1.89)$$

$$2) : \quad m Tr \left\{ \Pi R \not{k} \hat{R} \right\} = m Tr \left\{ \Pi R^2 \not{k} \right\} \quad (4.1.90)$$

$$3) : \quad -\mu Tr \left\{ q \Pi R \hat{R} \right\} \quad (4.1.91)$$

$$4) : \quad -m \mu Tr \left\{ \Pi R \hat{R} \right\} \quad (4.1.92)$$

dove

$$\begin{aligned} R^2 &= (m - \mu)^2 + (m + \mu)^2 - 2\gamma_5(m^2 - \mu^2) = \\ &= 2(m^2 + \mu^2) - 2\gamma_5(m^2 - \mu^2) \end{aligned} \quad (4.1.93)$$

$$R \hat{R} = (m - \mu)^2 - (m + \mu)^2 = -4m\mu \quad (4.1.94)$$

Quanto al primo termine, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} Tr \left\{ q \Pi R^2 \not{k} \right\} &= Tr \left\{ q(1 + \gamma_5 \not{N}) \left[(m^2 + \mu^2) - \gamma_5(m^2 - \mu^2) \right] \not{k} \right\} = \\ &= Tr \left\{ q(m^2 + \mu^2) \not{k} \right\} = 4(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) \end{aligned} \quad (4.1.95)$$

mentre dal secondo termine otteniamo

$$\begin{aligned} m Tr \left\{ \Pi R^2 \not{k} \right\} &= m Tr \left\{ (1 + \gamma_5 \not{N}) \left[(m^2 + \mu^2) - \gamma_5(m^2 - \mu^2) \right] \not{k} \right\} = \\ &= m Tr \left\{ \gamma_5 \not{N} (-\gamma_5(m^2 - \mu^2)) \not{k} \right\} = \\ &= 4m(m^2 - \mu^2)(N \cdot k) \end{aligned} \quad (4.1.96)$$

Riguardo al terzo termine esso non contribuisce, infatti

$$-\mu \operatorname{Tr} \left\{ q \Pi R \hat{R} \right\} = \frac{-\mu}{2} \operatorname{Tr} \left\{ q(1 + \gamma_5 \not{N}) (-4m\mu) \right\} = 0 \quad (4.1.97)$$

mentre il quarto termine fornisce

$$-m \mu \operatorname{Tr} \left\{ \Pi R \hat{R} \right\} = -\frac{m \mu}{2} \operatorname{Tr} \left\{ (1 + \gamma_5 \not{N}) (-4m\mu) \right\} = 8 m^2 \mu^2 \quad (4.1.98)$$

Quindi, se definiamo

$$r_{\pm}^{\mu} \equiv q^{\mu} \pm m N^{\mu} \quad (4.1.99)$$

risulta infine che

$$\sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 = 4(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) + 4m(m^2 - \mu^2)(N \cdot k) + 8m^2 \mu^2 \quad (4.1.100)$$

$$\begin{aligned} &= 4m^2(q \cdot k + m N \cdot k) + 4\mu^2(q \cdot k - m N \cdot k) + 8m^2 \mu^2 = \\ &= 4m^2(r_+ \cdot k) + 4\mu^2(r_- \cdot k) + 8m^2 \mu^2 \end{aligned} \quad (4.1.101)$$

ovvero abbiamo¹²

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_{\pi}|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R v_{\nu}^{(r)}(k)|^2 \\ &= 2G_F^2 |f_{\pi}|^2 \cos^2 \theta_C \left[m^2(r_+ \cdot k) + \mu^2(r_- \cdot k) + 2m^2 \mu^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.104)$$

Siccome $r_{\pm}$ sono quadrivettori light-like con parte temporale positiva, essendo k time-like con $k^0 > 0$, le quantità $(r_{\pm} \cdot k)$ sono sempre strettamente positive¹³.

¹²Si osservi che

- sommando sui due stati di polarizzazione descritti dai quadrivettori N e $-N$ otteniamo di nuovo la (4.1.59)

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_{\nu}^{(r)}(k)|^2 = 8(m^2 + \mu^2)(qk) + 16m^2 \mu^2 \quad (4.1.102)$$

- ponendo $\mu = 0$ otteniamo nuovamente la (4.1.75), (si ricordi che, per $\mu \rightarrow 0$, abbiamo che $R \rightarrow m \chi_- \dots$)

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi m (1 - \gamma_5) v_{\nu}^{(r)}(k)|^2 = 4m^2 (r_+ \cdot k) \quad (4.1.103)$$

¹³Evidentemente, se indichiamo con $\hat{r}_{\pm}^0$ le componenti temporali (positive...) dei quadrivettori $r_{\pm}$ nel riferimento di quiete dell'antineutrino, la quantità scalare che stiamo considerando vale

$$m^2(r_+ \cdot k) + \mu^2(r_- \cdot k) + 2m^2 \mu^2 = m^2 \mu \hat{r}_+^0 + \mu^2 \mu \hat{r}_-^0 + 2m^2 \mu^2 > 0$$

Questo significa che il leptone carico, prescindendo dallo stato dell'antineutrino, *non* è in uno stato di spin puro poiché non è completamente polarizzato.

Lo stato finale è uno stato *entangled* e, visto che il pione ha spin nullo e che il decadimento avviene in onda *S* essendo l'interazione "di contatto", la conservazione del momento angolare impone che ci sia completa correlazione fra le elicità¹⁴ dei due leptoni le quali, però, risultano adesso possibili entrambe: evidentemente, quindi, se prescindiamo dallo stato di spin dell'antineutrino, il leptone carico può essere descritto solo come una miscela statistica di stati per cui non appare completamente polarizzato non essendo in uno stato puro.

Riguardo ai due stati di elicità negativa e positiva del leptone carico, da quanto sopra discende evidentemente che essi sono prodotti nel seguente rapporto

$$R_{-/+} = \frac{m^2(r_- \cdot k) + \mu^2(r_+ \cdot k) + 2m^2\mu^2}{m^2(r_+ \cdot k) + \mu^2(r_- \cdot k) + 2m^2\mu^2} \quad (4.1.105)$$

ma, nelle solite notazioni, abbiamo

$$q = (E_l, b\vec{n}); \quad k = (E_\nu, -b\vec{n}); \quad N = \frac{1}{m}(b, E_l\vec{n}) \quad (4.1.106)$$

e dunque

$$r_+ \equiv q + mN = (E_l + b)(1, \vec{n}); \quad r_- \equiv q - mN = (E_l - b)(1, -\vec{n}) \quad (4.1.107)$$

per cui

$$k \cdot r_+ = (E_l + b)(E_\nu + b) \approx M2b \approx M \frac{M^2 - m^2}{M} = M^2 - m^2 \quad (4.1.108)$$

$$k \cdot r_- = (E_l - b)(E_\nu - b) = \frac{m^2}{E_l + b} \frac{\mu^2}{E_\nu + b} = \frac{m^2\mu^2}{k \cdot r_+} \approx \frac{m^2\mu^2}{M^2 - m^2} \quad (4.1.109)$$

Sostituendo, si ha allora che

$$R_{-/+} = \frac{m^2 \frac{m^2\mu^2}{M^2 - m^2} + \mu^2(M^2 - m^2) + 2m^2\mu^2}{m^2(M^2 - m^2) + \mu^2 \frac{m^2\mu^2}{M^2 - m^2} + 2m^2\mu^2} \quad (4.1.110)$$

¹⁴Rispetto al caso dell'antineutrino con massa nulla in cui lo stato finale era rappresentato da un unico vettore di stato, adesso lo stato finale può essere descritto in termini di due vettori di stato in cui, alternativamente, un leptone ha l'elicità "sbagliata". I due stati si realizzano con le proprie opportune probabilità e quindi si sommano in modo incoerente (si sommano le probabilità e non le ampiezze ...).

ovvero, essendo nel caso attuale $\mu^2 \ll m^2$, $\mu^2 \ll M^2 - m^2$, ricaviamo infine che

$$\begin{aligned} R_{-/+} &\approx \frac{\mu^2 \left[\frac{m^4}{M^2 - m^2} + M^2 - m^2 + 2m^2 \right]}{m^2(M^2 - m^2)} = \\ &= \frac{\mu^2 \frac{m^4 + M^4 - m^4}{M^2 - m^2}}{m^2(M^2 - m^2)} = \frac{\mu^2}{m^2} \left(\frac{M^2}{M^2 - m^2} \right)^2 \quad (4.1.111) \end{aligned}$$

la quale mostra comunque il carattere "quasi" polarizzato del leptone carico uscente anche nel caso di massa del neutrino non nulla (purché molto minore di quella del leptone carico).

Per concludere l'argomento, verifichiamo infine la correlazione esistente fra l'elicità del leptone carico e quella dell'antineutrino.

Per questo, ripartiamo dall'elemento di matrice (4.1.14) che, nel caso in cui la massa dell'antineutrino μ è diversa da zero, ha condotto alla (4.1.52), ovvero

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.112)$$

dove $R \equiv (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) = R^\dagger$.

Imponendo che lo stato di spin del leptone carico sia quello che è definito attraverso il proiettore $\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{M}}{2}$ e che lo stato di spin del leptone neutro sia quello definito attraverso il proiettore $\Xi = \frac{1+\gamma_5 \not{M}'}{2}$, l'elemento di matrice che descrive il processo diventa ora il seguente

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (4.1.113)$$

dal quale otteniamo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_\nu^{(r)}(k)|^2 \quad (4.1.114)$$

per cui la sommatoria diventa ora¹⁵

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R \Xi v|^2 &= \sum_{r,s} (\bar{u} \Pi R \Xi v) \cdot (\bar{u} \Pi R \Xi v)^\dagger = \\ &= Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R \Xi v v^\dagger \Xi^\dagger R^\dagger \Pi^\dagger \bar{u}^\dagger \right] = Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R \Xi v \bar{v} \gamma^0 \Xi^\dagger R \Pi^\dagger \gamma^0 u \right] = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) \Pi R \Xi \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) \Xi \gamma^0 R \gamma^0 \Pi \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{q} + m) \Pi R \Xi (\not{k} - \mu) \Xi \hat{R} \Pi \right\} = Tr \left\{ \Pi (\not{q} + m) \Pi R \Xi (\not{k} - \mu) \Xi \hat{R} \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{q} + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \Xi \hat{R} \right\} \equiv \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R \Xi v|^2 \end{aligned} \quad (4.1.115)$$

¹⁵Si ricordi che

$$\begin{aligned} R &\equiv (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) = R^\dagger; & \hat{R} &\equiv (m - \mu) + \gamma_5(m + \mu) \\ \gamma^0 \Xi^\dagger \gamma^0 &= \Xi; & \Xi^2 &= \Xi & \gamma^0 \Pi^\dagger \gamma^0 &= \Pi; & \Pi^2 &= \Pi \\ \Pi(\not{q} + m) &= (\not{q} + m)\Pi; & \Xi(\not{k} - \mu) &= (\not{k} - \mu)\Xi \end{aligned}$$

Questa traccia è costituita dai quattro termini che seguono

$$1) : \quad Tr \left\{ q \Pi R \not{\Xi} \hat{R} \right\} \quad (4.1.116)$$

$$2) : \quad m Tr \left\{ \Pi R \not{\Xi} \hat{R} \right\} \quad (4.1.117)$$

$$3) : \quad -\mu Tr \left\{ q \Pi R \Xi \hat{R} \right\} \quad (4.1.118)$$

$$4) : \quad -m \mu Tr \left\{ \Pi R \Xi \hat{R} \right\} \quad (4.1.119)$$

e risulta

$$\begin{aligned} \Pi R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{N})[(m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)] = \\ &= \frac{1}{2}[(m - \mu)I - (m + \mu)\gamma_5 + (m - \mu)\gamma_5 \not{N} + (m + \mu) \not{N}] \quad (4.1.120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi \hat{R} &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{\eta})[(m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)] = \\ &= \frac{1}{2}[(m - \mu)I + (m + \mu)\gamma_5 + (m - \mu)\gamma_5 \not{\eta} - (m + \mu) \not{\eta}] \quad (4.1.121) \end{aligned}$$

I contributi non nulli al primo termine sono solo i seguenti (per ogni termine in ΠR esiste un solo termine in $\Xi \hat{R}$ che consente un contributo non nullo alla traccia ...)

$$\begin{aligned} Tr \left\{ q \Pi R \not{\Xi} \hat{R} \right\} &= \frac{1}{4} Tr \left\{ q(m - \mu) \not{\Xi}(m - \mu) - q(m + \mu)\gamma_5 \not{\Xi}(m + \mu)\gamma_5 + \right. \\ &\quad \left. + q(m - \mu)\gamma_5 \not{N} \not{\Xi}(m + \mu)\gamma_5 \not{\eta} - q(m + \mu) \not{N} \not{\Xi}(m + \mu) \not{\eta} \right\} = \\ &= \frac{4}{4} \left\{ (m - \mu)^2 + (m + \mu)^2 \right\} (q \cdot k) + \\ &\quad + \frac{1}{4} [(m - \mu)^2 - (m + \mu)^2] Tr \left\{ q \not{N} \not{\Xi} \right\} \quad (4.1.122) \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} Tr \left\{ q \not{N} \not{\Xi} \right\} &= q_\alpha N_\beta k_\nu n_\rho Tr \left\{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho \right\} = \\ &= 4 q_\alpha N_\beta k_\nu n_\rho (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\nu\rho} + \delta^{\alpha\rho} \delta^{\beta\nu} - \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\rho}) = \\ &= 4[(q \cdot N)(k \cdot n) + (q \cdot n)(k \cdot N) - (q \cdot k)(n \cdot N)] \quad (4.1.123) \end{aligned}$$

e siccome $(q \cdot N) = (k \cdot n) = 0$, abbiamo infine che

$$\begin{aligned} Tr \left\{ q \Pi R \not{\Xi} \hat{R} \right\} &= \\ &= 2(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 4m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + 4m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) \quad (4.1.124) \end{aligned}$$

Veniamo ora al secondo termine: risulta

$$\begin{aligned}
m \operatorname{Tr} \left\{ \Pi R \not{k} \Xi \hat{R} \right\} &= \frac{m}{4} \operatorname{Tr} \left\{ -(m - \mu) \not{k}(m + \mu) \not{n} - (m + \mu) \gamma_5 \not{k}(m - \mu) \gamma_5 \not{n} + \right. \\
&+ (m - \mu) \gamma_5 \not{N} \not{k}(m + \mu) \gamma_5 + (m + \mu) \not{N} \not{k}(m - \mu) \left. \right\} = \\
&= \frac{4m}{4} \left\{ -(m^2 - \mu^2)(k \cdot n) + (m^2 - \mu^2)(k \cdot n) + \right. \\
&+ (m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + (m^2 - \mu^2)(k \cdot N) \left. \right\} = \\
&= 2m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N)
\end{aligned} \tag{4.1.125}$$

Quanto al terzo termine abbiamo

$$\begin{aligned}
-\mu \operatorname{Tr} \left\{ q \Pi R \Xi \hat{R} \right\} &= -\frac{\mu}{4} \operatorname{Tr} \left\{ -q(m - \mu)(m + \mu) \not{n} - q(m + \mu) \gamma_5 (m - \mu) \gamma_5 \not{n} + \right. \\
&+ q(m - \mu) \gamma_5 \not{N} (m + \mu) \gamma_5 + q(m + \mu) \not{N} (m - \mu) \left. \right\} = \\
&= -\frac{4\mu}{4} \left\{ -(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) - (m^2 - \mu^2)(n \cdot q) + \right. \\
&- (m^2 - \mu^2)(N \cdot q) + (m^2 - \mu^2)(N \cdot q) \left. \right\} = \\
&= 2\mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q)
\end{aligned} \tag{4.1.126}$$

E infine, circa l'ultimo termine, risulta

$$\begin{aligned}
-m \mu \operatorname{Tr} \left\{ \Pi R \Xi \hat{R} \right\} &= -\frac{m\mu}{4} \operatorname{Tr} \left\{ (m - \mu)(m - \mu) - (m + \mu) \gamma_5 (m + \mu) \gamma_5 + \right. \\
&+ (m - \mu) \gamma_5 \not{N} (m - \mu) \gamma_5 \not{n} - (m + \mu) \not{N} (m + \mu) \not{n} \left. \right\} = \\
&= -\frac{4m\mu}{4} \left\{ (m - \mu)^2 - (m + \mu)^2 - (m - \mu)^2(n \cdot N) - (m + \mu)^2(n \cdot N) \right\} = \\
&= m\mu \left\{ 4m\mu + 2(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \right\} = 4m^2\mu^2 + 2m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N)
\end{aligned} \tag{4.1.127}$$

per cui, combinando insieme i quattro risultati, otteniamo¹⁶

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= 2(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 4m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + \\
&+ 4m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) + 2m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + 2\mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) \\
&+ 4m^2\mu^2 + 2m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N)
\end{aligned} \tag{4.1.129}$$

¹⁶Come verifica del risultato ottenuto, osserviamo che se sommiamo il risultato per la polarizzazione dell'antineutrino descritta dal quadrivettore n con quello relativo alla polarizzazione opposta, descritta dal quadrivettore $-n$, otteniamo la (4.1.100), cioè

$$\sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 = 4(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) + 4m(m^2 - \mu^2)(N \cdot k) + 8m^2\mu^2 \tag{4.1.128}$$

da cui, finalmente, risulta

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_\nu^{(r)}(k)|^2 = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \\ &\cdot \left\{ (m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 2m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + 2m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) + \right. \\ &+ m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + \mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) + \\ &+ 2m^2\mu^2 + m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.1.130)$$

Questo risultato, fornendo $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ in funzione sia dello stato di polarizzazione del leptone carico come di quello neutro, ci permette di verificare la correlazione esistente fra le elicità dei due leptoni nel sistema¹⁷ del CM .

Poniamoci dunque nel CM del decadimento, dove abbiamo

$$k = (\mathcal{E}, b\vec{n}); \quad q = (E, -b\vec{n}) \quad (4.1.131)$$

$$\mathcal{E} = \frac{M^2 + \mu^2 - m^2}{2M}; \quad E = \frac{M^2 + m^2 - \mu^2}{2M} \quad (4.1.132)$$

$$b = \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M} \quad (4.1.133)$$

essendo $\vec{n}$ la direzione di volo dell'antineutrino.

Iniziamo fissando l'elicità dell'antineutrino in modo che essa sia positiva, ovvero ($\lambda = +1$): come è noto, questo implica che il quadrivettore che individua questo stato di spin risulta essere

$$n = \frac{1}{\mu} (b, \mathcal{E} \vec{n}) \quad (4.1.134)$$

Determiniamo il valore di $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ dalla (4.1.130) imponendo che, per quanto riguarda invece il leptone carico, la sua elicità sia negativa ($\lambda = -1$), ovvero¹⁸

$$N = -\frac{1}{m} (b, -E \vec{n}) \quad (4.1.135)$$

In queste ipotesi, quanto ai prodotti scalari che entrano nella (4.1.130), risulta

$$(q \cdot k) = E\mathcal{E} + b^2 = \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} \quad (4.1.136)$$

$$(q \cdot n) = \frac{1}{\mu}(Eb + b\mathcal{E}) = \frac{b}{\mu}(E + \mathcal{E}) = \frac{bM}{\mu} \quad (4.1.137)$$

$$(k \cdot N) = -\frac{1}{m}(\mathcal{E}b + Eb) = -\frac{b}{m}(E + \mathcal{E}) = -\frac{bM}{m} \quad (4.1.138)$$

$$(n \cdot N) = -\frac{1}{m\mu}(b^2 + E\mathcal{E}) = -\frac{1}{2m\mu}(M^2 - m^2 - \mu^2) \quad (4.1.139)$$

¹⁷Si ricordi che mentre il risultato (4.1.130) è invariante di Lorentz, la descrizione degli stati di elicità non lo è e necessita quindi di definire il riferimento in cui viene compiuta.

¹⁸Dato che nel CM i due impulsi spaziali sono opposti, la scelta di elicità fatta implica evidentemente che le proiezioni degli spin dell'antineutrino e del leptone carico debbano essere *concordi*.

per cui, sostituendo nella (4.1.130), abbiamo

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 2m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + \right. \\
&+ 2m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) + m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + \mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) + \\
&+ 2m^2\mu^2 + m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \left. \right\} = \\
&= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2) \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} + 2m\mu \frac{bM}{\mu} \frac{bM}{m} - \right. \\
&- 2m\mu \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) - m(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{m} + \\
&+ \mu(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{\mu} + 2m^2\mu^2 - m\mu(m^2 + \mu^2) \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) \left. \right\} = \\
&= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ 2M^2b^2 - \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2m^2\mu^2 \right\} = \\
&= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} - 2m^2\mu^2 \right. \\
&- \left. \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2m^2\mu^2 \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.1.140}$$

La configurazione di spin richiesta (entrambe le proiezioni concordi) risulta quindi impossibile.

Altrettanto impossibile è la configurazione opposta, in cui entrambe le elicità sono cambiate di segno: la dimostrazione formale di questo segue immediatamente da quanto sopra, visto che gli unici termini lineari in n ed N presenti nella (4.1.140) si elidono l'un l'altro (gli altri termini sono funzioni pari dei quadrivettori di spin e dunque non cambiano).

Possono esistere, quindi, solo le configurazioni in cui le elicità λ dei due leptoni sono entrambe positive o entrambe negative.

Iniziamo dal caso in cui richiediamo che siano entrambe positive.

Rispetto al caso precedente occorre solo cambiare il segno a N , ovvero prendere adesso

$$N = \frac{1}{m} (b, -E \vec{n}) \tag{4.1.141}$$

cambiando, nella (4.1.140), i segni a tutti i prodotti scalari che coinvolgono il solo quadrivettore N .

Si ha

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=+1} &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2) \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} - 2m\mu \frac{bM}{\mu} \frac{bM}{m} + \right. \\
&+ 2m\mu \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) + m(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{m} + \\
&+ \mu(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{\mu} + 2m^2\mu^2 + m\mu(m^2 + \mu^2) \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) \Big\} = \\
&= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - 2M^2b^2 + \right. \\
&+ \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \Big\} = \\
&= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + \right. \\
&+ 2m^2\mu^2 + \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \Big\} = \\
&= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) + 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \right\} \quad (4.1.142)
\end{aligned}$$

che, nel caso in cui entrambe le elicità siano invece negative, diventa¹⁹

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=-1} &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \right\} \quad (4.1.143)
\end{aligned}$$

Le due espressioni differiscono per il termine $2bM(m^2 - \mu^2)$ che ha il segno del valore comune delle due elicità λ .

Nell'ipotesi in cui M è molto maggiore sia di m che di μ , possiamo approssimare questo termine nel modo seguente

$$\begin{aligned}
2bM(m^2 - \mu^2) &= (m^2 - \mu^2) \sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2} \approx \\
&\approx (m^2 - \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2m\mu}{M^2 - m^2 - \mu^2} \right)^2 \right] = \\
&= (m^2 - \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - \frac{2m^2\mu^2(m^2 - \mu^2)}{M^2 - m^2 - \mu^2} \quad (4.1.144)
\end{aligned}$$

¹⁹Ovviamente cambiano segno solo i termini lineari in n o N .

per cui, sostituendo, otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=\pm 1} &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (M^2 - m^2 - \mu^2) \left[(m^2 + \mu^2) \pm (m^2 - \mu^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 \mu^2 \left[1 \mp \frac{m^2 - \mu^2}{M^2 - m^2 - \mu^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.1.145)$$

dalla quale si ricava in particolare che, sempre se $M \gg m, \mu$ allora, con buona approssimazione, risulta

$$\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=+1}}{\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=-1}} \approx \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \quad (4.1.146)$$

4.2 Il decadimento del muone

Il decadimento del muone²⁰

$$\mu^-(P) \rightarrow e^-(p) + \bar{\nu}_e(k) + \nu_\mu(K) \quad (4.2.147)$$

è un tipico processo debole, il quale è descritto nel *MS* dal grafico di fig.4.4.

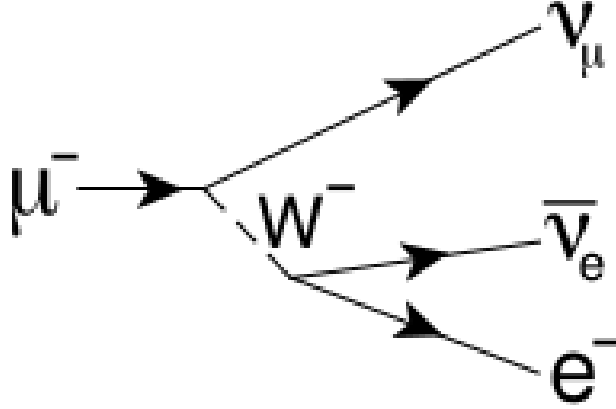


Figura 4.4: *Diagramma di Feynman relativo al decadimento del muone*

Nell'ambito della Teoria di Fermi, che è in grado di descrivere perfettamente il processo in questione al primo ordine perturbativo, il termine di densità lagrangiana responsabile del decadimento è il seguente

$$\mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\alpha^{\dagger(e)}(x) J_\alpha^\mu(x) \quad (4.2.148)$$

dove risulta²¹

$$J_\alpha^{\dagger(e)}(x) = \bar{\psi}_{(e)}(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{(\nu_e)}(x) \equiv \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e \quad (4.2.149)$$

$$J_\alpha^\mu(x) = \bar{\psi}_{(\nu_\mu)}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{(\mu)}(x) \equiv \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu \quad (4.2.150)$$

La larghezza di decadimento $d\Gamma$, in generale, come sappiamo, è data dalla ben nota relazione

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1} \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \quad (4.2.151)$$

²⁰Prenderemo come esempio concreto quello del muone negativo; ma le conclusioni tratte sono immediatamente estendibili al decadimento del muone positivo.

²¹Per semplicità di notazione, indichiamo nel seguito il campo di Dirac delle varie particelle direttamente con il nome delle particelle stesse.

dove S è lo spin della particella che decade (quindi $S = 1/2$, nel caso del muone), E è l'energia della stessa nel riferimento inerziale in cui viene studiato il processo, mentre $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti che contribuiscono al decadimento e infine $d\Phi$ fornisce l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale.

Considereremo il processo di decadimento nel riferimento del sistema del centro di massa (CM), dove E coincide quindi con la massa M del muone, per cui possiamo scrivere

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{4M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \quad (4.2.152)$$

Al primo ordine perturbativo risulta (si ricordi la nota precedente la (3.4.218))

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle out | \mathcal{L}(0) | in \rangle = \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) \cdot \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.153)$$

Quanto a $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, sulla base della (3.4.266), possiamo comunque concludere immediatamente che

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} L_{\alpha\beta}^{(e)} \cdot L^{\alpha\beta}_{(\mu)} = 128 G_F^2 (pK)(kP) \quad (4.2.154)$$

Veniamo allo spazio delle fasi invariante $d\Phi$ per il decadimento (4.2.147).

Dalla definizione abbiamo che

$$\begin{aligned} d\Phi &= (2\pi)^4 \delta^4(P - p - k - K) \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2E_K} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(P - p - k - K) \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2E_k} \frac{d^3p}{2E_p} \end{aligned} \quad (4.2.155)$$

dove P , K , p , k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi del muone, del suo neutrino, dell'elettrone e del suo (anti)neutrino.

Circa la larghezza di decadimento $d\Gamma_{CM}$ di cui alla (4.2.152), poiché i due neutrini non sono osservati, possiamo integrare sui loro impulsi, ottenendo

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{1}{4M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{4M} \frac{d^3p}{2E_p} \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2E_k} \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(P - p - k - K) 128 G_F^2 p_\alpha P_\beta K^\alpha k^\beta = \\ &= \frac{32 G_F^2}{M} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3p}{2E_p} p_\alpha P_\beta \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(P - p - k - K) \end{aligned} \quad (4.2.156)$$

Definiamo adesso il *momento trasferito* dal muone all'elettrone, cioè il quadrivettore

$$q \equiv P - p \quad (4.2.157)$$

il quale, per la presenza della delta di conservazione corrisponde, evidentemente, al quadrimpulso totale²² associato al sistema dei due neutrini, essendo

$$q = P - p = k + K \quad (4.2.158)$$

Poniamo quindi

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(q - k - K) \quad (4.2.159)$$

Questo tensore, che ha le dimensioni del quadrato di un'energia, avendo i neutrini massa nulla, può dipendere solo, attraverso il quadrivettore q , dalle quantità $q^2\delta^{\alpha\beta}$ e $q^\alpha q^\beta$.

Questi due tensori non sono ortogonali fra loro nella metrica di Minkowski, per cui, per l'analisi del tensore $I^{\alpha\beta}$, è preferibile usare i due tensori seguenti, linearmente dipendenti dalle precedenti ma tra loro ortogonali²³

$$q^2\delta^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta; \quad q^2\delta^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta \quad (4.2.160)$$

Da quanto sopra, segue dunque che possiamo scrivere

$$I^{\alpha\beta} = A(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) + B(q^2\delta^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta) \quad (4.2.161)$$

dove A e B devono essere quantità scalari adimensionali.

Per esplicitare questi coefficienti, cominciamo moltiplicando la (4.2.161) per la quantità $q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta$. Si ha

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}(q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) &= (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) \left(A(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) + B(q^2\delta^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta) \right) = \\ &= B \left(4(q^2)^2 + 4(q^2)^2 - 4(q^2)^2 \right) = 4B(q^2)^2 \end{aligned} \quad (4.2.162)$$

D'altronde

$$I^{\alpha\beta}(q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) = \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) \delta^4(q - k - K) \quad (4.2.163)$$

ma

$$K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) = q^2(kK) - 2(qK)(qk) \quad (4.2.164)$$

²²Essendo k e K quadrivettori time-like con parte temporale positiva, ne segue sia che $q^0 = E_k + E_K > 0$ come pure che $q^2 \geq 0$.

²³Infatti

$$(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta)(q^2\delta_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) = 4(q^2)^2 - 2(q^2)^2 + 2(q^2)^2 - 4(q^2)^2 = 0$$

Avendo però assunto che i neutrini abbiano massa nulla, risulta che

$$q^2 = (k + K)^2 = K^2 + k^2 + 2(kK) = 2(kK) \quad (4.2.165)$$

$$qK = (k + K) \cdot K = (kK) + K^2 = (kK) \quad (4.2.166)$$

$$qk = (k + K) \cdot k = k^2 + (kK) = (kK) \quad (4.2.167)$$

per cui, in definitiva, si ha

$$K^\alpha k^\beta (q^2 \delta_{\alpha\beta} - 2 q_\alpha q_\beta) = q^2 (kK) - 2(qK)(qk) = 2(kK)^2 - 2(kK)^2 = 0 \quad (4.2.168)$$

e quindi se ne conclude che il coefficiente B nella (4.2.161) deve essere nullo. Nell'ipotesi di neutrini di massa nulla, il tensore $I^{\alpha\beta}$ è dunque del tipo

$$I^{\alpha\beta} = A(q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta) \quad (4.2.169)$$

Per conoscere il valore della quantità scalare A possiamo procedere di nuovo moltiplicando il tensore stesso per $(q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta)$ e ricordando che

$$(q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta)(q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta) = 4(q^2)^2 + 2 q^2 q^2 + 2 q^2 q^2 + 4 q^2 q^2 = 12(q^2)^2 \quad (4.2.170)$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} 12A(q^2)^2 &= I^{\alpha\beta}(q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta) = \\ &= \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} K^\alpha k^\beta (q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta) \delta^4(q - k - K) \end{aligned} \quad (4.2.171)$$

Ma per quanto visto prima, risulta

$$\begin{aligned} K^\alpha k^\beta (q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2 q_\alpha q_\beta) &= q^2 (kK) + 2(qK)(qk) = 2(kK)^2 + 2(kK)^2 = \\ &= 4(kK)^2 = (q^2)^2 \end{aligned} \quad (4.2.172)$$

D'altronde $q = P - p$ non dipende dalle variabili di integrazione k e K , quindi

$$\begin{aligned} 12A(q^2)^2 &= (q^2)^2 \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} \delta^4(q - k - K) \\ \Rightarrow 12A &= \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} \delta^4(q - k - K) \end{aligned} \quad (4.2.173)$$

Integrando sull'impulso spaziale dell'antineutrino elettronico $d^3 k$, otteniamo

$$\begin{aligned} 12A &= \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{1}{2\hat{E}} \delta(q^0 - E_K - \hat{E}) = \\ &= \int \frac{d^3 K}{2|\vec{K}|} \frac{1}{2|\vec{q} - \vec{K}|} \delta(q^0 - |\vec{K}| - |\vec{q} - \vec{K}|) \end{aligned} \quad (4.2.174)$$

dove abbiamo tenuto conto che l'energia del neutrino muonico (masse dei neutrini nulle) è pari a $E_K = |\vec{K}|$, mentre quella dell'antineutrino elettronico

$\hat{E}$, anch'essa pari al modulo del suo impulso spaziale, per via dell'integrazione in d^3k in presenza della delta di conservazione degli impulsi spaziali, ha condotto all'identificazione $\vec{k} = \vec{q} - \vec{K}$ e dunque a $\hat{E} \equiv |\vec{q} - \vec{K}|$.

L'integrale (4.2.174) è uno scalare di Lorentz e dunque può essere valutato indifferentemente in qualsiasi sistema di riferimento. Scegliamo quello del CM del sistema dei due neutrini, nel quale, evidentemente $\vec{q} = 0$ e dunque $\vec{K} = -\vec{k} \Rightarrow |\vec{K}| = |\vec{k}|$. In questo riferimento la (4.2.174) diviene

$$12 A = \int \frac{d^3 K}{4|\vec{K}|^2} \delta(q^0 - 2|\vec{K}|) \quad (4.2.175)$$

Passando adesso in coordinate polari e ponendo $x = |\vec{K}|$, abbiamo^{24,25}

$$\begin{aligned} 12 A &= \int_0^\infty x^2 dx \frac{1}{4x^2} \int d\Omega \delta(q^0 - 2x) = \frac{4\pi}{4} \int_0^\infty dx \delta(q^0 - 2x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = \frac{\pi}{24} \end{aligned} \quad (4.2.183)$$

e dunque, finalmente, risulta

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(q - k - K) = A(q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta) = \\ &= \frac{\pi}{24} (q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta) \end{aligned} \quad (4.2.184)$$

²⁴Si ricordi che q^0 , in quanto somma delle energie dei due neutrini, è certamente positivo.

²⁵Se non avessimo fatto l'ipotesi di lavorare nel sistema di riferimento dove i due neutrini hanno impulsi uguali ed opposti, allora l'integrale da fare sarebbe comunque stato il seguente

$$12 A = \int \frac{d^3 K}{2|\vec{K}|} \frac{1}{2|\vec{q} - \vec{K}|} \delta(q^0 - |\vec{K}| - |\vec{q} - \vec{K}|) \quad (4.2.176)$$

che, in coordinate polari, prendendo $\vec{q}$ come asse polare e ponendo $x \equiv |\vec{K}|$ ed $y = |\vec{q}|$, diviene

$$12 A = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{2x} \int d\Omega \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}} \delta\left(q^0 - x - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}\right) \quad (4.2.177)$$

Consideriamo adesso l'argomento della delta, fissato l'angolo polare θ , come funzione di x . Come sappiamo, nel caso in cui la funzione $f(x)$ abbia un unico zero per $x = \bar{x}$, allora risulta

$$\delta(f(x)) dx = dz \delta(z) \frac{dx}{df} \Big|_{f(\bar{x})=0} \quad (4.2.178)$$

Sostituendo allora nell'espressione (4.2.156) della larghezza di decadimento l'espressione di cui sopra, abbiamo

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{CM} &= \frac{32 G_F^2}{M} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p}{2E_p} p_\alpha P_\beta \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(P - p - k - K) = \\
 &= \frac{32 G_F^2}{M} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p}{2E_p} p_\alpha P_\beta \frac{\pi}{24} (q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta) = \\
 &= \frac{G_F^2}{M} \frac{1}{\pi^5} \frac{\pi}{24} \frac{d^3 p}{2E_p} (q^2 (pP) + 2(qp)(qP)) = \\
 &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3 p}{2E_p} (q^2 (pP) + 2(qp)(qP)) \quad (4.2.185)
 \end{aligned}$$

per cui serve di conoscere dove la funzione f si annulla, i.e. risolvere l'equazione

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}) = 0 &\Rightarrow q^0 - x = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (q^0)^2 + x^2 - 2q^0 x = x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (q^0)^2 - y^2 = 2x(q^0 - y \cos\theta) \Rightarrow \bar{x} = \frac{(q^0)^2 - y^2}{2(q^0 - y \cos\theta)} \quad (4.2.179)
 \end{aligned}$$

Quanto poi alla derivata, evidentemente è

$$\begin{aligned}
 f(x) &= q^0 - x - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta} \Rightarrow \\
 \frac{df}{dx} &= -1 + \frac{y \cos\theta - x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}} \quad (4.2.180)
 \end{aligned}$$

la quale, calcolata per $x = \bar{x}$, diviene

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} = -1 + \frac{y \cos\theta - x}{q^0 - x} = \frac{y \cos\theta - q^0}{q^0 - x} \quad (4.2.181)$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 12 A &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{2x} \int d\Omega \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}} \delta(q^0 - x - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}) = \\
 &= \frac{1}{4} \int d\Omega x dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta}} \delta(f(x)) = \frac{1}{4} \int d\Omega \bar{x} \frac{1}{q^0 - \bar{x}} \frac{q^0 - \bar{x}}{y \cos\theta - q^0} = \\
 &= -\frac{1}{4} \int d\Omega \frac{(q^0)^2 - y^2}{2(q^0 - y \cos\theta)^2} = -\frac{2\pi}{8} ((q^0)^2 - y^2) \int_1^{-1} d(-\cos\theta) \frac{1}{(q^0 - y \cos\theta)^2} = \\
 &= \frac{2\pi}{8} ((q^0)^2 - y^2) \int_{-1}^1 dz \frac{1}{(q^0 + yz)^2} = \frac{2\pi}{8} ((q^0)^2 - y^2) \left(-\frac{1}{y}\right) \left[\frac{1}{q^0 + y} - \frac{1}{q^0 - y}\right] = \\
 &= \frac{2\pi}{8} ((q^0)^2 - y^2) \left(-\frac{1}{y}\right) \frac{-2y}{(q^0)^2 - y^2} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{24} \quad (4.2.182)
 \end{aligned}$$

in accordo con la (4.2.183).

D'altronde, nel riferimento del CM del muone dove stiamo valutando $d\Gamma_{CM}$, detta $E \equiv E_p$ l'energia dell'elettrone, possiamo scrivere

$$(pq) = p(P - p) = (pP) - m^2 = EM - m^2 \approx EM \quad (4.2.186)$$

$$(pP) = EM \quad (4.2.187)$$

$$q^2 = (P - p)(P - p) = M^2 + m^2 - 2(pP) \approx M^2 - 2EM \quad (4.2.188)$$

$$(qP) = (P - p)P = M^2 - pP = M^2 - EM \quad (4.2.189)$$

e quindi, sostituendo, risulta

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3p}{2E} \left[(M^2 - 2EM) EM + 2EM (M^2 - EM) \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3p}{2E} \left[3EM^3 - 4(EM)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.2.190)$$

da cui, semplificando, passando in coordinate polari e integrando sulle variabili angolari, ricaviamo

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3p}{2E} \left[3EM^3 - 4(EM)^2 \right] = \frac{G_F^2}{48\pi^4} p^2 dp d\Omega \left[3M^2 - 4EM \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} p^2 dp \left[3M^2 - 4EM \right] \approx \frac{G_F^2}{12\pi^3} \left[3M^2 - 4EM \right] E^2 dE \end{aligned} \quad (4.2.191)$$

dove l'ultimo passaggio è fatto nell'ipotesi, di nuovo, di poter confondere l'impulso p con l'energia E dell'elettrone.

E' conveniente adesso definire il parametro adimensionale ϵ nel modo seguente

$$\epsilon \equiv \frac{2E}{M} \Leftrightarrow E = \frac{M\epsilon}{2} \rightarrow d\epsilon = \frac{2}{M} dE \Leftrightarrow dE = \frac{M}{2} d\epsilon \quad (4.2.192)$$

Esso può variare solo fra 0 e 1, essendo l'energia massima dell'elettrone nel CM quella per cui i due neutrini sono colineari e dunque formano un sistema con massa invariante nulla, cioè tali da possedere, insieme, una energia pari al modulo del loro impulso, uguale peraltro a quello dell'elettrone, cioè a $p = E = M/2$.

Sostituendo ϵ nell'espressione della larghezza di decadimento (4.2.191), si ha

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} \left[3M^2 - 4EM \right] E^2 dE = \frac{G_F^2}{12\pi^3} \left[3M^2 - 4M \frac{M\epsilon}{2} \right] \left(\frac{M\epsilon}{2} \right)^2 \frac{M}{2} d\epsilon = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^2 [3 - 2\epsilon] M^3 \frac{1}{8} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 [3 - 2\epsilon] \epsilon^2 d\epsilon \end{aligned} \quad (4.2.193)$$

D'altronde, posto $f(\epsilon) \equiv (3 - 2\epsilon) \epsilon^2$, abbiamo che

$$\int f(\epsilon) d\epsilon = \int [3 - 2\epsilon] \epsilon^2 d\epsilon = 3 \cdot \frac{\epsilon^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{\epsilon^4}{4} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (4.2.194)$$

quindi, quanto alla larghezza complessiva Γ del decadimento, possiamo concludere che essa vale

$$\Gamma_{CM} = \int \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 [3 - 2\epsilon] \epsilon^2 d\epsilon = \frac{1}{192\pi^3} G_F^2 M^5 \quad (4.2.195)$$

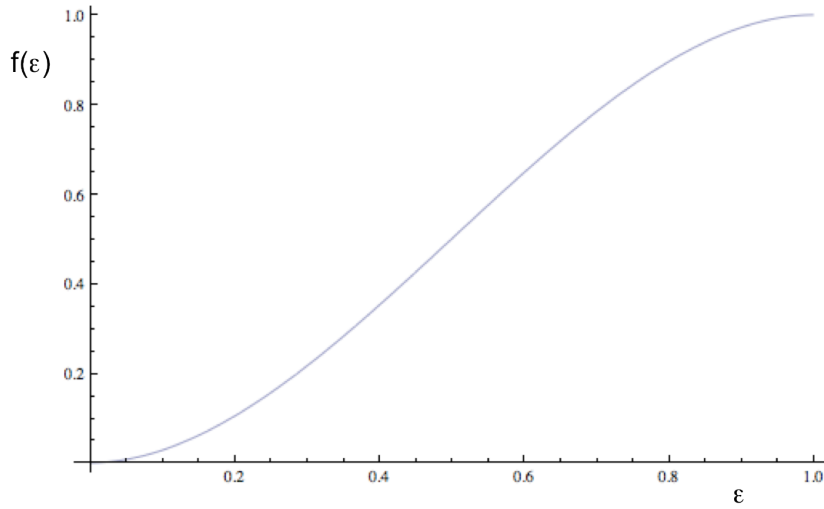


Figura 4.5: *Distribuzione dell'energia dell'elettrone di decadimento del mu*

Nel sistema di riferimento in cui il muone decade a riposo, lo spettro dell'energia dell'elettrone emesso è descritto in fig.4.5 dalla funzione $f(\epsilon) \equiv f(2E/M)$, in ottimo accordo con i risultati sperimentali²⁶ ottenuti originariamente dal gruppo di M.Bardon et al. al sincrociclotrone di Nevis (NY Columbia University), per quanto concerne il decadimento del muone positivo.

²⁶M. Bardon, P. Norton, J. Peoples, A.M. Sachs, J. Lee Franzini: *Measurement of the momentum spectrum of positrons from muon decay*; Phys. Rev. Lett. 14, 449 (1965)

Fino a questo momento abbiamo trattato il caso del decadimento del muone non polarizzato²⁷.

²⁷In realtà quando abbiamo esplicitato la (4.2.185) abbiamo trascurato la massa m dell'elettrone ovvero abbiamo operato come se questo avesse massa nulla. Si dimostra, come adesso vedremo, che l'effetto della massa dell'elettrone comporta una riduzione della rate di decadimento Γ per il fattore

$$\rho \equiv [(1 - \mu^8) - 8\mu^2(1 - \mu^4) - 24\mu^4 \ln \mu] \quad (4.2.196)$$

dove $\mu \equiv m/M$ cioè rappresenta il rapporto fra la massa dell'elettrone e quella del muone.

Ripartiamo infatti dalla (4.2.185), cioè dalla relazione

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3 p}{2E_p} [q^2(pP) + 2(qp)(qP)] \quad (4.2.197)$$

Valutando gli invarianti nel sistema del CM , detta E l'energia dell'elettrone ed M la massa del muone, abbiamo

$$q^2 = (P - p)^2 = M^2 + m^2 - 2ME \quad (4.2.198)$$

$$pP = ME \quad (4.2.199)$$

$$qp = (P - p)p = Pp - m^2 = ME - m^2 \quad (4.2.200)$$

$$qP = (P - p)P = M^2 - pP = M^2 - ME \quad (4.2.201)$$

e dunque

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3 p}{2E_p} [(M^2 + m^2 - 2ME)ME + 2(ME - m^2)(M^2 - ME)] \quad (4.2.202)$$

ma

$$\frac{p^2 dp}{2E} = p \frac{p dp}{2E} = p \frac{E dE}{2E} = \sqrt{E^2 - m^2} \frac{dE}{2} \quad (4.2.203)$$

mentre la quantità in parentesi quadra nella (4.2.202) vale

$$\begin{aligned} & [(M^2 + m^2 - 2ME)ME + 2(ME - m^2)(M^2 - ME)] = \\ & = 3M^3 E + 3m^2 ME - 4M^2 E^2 - 2m^2 M^2 \end{aligned} \quad (4.2.204)$$

Quanto poi all'energia dell'elettrone, essa varia fra m (elettrone anch'esso fermo nel CM) ed $\hat{E}$, raggiunta quando i due neutrini sono emessi paralleli e quindi con massa invariante complessiva ancora nulla. Questo caso è equivalente a quello di un decadimento a due corpi in cui uno dei due, quello costituito dai due neutrini, ha massa invariante nulla (essendo colineari) ed energia complessiva k , coincidente con il modulo dell'impulso spaziale sia del sistema dei due neutrini che dell'elettrone. In questo caso, la conservazione dell'energia impone che

$$k + \sqrt{m^2 + k^2} = M \Rightarrow k = \frac{M^2 - m^2}{2M} \Rightarrow \hat{E} = M - k = \frac{M^2 + m^2}{2M} \quad (4.2.205)$$

E' conveniente, stavolta, usare come scala dell'energia direttamente la massa dell'elettrone: ponendo allora (si osservi che questa scala e quella usata a suo tempo trattando il caso in cui l'elettrone veniva assunto di massa nulla, differiscono del fattore $1/2\mu = M/(2m)$)

$$E = m\epsilon \quad e \quad \mu = \frac{m}{M} \quad (4.2.206)$$

possiamo riscrivere la (4.2.204) nel modo seguente

$$\begin{aligned} 3M^3E + 3m^2ME - 4M^2E^2 - 2m^2M^2 &= 3M^3m\epsilon + 3m^2Mm\epsilon - 4M^2m^2\epsilon^2 - 2m^2M^2 = \\ &= 3M^4\mu\epsilon + 3M^4\mu^3\epsilon - 4M^4\mu^2\epsilon^2 - 2M^4\mu^2 = M^4 [3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2] \end{aligned} \quad (4.2.207)$$

e dunque risulta

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{p^2 dp d\Omega}{2E_p} M^4 [3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2] \quad (4.2.208)$$

ma siccome $d\Gamma_{CM}$ non dipende dalle variabili angolari, si può integrare nell'angolo solido: se poi si ricorda che

$$\begin{aligned} \frac{p^2 dp}{2E_p} &= \frac{p p dp}{2E_p} = \frac{p E dE}{2E} = \frac{1}{2} p dE = \frac{1}{2} \sqrt{E^2 - m^2} dE = \frac{1}{2} m^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon = \\ &= M^2 \frac{\mu^2}{2} \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (4.2.209)$$

evidentemente si ottiene

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} 4\pi M^2 \frac{\mu^2}{2} \sqrt{\epsilon^2 - 1} M^4 [3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2] d\epsilon = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} [3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2] d\epsilon \end{aligned} \quad (4.2.210)$$

dove, vista la definizione data di ϵ e la massima energia possibile per l'elettrone, questa variabile varia fra 1 ed ϵ_M dato da

$$\epsilon_M = \frac{M^2 + m^2}{2mM} = \frac{1 + \mu^2}{2\mu} \quad (4.2.211)$$

Volendo adesso calcolare la larghezza totale Γ_{CM} , occorre evidentemente integrare la (4.2.210).

Gli integrali che occorre calcolare sono elencati di seguito.

- $\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1}$: abbiamo

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_M \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} - \log \left[\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} \right] \right\} \quad (4.2.212)$$

- $\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1}$: risulta

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{3} (\epsilon_M^2 - 1)^{3/2} \quad (4.2.213)$$

- $\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \epsilon^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1}$: abbiamo

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \epsilon^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{8} \left\{ \epsilon_M \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} (2\epsilon_M^2 - 1) - \log \left[\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} \right] \right\} \quad (4.2.214)$$

Supponiamo adesso, invece, che il muone sia polarizzato (ovvero si trovi in uno stato puro) e che n^μ rappresenti il quadrivettore di spin che descrive, nel riferimento assegnato, la polarizzazione del muone, ovvero che lo stato del muone sia autostato del proiettore di spin

$$\Pi = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} \quad (4.2.223)$$

Allora, nella espressione (4.2.153) dell'elemento di matrice, potremo continuare a sommare sugli stati di spin del muone pur di sostituire, al posto di

D'altronde

$$\epsilon_M^2 - 1 = \left(\frac{1 + \mu^2}{2\mu} \right)^2 - 1 = \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right)^2 \quad (4.2.215)$$

$$\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} = \frac{1 + \mu^2}{2\mu} + \frac{1 - \mu^2}{2\mu} = \frac{1}{\mu} \quad (4.2.216)$$

$$\epsilon_M \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} = \frac{1 + \mu^2}{2\mu} \cdot \frac{1 - \mu^2}{2\mu} = \frac{1 - \mu^4}{4\mu^2} \quad (4.2.217)$$

$$2\epsilon_M^2 - 1 = (\epsilon_M^2 - 1) + \epsilon_M^2 = \frac{1 + \mu^4}{2\mu^2} \quad (4.2.218)$$

e quindi

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \mu^4}{4\mu^2} + \ln \mu \right) \quad (4.2.219)$$

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right)^3 \quad (4.2.220)$$

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \epsilon^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{8} \left(\frac{1 - \mu^4}{4\mu^2} \cdot \frac{1 + \mu^4}{2\mu^2} + \ln \mu \right) \quad (4.2.221)$$

per cui, quanto alla larghezza di decadimento Γ_{CM} , dalla (4.2.210) abbiamo infine che

$$\begin{aligned} \Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right)^3 (3\mu + 3\mu^3) - 4\mu^2 \frac{1}{8} \frac{1 - \mu^8}{8\mu^4} - 4\mu^2 \frac{1}{8} \ln \mu - 2\mu^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \mu^4}{4\mu^2} + \ln \mu \right) \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \left[\frac{(1 - \mu^2)^3}{8\mu^3} \mu(1 + \mu^2) - \frac{1 - \mu^8}{16\mu^2} - \frac{1}{2} \mu^2 \ln \mu - \frac{1 - \mu^4}{4} - \mu^2 \ln \mu \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \left[\frac{(1 - \mu^2)^2(1 - \mu^4)}{8\mu^2} - \frac{1 - \mu^8}{16\mu^2} - \frac{3}{2} \mu^2 \ln \mu - \frac{1 - \mu^4}{4} \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \frac{1}{8} \left[(1 - \mu^2)^2(1 - \mu^4) - \frac{1}{2}(1 - \mu^8) - 12\mu^4 \ln \mu - 2\mu^2(1 - \mu^4) \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \frac{1}{8} \left[(1 + \mu^4)(1 - \mu^4) - 2\mu^2(1 - \mu^4) - \frac{1}{2}(1 - \mu^8) - 12\mu^4 \ln \mu - 2\mu^2(1 - \mu^4) \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \frac{1}{16} \left[(1 - \mu^8) - 8\mu^2(1 - \mu^4) - 24\mu^4 \ln \mu \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5 \left[(1 - \mu^8) - 8\mu^2(1 - \mu^4) - 24\mu^4 \ln \mu \right] \end{aligned} \quad (4.2.222)$$

$u_{(\mu)}^{(s)}(P)$, lo stato proiettato, cioè $\Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P)$, ottenendo quindi

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) \cdot \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \right] \quad (4.2.224)$$

Quanto a $|\mathcal{M}|^2$, possiamo al solito scriverlo come

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{2} L_{\alpha\beta}^{(e)} \cdot \hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta} \quad (4.2.225)$$

dove il tensore $L_{\alpha\beta}^{(e)}$ è definito come

$$L_{\alpha\beta}^{(e)} = \sum_{r,b} \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right)^* \quad (4.2.226)$$

essendo p il quadrimpulso dell'elettrone e k quello del suo antineutrino.

Il calcolo fornisce²⁸

$$L_{\alpha\beta}^{(e)} = 8 [p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - (p \cdot k) \delta_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} p^\sigma k^\tau] \quad (4.2.234)$$

²⁸Il calcolo di $L_{\alpha\beta}^{(e)}$ è del tutto analogo a quello svolto nel caso dello scattering di Cowan e Reines. Per completezza, comunque, lo riportiamo qui di seguito. Abbiamo

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^{(e)} &= \sum_{r,b} \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right)^* = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,b} \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right)^\dagger \right\} = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,b} \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) \left(v_{(\nu_e)}^{\dagger(b)}(k) (1 - \gamma_5^\dagger) \gamma_\beta^\dagger (\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p))^\dagger \right) \right\} = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,b} \bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \bar{v}_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma_\beta^\dagger \gamma^0 u_{(e)}^{(r)}(p) \right\} = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_r u_{(e)}^{(r)}(p) \bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \right) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \left(\sum_b v_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \bar{v}_{(\nu_e)}^{(b)}(k) \right) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \right\} \quad (4.2.227) \end{aligned}$$

da cui

$$L_{\alpha\beta}^{(e)} = Tr \{ (\not{p} + m_e) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\not{k} - m_{\nu_e}) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} \quad (4.2.228)$$

Ma

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_5)(\not{k} - m_{\nu_e})(1 + \gamma_5) &= (1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5) - m_{\nu_e} (1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5) = \\ &= \not{k} (1 + \gamma_5)^2 = 2 \not{k} (1 + \gamma_5) \end{aligned} \quad (4.2.229)$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^{(e)} &= Tr \{ (\not{p} + m_e) \gamma_\alpha 2 \not{k} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} = \\ &= 2 Tr \{ \not{p} \gamma_\alpha \not{k} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta + m_e \gamma_\alpha \not{k} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} = \\ &= 2 Tr \{ \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_5 \gamma_\beta + m_e \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + m_e \gamma_\alpha \not{k} \gamma_5 \gamma_\beta \} = \\ &= 2 Tr \{ \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_5 \gamma_\beta \} \quad (4.2.230) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il tensore $\hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta}$, data la presenza del proiettore di spin, non possiamo usare direttamente il risultato precedente e occorre ricalcolarlo. Si ha

$$\begin{aligned}\hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta} &\equiv \sum_{a,s} \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right)^* = \\ &= \sum_{a,s} Tr \left\{ \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right)^\dagger \right\} = \\ &= \sum_{a,s} Tr \left\{ \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \left(\bar{u}_{(\mu)}^{(s)}(P) \gamma^0 \Pi^\dagger (1 - \gamma_5) (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 u_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \right) \right\}\end{aligned}$$

ma, ricordando che $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ e che le quattro γ^μ anticommutano con la γ_5 , abbiamo evidentemente che

$$\begin{aligned}\Pi^\dagger &= \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{p}}{2} \right)^\dagger = \frac{1 + \not{p}^\dagger \gamma_5}{2} = \frac{1 + \gamma^0 \not{p} \gamma^0 \gamma_5}{2} = \\ &= \gamma^0 \left(\frac{1 - \not{p} \gamma_5}{2} \right) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{p}}{2} \right) \gamma^0 = \gamma^0 \Pi \gamma^0 \quad (4.2.235)\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta} &= \sum_{a,s} Tr \left\{ \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \left(\bar{u}_{(\mu)}^{(s)}(P) \gamma^0 \Pi^\dagger (1 - \gamma_5) (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 u_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \right) \right\} = \\ &= \sum_{a,s} Tr \left\{ \left(\bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \right) \left(\bar{u}_{(\mu)}^{(s)}(P) \gamma^0 \gamma^0 \Pi \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0 u_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \right) \right\} \\ &= \sum_{a,s} Tr \left\{ \bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \bar{u}_{(\mu)}^{(s)}(P) \Pi \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 \gamma^\beta u_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \right\} \\ &= \sum_{a,s} Tr \left\{ \bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \bar{u}_{(\mu)}^{(s)}(P) \Pi (1 + \gamma_5) \gamma^\beta u_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \right\} \\ &= \sum_{a,s} Tr \left\{ u_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \bar{u}_{(\nu_\mu)}^{(a)}(K) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi u_{(\mu)}^{(s)}(P) \bar{u}_{(\mu)}^{(s)}(P) \Pi (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} \\ &= Tr \left\{ (\not{K} + m) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi (\not{P} + M) \Pi (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} \quad (4.2.236)\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la traccia di un numero dispari di matrici γ^α è comunque nulla. D'altronde

$$\begin{aligned}Tr \{ \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta \} &= p^\sigma k^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \} = p^\sigma k^\tau 4(\delta_{\sigma\alpha} \delta_{\tau\beta} + \delta_{\sigma\beta} \delta_{\alpha\tau} - \delta_{\sigma\tau} \delta_{\alpha\beta}) = \\ &= 4 [p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - (p \cdot k) \delta_{\alpha\beta}] \quad (4.2.231)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Tr \{ \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_5 \gamma_\beta \} &= p^\sigma k^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_5 \gamma_\beta \} = -p^\sigma k^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \gamma_5 \} = \\ &= -4i p^\sigma k^\tau \epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} = 4i p^\sigma k^\tau \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \quad (4.2.232)\end{aligned}$$

e quindi risulta infine

$$\begin{aligned}L_{\alpha\beta}^{(e)} &= 2 Tr \{ \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + \not{p} \gamma_\alpha \not{k} \gamma_5 \gamma_\beta \} = \\ &= 8 [p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - (p \cdot k) \delta_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} p^\sigma k^\tau] \quad (4.2.233)\end{aligned}$$

dove m è la massa del neutrino muonico mentre M è quella del muone stesso. D'altronde, come sappiamo, il proiettore di spin commuta con il proiettore sugli stati a energia positiva/negativa, e dunque

$$\Pi (\not{P} + M) = (\not{P} + M) \Pi \quad (4.2.237)$$

Siccome poi, essendo Π un proiettore, risulta $\Pi^2 = \Pi$, ecco che possiamo concludere che

$$\begin{aligned} \hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta} &= Tr \left\{ (\not{K} + m) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Pi (\not{P} + M) \Pi (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{K} + m) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) \Pi (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{K} + m) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) \Pi \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \right\} = \\ &= Tr \left\{ (1 - \gamma_5) (\not{K} + m) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) \Pi \gamma^\beta \right\} \end{aligned} \quad (4.2.238)$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_5) \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) &= \not{K} (1 + \gamma_5) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) = \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)^2 = \\ &= 2 \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \end{aligned} \quad (4.2.239)$$

mentre

$$(1 - \gamma_5) m \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) = m (1 - \gamma_5) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) = m \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) (1 - \gamma_5) = 0 \quad (4.2.240)$$

dunque

$$\begin{aligned} \hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta} &= Tr \left\{ (1 - \gamma_5) (\not{K} + m) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) \Pi \gamma^\beta \right\} = \\ &= 2 Tr \left\{ \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) \Pi \gamma^\beta \right\} = 2 Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) \Pi \right\} = \\ &= Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) (1 + \gamma_5) \not{n} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.241)$$

D'altronde abbiamo già visto che la traccia del prodotto di un numero dispari di γ è nulla, per cui, espandendo $(\not{P} + M) (1 + \gamma_5) \not{n}$, ne ricaviamo che

$$\begin{aligned} \hat{L}_{(\mu)}^{\alpha\beta} &= Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M) (1 + \gamma_5) \not{n} \right\} = \\ &= Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \not{P} \right\} + M Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \gamma_5 \not{n} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.242)$$

Il primo termine è metà di quello non polarizzato, mentre il secondo termine vale

$$\begin{aligned} M Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \gamma_5 \not{n} \right\} &= M Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (\gamma_5 - 1) \not{n} \right\} = \\ &= -M Tr \left\{ \gamma^\beta \not{K} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \not{n} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.243)$$

per cui, definendo il quadrivettore R seguente

$$R \equiv P - M n \quad (4.2.244)$$

abbiamo semplicemente che

$$L_{(\mu)}^{\alpha\beta} = 4 \left[K^\alpha R^\beta + K^\beta R^\alpha - (K \cdot R) \delta^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} K_\sigma R_\tau \right] \quad (4.2.245)$$

da cui si ricava infine, in perfetta analogia con la (4.2.154) ottenuta nel caso non polarizzato, che

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 64 G_F^2 (pK)(kR) \quad (4.2.246)$$

ovvero un'espressione che, a parte la sostituzione $P \rightarrow R$ è la metà di quanto ottenuto nel caso non polarizzato. Questo non deve meravigliare in quanto $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin dei moduli quadri degli elementi di matrice e, nel caso non polarizzato²⁹, quanto al muone, questi stati indipendenti sono evidentemente due, mentre nel caso polarizzato, esso è naturalmente uno solo.

Venendo adesso all'espressione di $d\Gamma_{CM}$, stavolta non dobbiamo, ovviamente, mediare sugli stati di spin iniziali visto che esso è uno solo, e dunque abbiamo

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{2M} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Phi \quad (4.2.247)$$

ovvero, per quanto già visto in precedenza (cfr. (4.2.156)), risulta

$$d\Gamma_{CM} = \frac{32 G_F^2}{M} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p}{2E_p} p_\alpha R_\beta \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(P - p - k - K) \quad (4.2.248)$$

Definendo al solito

$$q \equiv P - p = K + k \quad (4.2.249)$$

e integrando sugli impulsi dei neutrini, essendo per la (4.2.184) che

$$I^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(q - k - K) = \frac{\pi}{24} (q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta) \quad (4.2.250)$$

otteniamo, in accordo con la (4.2.185)

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{32 G_F^2}{M} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p}{2E_p} p_\alpha R_\beta \frac{\pi}{24} (q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta) = \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3 p}{2E_p} \left[q^2 (pR) + 2(qp)(qR) \right] \end{aligned} \quad (4.2.251)$$

²⁹ Il caso non polarizzato si ottiene sommando i due $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ corrispondenti alle due polarizzazioni ortogonali individuate rispettivamente dai proiettori $\Pi = \Pi_+ = \frac{1+\gamma_5 \not{v}}{2}$ e $\Pi_- = \frac{1-\gamma_5 \not{v}}{2}$. Il primo $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è proporzionale, come abbiamo visto, a $R = R_+ = P - M n$ mentre il secondo, evidentemente, è proporzionale a $R_- = P + M n$ e dunque la loro somma dipende da $2P$ ovvero vale appunto $128 G_F^2 (pK)(kP)$, in accordo con quanto già ottenuto appunto nel caso non polarizzato.

D'altronde, nel riferimento del CM abbiamo già visto che

$$q^2 = (P - p)^2 = M^2 + m^2 - 2EM \approx M^2 - 2EM \quad (4.2.252)$$

mentre abbiamo

$$pR = p(P - Mn) = pP - Mpn = EM + M|\vec{p}| \cos \theta \quad (4.2.253)$$

dove abbiamo usato il fatto che, nel CM , il quadrivettore di spin del muone ha la struttura $n = (0, \vec{n})$ con $\vec{n}$ versore opportuno, e abbiamo indicato con θ l'angolo fra il vettore $\vec{n}$ e la parte spaziale $\vec{p}$ del quadrimpulso p dell'elettrone. Analogamente risulta

$$qp = (P - p)p = EM - m^2 \approx EM \quad (4.2.254)$$

mentre, quanto a qR , si ha (si ricordi che $Pn = 0$ e che stiamo trascurando di nuovo la massa dell'elettrone in confronto alla sua energia)

$$\begin{aligned} qR &= (P - p)R = (P - p)(P - Mn) = M^2 - EM - M|\vec{p}| \cos \theta \\ &\approx M^2 - EM(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.2.255)$$

dunque

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3p}{2E_p} \left[q^2(pR) + 2(qp)(qR) \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^4 M} \frac{d^3p}{2E_p} \left[(M^2 - 2EM)EM(1 + \cos \theta) + 2EM(M^2 - EM(1 + \cos \theta)) \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{48\pi^4 M} \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p} \left[(1 + \cos \theta)(EM^3 - 4E^2 M^2) + 2EM^3 \right] \end{aligned} \quad (4.2.256)$$

Nell'approssimazione in cui si trascura la massa dell'elettrone in confronto alla sua energia, abbiamo poi che $p^2 dp = p E dE \approx E^2 dE$, per cui, sostituendo e integrando nell'angolo azimutale, otteniamo che

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^3 M} E dE \sin \theta d\theta \left[(1 + \cos \theta)(EM^3 - 4E^2 M^2) + 2EM^3 \right] \quad (4.2.257)$$

Definendo adesso, al solito, la quantità adimensionale ϵ nel modo seguente

$$\epsilon \equiv \frac{2E}{M} \quad (4.2.258)$$

risulta³⁰

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^3 M} \left(\frac{M}{2}\right)^2 \epsilon d\epsilon \sin\theta d\theta \left[(1 + \cos\theta) \left(\frac{M}{2} M^3 \epsilon - M^4 \epsilon^2\right) + M^4 \epsilon \right] = \\
 &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \epsilon^2 d\epsilon \sin\theta d\theta \left[(1 + \cos\theta) \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) + 1 \right] = \\
 &= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5 \sin\theta d\theta [(3 - 2\epsilon) + (1 - 2\epsilon) \cos\theta] \epsilon^2 d\epsilon \quad (4.2.260)
 \end{aligned}$$

Integrando questa espressione in $d\epsilon$ fra 0 e 1, otteniamo la distribuzione angolare dell'elettrone rispetto alla direzione di polarizzazione del muone nel suo CM , a prescindere dall'energia dell'elettrone stesso.

Poiché $\int_0^1 \epsilon^2 d\epsilon = 1/3$ e $\int_0^1 \epsilon^3 d\epsilon = 1/4$, risulta

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \sin\theta d\theta \left[(1 + \cos\theta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \right] = \\
 &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} \frac{M^5}{12} \sin\theta d\theta [-(1 + \cos\theta) + 4] = \\
 &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} \frac{M^5}{12} \sin\theta d\theta (3 - \cos\theta) = \frac{G_F^2}{96\pi^3} \frac{M^5}{4} \sin\theta d\theta \left(1 - \frac{\cos\theta}{3}\right) = \\
 &= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5 \frac{1}{2} \sin\theta d\theta \left(1 - \frac{\cos\theta}{3}\right) \quad (4.2.261)
 \end{aligned}$$

da cui è facile riconoscere che risulta

$$\left(\frac{d\Gamma_{CM}}{d\Omega}\right)_{pol} = \left(\frac{d\Gamma_{CM}}{d\Omega}\right)_{unpol} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos\theta}{3}\right) \quad (4.2.262)$$

Questo risultato vale, come si è visto, se integriamo su tutto lo spettro dell'elettrone.

La (4.2.260) mostra chiaramente però che, se l'energia E dell'elettrone è inferiore a $M/4$, ovvero se $\epsilon < 1/2$, allora $\frac{d^2\Gamma_{CM}}{d\epsilon d(-\cos\theta)}$ è massima per $\theta = 0$, risultando minima per $\theta = \pi$, mentre se $1/2 < \epsilon < 1$ ovvero per energie superiori ad $M/4$, accade l'opposto.

³⁰Integrando in $d\theta$, poiché $\int_0^\pi \sin\theta d\theta \cos\theta = 0$ e $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2$, dalla (4.2.260) ricaviamo

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \epsilon^2 d\epsilon \left[2\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) + 2\right] = \\
 &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \epsilon^2 d\epsilon (3 - 2\epsilon) \quad (4.2.259)
 \end{aligned}$$

cioè lo stesso risultato ottenuto nel caso non polarizzato (ovviamente).

Se lo spettro dell'elettrone viene integrato a partire da $\epsilon = 0$ fino al valore $x \leq 1$, allora risulta che

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{CM}}{d(-\cos\theta)} &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \left[(1 + \cos\theta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{x^3}{3} \right] = \\ &= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5 x^3 \left[\left(1 - \frac{x}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2} \right) \cos\theta \right] \quad (4.2.263) \end{aligned}$$

Questa espressione, rispetto a θ , è massima per $\theta = 0$ solo se $x < 2/3$, è indipendente da θ (isotropa) per $x = 2/3$ e risulta minima per $\theta = 0$ (e massima, invece, per $\theta = \pi$) quando $x > 2/3$.

In particolare, l'asimmetria legata alla violazione della parità è massimizzata se lo spettro viene integrato fra $1/2 \leq \epsilon \leq 1$ perché in questa regione essa è tutta dello stesso segno e lo spazio delle fasi, comunque, è maggiore che nel caso in cui $\epsilon \leq 1/2$.

Questa è una delle ragioni per le quali, nell'esperimento di Garwin e Lederman sulla evidenza della violazione della parità nel decadimento³¹ del pione e del muone, lo spettro di energia dei positroni rivelati è quello superiore a 25 MeV .

³¹L'esperimento in questione studiò i decadimenti del pione e del muone positivi, ma la conclusione tratta adesso resta valida anche in quel caso, solo che le elicità si scambiano di segno.

4.3 Il decadimento del neutrone

Consideriamo adesso il decadimento del neutrone, nell'ipotesi in cui neutrone e protone possano essere trattati come particelle di Dirac, senza struttura interna. Si tratta del processo debole seguente

$$n(P, s) \rightarrow p(K, a) + e^-(p, r) + \bar{\nu}(k, b) \quad (4.3.264)$$

dove P, K, p e k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi del neutrone, protone, elettrone e antineutrino elettronico, mentre s, a, r, b individuano i loro stati di spin.

Se indichiamo con M la massa del neutrone, nel CM , come sappiamo, risulta

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{4M} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Phi \quad (4.3.265)$$

dove abbiamo tenuto conto dello spin del neutrone, abbiamo assunto che esso non sia polarizzato e, al solito, abbiamo indicato con $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ la somma dei moduli quadri degli elementi di matrice su tutti gli stati di spin iniziali e finali. Nell'ambito della teoria $V - A$ (estensione della teoria di Fermi), la densità lagrangiana di corrente carica responsabile del decadimento è la seguente

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_n(x)] [\bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x)] \quad (4.3.266)$$

e dunque, per quanto già visto riguardo al decadimento del muone, abbiamo

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_{(e)}^{(r)}(p) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{(\nu)}^{(b)}(k) \right) \cdot \left(\bar{u}_p^{(a)}(K) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_n^{(s)}(P) \right) \quad (4.3.267)$$

Il confronto con quanto ottenuto nel caso del decadimento del muone, tenuto presente che, come abbiamo visto, i termini di massa non contribuiscono a $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, ci permette di concludere immediatamente che, anche in questo caso, sarà

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 128 G_F^2 (pK)(kP) \quad (4.3.268)$$

Venendo ora all'elemento differenziale dello spazio delle fasi invariante, esso, per sua definizione, è il seguente

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(P - p - k - K) \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2E_K} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \quad (4.3.269)$$

dove abbiamo indicato con E_K l'energia del protone, con E_k l'energia dell'antineutrino e con E l'energia dell'elettrone.

Assumendo quindi di non osservare lo stato del protone e dell'antineutrino e

trattando la massa di quest'ultimo come se fosse nulla, quanto alla larghezza di decadimento avremo

$$d\Gamma_{CM} = \frac{128 G_F^2}{4M} \frac{d^3 p}{2E} \frac{1}{2\pi^5} p_\alpha P_\beta \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2k} K^\alpha k^\beta \delta^4(P - p - k - K) \quad (4.3.270)$$

ovvero, ponendo

$$q = P - p \quad (4.3.271)$$

e definendo come abbiamo fatto quando abbiamo trattato il decadimento del muone

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2k} K^\alpha k^\beta \delta^4(P - p - k - K) \quad (4.3.272)$$

possiamo riscrivere la larghezza del decadimento nel modo seguente

$$d\Gamma_{CM} = \frac{32 G_F^2}{M} \frac{d^3 p}{2E} \frac{1}{2\pi^5} p_\alpha P_\beta I^{\alpha\beta} \quad (4.3.273)$$

La quantità $I^{\alpha\beta}$ è un tensore di Lorentz che, come abbiamo già osservato, può dipendere solo dal quadrivettore q^α (e da invarianti, come q^2 e le masse quadre delle particelle sul cui impulso viene fatta l'integrazione, ovvero, in questo caso, dalla sola massa quadra del protone $\hat{M}^2$), dunque sarà del tipo

$$I^{\alpha\beta} = f \cdot q^\alpha q^\beta + g \cdot \delta^{\alpha\beta} \quad (4.3.274)$$

dove f e g saranno, per quanto già detto, opportune funzioni³² di q^2 ed $\hat{M}^2$. Osserviamo ora che

$$I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = f \cdot q^2 + 4g \quad (4.3.276)$$

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = f \cdot (q^2)^2 + g \cdot q^2 \quad (4.3.277)$$

e dunque sarà possibile determinare le espressioni delle funzioni f e g , valutandole due quantità (4.3.276) e (4.3.277),

Iniziamo dunque considerando la quantità $I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$. Abbiamo

$$I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2k} (Kk) \delta^4(q - k - K) \quad (4.3.278)$$

La presenza della delta impone che $q = k + K$ e dunque, essendo il neutrino di massa nulla, che

$$q^2 = k^2 + 2(kK) + K^2 = 2(kK) + \hat{M}^2 \Rightarrow 2(kK) = q^2 - \hat{M}^2 \quad (4.3.279)$$

³²Nel limite in cui $\hat{M} \rightarrow 0$ si dovrà evidentemente ritrovare quanto ottenuto nel caso del decadimento del muone, dove l'integrale era fatto sugli impulsi dei due neutrini, cioè

$$f \rightarrow \frac{\pi}{12}; \quad g \rightarrow \frac{\pi}{24} q^2 \quad (4.3.275)$$

per cui ricaviamo che, posto $q = (q^0, \vec{Q})$, risulta

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2} \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{2k} \delta(q^0 - k - E) \delta^3(\vec{Q} - \vec{k} - \vec{K}) = \\ &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int \frac{1}{\tilde{E}} \frac{k^2 dk d\Omega}{k} \delta(q^0 - k - \tilde{E}) \end{aligned} \quad (4.3.280)$$

dove abbiamo integrato sull'impulso spaziale del protone e abbiamo posto

$$\tilde{E} = \sqrt{\hat{M}^2 + |\vec{Q} - \vec{k}|^2} = \sqrt{\hat{M}^2 + Q^2 + k^2 - 2Qk \cos \theta} \quad (4.3.281)$$

Chiaramente la delta restante impone una energia del protone tale che $\tilde{E} = q^0 - \bar{k}$, dove $\bar{k}$ è il valore dell'energia del neutrino che azzerla la funzione

$$F \equiv q^0 - k - \tilde{E} = q^0 - k - \sqrt{\hat{M}^2 + Q^2 + k^2 - 2Qk \cos \theta} \quad (4.3.282)$$

e dunque tale che

$$\begin{aligned} q^0 - \bar{k} &= \sqrt{\hat{M}^2 + Q^2 + \bar{k}^2 - 2Q\bar{k} \cos \theta} \\ \Rightarrow (q^0)^2 + (\bar{k})^2 - 2q^0\bar{k} &= \hat{M}^2 + Q^2 + \bar{k}^2 - 2Q\bar{k} \cos \theta \\ \Rightarrow 2\bar{k}(q^0 - Q \cos \theta) &= (q^0)^2 - \hat{M}^2 - Q^2 \equiv q^2 - \hat{M}^2 \\ \Rightarrow \bar{k} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2[(q^0 - Q \cos \theta)]} \end{aligned} \quad (4.3.283)$$

Per poter determinare l'integrale (4.3.280), occorre valutare la derivata seguente

$$\left. \frac{dF}{dk} \right|_{k=\bar{k}} = -1 - \frac{2k - 2Q \cos \theta}{2\tilde{E}} = \frac{-\tilde{E} - \bar{k} + Q \cos \theta}{\tilde{E}} \quad (4.3.284)$$

che, valutata appunto per $k = \bar{k}$, fornisce

$$\left. \frac{dF}{dk} \right|_{k=\bar{k}} = \frac{-q^0 + \bar{k} - \bar{k} + Q \cos \theta}{\tilde{E}(\bar{k})} = \frac{Q \cos \theta - q^0}{\tilde{E}(\bar{k})} \quad (4.3.285)$$

Ricordando adesso che

$$\int \delta(f(x)) dx = \sum_i \int dx \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}} \quad (4.3.286)$$

dove la somma è fatta sugli zeri della funzione data, ecco che abbiamo

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int \frac{1}{\tilde{E}} k dk d\Omega \delta(q^0 - k - \tilde{E}) = \\ &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int d\Omega \frac{1}{\tilde{E}(\bar{k})} \bar{k} \frac{1}{\left| \frac{Q \cos \theta - q^0}{\tilde{E}(\bar{k})} \right|} \end{aligned} \quad (4.3.287)$$

Ma $q^2 > 0$ poiché $q = k + K$ e dunque $q^0 > Q$ per cui il valore assoluto della derivata (4.3.285) coincide con la sua opposta. Tenendo conto di questo e sostituendo la (4.3.283) nella (4.3.287) abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int d\Omega \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2(q^0 - Q \cos \theta)^2} = \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{16} 2\pi \int \frac{d(-\cos \theta)}{(q^0 - Q \cos \theta)^2} = \\ &= \frac{2\pi}{16} (q^2 - \hat{M}^2)^2 \int_{-1}^1 \frac{dz}{(q^0 + Qz)^2} \end{aligned} \quad (4.3.288)$$

D'altronde, l'integrale della (4.3.288) vale

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{(q^0 + Qz)^2} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{1}{q^0 + Q} - \frac{1}{q^0 - Q} \right) = -\frac{1}{Q} \frac{-2Q}{[(q^0)^2 - Q^2]} = \frac{2}{q^2} \quad (4.3.289)$$

quindi, sostituendo nella (4.3.288), otteniamo infine

$$I^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \quad (4.3.290)$$

Veniamo ora a calcolare $I^{\alpha\beta}q_{\alpha}q_{\beta}$. Si ha

$$I^{\alpha\beta}q_{\alpha}q_{\beta} = \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} (Kq)(kq) \delta^4(q - k - K) \quad (4.3.291)$$

D'altronde

$$q^2 = (K + k)^2 = \hat{M}^2 + 2kK \Rightarrow 2kK = q^2 - \hat{M}^2 \quad (4.3.292)$$

Ma poiché abbiamo assunto che il neutrino abbia massa nulla, ecco che

$$\begin{aligned} qk &= (k + K)k = Kk + k^2 = Kk \Rightarrow 2kK = 2qk = q^2 - \hat{M}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow qk &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.3.293)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} q^2 &\equiv qk + qK \Rightarrow 2qK = 2q^2 - 2qk = q^2 + \hat{M}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow qK &= \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.3.294)$$

Sostituendo nella (4.3.291) abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}q_{\alpha}q_{\beta} &= \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} (Kq)(kq) \delta^4(q - k - K) = \\ &= \frac{1}{4} (q^2 + \hat{M}^2)(q^2 - \hat{M}^2) \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} \delta^4(q - k - K) \end{aligned} \quad (4.3.295)$$

Ma abbiamo già visto che

$$\frac{q^2 - \hat{M}^2}{2} \int \frac{d^3 K}{2E_K} \frac{d^3 k}{k} \delta^4(q - k - K) = I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \quad (4.3.296)$$

dunque possiamo concludere che

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \quad (4.3.297)$$

Osserviamo adesso che, nel limite in cui $\hat{M}^2 \rightarrow 0$ ritroviamo quanto ottenuto nel caso del decadimento del muone, dove l'integrazione avveniva sugli impulsi dei due neutrini, infatti si ha

$$I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \rightarrow \frac{\pi}{4} q^2 \quad (4.3.298)$$

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \rightarrow \frac{\pi}{8} (q^2)^2 \quad (4.3.299)$$

In quel caso, infatti, avevamo trovato che

$$I^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} (q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) \quad (4.3.300)$$

da cui, appunto

$$I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} (4q^2 + 2q^2) = \frac{\pi}{4} q^2 \quad (4.3.301)$$

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{\pi}{24} (q^2 q^2 + 2q^2 q^2) = \frac{\pi}{8} (q^2)^2 \quad (4.3.302)$$

Siamo adesso in grado di esplicitare le funzioni f e g di cui alla (4.3.274). Infatti, dalle (4.3.276) e (4.3.277) ricaviamo che

$$q^2 I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = f \cdot (q^2)^2 + 4g \cdot q^2 \quad (4.3.303)$$

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = f \cdot (q^2)^2 + g \cdot q^2 \quad (4.3.304)$$

e quindi

$$f = \frac{4 I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta - q^2 I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}}{3(q^2)^2} \quad (4.3.305)$$

$$g = \frac{q^2 I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} - I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta}{3q^2} \quad (4.3.306)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{3(q^2)^2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{q^2 + \hat{M}^2}{q^2} (q^2 - \hat{M}^2)^2 - q^2 \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{3(q^2)^2} \frac{\pi}{4} (q^2 - \hat{M}^2)^2 \frac{2(q^2 + \hat{M}^2 - q^2)}{q^2} = \\
 &= \frac{\pi}{12(q^2)^3} (q^2 - \hat{M}^2)^2 (q^2 + 2\hat{M}^2) \quad (4.3.307)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{3q^2} \left(q^2 \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} - \frac{\pi}{8} \frac{q^2 + \hat{M}^2}{q^2} (q^2 - \hat{M}^2)^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{3q^2} \frac{\pi}{8} (q^2 - \hat{M}^2)^2 \frac{2q^2 - (q^2 + \hat{M}^2)}{q^2} = \\
 &= \frac{\pi}{24(q^2)^2} (q^2 - \hat{M}^2)^3 \quad (4.3.308)
 \end{aligned}$$

Riprendendo allora l'espressione (4.3.273) del rate differenziale di decadimento, otteniamo

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{CM} &= \frac{32 G_F^2}{M} \frac{d^3 p}{2E} \frac{1}{2\pi^5} p_\alpha P_\beta I^{\alpha\beta} = \frac{32 G_F^2}{(2\pi^5)M} \frac{d^3 p}{2E} p_\alpha P_\beta (f \cdot q^\alpha q^\beta + g \cdot \delta^{\alpha\beta}) = \\
 &= \frac{32 G_F^2}{(2\pi^5)M} \frac{d^3 p}{2E} [f \cdot (pq)(Pq) + g \cdot (pP)] \quad (4.3.309)
 \end{aligned}$$

Nel riferimento del CM (neutrone fermo) dove stiamo trattando il processo, avendo indicato con M la massa del neutrone, con m la massa dell'elettrone e con E la sua energia, abbiamo

$$(pP) = ME \quad (4.3.310)$$

$$(pq) = p(P - p) = ME - m^2 \quad (4.3.311)$$

$$(Pq) = P(P - p) = M^2 - ME \quad (4.3.312)$$

$$(qq) = q^2 = (P - p)^2 = M^2 + m^2 - 2ME \quad (4.3.313)$$

Usando anche l'identità $d^3 p \equiv p^2 dp d\Omega = p E dE d\Omega$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{CM} &= \frac{32 G_F^2}{(2\pi^5)M} \frac{p E dE d\Omega}{2E} [f \cdot (ME - m^2)(M^2 - ME) + g \cdot (ME)] = \\
 &= \frac{G_F^2}{\pi^5 M} \frac{p dE d\Omega}{2} [f \cdot (ME - m^2)(M - E) + g \cdot E] M = \\
 &= \frac{G_F^2}{2\pi^5} [f \cdot (ME - m^2)(M - E) + g \cdot E] p dE d\Omega \quad (4.3.314)
 \end{aligned}$$

Riguardo alle espressioni (4.3.307) e (4.3.308) di f e g , si ha

$$\begin{aligned} f &= \frac{\pi}{12(q^2)^3} (q^2 - \hat{M}^2)^2 (q^2 + 2\hat{M}^2) = \\ &= \frac{\pi}{12} \frac{(M^2 + m^2 - 2ME - \hat{M}^2)^2 (M^2 + m^2 - 2ME + 2\hat{M}^2)}{(M^2 + m^2 - 2ME)^3} \end{aligned} \quad (4.3.315)$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\pi}{24(q^2)^2} (q^2 - \hat{M}^2)^3 = \\ &= \frac{\pi}{24} \frac{(M^2 + m^2 - 2ME - \hat{M}^2)^3}{(M^2 + m^2 - 2ME)^2} \end{aligned} \quad (4.3.316)$$

Definiamo adesso le seguenti quantità

$$\mu = \frac{m}{M} \Rightarrow m = \mu M \quad (4.3.317)$$

$$\epsilon = \frac{E}{m} \Rightarrow E = M \mu \epsilon \quad (4.3.318)$$

$$\Delta = \frac{M^2 - \hat{M}^2}{M^2} \Rightarrow \hat{M}^2 = M^2(1 - \Delta) \quad (4.3.319)$$

Abbiamo così che

$$\begin{aligned} f &= \frac{\pi}{12} \frac{(M^2 + m^2 - 2ME - \hat{M}^2)^2 (M^2 + m^2 - 2ME + 2\hat{M}^2)}{(M^2 + m^2 - 2ME)^3} = \\ &= \frac{\pi}{12} \frac{M^4(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - (1 - \Delta))^2 M^2(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon + 2(1 - \Delta))}{M^6(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^3} = \\ &= \frac{\pi}{12} \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2 (3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta)}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^3} \end{aligned} \quad (4.3.320)$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\pi}{24} \frac{(M^2 + m^2 - 2ME - \hat{M}^2)^3}{(M^2 + m^2 - 2ME)^2} = \\ &= \frac{\pi}{24} \frac{M^6(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - (1 - \Delta))^3}{M^4(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} = \\ &= \frac{\pi}{24} M^2 \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^3}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \end{aligned} \quad (4.3.321)$$

D'altronde, negli stessi simboli, abbiamo

$$(ME - m^2)(M - E) = M^3(\mu\epsilon - \mu^2)(1 - \mu\epsilon) = M^3\mu(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \quad (4.3.322)$$

$$E = M\mu\epsilon \quad (4.3.323)$$

$$\begin{aligned} p dE &= \sqrt{E^2 - m^2} dE = M\mu\sqrt{\epsilon^2 - 1} M\mu d\epsilon = \\ &= (M\mu)^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (4.3.324)$$

per cui otteniamo

$$\begin{aligned}
d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{2\pi^5} \left[f \cdot (M E - m^2)(M - E) + g \cdot E \right] p dE d\Omega = \\
&= \frac{G_F^2}{2\pi^5} \left[\frac{\pi}{12} \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2 (3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta)}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^3} M^3 \mu (\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{24} M^2 \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^3}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} M \mu \epsilon \right] (M\mu)^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon d\Omega = \\
&= \frac{G_F^2}{2\pi^5} \frac{\pi}{24} 4\pi M^3 \mu (M\mu)^2 \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon (\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon = \\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^3 \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon (\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon \tag{4.3.325}
\end{aligned}$$

avendo integrato sull'angolo solido.

Dall'espressione trovata si può dedurre immediatamente la distribuzione dell'energia dell'elettrone $I(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
I(\epsilon) &= \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon (\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} \tag{4.3.326}
\end{aligned}$$

definita nell'intervallo di valori di ϵ

$$1 \leq \epsilon \leq \epsilon_M = \frac{\mu^2 + \Delta}{2\mu} \tag{4.3.327}$$

dove ϵ_M individua il massimo valore possibile dell'energia dell'elettrone emesso, corrispondente al caso in cui il neutrino non porta via alcuna energia (ricordiamoci che stiamo assumendo per il neutrino un valore nullo della massa) ovvero al valore fornito per questa energia dalla cinematica del decadimento a due corpi del neutrone in protone e elettrone.

Osserviamo adesso che, da un punto di vista numerico, abbiamo

$$\mu \equiv \frac{m_e}{M} = \frac{0.511}{939.565} = 5.44 \times 10^{-4} \tag{4.3.328}$$

$$\Delta \equiv \frac{M^2 - \hat{M}^2}{M^2} = \frac{0.939565^2 - 0.938272^2}{0.939565^2} = 2.74 \times 10^{-3} \tag{4.3.329}$$

$$\epsilon_M \equiv \frac{\mu^2 + \Delta}{2\mu} = 2.54 \approx \frac{\Delta}{2\mu} \tag{4.3.330}$$

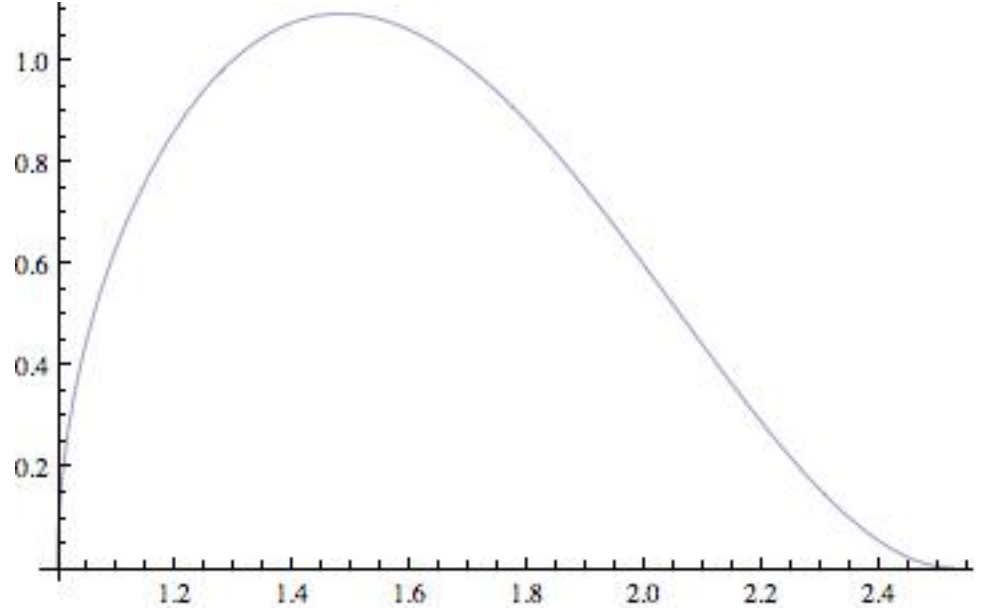


Figura 4.6: *Spettro normalizzato dell'energia ϵ dell'elettrone di decadimento (in unità di massa elettronica), nell'intervallo $1 \leq \epsilon \leq \epsilon_M \approx 2.54$, nel sistema del CM, ovvero dove il neutrone è a riposo.*

Questo significa che, quanto all'integrale di $I(\epsilon)$, possiamo aspettarci qualcosa dell'ordine di

$$\Delta^2 \left[\frac{\Delta}{2\mu} + \frac{\Delta}{2\mu} \Delta \right] \frac{\Delta}{2\mu} \frac{\Delta}{2\mu} \approx \frac{1}{8} \frac{\Delta^5}{\mu^3} \quad (4.3.331)$$

Valutando dunque numericamente l'integrale seguente, otteniamo

$$C \equiv 8 \frac{\mu^3}{\Delta^5} \int_1^{\epsilon_M} I(\epsilon) d\epsilon = 0.0946 \quad (4.3.332)$$

per cui, quanto alla larghezza Γ , possiamo finalmente concludere che³³

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^3 C \frac{1}{8} \frac{\Delta^5}{\mu^3} = \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \Delta^5 C = \\ &= \frac{(1.17 \times 10^{-5})^2}{96\pi^3} (0.939)^5 (2.75 \times 10^{-3})^5 \times 0.0946 = \\ &\approx \frac{14.87}{2976.6} 10^{-25} = 5.0 \times 10^{-28} \text{ GeV} \end{aligned} \quad (4.3.335)$$

e siccome $\hbar = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV} \cdot s$, abbiamo infine

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \times 10^{-25}}{5.0 \times 10^{-28}} \approx 1320s \quad (4.3.336)$$

In realtà la vita media del neutrone libero è di $885.7 \pm 0.8 s$ e la discrepanza con il valore ottenuto è dovuta, da un lato al fatto che dovremmo correggere G_F per il coseno dell'angolo di Cabibbo ($G_F \rightarrow G_F \cos \theta_c = G_F \times 0.97425$) e questo tenderebbe a far crescere ulteriormente τ di $\cos^2 \theta_c \approx 1/0.949$ e dall'altro lato al fatto che dovremmo tener conto che il neutrone e il protone non sono particelle di Dirac senza struttura, per cui esistono dei fattori di forma di cui si deve tenere conto.

Nel caso considerato del decadimento del neutrone, è il fattore di forma assiale che aumenta significativamente la sua probabilità di decadimento.

Prima di concludere l'argomento, osserviamo infine che lo spettro $I(\epsilon)$ si annulla come $(\epsilon - \epsilon_M)^2$ (vedi fig.(4.7)), caratteristica legata all'ipotesi di massa nulla del neutrino emesso. Riprendendo infatti l'espressione di $I(\epsilon)$, si ha

$$\begin{aligned}I(\epsilon) &= \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} \end{aligned} \quad (4.3.337)$$

³³Ricordiamo che l'analogo risultato per il decadimento del muone, trascurando la massa dell'elettrone oltre a quella dei neutrini, forniva

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \frac{1}{2} \quad (4.3.333)$$

dove M è la massa del muone.

Tenendo conto anche della massa dell'elettrone ma continuando ad assumere nulle quelle dei neutrini, posto $r = \frac{m_e}{M} \approx 4.87 \times 10^{-3}$, avevamo trovato invece che

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \frac{1}{2} \left[(1 - r^8) - 8r^2(1 - r^4) - 24r \ln r \right] \quad (4.3.334)$$

D'altronde $2\mu\epsilon_M = \Delta + \mu^2$, quindi possiamo riscrivere $I(\epsilon)$ nel modo seguente

$$I(\epsilon) = \frac{4\mu^2(\epsilon_M - \epsilon)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + 4\mu^2(\epsilon_M - \epsilon) - 3\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + 4\mu^2\epsilon(\epsilon_M - \epsilon) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} \quad (4.3.338)$$

Chiaramente il termine in parentesi quadra è regolare per $\epsilon \rightarrow \epsilon_M$, come

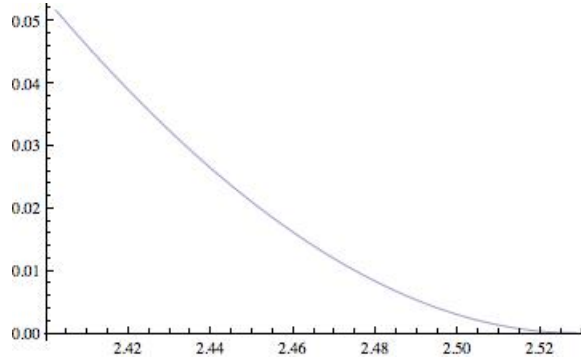


Figura 4.7: *Andamento dell'energia dell'elettrone in prossimità dell'endpoint, nel caso di massa nulla del neutrino.*

pure il denominatore $(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2$ e il termine $\sqrt{\epsilon^2 - 1}$, per cui risulta evidente, appunto, che per $\epsilon \rightarrow \epsilon_M$ lo spettro $I(\epsilon)$ si annulla come $(\epsilon - \epsilon_M)^2$.

Capitolo 5

Un decadimento sui generis

5.1 La radiazione Cerenkov: teoria quantistica

Come ben noto, una particella di carica e e massa m , la quale si muove con velocità costante $\vec{v}$ nel vuoto, coerentemente con le equazioni di Maxwell e il principio di relatività ristretta, non irraggia alcuna energia elettromagnetica. Ma che succede se, invece, il moto avviene in un mezzo materiale?

Consideriamo, per esempio, un elettrone che si muove con velocità costante v lungo l'asse z , attraverso un mezzo dielettrico avente indice di rifrazione n . Il campo generato dall'elettrone può essere visto come il risultato della sovrapposizione di onde sferiche, dovute al potenziale ritardato, che sono continuamente emesse dall'elettrone in moto, le quali si propagano con velocità c/n , a causa della polarizzabilità del mezzo.

E' facile rendersi conto che tutte queste onde emesse saranno in fase fra loro solo lungo la direzione inclinata di un angolo θ con l'asse z se e solo se v , n e θ soddisfano la condizione

$$\frac{c}{n} = v \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{1}{\beta n} \quad (5.1.1)$$

dove β , al solito, sta per v/c .

Mentre ci sarà da attendersi, quindi, radiazione emessa nella direzione θ individuata¹ dalla (5.1.1), nelle altre direzioni l'interferenza delle varie onde produrrà verosimilmente un risultato globalmente nullo.

¹Evidentemente la condizione (5.1.1) potrà essere soddisfatta solo se $\beta n > 1$, ovvero solo in mezzi materiali in cui $n > 1$ e per particelle sufficientemente veloci !

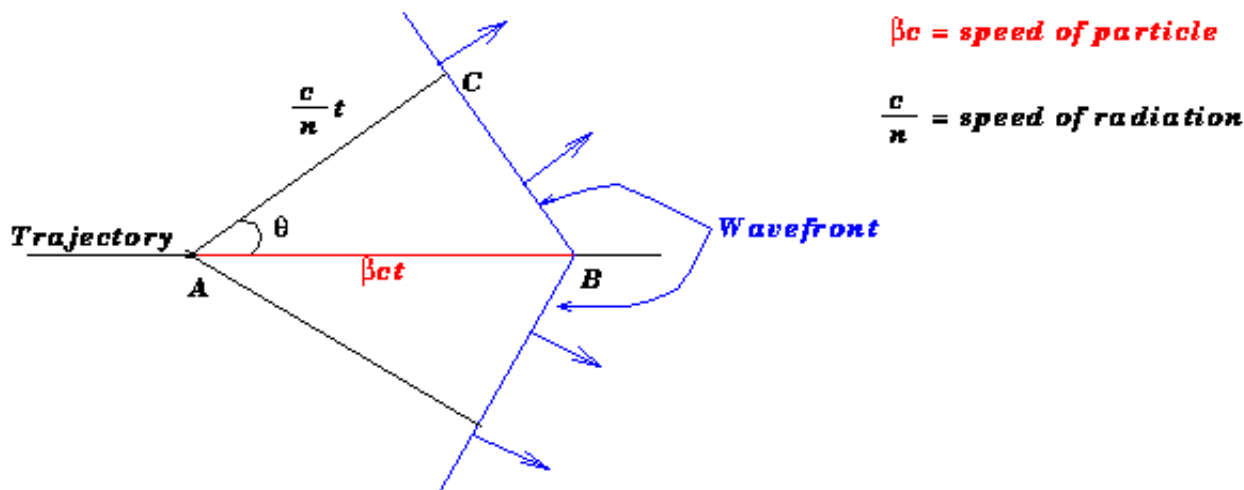


Figura 5.1: Moto della particella (AB) e del fronte del suo campo (BC)

Questo è quanto realmente accade e la radiazione altamente direzionale che viene emessa in queste condizioni è la cosiddetta *radiazione Cerenkov*², la cui teoria³ classica si trova riportata nel *Vol.II*.

Qui riporteremo solo la trattazione quantistica⁴.

In realtà, la spiegazione quantistica di cui stiamo parlando, a stretto rigore lo è solo "a metà", nel senso che il fotone che si propaga nel mezzo materiale trasparente di indice di rifrazione $n(\omega)$ viene trattato in modo *efficace*, riassorbendo tutti i processi di scattering con gli atomi del mezzo, appunto, nell'indice di rifrazione. Una conseguenza che ne deriva è che questo "fotone" non viaggia più alla velocità c della luce nel vuoto, ovvero non possiede più una massa nulla bensì, come vedremo, appare avere una massa invariante quadra *negativa* !

Vediamo come questo possa accadere.

Ripartiamo per questo dalle equazioni per i potenziali elettromagnetici, scalare e vettoriale, in un mezzo materiale omogeneo ed isotropo, scritti nella gauge di Lorentz.

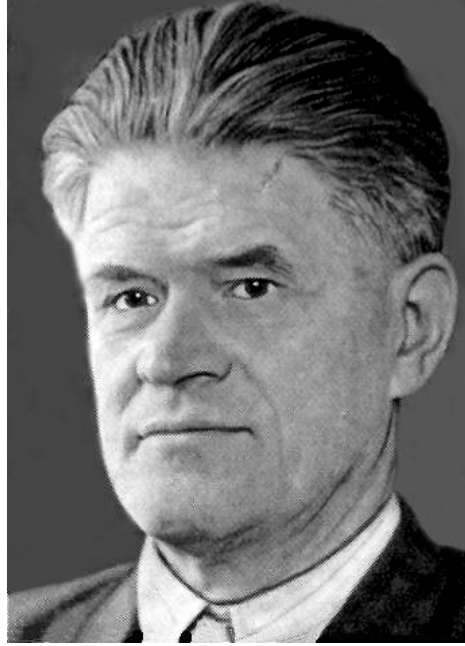
²Pavel A. Cerenkov: C.R. Acad. Sci. URSS 8, 451 (1934).

Pavel A. Cerenkov: *Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light*, Phys. Rev. 52, 378 (1937)

Per questa scoperta, Cerenkov insieme ai teorici Frank e Tamm che ne spiegarono l'origine, ebbero il Nobel nel 1958.

³I. Frank, Ig. Tamm: *Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter*, C.R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)

⁴J. Schwinger, Wu-Yang Tsai: *Classical and quantum theory of synergic synchrotron-Cerenkov radiation*, Ann. of Phys. 96, 303 (1976)

Figura 5.2: *Pavel Aleksejevic Cerenkov (1904-1990)*

Come sappiamo dall'elettromagnetismo classico, in assenza di cariche e correnti di conduzione risulta⁵

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1.3)$$

dove la gauge di Lorentz citata sopra si traduce nella relazione

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.4)$$

Volendo scrivere la generica funzione d'onda di un fotone che si propaga nel mezzo considerato, dovremo cercare le soluzioni delle equazioni (5.1.2) e (5.1.3). Considerando quelle di impulso definito $\vec{k}$ (onde piane), definito, al solito

$$A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A}) \quad (5.1.5)$$

esse saranno allora della forma ($c = 1$)

$$A^\mu(\vec{x}, t) = a^\mu e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (5.1.6)$$

⁵Abbiamo introdotto esplicitamente l'indice di rifrazione del mezzo al solito modo, cioè attraverso la relazione $n^2 \equiv n^2(\omega) \equiv \epsilon(\omega)\mu(\omega)$, dove sono appunto la costante dielettrica del mezzo $\epsilon = \epsilon(\omega)$ e la sua permeabilità magnetica $\mu = \mu(\omega)$ a dipendere, in generale, dalla pulsazione ω della radiazione elettromagnetica.

con

$$k^2 = n^2 \omega^2 \quad (5.1.7)$$

La quantità $a^\mu \equiv (a^0, \vec{a})$ descrive, come è noto, lo stato di polarizzazione del fotone. Senza perdita di generalità, essa può essere assunta reale e soddisfa la condizione di Lorentz, la quale impone che risulti

$$\vec{k} \cdot \vec{a} - n^2 \omega a^0 = 0 \quad (5.1.8)$$

Osserviamo adesso che il quadrimpulso q^μ , associato a questo *fotone efficace* che si è così originato, ha, evidentemente, la forma seguente

$$q^\mu = (\omega, \vec{k}) \quad (5.1.9)$$

da cui segue appunto una massa invariante quadra di segno negativo, pari a

$$q^2 = q^\mu q_\mu = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = \omega^2 - n^2 \omega^2 = \omega^2(1 - n^2) < 0 \quad (5.1.10)$$

E' proprio questo fatto a rendere possibile, da un punto di vista puramente cinematico⁶, il "decadimento" della particella carica in moto nel mezzo materiale in un sistema fatto dalla particella stessa e il "fotone", cioè il processo schematizzato nel grafico di Feynman di fig.5.3 che, nella teoria quantistica dell'effetto Cerenkov, rappresenta proprio la descrizione del processo in esame.

⁶Si ricordi che se p e p' sono due quadrimpulsi diversi corrispondenti però alla stessa massa M , allora il quadrimpulso $q = p - p'$ è necessariamente space-like. Nel sistema di riferimento in cui p ha la parte spaziale nulla, detta $\vec{k}$ la parte spaziale del quadrivettore p' , risulta

$$p = p' + q \quad \Rightarrow \quad (M, \vec{0}) = (E, \vec{k}) + (q^0, -\vec{k}) \quad \Rightarrow \quad q^0 = M - E \quad (5.1.11)$$

da cui

$$(q^0)^2 - |\vec{k}|^2 = E^2 + M^2 - 2ME - k^2 = 2M^2 - 2ME = 2M(M - E) < 0 \quad (5.1.12)$$

Per finire, tornando al caso considerato, si osservi che quanto detto sopra implica altresì che l'energia del fotone q^0 risulti negativa nel riferimento in cui la particella carica è ferma! Il riferimento in questione è quello del laboratorio, però, sono tutt'altro che equivalenti visto che laddove la particella è ferma è il mezzo che si sta muovendo !

In ogni caso, questa è un'altra conseguenza del fatto che la quasi-particella rappresentata dal fotone che si propaga nel mezzo materiale, risulta avere, appunto, una massa quadra negativa e, in questo caso, come sappiamo, il segno della componente temporale non è invariante per trasformazioni di Lorentz.

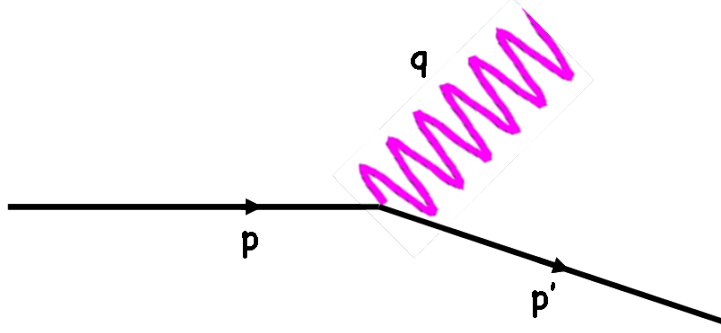


Figura 5.3: Grafico di Feynman relativo all'effetto Cerenkov

Partiamo infatti dalla consueta interazione fra la quadricorrente elettrica e il campo elettromagnetico⁷

$$\mathcal{L}_{int}(x) = e J^\mu(x) A_\mu(x) \quad (5.1.14)$$

La probabilità per unità di tempo che il decadimento illustrato in fig.5.3 avvenga è dato dalla ben nota espressione di cui alla (2.1.47), ovvero

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1} \frac{1}{2E} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Phi \quad (5.1.15)$$

dove S è lo spin della particella che decade, E è la sua energia nel sistema di riferimento dove stiamo operando, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invariati del decadimento e $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale.

Iniziamo quindi valutando proprio $d\Phi$.

Dalla definizione (2.1.36) a dalla (5.1.10), risulta

$$d\Phi = \frac{d^3 p'}{2p'_0(2\pi)^3} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \delta[q^2 - \omega^2(1 - n^2)] (2\pi)^4 \delta^4(p' + q - p) \quad (5.1.16)$$

D'altronde, usando la (5.1.9), ecco che

$$q^2 = \omega^2 - k^2 \quad (5.1.17)$$

e dunque l'argomento della delta diviene

$$q^2 - \omega^2(1 - n^2) = \omega^2 - k^2 - \omega^2 + \omega^2 n^2 = -k^2 + \omega^2 n^2 \quad (5.1.18)$$

⁷La densità Lagrangiana completa del campo elettromagnetico in interazione è la seguente:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + e J^\mu(x) A_\mu(x) \quad (5.1.13)$$

ovvero, ricordando che la delta di Dirac è una funzione (impropria) pari e separando nella δ^4 la parte spaziale da quella temporale, possiamo concludere che

$$d\Phi = \frac{d^3 p'}{2p'_0(2\pi)^3} \frac{d\omega d^3 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - \omega^2 n^2) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' + \vec{k} - \vec{p}) \cdot \\ \cdot 2\pi \delta(p'_0 + \omega - p_0) \quad (5.1.19)$$

D'altronde, le energie p_0 e p'_0 della particella carica di massa M sono, evidentemente, funzioni dei rispettivi impulsi spaziali, essendo

$$E \equiv p_0 = E(\vec{p}) = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2} \quad (5.1.20)$$

per cui, trattando l'impulso del fotone $\vec{k}$ come infinitesimo rispetto a $\vec{p}$ e $\vec{p}'$, visto che l'integrazione della δ^3 nella (5.1.19) forza $\vec{k}$ a essere uguale a $\vec{p} - \vec{p}'$, ecco che possiamo scrivere

$$p'_0 - p_0 \equiv E(\vec{p}') - E(\vec{p}) = E(\vec{p}') - E(\vec{p}' + \vec{k}) \approx \frac{\partial E}{\partial \vec{p}'} \cdot \vec{k} = \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{p'_0} \quad (5.1.21)$$

Ma $\frac{\vec{p}'}{p'_0}$ è nient'altro che la velocità della particella carica dopo il decadimento che possiamo confondere, a meno di termini di ordine superiore in k/p , con la velocità $\vec{\beta}$ della particella carica prima del decadimento la quale, quindi, in questa approssimazione, viene assunta comunque muoversi di moto rettilineo e uniforme. Sostituendo quindi la (5.1.21) nella (5.1.19), integrando in $d^3 p'$ e confondendo al denominatore di questo elemento di volume invariante l'energia p'_0 dopo il processo di emissione con l'energia p_0 della particella carica prima del decadimento, arriviamo così al seguente risultato

$$d\Phi = \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega d^3 k}{(2\pi)^2} \delta(k^2 - \omega^2 n^2) \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{\beta}) \quad (5.1.22)$$

il quale mostra in modo esplicito come lo spazio delle fasi possa essere diverso da zero se e solo se sono soddisfatte entrambe le relazioni

$$\omega = \vec{\beta} \cdot \vec{k}; \quad k = n\omega \\ \Rightarrow \quad \omega = \beta n \omega \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{1}{n\beta} \quad (5.1.23)$$

ovvero, fissati n e β , solo nel caso di emissione con un ben preciso e unico angolo fra la direzione di propagazione del fotone emesso e la direzione di volo della particella carica.

Formalmente, adesso, l'espressione (5.1.22) può essere ulteriormente semplificata eliminando le due funzioni delta.

Per far questo, passiamo intanto a coordinate polari, usando come asse polare la direzione di volo della particella carica. Risulta evidentemente che

$$d^3k = k^2 dk d\phi d(-\cos\theta); \quad \vec{k} \cdot \vec{\beta} = k\beta \cos\theta \quad (5.1.24)$$

per cui

$$d\Phi = \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega}{(2\pi)^2} k^2 dk d\phi d(-\cos\theta) \delta(k^2 - \omega^2 n^2) \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{\beta}) \quad (5.1.25)$$

E ricordando che

$$\delta(f(x)) dx = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\frac{df}{dx_i}|} dx \quad (5.1.26)$$

dove gli x_i sono le radici dell'equazione $f(x) = 0$, ecco che, poiché k può essere solo positivo, ne segue che

$$\delta(k^2 - n^2\omega^2) dk = \frac{\delta(k - n\omega)}{2k} dk \quad (5.1.27)$$

per cui, usando questa relazione e integrando la (5.1.25) in dk e in $d\phi$ (da cui non c'è dipendenza), otteniamo

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega}{(2\pi)^2} k^2 dk d\phi d(-\cos\theta) \delta(k^2 - \omega^2 n^2) \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{\beta}) = \\ &= \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega}{2\pi} (n\omega)^2 \frac{1}{2(n\omega)} d(-\cos\theta) \delta(\omega - n\omega\beta \cos\theta) = \\ &= \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega}{4\pi} (n\omega) d(-\cos\theta) \delta(\omega - n\omega\beta \cos\theta) \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

dove l'integrazione ha forzato a essere appunto $k = n\omega$.

Si può adesso integrare l'espressione precedente in $d(-\cos\theta)$, eliminando così la delta rimasta (che forza a sua volta la condizione sull'angolo di emissione, cioè $n\beta \cos\theta = 1$) e ottenendo infine l'espressione seguente

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega}{4\pi} (n\omega) d(-\cos\theta) \delta(\omega - n\omega\beta \cos\theta) = \\ &= \frac{1}{2p_0} \frac{d\omega}{4\pi} (n\omega) \frac{1}{n\omega\beta} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\beta p_0} d\omega = \frac{1}{8\pi|\vec{p}|} d\omega \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Passiamo adesso al calcolo dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$.
Per quanto si è già visto (cfr.(2.1.26)), risulta

$$\mathcal{M}_{ba} = \langle fin | \mathcal{L}(0) | in \rangle \quad (5.1.30)$$

ovvero

$$\mathcal{M} = \langle p'; q | \mathcal{L}(0) | p \rangle \equiv \langle p' | e J^\mu(0) | p \rangle \cdot \langle q | A_\mu(0) | \Omega \rangle \quad (5.1.31)$$

D'altronde, nell'approssimazione in cui $p \approx p'$, non potrà che essere

$$\langle p' | e J^\mu(0) | p \rangle \propto p^\mu \quad (5.1.32)$$

e la costante⁸ di proporzionalità vale $2e$.

Per quanto riguarda il campo elettromagnetico, la quantità $\langle q | A_\mu(0) | \Omega \rangle$ è niente altro che la complessa coniugata della funzione d'onda del fotone calcolata per $x = 0$, ovvero

$$\langle q | A_\mu(0) | \Omega \rangle = (a_\mu)^* \quad (5.1.35)$$

Dunque

$$\mathcal{M} = \langle p' | J^\mu(0) | p \rangle \cdot \langle q | A_\mu(0) | \Omega \rangle = 2e p^\mu a_\mu^* \quad (5.1.36)$$

usando la relazione (5.1.8) determinata dalla gauge di Lorentz, e ricordando che il vettore di polarizzazione può essere scelto reale, risulta così che

$$\mathcal{M} = 2e [a^0 p^0 - \vec{a} \cdot \vec{p}] = 2e \left[p^0 \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{n^2 \omega} - \vec{a} \cdot \vec{p} \right] = 2e \vec{a} \cdot \left[\vec{k} \frac{E}{n^2 \omega} - \vec{p} \right] \quad (5.1.37)$$

Possiamo adesso passare al calcolo esplicito di $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, ovvero alla somma dei moduli quadri delle ampiezze di transizione fatta sulle polarizzazioni⁹.

Osserviamo intanto che per quanto concerne gli eventuali stati di spin della particella carica, proprio perchè abbiamo assunto che il suo stato non cambi, possiamo procedere come se fosse comunque di spin nullo. Circa poi gli

⁸Se la particella carica è una particella di Dirac, risulterà

$$e J^\mu = e \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) = 2ep^\mu \quad (5.1.33)$$

e, analogamente, se la particella carica è descritta da un campo scalare, per cui

$$e J^\mu = ie[(\partial^\mu \phi) \phi^\dagger - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi] \quad (5.1.34)$$

il suo valor medio su uno stato di impulso p continua a valere $2ep^\mu$.

⁹In realtà, la polarizzazione è unica, come si evince dalla (5.1.37), la quale mostra che se il versore di polarizzazione $\vec{a}$ è ortogonale al piano definito dai vettori $\vec{k}$ e $\vec{p}$, allora $\mathcal{M} = 0$. Questo implica che $\vec{a}$ deve giacere nel piano $(\vec{k}, \vec{p})$ e dovendo però essere ortogonale a $\vec{k}$ per ragioni di trasversalità, ecco che risulta possibile una sola polarizzazione, come avevamo concluso anche nella trattazione classica.

stati di polarizzazione del fotone descritti attraverso il versore di polarizzazione $\vec{a}$, dobbiamo solo ricordare che questo deve soddisfare la condizione di trasversalità, ovvero deve essere che

$$a_i a_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (5.1.38)$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 4e^2 \left[\frac{E k_i}{n^2 \omega} - p_i \right] \left[\frac{E k_j}{n^2 \omega} - p_j \right] \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \\ &= 4e^2 \left[\frac{E k_i}{n^2 \omega} - p_i \right] \left[\frac{E k_i}{n^2 \omega} - p_i - \frac{E k_i}{n^2 \omega} + k_i \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{k^2} \right] = \\ &= 4e^2 \left[-E \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{n^2 \omega} + \frac{k^2 E \vec{k} \cdot \vec{p}}{n^2 \omega k^2} + |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})^2}{k^2} \right] = \\ &= 4e^2 \left[|\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})^2}{k^2} \right] = 4e^2 |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

per cui, in conclusione, dalla (5.1.15), dato quanto osservato sopra a proposito dello spin della particella carica, si ottiene

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2S+1} \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi = \frac{1}{2E} 4e^2 |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \frac{1}{8\pi |\vec{p}|} d\omega = \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{|\vec{p}|}{E} \sin^2 \theta d\omega = \frac{e^2}{4\pi} \beta \sin^2 \theta d\omega \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

dove abbiamo usato l'espressione di cui alla (5.1.29) per quanto riguarda lo spazio delle fasi $d\Phi$.

L'espressione (5.1.40) rappresenta il rate di decadimento (probabilità per unità di tempo) nell'intervallo di frequenza $d\omega$ considerato.

Moltiplicando dunque per dt e osservando che $\beta dt = dL$ dove dL è proprio il tratto infinitesimo di traiettoria percorso dalla particella carica nel tempo dt , otteniamo infine l'espressione seguente per il numero di fotoni emessi nel tratto dL e nell'intervallo di frequenze $d\omega$ a causa dell'effetto Cerenkov:

$$dN = \frac{e^2}{4\pi} \sin^2 \theta d\omega dL = \alpha \sin^2 \theta d\omega dL \quad (5.1.41)$$

che coincide con il risultato classico¹⁰.

¹⁰L'interazione elettromagnetica descritta dalla densità lagrangiana $-J^\mu A_\mu$ implica equazioni di moto della forma $\square A_\mu = J_\mu$ che sono le equazioni del campo elettromagnetico dipendenti dalle sorgenti scritte nel sistema di Gauss razionalizzato, ovvero nel sistema di Lorentz-Heaviside, dove, appunto $\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c}$.

Appendice A

Appendix: Generalità

A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ($1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$, $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)

<i>carica dell'elettrone</i>	e	$=$	$4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues}$
<i>massa dell'elettrone</i>	m	$=$	$9.1095 \times 10^{-28} \text{ g}$
<i>costante di Planck</i>	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$
<i>velocità della luce</i>	c	$=$	$2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s}$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito come

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA}$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{\text{eV}}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{eV}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v , possiede un impulso¹

$$p = mv = mc\beta = 0.511\beta \frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{A.1.2})$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (*SI*) ed in quello di Heaviside-Lorentz (*HL*) risulta²

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi \hbar c} \right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \quad (\text{A.1.4})$$

Ricordiamo infine che, sempre nel *SI*, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

¹Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\gamma\beta$, dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

²Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= \rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

In particolare, $q_{HL} = \sqrt{4\pi} q_{cgs}$, da cui, se $\hbar = c = 1$, ne segue che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deka	da	10^{-24}	yocto	y

Figura A.1: *Prefissi nel Sistema Internazionale*

A.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci ($\alpha, \beta, \dots$) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italiani ($i, j, \dots$) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \quad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \quad (\text{A.2.5})$$

ed il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq , oppure (pq) , se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \quad (\text{A.2.6})$$

Dato un quadrivettore p , rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (pp) = p^\mu p_\mu \quad (\text{A.2.7})$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.2.8})$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\text{A.2.9})$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\text{A.2.10})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{A.2.11})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.2.12})$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu \equiv \not{p} \quad (\text{A.2.13})$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.2.14})$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.2.15})$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{A.2.16})$$

$$(\gamma_5)^2 = I \quad (\text{A.2.17})$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.2.18})$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ , i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.19})$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.20})$$

In questa rappresentazione, γ_5 è data da

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.21})$$

Per quanto concerne, poi, le tracce delle matrici γ , risulta

$$a) \operatorname{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0 = \operatorname{Tr}\{\gamma_5\} \quad (\text{A.2.22})$$

$$b) \operatorname{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4 \delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.2.23})$$

$$c) \operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = 0 \quad (\text{A.2.24})$$

$$d) \operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = \delta^{\mu_1 \mu_2} \operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1 \mu_3} \operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + \dots \delta^{\mu_1 \mu_{2n}} \operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}\} \quad (\text{A.2.25})$$

da cui si ha

$$e) \operatorname{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4(\delta^{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu} - \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu}) \quad (\text{A.2.26})$$

Se, fra le γ c'è anche γ_5 , allora

$$f) \operatorname{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5\} = 0 \quad (\text{A.2.27})$$

ed inoltre si ha

$$g) \operatorname{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5\} = 0 \quad (\text{A.2.28})$$

$$h) \operatorname{Tr}\{\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.2.29})$$

dove il tensore completamente antisimmetrico $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ è così definito:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= +1 && \text{se } \alpha, \beta, \mu, \nu \text{ sono una permutazione pari di } 0, 1, 2, 3 \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= -1 && \text{se } \alpha, \beta, \mu, \nu \text{ sono una permutazione dispari di } 0, 1, 2, 3 \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= 0 && \text{negli altri casi} \end{aligned}$$

e perciò, data la definizione di sopra, abbiamo³

$$\epsilon_{0123} = 1 \quad (\text{A.2.30})$$

Passiamo adesso alla dimostrazione di quanto sopra affermato.

La (A.2.22) è del tutto evidente dalle definizioni (A.2.19) e (A.2.21).

Passiamo quindi alla (A.2.23). Per la proprietà della ciclicità della traccia per cui

$$\text{Tr}\{A B\} = \text{Tr}\{B A\}$$

e per la (A.2.12), si ha

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\} = \frac{1}{2} 2 \delta^{\mu\nu} \text{Tr}\{I\} = 4 \delta^{\mu\nu}$$

Veniamo quindi alla (A.2.24).

Ricordiamo a questo proposito che $\gamma_5^2 = I$, per cui, sempre per la proprietà ciclica della traccia, si ha

$$T \equiv \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5 \gamma_5\} = \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5\}$$

Usando adesso la (A.2.15), si ha appunto che

$$\begin{aligned} T &= (-1) \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma_5 \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = (-1)^{2n+1} \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = -T \\ &\Rightarrow T = 0 \end{aligned}$$

Passiamo ora a dimostrare la (A.2.25).

Premettiamo a questo riguardo una osservazione. Sia Γ il prodotto di varie matrici γ , allora, visto che dalla (A.2.12) sappiamo che

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma = -\gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma + 2 \delta^{\mu\nu} \Gamma = -\gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma + 2 \delta^{\mu\nu} \Gamma$$

ne segue che risulta

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma\} = -\text{Tr}\{\gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma\} + 2 \delta^{\mu\nu} \text{Tr}\{\Gamma\}$$

Veniamo allora alla (A.2.25): si ha

$$\begin{aligned} T &\equiv \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = -\text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = \\ &= (-1)^2 \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = \\ &= (-1)^{2n-1} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_1}\} + 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - \\ &\quad - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + \dots + 2 \delta^{\mu_1 \mu_{2n}} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}\} \end{aligned}$$

³Si osservi che, per la regola consueta relativa all'innalzamento/abbassamento degli indici quadri-vettoriali operato dal tensore metrico, data la (A.2.5), la (A.2.30) implica che $\epsilon^{0123} = -1$.

Si osservi altresì che, a differenza del tensore a tre indici ϵ_{ijk} , una permutazione ciclica non mantiene la parità iniziale. Per esempio, mentre (0123) è ovviamente pari, (1230) è dispari, come ci si può convincere facilmente visto che si può passare da (1230) a (0123) solo con tre permutazioni successive, i.e.

$$(1230) \rightarrow (1203) \rightarrow (1023) \rightarrow (0123)$$

ovvero, usando la proprietà ciclica della traccia sul primo termine del secondo membro, si ottiene, finalmente, il risultato (A.2.25), i.e. appunto che

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n}}\} &= \delta^{\mu_1\mu_2} Tr\{\gamma^{\mu_3}\dots\gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1\mu_3} Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\dots\gamma^{\mu_{2n}}\} + \\ &+ \dots + \delta^{\mu_1\mu_{2n}} Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\dots\gamma^{\mu_{2n-1}}\} \end{aligned}$$

Evidentemente la (A.2.26) è un caso particolare della (A.2.25).

Veniamo ora alla (A.2.27).

Essa discende direttamente dalla proprietà ciclica della traccia, unita alla (A.2.15). Infatti si ha

$$\begin{aligned} T &\equiv Tr\{\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\} = (-1)Tr\{\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_{2n}}\gamma_5\gamma^{2n+1}\} = \\ &= (-1)^{2n+1}Tr\{\gamma_5\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = -T \\ &\Rightarrow Tr\{\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\} = 0 \end{aligned}$$

Quanto alla (A.2.28), essa non è così ovvia.

Per dimostrarla occorre ripartire dalla definizione della matrice γ_5 , i.e.

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

ed osservare che da questa discende che

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (\text{A.2.31})$$

infatti, per la definizione del tensore completamente antisimmetrico $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ solo prodotti di quattro matrici γ con indici differenti fra loro potranno comparire al secondo membro della (A.2.31). Ne segue allora che gli indici delle stesse costituiranno necessariamente una permutazione degli indici (0, 1, 2, 3). Siccome matrici γ con indici differenti anticommutano, il prodotto delle quattro matrici potrà sempre essere ricondotto al prodotto $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3(-1)^S$ con un numero di scambi S che sarà pari se la permutazione di partenza era pari, mentre sarà dispari nell'altro caso.

Dunque, ciascun addendo della somma $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$ è esattamente uguale a $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Siccome le permutazioni possibili sono, ovviamente, 4!, la (A.2.31) risulta così dimostrata.

Usando un argomento analogo, si prova anche che

$$\gamma_5 \gamma_\tau = \frac{i}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \quad (\text{A.2.32})$$

Infatti, per quanto detto sopra in relazione alla (A.2.31), segue evidentemente che

$$\gamma_5 = \frac{i}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho x} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^x \quad (\text{A.2.33})$$

dove, x è un indice generico su cui, però, non si somma...

Identificando dunque l'indice x con l'indice τ e moltiplicando ambo i membri della (A.2.33) per γ_τ , senza sommare su questo indice, si ha

$$\gamma_5 \gamma_\tau = \frac{i}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (\gamma^\tau \gamma_\tau) \quad (\text{A.2.34})$$

Però risulta

$$\gamma^0 \gamma_0 = \gamma^1 \gamma_1 = \gamma^2 \gamma_2 = \gamma^3 \gamma_3 = I$$

quindi dalla (A.2.34) segue immediatamente la (A.2.32).

Veniamo così a dimostrare la (A.2.28). Si ha

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} &= Tr\{\gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu\} = Tr\{\gamma_\nu \cdot \frac{i}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho\} = \\ &= \frac{i}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} Tr\{\gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho\} \end{aligned}$$

ovvero, per la (A.2.26)

$$Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = \frac{i}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \{\delta_\nu^\alpha \delta^{\beta\rho} - \delta_\nu^\beta \delta^{\alpha\rho} + \delta_\nu^\rho \delta^{\alpha\beta}\} \quad (\text{A.2.35})$$

per cui, data la completa antisimmetria del tensore $\epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}$, la quantità al secondo membro della (A.2.35) è evidentemente nulla e dunque la (A.2.28) è provata.

Dimostriamo infine la (A.2.29). Occorre dimostrare che

$$Tr\{\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Consideriamo la matrice $\Gamma = \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu$. Se fra gli indici α, β, μ, ν ci sono almeno due indici uguali, usando le proprietà di anticommutazione fra matrici γ diverse ed il fatto che, qualunque sia l'indice x , $\gamma^x \gamma_x = I$ (non si somma sull'indice x ...) ecco che la matrice Γ si semplifica nel prodotto di solo due matrici gamma (di indice diverso) o, addirittura, nell'identità. Ma siccome

$$Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 0 = Tr\{\gamma_5\}$$

la (A.2.29), in questo caso, risulta soddisfatta.

Supponiamo allora che i quattro indici siano tutti differenti. Evidentemente, in questo caso essi costituiscono una permutazione opportuna di $(0, 1, 2, 3)$. Indichiamo questi indici differenti con $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ invece che con α, β, μ, ν : per quanto detto precedentemente, risulta

$$\gamma_5 = i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}$$

dove è inteso che non si somma su alcun indice. Ne segue allora che

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \cdot \gamma_5 &= i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \cdot \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \\ &\equiv i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \cdot \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \end{aligned}$$

Ma siccome, per ipotesi, $\mu_0 \neq \mu_1$, $\mu_0 \neq \mu_2$, $\mu_0 \neq \mu_3$, e, come abbiamo già osservato, qualunque sia l'indice x risulta che $\gamma_x \gamma^x = I$, si ha

$$\begin{aligned}\Gamma &= \gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \cdot \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma^{\mu_0} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = \\ &= \gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma^{\mu_0} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_0} \gamma^{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = \\ &= -\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}\end{aligned}$$

e, continuando, siccome $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1 \neq \mu_3$, ne segue che

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_1} \gamma^{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = \\ &= \gamma_{\mu_2} \gamma^{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_3} = I\end{aligned}$$

e dunque

$$\gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \cdot \gamma_5 = i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} I$$

per cui, finalmente, ricordando che $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \equiv (\alpha, \beta, \mu, \nu)$, risulta dimostrato che

$$Tr\{\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \cdot \gamma_5\} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$