

# Fisica Moderna

## Vol. VI

### Scattering: Teoria Classica e Quantistica (prima quantizzazione)

E. Iacopini

13 dicembre 2024



*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica  
e tutta l'abilità messe in un lavoro  
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.  
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

*La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.*

*Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

Il Saggiatore (1623)

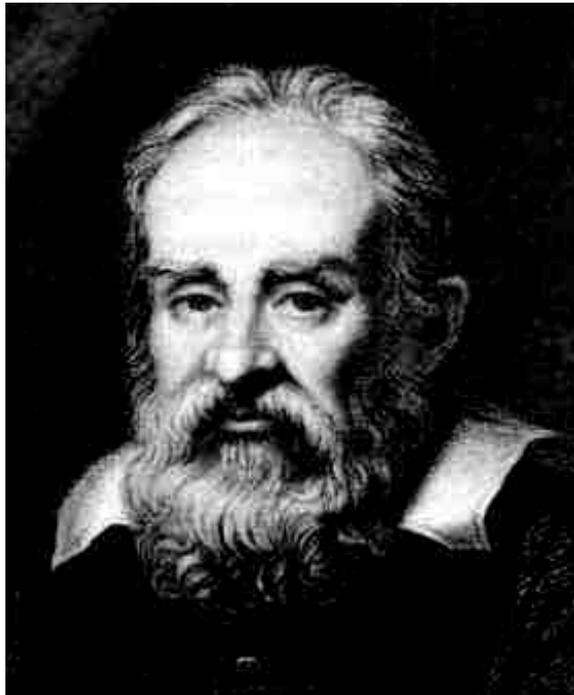


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*



# Indice

<b>1</b>	<b>Scattering: teoria classica non relativistica</b>	<b>7</b>
1.1	Introduzione . . . . .	7
1.2	Scattering da potenziale: teoria classica . . . . .	8
1.3	Scattering da una sfera rigida . . . . .	12
1.4	Scattering Coulombiano . . . . .	16
1.4.1	Ancora sull'iperbole in generale . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Scattering da potenziale: teoria quantistica n.r.</b>	<b>29</b>
2.1	Introduzione . . . . .	29
2.2	Stati di scattering stazionari . . . . .	30
2.3	Approssimazione di Born . . . . .	42
2.4	Il fattore di forma . . . . .	53
2.4.1	Distribuzione sferica uniforme . . . . .	56
2.4.2	Distribuzione sferica esponenziale . . . . .	59
2.5	Sviluppo in onde parziali . . . . .	60
2.6	Phase-shifts e potenziale . . . . .	66
2.6.1	Caso coulombiano . . . . .	69
2.6.2	Determinazione analitica dei phase-shifts . . . . .	71
2.6.3	Determinazione sperimentale dei phase-shifts . . . . .	73
2.6.4	Carica totale nulla e ampiezze parziali . . . . .	74
2.7	Il teorema ottico . . . . .	76
2.8	La risonanza . . . . .	77
2.9	Oltre l'approssimazione di Born . . . . .	79
2.9.1	Alcuni aspetti formali della Teoria dello Scattering . . . . .	81
2.10	Ancora sulla matrice S . . . . .	88
2.11	Ampiezza di scattering e indice di rifrazione . . . . .	102
<b>A</b>	<b>Appendix: Generalità</b>	<b>115</b>
A.1	Le unità di misura . . . . .	115



# Capitolo 1

## Scattering: teoria classica non relativistica

### 1.1 Introduzione

Possiamo distinguere i processi d'urto in due grandi categorie

- scattering di una particella da un potenziale;
- interazione di due particelle fra di loro.

Nel primo caso, essendo il sistema non isolato, non si conserva l'impulso bensì si conserva l'energia, almeno se il potenziale è indipendente dal tempo. Se poi il potenziale è centrale, ovvero  $V(\vec{r} - \vec{r}_0) = V(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$ , allora si conserva anche il momento angolare rispetto al centro di scattering. Per questo tipo di urto (scattering da potenziale), esiste analogo classico e si può fare una trattazione non relativistica del processo.

Nel secondo caso possiamo distinguere almeno tre situazioni, e cioè

- urto elastico:  
in questo caso lo stato finale è fatto dalle stesse particelle che si ritrovano nello stato iniziale;
- urto quasi-elastico ( $QE$ ):  
in questo caso lo stato finale è ancora fatto da due particelle, che, però non sono quelle presenti all'inizio del processo;
- urto anelastico:  
in questo caso lo stato finale è fatto da più di due particelle (fra cui possono o meno essere presenti quelle iniziali)

Classicamente si può ragionevolmente trattare solo il caso dell'urto elastico: gli altri casi richiedono l'uso della Relatività e della Meccanica quantistica di seconda quantizzazione.

## 1.2 Scattering da potenziale: teoria classica

Supponiamo di avere una particella di massa  $m$ , che interagisce con un potenziale  $V(\vec{r})$ . Assumiamo che questo potenziale

- sia indipendente dal tempo;
- si annulli all'infinito;
- abbia simmetria sferica (rispetto all'origine), ovvero  $V(\vec{r}) = V(r)$ .

Evidentemente, sotto queste ipotesi, come abbiamo già osservato,

- si conserva l'energia meccanica  $E$ ;
- si conserva il momento angolare  $\vec{L}$  rispetto al centro di scattering (forza centrale), che abbiamo identificato, senza perdita di generalità, con l'origine degli assi;
- non si conserva l'impulso, dato che il sistema *non* è isolato.

Poichè si conserva  $\vec{L}$ , il moto è piano, ovvero  $\vec{r}(t)$  e  $\dot{\vec{r}}(t)$  giacciono entrambi in un piano fisso, la cui normale, appunto, è diretta come  $\vec{L}$ .

Per descrivere il problema, possiamo decidere allora di usare le coordinate polari piane  $r, \theta$  (rispetto al centro di scattering): risulta

$$\vec{r} = r(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta) \quad (1.2.1)$$

e dunque

$$|\vec{L}| = |m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = m r^2 \dot{\theta} \quad (1.2.2)$$

$$E = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 + V(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (1.2.3)$$

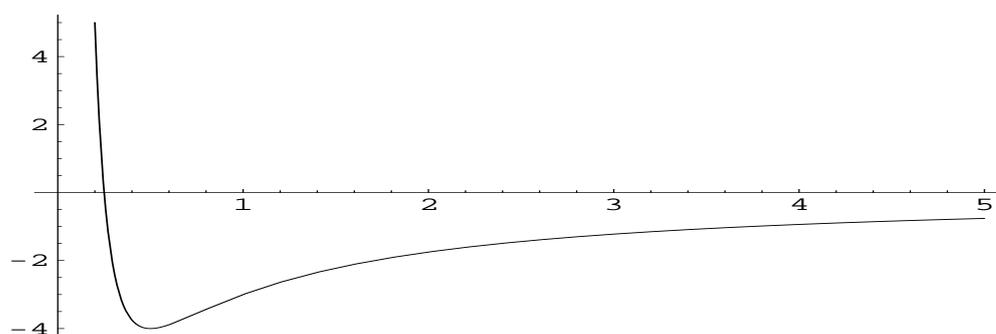
Ma  $\vec{L}$  è una costante del moto, dunque

$$m r^2 \dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} \quad (1.2.4)$$

dove  $l$  è indipendente dal tempo. Usando questa equazione per eliminare  $\dot{\theta}$  dall'equazione (1.2.3), si ha

$$E = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \frac{l^2}{m^2 r^4} \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2} + V(r) \quad (1.2.5)$$

Come si vede, questa equazione è quella che rappresenta, in una dimensione, l'energia meccanica di una particella di massa  $m$ , sottoposta ad una forza conservativa derivabile da un potenziale fittizio  $\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$ : il secondo termine è il cosiddetto *termine centrifugo*.

Figura 1.1: *Johannes Kepler (1571-1630)*Figura 1.2: *Potenziale fittizio nel caso kepleriano.*

A questo proposito, osserviamo che se il potenziale  $V(r)$  è kepleriano, ovvero attrattivo e del tipo  $V(r) = -\frac{k}{r}$ , allora, fissato  $l > 0$ ,  $\tilde{V} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$  ha la forma rappresentata in fig.1.2: il minimo del potenziale si raggiunge quando  $r_{min} = \frac{l^2}{mk}$  e vale  $\tilde{V}_{min} = -\frac{1}{2} m \frac{k^2}{l^2}$ , mentre  $\tilde{V} = 0$  si ottiene per  $r = \frac{r_{min}}{2}$  e il potenziale presenta un flesso per  $r = \frac{3}{2}r_{min}$ .

Ne segue immediatamente che<sup>1</sup>, in queste ipotesi

- il sistema non può avere una energia  $E < \tilde{V}_{min}$  (l'energia cinetica, infatti, può essere solo positiva ...);
- il sistema è legato se  $\tilde{V}_{min} \leq E < 0$ ;

<sup>1</sup>Nel caso in cui  $l = 0$ , l'urto è perfettamente centrale e la traiettoria è rettilinea. Il sistema è legato se l'energia complessiva è negativa (nessun limite inferiore per  $E$ ), mentre è libero se è positiva. Quando è legato, esiste un limite nella distanza massima dal centro, ma non esiste un valor minimo della stessa ...

- il sistema è libero se  $E > 0$  (caso dello scattering). In questo caso il valore minimo  $r_0$  a cui la particella urtante può avvicinarsi al centro di scattering vale<sup>2</sup>

$$r_0 = -\frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{l^2}{2mE}} \quad (1.2.6)$$

Ma torniamo adesso al nostro problema. Abbiamo visto che le equazioni che reggono il processo sono

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \quad (1.2.7)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad (1.2.8)$$

Derivando rispetto al tempo la (1.2.8), troviamo, naturalmente, l'espressione dell'accelerazione  $\ddot{r}$ , prevista in questo caso dalla seconda legge della dinamica, cioè

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

Comunque,  $\dot{r}$  può essere esplicitata direttamente dalla (1.2.8), ottenendo

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)} \quad (1.2.9)$$

che, insieme alla (1.2.7), eliminando il tempo, consentono di esplicitare l'equazione della traiettoria.

---

<sup>2</sup>Infatti il valor minimo di  $r$  si raggiunge quando  $\dot{r} = 0$ , e dunque quando

$$E = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow 2mEr^2 + 2mkr - l^2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$-\frac{k}{2E} \pm \sqrt{\frac{l^2}{2mE} + \frac{k^2}{4E^2}}$$

e, naturalmente, solo la soluzione positiva è fisicamente accettabile, cioè

$$r_0 = -\frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{l^2}{2mE}}$$

Si osservi che, nel caso di potenziale coulombiano repulsivo ( $V = +\frac{k}{r}$ ), il sistema, come è ovvio, è sempre libero perchè l'energia del sistema è sempre positiva e risulta

$$r_0 = \frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{l^2}{2mE}}$$

Si ha infatti

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2m \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (1.2.10)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}$$

e l'integrazione della (1.2.10) consente, almeno in linea di principio, di risolvere per quadrature il problema della traiettoria.

### 1.3 Scattering da una sfera rigida

Prima di affrontare qualunque altro problema, cominciamo considerando un caso molto semplice, ma molto intuitivo e istruttivo.

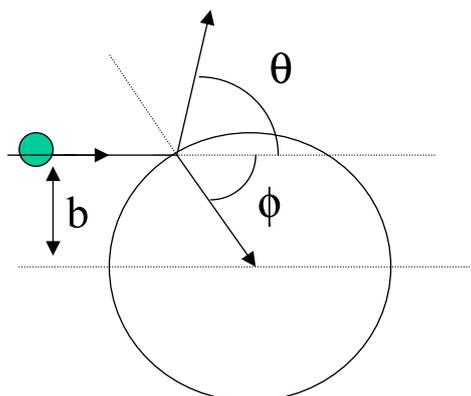


Figura 1.3: *Urto elastico contro una sfera immobile.*

Supponiamo di voler studiare l'urto di una particella materiale di massa  $m$  contro una sfera rigida, liscia e perfettamente elastica di raggio  $R$  e di massa infinita che, senza perdita di generalità, possiamo pensare abbia il centro nell'origine del sistema degli assi cartesiani (vedi fig.1.3).

Questo problema corrisponde al caso di un potenziale infinito per  $r < R$ . Vista la simmetria sferica del problema, non c'è perdita di generalità se assumiamo che

- la velocità della particella prima dell'urto sia diretta come l'asse  $z$  e valga  $\vec{v}_0 = v_0(0, 0, 1)$
- il parametro d'urto sia diretto lungo l'asse  $x$  e dunque  $\vec{b} = b(1, 0, 0)$ ,  $b \geq 0$ .

Siccome, per ipotesi, la sfera è perfettamente liscia, essa non è in grado di esercitare forze che non siano ortogonali alla superficie della sfera stessa, per cui la particella sarà deflessa rimanendo però nel piano individuato dalla velocità iniziale  $\vec{v}_0$  e dalla normale  $\vec{n}$  alla superficie della sfera nel punto di impatto (che orienteremo verso il centro della sfera).

Poiché la sfera ha massa infinita ed è perfettamente elastica, la particella manterrà la stessa energia cinetica che aveva prima dell'urto, e quindi anche il modulo della sua velocità.

Dunque, se  $b < R$ , allora la velocità della particella dopo l'urto avrà invertito la componente parallela alla normale  $\vec{n}$ , mantenendo inalterata quella ortogonale, ovvero sarà

$$\vec{v}_{out} = -\vec{n}(\vec{v}_0 \cdot \vec{n}) + [\vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{n})\vec{n}] = \vec{v}_0 - 2\vec{n}(\vec{v}_0 \cdot \vec{n})$$

Definendo allora l'angolo di scattering  $\theta$  come

$$\cos \theta \equiv \frac{\vec{v}_{out} \cdot \vec{v}_0}{|\vec{v}_{out}||\vec{v}_0|} \quad (1.3.11)$$

risulta (vedi fig.(1.3))

$$\cos \theta = \frac{v_0^2 - 2(\vec{v}_0 \cdot \vec{n})^2}{v_0^2} = 1 - 2 \cos^2 \Phi = 2 \sin^2 \Phi - 1 = 2 \left( \frac{b}{R} \right)^2 - 1 \quad (1.3.12)$$

dove l'angolo  $\Phi$  è definito dalla relazione  $\vec{n} \cdot \vec{v}_0 = v_0 \cos \Phi$  ed è direttamente legato all'angolo di scattering  $\theta$  dalla relazione geometrica

$$2\Phi + \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \Phi = \pi/2 - \theta/2 \quad (1.3.13)$$

Supponendo ora che la sfera sia investita da un flusso di particelle, di velocità  $\vec{v}_0$  assegnata e fissa, avente intensità  $I$  (numero di particelle  $N$  per  $cm^2$  e per  $sec$  che attraversano una sezione ortogonale alla velocità delle stesse), ci domandiamo quale sarà il numero di queste che, nell'unità di tempo, verranno scatterate ad angolo  $\theta$ .

Questo ci conduce alla nozione di *sezione d'urto differenziale* del processo, che è definita classicamente per ogni processo d'urto nel modo seguente (vedi fig.(1.4)):

$$I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \equiv dn \quad (1.3.14)$$

dove  $dn$  sta qui a indicare il numero di particelle che, nell'unità di tempo, emergono asintoticamente dalla zona di scattering, nell'angolo solido<sup>3</sup>  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  (definito rispetto al centro di scattering).

Siccome esiste un legame diretto fra gli angoli  $(\theta, \phi)$  che descrivono, in coordinate polari, la posizione asintotica della particella scatterata rispetto al centro di scattering e le variabili  $(b, \phi)$  che descrivono invece la traiettoria della particella incidente, allora la conservazione del numero di particelle in un processo stazionario richiede che risulti

$$I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \equiv I b db d\phi \quad (1.3.15)$$

dove il secondo membro dell'equazione (1.3.15) rappresenta il numero di particelle incidenti per unità di tempo, con parametro d'impatto fra  $b$  e  $b + db$

<sup>3</sup>Non si confonda l'angolo  $\Phi$  di cui alla (1.3.13) e l'angolo azimutale  $\phi$  che entra nella definizione dell'angolo solido di scattering.

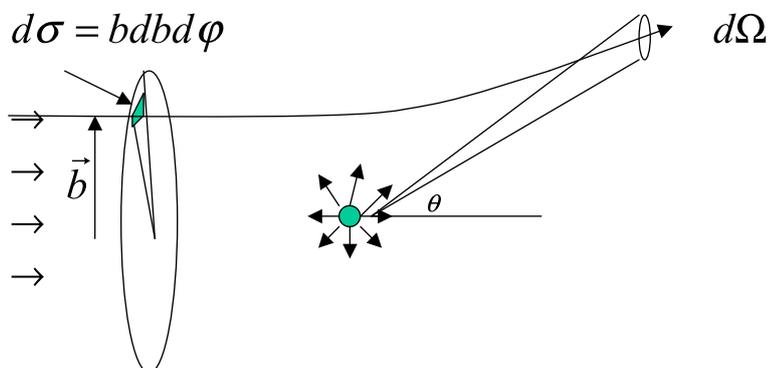


Figura 1.4: Definizione della sezione d'urto.

e angolo azimutale compreso fra  $\phi$  e  $\phi + d\phi$ , tale da essere scatterate dentro l'angolo solido  $d\Omega$ .

Nel caso di un potenziale di scattering a simmetria sferica (in realtà è sufficiente che la simmetria sia cilindrica rispetto all'asse di scattering) il processo avviene in un piano, dunque la sezione d'urto differenziale non potrà dipendere dall'angolo azimutale  $\phi$ , e dunque la relazione precedente può essere riscritta come

$$I b db = I \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta$$

da cui si ricava quindi che<sup>4</sup>

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)} \right| \quad (1.3.16)$$

Osserviamo che, proprio perchè il processo avviene in un piano e ha due integrali primi, l'angolo di scattering sarà, in generale, univocamente determinato da queste costanti del moto, cioè esso sarà una funzione dell'energia e del momento angolare iniziali, ovvero, equivalentemente, di  $v_0$  e di  $b$ , cioè

$$\theta \equiv \theta_{scatt} = \theta(E, l) = \theta[v_0(E), b(l, E)] \quad (1.3.17)$$

<sup>4</sup>Il segno di modulo è necessario perchè la sezione d'urto è una quantità definita positiva. La conservazione del numero di particelle in regime stazionario stabilisce infatti che

$$|I b db| = \left| I \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \right|$$

da cui segue la (1.3.16), essendo  $b$ ,  $\sin\theta$ ,  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  tutte quantità positive.

Il problema del segno si pone perchè, al crescere del parametro d'impatto ( $db > 0$ ), l'angolo di scattering tipicamente decresce ( $d\theta < 0$ ) poiché più siamo lontani dal centro di scattering e meno intenso risulta l'effetto dell'interazione.

Fissata la velocità  $v_0$  delle particelle incidenti, la funzione inversa  $b = b(\theta, v_0)$ , poi, può anche non essere a un sol valore, ovvero, fissato un angolo di scattering  $\theta$ , potrebbero esistere più di un parametro d'impatto  $b$  che lo determinano. In quel caso, coerentemente con la definizione (1.3.14), l'espressione della sezione d'urto (1.3.16) si modifica, al secondo membro, nella somma di tutti i contributi  $\left| \frac{db}{d\theta} \right|$  corrispondenti ai vari parametri d'impatto che realizzano lo stesso  $\theta_{scatt}$ .

Nel nostro caso, essendo

$$\cos \theta = 2 \left( \frac{b}{R} \right)^2 - 1$$

ne segue che<sup>5</sup>

$$b = R \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \Rightarrow \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R^2}{4b} \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (1.3.18)$$

Integrando la sezione d'urto differenziale nelle variabili angolari, si determina, in generale, la *sezione d'urto totale*  $\sigma$  del processo: questa grandezza, moltiplicata per il flusso incidente  $I$ , fornisce il *rate* di particelle scatterate, cioè il numero di particelle scatterate per unità di tempo.

Nel caso della sfera rigida, abbiamo

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\phi \sin \theta d\theta = \int \frac{R^2}{4} d\phi \sin \theta d\theta = \pi R^2 \quad (1.3.19)$$

ovvero troviamo un risultato che potevamo aspettarci fin dall'inizio<sup>6</sup>, cioè che la sezione d'urto del processo di scattering considerato è semplicemente pari alla sezione geometrica massima della sfera.

Si noti infine che, in questo caso, sia la sezione d'urto differenziale che quella integrale, essendo determinate unicamente dalla geometria, *non* dipendono dall'energia della particella incidente.

<sup>5</sup>Si ricordi che, per definizione,  $b$  è positivo.

<sup>6</sup>Infatti, dalla definizione, si ha

$$I b db d\phi = I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow d\sigma = b db d\phi \Rightarrow \sigma = 2\pi \int b db = \pi b_M^2$$

dove  $b_M$  è il parametro d'impatto oltre il quale non c'è più scattering. Classicamente questo risultato è del tutto generale.

## 1.4 Scattering Coulombiano

Vediamo ora che cosa succede se il centro di scattering, che assumeremo fisso, è una carica puntiforme di valore  $Ze$ , mentre la particella incidente ha massa  $m$  e carica  $e$ . L'interazione, come sappiamo, è descritta dal potenziale coulombiano<sup>7</sup>



Figura 1.5: *Charles Augustin Coulomb (1736-1806)*

$$V(\vec{r}) = V(r) = \frac{Ze^2}{r} \quad (1.4.20)$$

che è attrattivo se  $Z < 0$  (cariche discordi), mentre è repulsivo se  $Z > 0$ .

<sup>7</sup>In pratica, quello che accadrà sarà piuttosto il caso di un processo di scattering contro una carica  $Ze$  avente massa  $M$ . Introducendo la coordinata del centro di massa  $\vec{R}$  e la coordinata relativa  $\vec{r}$ , definite come

$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m}; \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

da cui

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m}{M + m}\vec{r}; \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{M}{M + m}\vec{r}$$

le equazioni del moto sono separate in  $\vec{R}$  e  $\vec{r}$  e risulta che

1.  $\vec{R}$  descrive il moto libero di un sistema di massa  $m + M$  (moto del baricentro);
2.  $\vec{r}$  descrive il moto di un punto materiale di massa ridotta  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  che interagisce con un centro fisso attraverso il potenziale coulombiano  $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$ .

Si tratta dello scattering Rutherford.

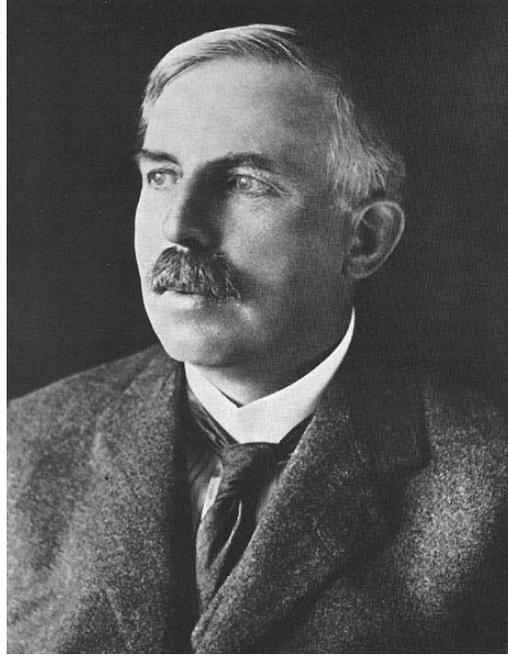


Figura 1.6: *Ernest Rutherford (1871-1937)*

Per quanto già visto nel caso generale (cfr. eq.(1.2.10)), sappiamo che il moto avverrà in un piano, che si conservano l'energia totale  $E$  insieme al momento angolare  $\vec{l}$  rispetto al centro di scattering e che, in coordinate polari piane, l'equazione della traiettoria è data da

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2m \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2m \left( E - \frac{Ze^2}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (1.4.21)$$

ovvero

$$\theta(r) = \theta_0 + \int^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mZe^2}{xl^2} - \frac{1}{x^2}}} \quad (1.4.22)$$

L'integrale può essere fatto per sostituzione di variabile, ponendo  $\xi = \frac{1}{x}$ . Si ottiene<sup>8</sup>

$$\theta(r) = \theta_0 + \arccos \left( \frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \right) \quad (1.4.26)$$

<sup>8</sup>Dalla (1.4.22), con la sostituzione  $\xi = \frac{1}{x} \Rightarrow d\xi = -\frac{dx}{x^2}$ , abbiamo infatti

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mZe^2}{l^2} \xi - \xi^2}} \quad (1.4.23)$$

dove

$$\xi_0 \equiv \frac{mZe^2}{l^2} \quad (1.4.27)$$

$$A \equiv \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \xi_0^2} = \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2Z^2e^4}{l^4}} \quad (1.4.28)$$

e dunque

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \quad (1.4.29)$$

ovvero, infine

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.4.30)$$

In generale, questa equazione rappresenta una conica.

Nel caso che ci interessa, cioè quando  $E > 0$ , siccome evidentemente dalla (1.4.28) risulta che  $A > |\xi_0|$ , essa rappresenta il ramo di una iperbole, avente uno dei due fuochi nell'origine<sup>9</sup> ed eccentricità  $\epsilon = \frac{A}{|\xi_0|} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mZ^2e^4}}$ .

---

Ponendo allora  $\xi = \eta - \xi_0$ , con  $\xi_0 \equiv \frac{mZe^2}{l^2}$  ecco che l'argomento della radice quadrata, dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si riduce a  $\frac{2mE}{l^2} + \xi_0^2 - \eta^2 \equiv A^2 - \eta^2$  dove si è definito  $A^2 \equiv \frac{2mE}{l^2} + \xi_0^2 = \frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2Z^2e^4}{l^4}$ .  
Dunque

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A^2 - \eta^2}} = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.4.24)$$

e ponendo  $\zeta = \cos \phi$ , questo integrale si risolve immediatamente e fornisce appunto

$$\theta(r) = \theta_0 + \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A}\right) \quad (1.4.25)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

<sup>9</sup>Ricordiamo che, in generale, dato un fuoco  $F$  e una retta direttrice  $D$ , una conica è definita dalla relazione  $\frac{PF}{PH} = \epsilon$ , dove  $\epsilon$  è l'eccentricità,  $PF$  è la distanza del generico punto  $P$  della conica dal fuoco, mentre  $PH$  rappresenta la distanza del punto dalla direttrice. Quando  $\epsilon > 1$  si ha un'iperbole, quando  $\epsilon = 1$  si ha una parabola, quando  $\epsilon < 1$  si descrive un'ellisse che, nel caso in cui  $\epsilon = 0$  degenera in una circonferenza.

Nel caso dell'iperbole, se l'origine è il fuoco e questo si trova all'interno della falda di iperbole considerata, per cui la direttrice è opposta al fuoco rispetto al vertice della curva (fig.1.8), misurando  $\theta$  rispetto alla direzione *fuoco*  $\rightarrow$  *vertice*, l'equazione è

$$\frac{r}{h - r \cos\theta} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos\theta \quad (1.4.31)$$

dove  $h$  è la distanza del fuoco  $F$  dalla direttrice.

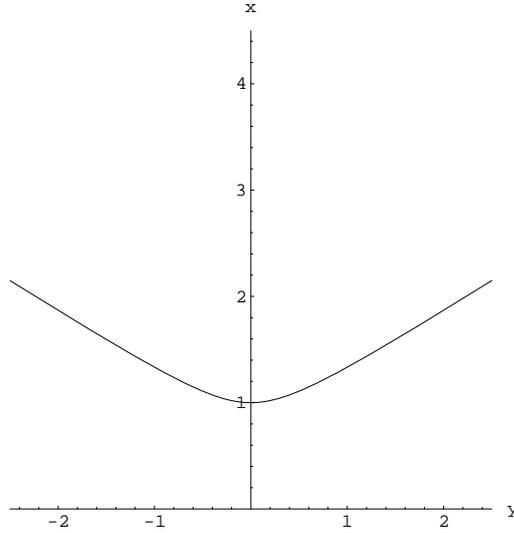


Figura 1.7: Traiettoria iperbolica per  $Z > 0$  (potenziale repulsivo, centro scatteratore e quindi fuoco nell'origine, direttrice di equazione  $x = 1/A$ ).

Nel caso in cui  $\xi_0 > 0$ , ovvero se  $Z > 0$ , cioè nel caso di un potenziale repulsivo, l'origine è opposta alla falda d'iperbole descritta dalla particella (vedi fig.(1.7)), mentre se il potenziale è attrattivo, ovvero se  $\xi_0 < 0$ , allora la falda contiene il centro di scattering (vedi fig.1.8).

Ma torniamo all'equazione (1.4.30). Scegliamo la costante arbitraria di integrazione  $\theta_0$  in modo che sia  $\theta = 0$  quando  $r = r_{min}$ , ovvero quando  $\frac{1}{r} = -\xi_0 + A$ , e dunque  $\theta - \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$ . In questo modo abbiamo

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos(\theta) \quad (1.4.33)$$

E' evidente che, affinché  $\frac{1}{r} > 0$ ,  $\theta$  deve essere compreso fra  $-\theta_M$  e  $\theta_M$ , dove  $\theta_M \equiv \arccos \frac{\xi_0}{A}$ , per cui abbiamo

$$\theta_{sc} = \pi - 2\theta_M = \pi - 2 \arccos \frac{\xi_0}{A} \quad (1.4.34)$$

Distinguiamo i due casi in cui  $\xi_0 > 0$  (potenziale repulsivo) e  $\xi_0 < 0$  (potenziale attrattivo).

---

Altrimenti, se il fuoco si trova opposto alla falda e dunque la direttrice si trova fra il vertice della curva e il fuoco (fig.1.7), misurando l'angolo  $\theta$  sempre rispetto alla direzione fuoco  $\rightarrow$  vertice, l'equazione è

$$\frac{r}{-h + r \cos\theta} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos\theta \quad (1.4.32)$$

E' immediato verificare che il primo caso descrive lo scattering da potenziale attrattivo, mentre il secondo quello da potenziale repulsivo.

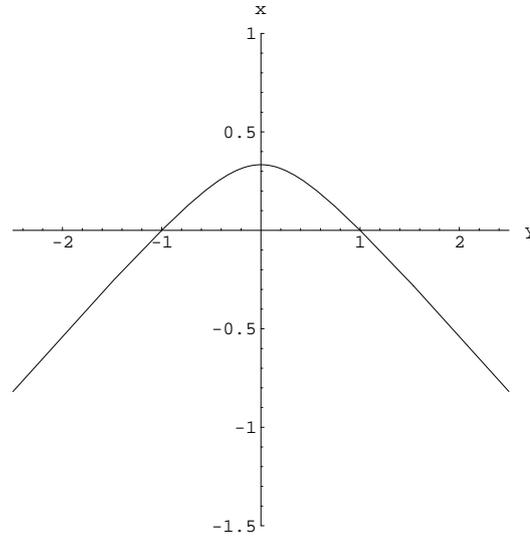


Figura 1.8: *Traiettoria iperbolica per  $Z < 0$  (potenziale attrattivo, centro scatteratore e quindi fuoco nell'origine, direttrice di equazione  $x = 1/A$ ).*

Nel primo caso (repulsivo), risulta

$$\begin{aligned}\theta_{sc} &= \pi - 2\theta_M = \pi - 2 \arccos\left(\frac{\xi_0}{A}\right) = \pi - 2 \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\ &= \pi - 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{Z^2me^4}}}\right)\end{aligned}\quad (1.4.35)$$

mentre nel secondo caso (attrattivo), essendo

$$\theta_M = \arccos\frac{\xi_0}{A} = \arccos\left(-\frac{|\xi_0|}{A}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (1.4.36)$$

si ha<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}\theta_{sc} &= \pi - 2\theta_M = \pi - 2\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \\ &= \pi + 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{Z^2me^4}}}\right)\end{aligned}\quad (1.4.37)$$

<sup>10</sup>Si osservi che, come mostra anche la figura (1.9), per le stesse condizioni iniziali di energia e parametro d'impatto, l'angolo di scattering, in modulo, è lo stesso sia nel caso attrattivo che in quello repulsivo. Comunque, se ricordiamo che esso è definito come l'angolo fra  $\vec{v}_{in}$  e  $\vec{v}_{out}$ , allora è evidente che nel caso repulsivo esso è pari a  $\theta_{sc} = \pi - 2\theta_M$ , mentre in quello attrattivo esso vale  $\theta_{sc} = -(2\theta_M - \pi)$ , visto che gli angoli si misurano in senso antiorario.

Ponendo allora

$$\alpha \equiv \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{Z^2 m e^4}}} \right) \quad (1.4.38)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \xi_0 > 0 : \theta_{sc} &= \pi - 2\alpha \\ \xi_0 < 0 : \theta_{sc} &= \pi + 2\alpha \end{aligned}$$

e in entrambi i casi risulta

$$\cos \theta_{sc} = -\cos(2\alpha) = 1 - 2\cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{mZ^2 e^4}} \quad (1.4.39)$$

Per poter determinare la sezione d'urto, per la (1.3.16), occorre esplicitare la funzione  $b^2 = b^2(\cos \theta_{sc})$ . Questo può essere fatto ricordando che i due integrali primi dell'energia  $E$  e del momento angolare  $l$ , usati nella (1.4.39), sono esprimibili in termini del parametro d'impatto  $b$  e del modulo della velocità iniziale  $v$ , nel modo seguente

$$\begin{aligned} l &= m v b \\ 2E &= m v^2 \end{aligned}$$

per cui, sostituendo, risulta

$$\begin{aligned} \cos \theta_{sc} &= 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{mZ^2 e^4}} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{(mv^2)(mbv)^2}{mZ^2 e^4}} = 1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{mv^2}{Ze^2}\right)^2 b^2} = \\ &= \frac{(mbv^2)^2 - (Ze^2)^2}{(mbv^2)^2 + (Ze^2)^2} \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

da cui si ricava, con semplici passaggi algebrici (per semplicità indicheremo l'angolo di scattering con  $\theta$  invece che con  $\theta_{sc}$  ...)

$$b^2 = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.4.41)$$

e dunque, per la (1.3.16), abbiamo finalmente che *la sezione d'urto Rutherford* per scattering di una particella di massa  $m$  e carica  $e$  contro un centro di scattering fisso di carica  $Ze$ , risulta, *indipendentemente* dal segno delle cariche, essere data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{d \cos \theta} \right| = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.4.42)$$

o anche, in termini della costante di struttura fine  $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{pv}\right)^2 \frac{1}{(1-\cos\theta)^2} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{pv}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} \quad (1.4.43)$$

Rispetto al caso della sfera rigida, ci sono due differenze significative.

La prima è che adesso la sezione d'urto dipende anche dall'energia  $E$  della particella incidente (attraverso il termine  $mv^2$  al denominatore).

La seconda è che la sezione d'urto totale risulta essere formalmente infinita! Questo accade perchè quella differenziale, per  $\theta \rightarrow 0$ , diverge come  $\theta^{-4}$ , per cui l'integrale<sup>11</sup> va come  $\theta^{-2}$ .

Una sezione d'urto totale infinita non ha, di per sè, delle patologie particolari: dice solo che, in presenza di un flusso uniforme, piano e infinitamente esteso, il numero di particelle scatterate per unità di tempo è anch'esso infinito. Questo accade perchè il potenziale coulombiano ha range infinito, cioè è dovuto al fatto che, comunque sia grande il parametro d'impatto  $b$ , fissata comunque l'energia iniziale  $E$ , la particella viene comunque deviata dalla traiettoria rettilinea. Dalla (1.4.41) abbiamo infatti

$$b = \frac{|Z|e^2}{mv^2} \left| \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \quad (1.4.44)$$

e per piccole deviazioni dalla traiettoria imperturbata, risulta quindi

$$b \approx \frac{|Z|e^2}{mv^2} \frac{2}{|\theta|} \quad \Rightarrow \quad |\theta| \approx \frac{2|Z|e^2}{p v b} \quad (1.4.45)$$

dove abbiamo fatto comparire esplicitamente il modulo  $p = mv$  dell'impulso iniziale della particella.

Comunque sia grande  $b$ , la particella viene comunque deviata.

Si noti che il risultato approssimato per piccoli angoli di scattering (1.4.45) poteva essere dedotto anche valutando il momento trasferito dal centro scatteratore alla particella, quando essa segua la traiettoria imperturbata, cioè

$$p_{\perp} = \int dt F_{\perp} \quad (1.4.46)$$

Siccome, in queste ipotesi,

$$F_{\perp} = \frac{Ze^2}{r^3} r_{\perp} \equiv \frac{bZe^2}{r^3}; \quad dt = \frac{dx}{v}; \quad r = \sqrt{b^2 + x^2}$$

ne segue che<sup>12</sup>

$$p_{\perp} = \int dt F_{\perp} = \int \frac{Ze^2}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{b}{v} dx = \frac{Ze^2}{bv} \int \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2Ze^2}{bv} \quad (1.4.47)$$

<sup>11</sup>Ricordiamo che  $\sigma = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta$  per cui se  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  per  $\theta \rightarrow 0$  va come  $\theta^{-n}$  il fattore  $\sin\theta$  cancella una potenza di  $\theta$  per cui l'integrando, per  $\theta \rightarrow 0$ , va come  $\theta^{-n+1}$  e dunque l'integrale come  $\theta^{-n+2}$  (a parte il caso in cui  $n = 2$  in cui resta una divergenza logaritmica).

<sup>12</sup>L'integrale  $\int \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}$  vale 2, come si può calcolare facilmente facendo la sostituzione  $\xi = tg\phi$

da cui si ricava l'angolo di deviazione attraverso la relazione

$$\theta \approx \frac{p_{\perp}}{p} = \frac{2Ze^2}{bv p} \quad (1.4.48)$$

in accordo appunto con la (1.4.45).

Quando non si è in grado di risolvere il problema analiticamente, è attraverso questo metodo che possiamo cercare di vedere come si modificherà la sezione d'urto differenziale, per  $\theta \rightarrow 0$ , in presenza, per esempio, di effetti di schermo.

In ogni caso deve essere chiaro che, come abbiamo visto, per quanto riguarda la sezione d'urto totale, classicamente (questo non è più vero in MQ) essa è comunque pari a  $\pi r_M^2$ , dove  $r_M$  è la distanza massima dal centro scatteratore, oltre la quale la forza del centro scatteratore sulla particella si annulla, per cui è infinita tutte le volte che il supporto del potenziale non è compatto, cioè si estende all'infinito, non importa con quale andamento<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup>La ragione, come abbiamo anche già detto, è che, per la (1.3.15), risulta comunque che

$$I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = I b db d\phi \quad \Rightarrow \quad d\sigma = 2\pi b db$$

ovvero, dovendo integrare su tutti i parametri d'impatto  $b$  per cui  $c'$  è scattering, risulta

$$\sigma = 2\pi \int b db = \pi b_{max}^2$$

dove  $b_{max}$  è il range del potenziale, oltre il quale esso è nullo ed entro il quale non lo è.

### 1.4.1 Ancora sull'iperbole in generale

Ricordiamo dalla Geometria analitica che, avendo fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $(x, y)$ , assegnata la posizione del *fuoco* nell'origine, data la *retta direttrice*  $d$ , di equazione  $y \equiv y_d = h > 0$  e il valore dell'eccentricità  $\epsilon > 1$ , allora sono definite due iperboli, di equazioni

$$a) : \frac{1}{r} = -\frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos \alpha; \quad |\alpha| \leq \alpha_M = \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right); \quad 0 < \alpha_M < \frac{\pi}{2} \quad (1.4.49)$$

$$b) : \frac{1}{r} = \frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos \beta; \quad |\beta| \leq \beta_M = \pi - \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right); \quad \frac{\pi}{2} < \beta_M < \pi \quad (1.4.50)$$

Entrambi i rami di iperbole hanno il vertice sull'asse  $y$ , e risulta

$$y^{(a)} \equiv r_{min}^{(a)} = \frac{h\epsilon}{\epsilon - 1} \quad (1.4.51)$$

$$y^{(b)} \equiv r_{min}^{(b)} = \frac{h\epsilon}{\epsilon + 1} \quad (1.4.52)$$

e, mentre il ramo  $(a)$  ha la concavità rivolta verso l'alto, il ramo  $(b)$  ha la concavità rivolta verso il basso.

I due rami, insieme, costituiscono una stessa iperbole i cui asintoti hanno equazione

$$\pm x\sqrt{\epsilon^2 - 1} - y(\epsilon^2 - 1) + h\epsilon^2 = 0 \quad (1.4.53)$$

e questi si incontrano nel punto di coordinate

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{y} = \frac{h\epsilon^2}{\epsilon^2 - 1} \equiv \frac{1}{2} [r_{min}^{(a)} + r_{min}^{(b)}] \quad (1.4.54)$$

con coefficiente angolare

$$m = \frac{\pm 1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \quad (1.4.55)$$

Il secondo fuoco  $F'$  ha ordinata

$$y_{F'} = r_{min}^{(a)} + r_{min}^{(b)} = \frac{2h\epsilon^2}{\epsilon^2 - 1} \quad (1.4.56)$$

e la seconda direttrice  $d'$ , parallela alla direttrice  $d$ , ha equazione, di nuovo, tale che

$$\frac{1}{2}(y_d + y_{d'}) = \bar{y} \quad \Rightarrow \quad y(d') = h \frac{\epsilon^2 + 1}{\epsilon^2 - 1} \quad (1.4.57)$$

Veniamo adesso al caso che ci interessa, cioè a quello della traiettoria percorsa da una carica elettrica  $e$ , nel campo coulombiano prodotto da un'altra carica  $Ze$ , ferma nell'origine. Abbiamo visto che essa descrive il ramo di iperbole di equazione (assumiamo  $Z > 0$ , cioè potenziale repulsivo)

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos \theta \quad (1.4.58)$$

dove

$$0 < \xi_0 = \frac{mZe^2}{l^2}; \quad A^2 = \xi_0^2 + \frac{2mE}{l^2} \quad (1.4.59)$$

Il confronto con l'equazione generale (1.4.49) mostra che, nel caso attuale, l'eccentricità e l'equazione della direttrice sono, rispettivamente

$$\epsilon = \frac{A}{\xi_0}; \quad y \equiv h = \frac{1}{A} \quad (1.4.60)$$

La posizione di un generico punto dell'iperbole, individuato dalla coordinata angolare  $\theta$ , misurata rispetto alla direzione *fuoco-vertice* (asse  $y$ ), avendo posto il polo nel fuoco della conica (origine degli assi), è data, evidentemente, da

$$P \equiv (x, y) = r(\theta)(\sin \theta, \cos \theta); \quad |\theta| < \arccos \frac{\xi_0}{A} \quad (1.4.61)$$

ovvero, per la (1.4.58),

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{\sin \theta}{A \cos \theta - \xi_0} \\ y(\theta) &= \frac{\cos \theta}{A \cos \theta - \xi_0} \end{aligned}$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{\cos \theta (A \cos \theta - \xi_0) - \sin \theta (-A \sin \theta)}{(A \cos \theta - \xi_0)^2} = \frac{A - \xi_0 \cos \theta}{(A \cos \theta - \xi_0)^2} \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{-\sin \theta (A \cos \theta - \xi_0) - \cos \theta (-A \sin \theta)}{(A \cos \theta - \xi_0)^2} = \frac{\xi_0 \sin \theta}{(A \cos \theta - \xi_0)^2} \end{aligned}$$

L'equazione della retta tangente al ramo di iperbole nel punto  $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$  ha, naturalmente, equazione parametrica

$$x = \bar{x} + \frac{dx}{d\theta} t; \quad y = \bar{y} + \frac{dy}{d\theta} t$$

ovvero risulta

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin \theta}{A \cos \theta - \xi_0} + \frac{A - \xi_0 \cos \theta}{(A \cos \theta - \xi_0)^2} t \\ y &= \frac{\cos \theta}{A \cos \theta - \xi_0} + \frac{\xi_0 \sin \theta}{(A \cos \theta - \xi_0)^2} t \end{aligned}$$

per cui, moltiplicando la prima equazione per  $(\xi_0 \sin \theta)$ , la seconda equazione per  $(A - \xi_0 \cos \theta)$  e sottraendo quindi la seconda dalla prima, si ottiene infine

$$x \xi_0 \sin \theta - y (A - \xi_0 \cos \theta) = \frac{\xi_0 \sin^2 \theta}{A \cos \theta - \xi_0} - \frac{\cos \theta}{A \cos \theta - \xi_0} (A - \xi_0 \cos \theta)$$

D'altronde, il secondo membro vale

$$\frac{\xi_0 \sin^2 \theta}{A \cos \theta - \xi_0} - \frac{\cos \theta}{A \cos \theta - \xi_0} (A - \xi_0 \cos \theta) = \frac{\xi_0 - A \cos \theta}{A \cos \theta - \xi_0} = -1$$

e dunque l'equazione della tangente geometrica all'iperbole in  $P$ , in definitiva, è

$$x \xi_0 \sin \theta - y (A - \xi_0 \cos \theta) + 1 = 0 \quad (1.4.62)$$

Evidentemente, allora, i due asintoti li troviamo imponendo che

$$\begin{aligned} \cos \theta = \cos \theta_M &\equiv \frac{\xi_0}{A}; & \sin \theta = \sin \theta_M &\equiv \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\xi_0}{A}\right)^2} \\ \Downarrow & & & \\ \pm x \xi_0 \sqrt{1 - \frac{\xi_0^2}{A^2}} - y (A - \frac{\xi_0^2}{A}) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

ovvero essi sono definiti dalle equazioni

$$\pm x \xi_0 \sqrt{A^2 - \xi_0^2} - y (A^2 - \xi_0^2) + A = 0$$

e intercettano entrambi l'asse delle ordinate nello stesso punto  $\bar{y}$  definito dalle equazioni precedenti per  $x = 0$ , cioè

$$\bar{y} = \frac{A}{A^2 - \xi_0^2}$$

che, per evidenti ragioni di simmetria, è il punto medio del segmento che unisce i vertici delle due iperboli definite dal fuoco e dalla direttrice dati, infatti per la (1.4.51), (1.4.52), risulta

$$r_{1min} = \frac{1}{A - \xi_0}; \quad r_{2min} = \frac{1}{A + \xi_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{A}{A^2 - \xi_0^2} \equiv \bar{y}$$

Quanto al parametro d'impatto, evidentemente esso è proprio la distanza degli asintoti dall'origine e noi sappiamo, in generale, che data la retta di equazione

$$ax + by + c = 0$$

la sua distanza dal punto  $P \equiv (X_0, Y_0)$  vale, come ben noto

$$d = \frac{|aX_0 + bY_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

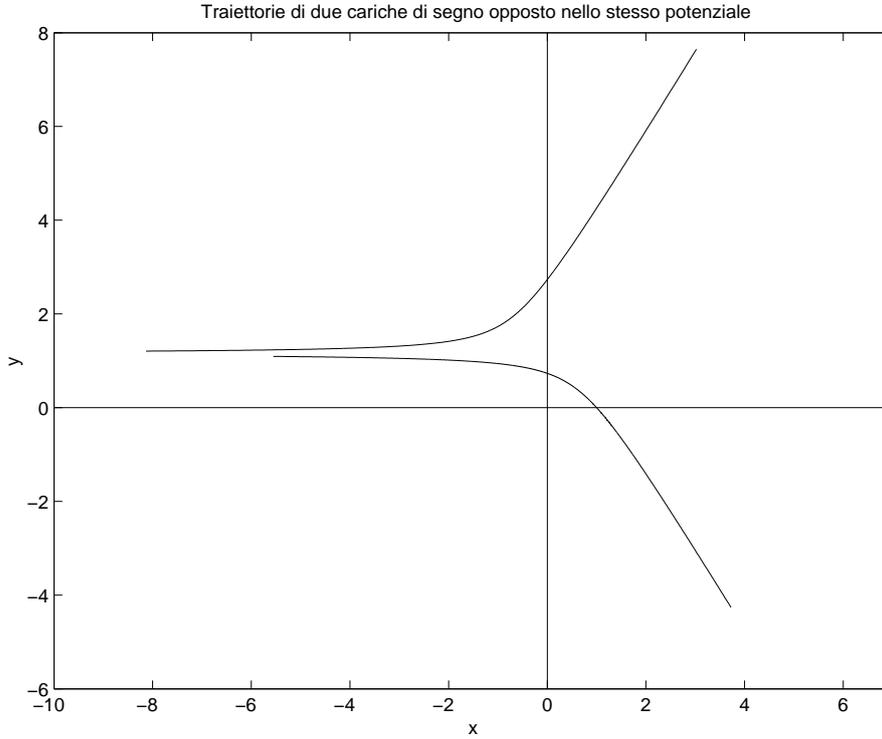


Figura 1.9: Confronto fra le traiettorie di due cariche di segno positivo e negativo che scatterano contro lo stesso potenziale coulombiano generato da una carica positiva immobile nell'origine, nel caso in cui  $h = 1/A = 1$ ,  $\epsilon = A/|\xi_0| = 2$ ,  $b = 2/\sqrt{3}$  e  $\theta_M = 60^\circ$  e  $120^\circ$ , rispettivamente.

e dunque la distanza degli asintoti dall'origine, cioè il parametro d'impatto, vale

$$\delta = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{A}{\sqrt{\xi_0^2(A^2 - \xi_0^2) + (A^2 - \xi_0^2)^2}} = \frac{A}{\sqrt{(A^2 - \xi_0^2)(\xi_0^2 - A^2 + \xi_0^2)}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - \xi_0^2}}$$

ma sappiamo appunto che

$$A^2 - \xi_0^2 = \frac{2mE}{l^2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{l}{\sqrt{2mE}} = \frac{mv_0 b}{mv_0} = b$$



## Capitolo 2

# Scattering da potenziale: teoria quantistica n.r.

### 2.1 Introduzione

Il processo di scattering è un processo dinamico e dunque richiede di risolvere l'equazione di evoluzione temporale che regge il sistema considerato, ovvero, nell'ambito della Meccanica Quantistica non relativistica (n.r.) e in prima quantizzazione, occorre risolvere l'equazione

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (2.1.1)$$

Un approccio che viene comunemente usato nella teoria dello scattering è quello di costruire il vettore di stato come sovrapposizione lineare di stati stazionari dell'hamiltoniana  $H$ , cioè *di stati di scattering stazionari*.

La ragione è che, almeno se il potenziale è di range finito, fuori dalla zona di interazione è nota la forma degli stati stazionari, che saranno semplicemente una sovrapposizione di funzioni d'onda autostati dell'hamiltoniana della particella libera. Nella zona di interazione, il vettore di stato verrà modificato anche profondamente dall'interazione ed è proprio con la soluzione del problema degli stati stazionari di scattering che si potrà determinare come questo avvenga.

## 2.2 Stati di scattering stazionari

Iniziamo assumendo che la funzione hamiltoniana del sistema, costituito da una particella di massa  $m$  che subisce il processo di scattering, sia data da



Figura 2.1: *William Hamilton (1788-1856)*

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.2.2)$$

dove  $H_0$  è l'hamiltoniana della particella libera di massa  $m$ , cioè

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} \quad (2.2.3)$$

mentre  $H_1$  rappresenta la sorgente vera e propria dello scattering, cioè, tipicamente, coincide proprio con il potenziale di scattering  $V$ .

Sia  $|\Phi\rangle$  un generico autostato di  $H_0$ , corrispondente all'autovalore  $E$

$$H_0 |\Phi\rangle = E |\Phi\rangle \quad (2.2.4)$$

e indichiamo con  $\Phi(\vec{r})$  la funzione d'onda a esso associata in rappresentazione di Schroödinger, cioè

$$\Phi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Phi \rangle \quad (2.2.5)$$

Per determinare gli stati stazionari del sistema in interazione, occorre risolvere l'equazione agli autovalori per il problema che stiamo considerando,



Figura 2.2: Erwin Schrödinger (1887-1961)

ovvero l'equazione

$$(H_0 + H_1) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (2.2.6)$$

Analogamente a quanto fatto per  $|\Phi\rangle$ , anche per lo stato  $|\Psi\rangle$  introduciamo la funzione d'onda a esso associata in rappresentazione di Schrödinger, cioè

$$\Psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Psi \rangle \quad (2.2.7)$$

In generale, sia  $H_0$  che  $H = H_0 + H_1$  avranno spettri continui quando  $E > 0$ , per cui gli autostati di questi operatori non saranno normalizzabili all'unità bensì a delta di Dirac.

Poniamoci adesso il problema di trovare una soluzione dell'equazione (2.2.6) che soddisfi la condizione al contorno per la quale

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Phi\rangle \quad \text{quando} \quad H_1 \rightarrow 0 \quad (2.2.8)$$

dove  $|\Phi\rangle$ , come si è detto, è una soluzione dell'equazione agli autovalori per la particella libera, corrispondente *allo stesso* autovalore  $E$  per cui  $|\Psi\rangle$  è autostato di  $H_1$ .

Formalmente la soluzione cercata può essere scritta nel modo seguente

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + (E - H_0)^{-1} H_1 |\Psi\rangle \equiv |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0} H_1 |\Psi\rangle \quad (2.2.9)$$

Infatti, applicando (a sinistra) all'equazione (2.2.9) l'operatore  $(E - H_0)$ , ricordando che, per ipotesi  $(E - H_0)|\Phi\rangle = 0$ , si ha

$$(E - H_0)|\Psi\rangle = 0 + H_1|\Psi\rangle \Rightarrow (H_0 + H_1)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

Questa soluzione, evidentemente, soddisfa anche la condizione al contorno (2.2.8): sfortunatamente però, l'operatore  $(E - H_0)$  non è invertibile, infatti l'operatore  $(E - H_0)^{-1}$  è manifestamente singolare sugli autostati di  $H_0$  relativi all'autovalore  $E$ !

Occorre allora una prescrizione su come trattare questa singolarità e questa prescrizione consiste nel passare al campo complesso, aggiungendo a  $E$  una piccola parte immaginaria  $i\epsilon$ , ovvero di porre

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} H_1 |\Psi^\pm\rangle \quad (2.2.10)$$

dove  $\epsilon$  è una quantità reale positiva ed è sottinteso che, in un qualche momento, si prenderà il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

L'equazione (2.2.10) è detta<sup>1</sup> *equazione di Lippmann-Schwinger* ed è non singolare, almeno finché  $\epsilon > 0$ . Come abbiamo visto, essa contiene le condizioni al contorno corrette, inoltre, come vedremo, è il punto di partenza naturale sia per ogni sviluppo perturbativo come per esempio per quello di Born, che per la decomposizione in onde parziali di momento angolare definito.

Comunque, noi eravamo partiti cercando *una* soluzione  $|\Psi\rangle$  al problema dello scattering e siamo giunti, attraverso la (2.2.10), a definire *due* funzioni  $|\Psi^\pm\rangle$ : qual è il legame fra queste?

Iniziamo osservando che l'equazione di Lippmann-Schwinger può essere trasformata in una equazione integrale, ponendo<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | \Psi^\pm \rangle &= \langle \vec{r} | \Phi \rangle + \langle \vec{r} | (E - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} H_1 | \Psi^\pm \rangle = \\ &= \langle \vec{r} | \Phi \rangle + \int d^3r' \langle \vec{r} | (E - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | H_1 | \Psi^\pm \rangle \end{aligned}$$

ovvero

$$\Psi^\pm(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + \int d^3r' \langle \vec{r} | (E - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | H_1 | \Psi^\pm \rangle \quad (2.2.11)$$

<sup>1</sup>B.A. Lippmann, E. Schwinger: *Variational principles for scattering processes. I* Phys. Rev. 79, 469 (1959)

B.A. Lippmann, E. Schwinger: *Variational principles for scattering processes. II* Phys. Rev. 79, 481 (1959)

<sup>2</sup>Usiamo qui la consueta decomposizione dell'identità,

$$I = \int d^3r' | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' |$$

sottintendendo così che le coordinate costituiscano un insieme completo di osservabili e che gli autostati  $| \vec{r}' \rangle$  siano normalizzati a delta di Dirac. Questo non comporta perdita alcuna di generalità, potendosi, il formalismo, estendere in modo del tutto naturale al caso in cui sia necessario tenere conto anche, per esempio, di gradi di libertà interni (spin).

Figura 2.3: *Hermann Helmholtz (1821-1894)*

Per avere un punto di riferimento, vediamo ora, in rappresentazione di Schroödinger, come verrà espresso, nello schema visto sopra, il problema dello scattering da un potenziale  $H_1$  di una particella di massa  $m$ , senza spin. Si ha

$$\begin{aligned}
 (H_0 + H_1)|\Psi\rangle &= E|\Psi\rangle \Rightarrow \left(\frac{p^2}{2m} + H_1\right)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \\
 \Rightarrow \langle \vec{r} | \left(\frac{p^2}{2m} + H_1\right) |\Psi\rangle &= E \langle \vec{r} | \Psi \rangle \\
 \Rightarrow -\frac{1}{2m} \hbar^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + \langle \vec{r} | H_1 | \Psi \rangle &= E \Psi(\vec{r})
 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

ovvero, definendo la quantità  $k > 0$  in modo che risulti

$$E \equiv \frac{k^2 \hbar^2}{2m} \tag{2.2.13}$$

concludiamo con l'equazione

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \langle \vec{r} | H_1 | \Psi \rangle \tag{2.2.14}$$

Abbiamo così ottenuto per  $\Psi$  l'equazione di Helmholtz, la cui forma generale, lo ricordiamo, è la seguente

$$(\nabla^2 + k^2)F(\vec{x}) = s(\vec{x}) \tag{2.2.15}$$

dove  $s(x)$  è il *termine di sorgente*.

La soluzione generale dell'equazione può essere ottenuta in termini della sua funzione di Green, nel modo seguente

$$F(\vec{x}) = h(\vec{x}) + \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') s(\vec{x}') \tag{2.2.16}$$

dove  $h(\vec{x})$  è una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata, cioè

$$(\nabla^2 + k^2)h(\vec{x}) = 0 \quad (2.2.17)$$

mentre  $G(\vec{x}, \vec{x}')$ , per definizione di funzione di Green dell'equazione di Helmholtz, soddisfa la condizione

$$(\nabla_x^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.2.18)$$

ovvero<sup>3</sup>

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (2.2.31)$$

La soluzione dell'equazione (2.2.14) può allora essere scritta come

$$\Psi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \langle \vec{r}' | H_1 | \Psi \rangle \quad (2.2.32)$$

Il confronto fra questo risultato e quello ottenuto in base all'equazione di Lippmann-Schwinger suggerisce che il kernel di questa equazione (nel limite

<sup>3</sup>La funzione di Green dell'equazione di Helmholtz,

$$(\nabla_x^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.2.19)$$

in assenza di specifiche condizioni al contorno, come nel nostro caso, dipenderà direttamente solo dalla differenza  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{x}'$ , ovvero sarà tale per cui

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{z}) = \delta(\vec{z}) \quad (2.2.20)$$

Per esplicitare  $G(\vec{z})$ , assumiamo che essa sia rappresentabile in integrale di Fourier (la rappresentazione di Fourier della funzione di Green in questione, in realtà è possibile solo nell'ambito della teoria delle funzioni generalizzate, ovvero delle distribuzioni di Schwartz), cioè che sia

$$G(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3p \ g(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{z}} \quad (2.2.21)$$

Ricordando che

$$\delta(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3p \ e^{-i\vec{p}\cdot\vec{z}} \quad (2.2.22)$$

è immediato che, per soddisfare la (2.2.20), è necessario che

$$(-p^2 + k^2)g(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \quad (2.2.23)$$

e dunque che risulti

$$G(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3p \ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2 - p^2} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{z}} \quad (2.2.24)$$

Passando in coordinate polari e ponendo per comodità di notazione  $r \equiv |\vec{z}|$ , si ha allora

$$G(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int dp p^2 \frac{1}{k^2 - p^2} \sin\theta d\theta d\phi e^{-ipr \cos\theta} \quad (2.2.25)$$

e dunque, integrando nella coordinata azimutale, risulta

$$\begin{aligned} G(\vec{z}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty dp \frac{p^2}{k^2 - p^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{-ipr \cos\theta} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty dp \frac{p^2}{k^2 - p^2} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{ipr} \Big|_0^\pi = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{ir} \int_0^\infty dp \frac{p}{k^2 - p^2} [e^{ipr} - e^{-ipr}] \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Consideriamo ora il secondo addendo dell'espressione precedente e facciamo il cambiamento di variabile  $q \rightarrow -p$ : si ha

$$-\int_0^\infty dp \frac{p}{k^2 - p^2} e^{-ipr} = -\int_0^{-\infty} dq \frac{q}{k^2 - q^2} e^{iqr} = \int_{-\infty}^0 dq \frac{q}{k^2 - q^2} e^{iqr} \quad (2.2.27)$$

Ne segue quindi che la (2.2.26) può essere riscritta come

$$G(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{k^2 - p^2} e^{ipr} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{i}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ipr} \quad (2.2.28)$$

Chiaramente l'integrando è singolare in  $p = \pm k$ , dove ha un polo semplice.

Per valutare il risultato dell'integrale, occorre dunque definire il modo di trattare questa singolarità, cioè definire il percorso di integrazione.

Iniziamo osservando che, siccome  $r > 0$ , il percorso di integrazione nel piano complesso della variabile  $p$  può essere sempre chiuso nel semipiano superiore (dove la parte immaginaria di  $p$  è positiva). Per procedere alla valutazione dell'integrale, al solito, sommeremo a  $p$  una parte immaginaria pura infinitesima  $i\epsilon$ , che poi immagineremo di far andare a zero. Comunque, per procedere in modo corretto, occorre fare questa operazione a partire dalla espressione (2.2.26) in quanto l'integrazione sull'intera retta reale nasce come somma dei due integrali di cui appunto alla (2.2.26), entrambi definiti sulla semiretta  $p > 0$ . Si ha

$$G(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{ir} \int_{0 \pm i\epsilon}^{+\infty \pm i\epsilon} dp \frac{p}{k^2 - p^2} [e^{ipr} - e^{-ipr}] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{ir} \left\{ \int_{0 \pm i\epsilon}^{+\infty \pm i\epsilon} dp \dots + \int_{-\infty \mp i\epsilon}^{0 \mp i\epsilon} dq \dots \right\}$$

dove abbiamo ommesso, per semplicità, l'integrando, essendo quello della (2.2.27).

Ne segue allora che la scelta del segno di  $\epsilon$  non è indipendente per  $p > 0$  e per  $p < 0$ : in realtà ci sono solo due alternative e cioè

- (a):  $\epsilon > 0$  per  $p > 0$  e dunque  $\epsilon < 0$  per  $p < 0$ ,
- (b):  $\epsilon < 0$  per  $p > 0$  e dunque  $\epsilon > 0$  per  $p < 0$ .

Nel caso (a), chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, nel dominio di integrazione resta solo il polo per  $p = -k$ , e dunque

$$G^{(-)}(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{i}{r} 2\pi i \frac{-k}{-2k} e^{-ikr} = -\frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (2.2.29)$$

mentre nel caso (b), sempre chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, si ha che nel dominio di integrazione è presente solo il polo per  $p = k$ , e dunque

$$G^{(+)}(\vec{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{i}{r} 2\pi i \frac{k}{2k} e^{ikr} = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad (2.2.30)$$

Entrambe le funzioni soddisfano la condizione di Green (2.2.20), ma mentre  $G^{(+)}$  propaga l'effetto dovuto al termine di sorgente nel verso uscente da essa, la soluzione  $G^{(-)}$  lo propaga nel verso convergente verso la sorgente.

in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ ) sia appunto<sup>4</sup>

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \vec{r}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{r}' \rangle = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}' - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}' - \vec{r}'|} \quad (2.2.33)$$

Nel caso che più ci interessa, ovvero quando  $H_1$  è solo funzione degli operatori di posizione, cioè  $H_1 = V(\vec{r})$ , risulta peraltro evidente che

$$\langle \vec{r}' | H_1 | \vec{r}' \rangle = V(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}'),$$

per cui

$$\langle \vec{r}' | H_1 | \Psi^\pm \rangle = V(\vec{r}') \Psi^\pm(\vec{r}')$$

e quindi, in definitiva, per  $\Psi$  si ottiene l'equazione integrale seguente

$$\Psi^\pm(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \Psi^\pm(\vec{r}') \quad (2.2.34)$$

Supponiamo adesso che lo stato imperturbato<sup>5</sup>  $|\Phi\rangle \equiv |\vec{k}\rangle$  sia un'onda piana<sup>6</sup> con vettore d'onda  $\vec{k}$ , ovvero rappresenti una particella di impulso  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ . La funzione d'onda che descrive questo stato è

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (2.2.35)$$

dove la normalizzazione è stata scelta, al solito, in modo che risulti  $\langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle = \delta(\vec{k}' - \vec{k})$ .

Iniziamo supponendo che il potenziale di scattering  $V(\vec{r}')$  sia non nullo solo in una regione localizzata intorno all'origine del sistema di riferimento, cioè in prossimità di  $\vec{r}' = 0$ .

Cerchiamo di scrivere la funzione d'onda  $\Psi(\vec{r})$  lontano dalla regione di scattering, in *zona asintotica*, dove poter ritenere esaurito il processo d'urto. Siccome, in questo caso, il volume di integrazione coinvolge solo valori di  $r' \ll r$ , possiamo sviluppare  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  al primo ordine perturbativo in  $r'/r$ , ottenendo

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \vec{n} \cdot \vec{r}'$$

<sup>4</sup>Si ricordi che  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

<sup>5</sup>Con *stato imperturbato* qui noi intendiamo lo stato libero  $|\Phi\rangle$  a cui tende l'autostato  $|\Psi\rangle$  dell'hamiltoniana completa, quando il potenziale di interazione  $V$  tende a zero.

<sup>6</sup>Per una descrizione rigorosa del processo di scattering, occorrerebbe rappresentare lo stato iniziale non come un'onda piana ma come un pacchetto d'onde. In questo caso, l'impulso dell'onda incidente non è esattamente definito, ma avrà una indeterminazione  $\Delta p \approx \hbar/R$ , dove  $R$  fornisce le dimensioni lineari del pacchetto. In tutti i casi in cui gli esperimenti si realizzano con fasci collimati di particelle, la dimensione  $R$  del pacchetto d'onda supera largamente quella dei sistemi atomici ( $R \gg r_0$ ).

La sostituzione del pacchetto con l'onda piana è giustificato finché l'indeterminazione sull'impulso del pacchetto è molto piccola rispetto alla variazione di impulso dovuta all'azione del potenziale che produce lo scattering.

dove  $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$  è il versore che punta dal centro di scattering al punto di osservazione. Definiamo adesso  $\vec{k}' \equiv k \vec{n}$ . Evidentemente  $\vec{k}'$  è il vettore d'onda di una particella che ha la stessa energia  $E$  di quella incidente ( $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$ ), ma si propaga dalla regione di scattering verso il punto di osservazione. In questa approssimazione (primo ordine perturbativo) si ha

$$e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{\pm ikr} e^{\mp i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} \quad (2.2.36)$$

per cui, nella *regione asintotica*, avremo che l'equazione (2.2.34) si riduce a

$$\Psi^\pm(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int d^3r' e^{\mp i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \Psi^\pm(\vec{r}') \quad (2.2.37)$$

Il primo termine al secondo membro è l'onda piana incidente mentre il secondo termine rappresenta un'onda sferica centrata nella regione dello scattering: il segno positivo corrisponde a un'onda sferica uscente, mentre il segno negativo corrisponde a un'onda sferica entrante.

E' ovvio adesso come si debba risolvere l'ambiguità del segno !

Occorre scegliere la soluzione con il segno positivo perchè lo scattering produrrà, ragionevolmente, onde emergenti dalla zona dove avviene l'urto e non convergenti verso di esso.

Riscriviamo allora il risultato nella forma seguente

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\vec{k}, \vec{k}') \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (2.2.38)$$

dove abbiamo posto

$$f(\vec{k}, \vec{k}') \equiv -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}') = -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | H_1 | \Psi \rangle \quad (2.2.39)$$

Veniamo ora alla sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  del processo.

La prima cosa che dobbiamo fare è quella di valutare l'espressione del flusso associato all'onda incidente. Ricordiamo a questo proposito che, dalla Meccanica Quantistica elementare<sup>7</sup> è

$$\vec{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) \quad (2.2.40)$$

<sup>7</sup>Risulta infatti

$$\frac{d}{dt} \int_V |\psi|^2 dv = \int_V dv \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{i}{\hbar} \int_V dv [\psi (H^* \psi^*) - \psi^* (H \psi)]$$

ma  $H = H^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})$ , quindi

$$\frac{d}{dt} \int_V |\psi|^2 dv = \frac{i}{\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \right) \int_V dv [\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi] = -i \frac{\hbar}{2m} \int_V dv [\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi]$$

Risulta dunque che, per quanto riguarda la funzione d'onda incidente piana  $\left(\Phi(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}}\right)$ , risulta

$$\begin{aligned}\vec{J}_{inc} &= \frac{i\hbar}{2m} \left[ \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} (-i\vec{k}) \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} (i\vec{k}) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \right] = \frac{i\hbar}{2m(2\pi)^3} (-2i\vec{k}) \\ &= \frac{\hbar\vec{k}}{(2\pi)^3 m}\end{aligned}\quad (2.2.41)$$

mentre, per quanto riguarda l'onda sferica  $\left(\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\vec{k}', \vec{k}) \frac{e^{ikr}}{r}\right)$ , si ha<sup>8</sup> (limitandoci alla sola componente utile che ci interessa, ovvero alla componente radiale, è  $\vec{\nabla} = \vec{n} \frac{d}{dr}$ )...

$$\begin{aligned}\vec{J}_{sc} &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{|f(\vec{k}', \vec{k})|^2}{(2\pi)^3} \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{-ikr}}{r^2} (-ikr - 1) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \right] \vec{n} = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{|f(\vec{k}', \vec{k})|^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{r^3} [-2ikr] \vec{n} = \frac{\hbar}{m} \frac{|f(\vec{k}', \vec{k})|^2}{(2\pi)^3} \frac{k}{r^2} \vec{n}\end{aligned}\quad (2.2.42)$$

D'altronde, la sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , moltiplicata per il flusso incidente<sup>9</sup>, fornisce, per definizione, il *rate* di particelle scatterate che emergono dalla zona d'urto nell'angolo solido  $d\Omega$ , cioè

$$\left(\vec{J}_{inc} \cdot \frac{\vec{k}}{k}\right) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = |\vec{J}_{inc}| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = (\vec{J}_{sc} \cdot \vec{n}) r^2 d\Omega \quad (2.2.43)$$

D'altronde  $\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi \equiv \text{div}(\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$ , quindi

$$\frac{d}{dt} \int_V |\psi|^2 dv = \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int_V dv \text{div}(\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$$

Ponendo allora  $\vec{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$ , abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_V |\psi|^2 dv = - \int_V dv \text{div}(\vec{J}) \Rightarrow \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0$$

ovvero  $\vec{J}$  rappresenta la corrente di probabilità.

<sup>8</sup>In realtà, la (2.2.42) non è l'espressione completa della corrente generata dall'onda scatterata, bensì la sua componente radiale, cioè l'unica componente in grado di produrre flusso attraverso la superficie orientata  $d\vec{S} = r^2 d\Omega \vec{n}$ . L'espressione completa contiene, infatti, anche termini che dipendono dalle derivate rispetto all'angolo polare  $\theta$  e, eventualmente, anche dall'angolo azimutale  $\phi$  (per esempio, se il potenziale di scattering non è a simmetria sferica o cilindrica). Questi termini, però, sono entrambi ortogonali al versore  $\vec{n} \equiv \vec{r}/r = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ , essendo proporzionali, rispettivamente, a

$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta), \quad \vec{e}_\phi = (\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

<sup>9</sup>Si ricordi che  $\vec{J}$  è una corrente, dunque, per ottenere il numero di particelle per unità di tempo, occorre valutarne il flusso attraverso la superficie orientata di interesse.

Dunque

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{(\vec{J}_{sc} \cdot \vec{n}) r^2 d\Omega}{|\vec{J}_{inc}|} = \frac{\frac{\hbar}{m} \frac{|f|^2}{(2\pi)^3} \frac{k}{r^2}}{\frac{\hbar k}{m(2\pi)^3}} r^2 d\Omega = |f|^2 d\Omega$$

e quindi, finalmente si ha

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{k}, \vec{k}')|^2 \quad (2.2.44)$$

Prima di concludere l'argomento, vale la pena di osservare quanto segue. E' evidente che, se non ci fosse il potenziale di scattering, non esisterebbe alcun flusso di particelle se non nella direzione individuata dal vettore  $\vec{k}$ , che descrive l'impulso incidente, cioè *in avanti*.

In presenza del potenziale, alcune particelle saranno scatterate in altre direzioni e dunque un rivelatore che fosse sensibile solo a quelle *in avanti* dovrebbe riceverne un numero inferiore, stante la conservazione del loro numero.

Per come è strutturata la soluzione (2.2.38), la riduzione della corrente di probabilità in avanti potrà realizzarsi solo attraverso l'interferenza dell'onda incidente  $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  con quella scatterata  $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$ .

Questo si deve tradurre in un vincolo sull'ampiezza di scattering che descrive il processo stesso: questo vincolo è il *teorema ottico*, che avremo modo, in seguito, di dimostrare in tutta la sua generalità.

Al momento, possiamo comunque già vederne un'applicazione diretta nel caso particolare in cui, per esempio, l'ampiezza di scattering  $f(\theta, \phi) \equiv a$  sia indipendente, oltreché dall'angolo azimutale  $\phi$ , anche dall'angolo polare  $\theta$ , ovvero la sezione d'urto differenziale del processo, come nel caso dello scattering da una sfera rigida, sia indipendente dalle variabili angolari:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 = |a|^2 \quad (2.2.45)$$

Abbiamo visto che lo stato stazionario di scattering ha una dipendenza spaziale data da

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{a}{r} e^{ikr} \right\} \quad (2.2.46)$$

D'altronde, poiché la  $\psi$  di cui sopra descrive uno stato stazionario, la sua dipendenza temporale è tale che

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\vec{r}) \quad (2.2.47)$$

e dunque la  $|\Psi|^2 \equiv |\psi|^2$  risulta ovviamente indipendente dal tempo.

Ne segue quindi che l'equazione di continuità

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = 0 \quad (2.2.48)$$

implica che la corrente di probabilità

$$\vec{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) \quad (2.2.49)$$

valutata a partire dalla  $\psi$ , debba avere divergenza nulla, ovvero

$$\text{div } \vec{J} = 0 \quad (2.2.50)$$

Ne segue allora che, per il teorema di Gauss, data comunque una superficie chiusa  $\Sigma$  che racchiude un volume  $V$ , sarà

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_V \text{div } \vec{J} \, dv = 0 \quad (2.2.51)$$

Iniziamo, dunque, a valutare l'espressione della densità di corrente di probabilità  $\vec{J}$  che deriva dalla funzione d'onda (2.2.46).

Indicando al solito con  $\vec{n}$  il versore  $\vec{r}/r$ , risulta

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{i\hbar}{2m(2\pi)^3} \left\{ \left( e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{a}{r} e^{ikr} \right) \left( -i\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{a^*}{r^2} \vec{n} (-ikr - 1) e^{-ikr} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{a^*}{r} e^{-ikr} \right) \left( i\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{a}{r^2} \vec{n} (ikr - 1) e^{ikr} \right) \right\} = \\ &= \frac{i\hbar}{2m(2\pi)^3} \left\{ -i\vec{k} + \frac{a^*}{r^2} \vec{n} (-ikr - 1) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-ikr} - i\vec{k} \frac{a}{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{ikr} + \frac{|a|^2}{r^3} \vec{n} (-ikr - 1) \right. \\ &\quad \left. - i\vec{k} - \frac{a}{r^2} \vec{n} (ikr - 1) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{ikr} - i\vec{k} \frac{a^*}{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-ikr} - \frac{|a|^2}{r^3} \vec{n} (ikr - 1) \right\} = \\ &= \frac{i\hbar}{2m(2\pi)^3} \left\{ -2i\vec{k} - 2ik\vec{n} \frac{|a|^2}{r^2} + a^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-ikr} \left[ \frac{\vec{n}}{r^2} (-ikr - 1) - i\frac{\vec{k}}{r} \right] + \right. \\ &\quad \left. + a e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{ikr} \left[ \frac{\vec{n}}{r^2} (-ikr + 1) - i\frac{\vec{k}}{r} \right] \right\} \quad (2.2.52) \end{aligned}$$

Imponiamo ora, vista la (2.2.51), che il flusso di  $\vec{J}$  attraverso una generica superficie sferica di raggio  $R$ , centrata nel centro di scattering, sia identicamente nullo. Scrivendo l'elemento di superficie orientato come

$$\vec{ds} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{n} \equiv R^2 \, d\Omega \, \vec{n} \quad (2.2.53)$$

e ricordando che  $\vec{k} \cdot \vec{n} = \cos\theta$ , abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int (-2i) R^2 \cos\theta \, d\Omega + \int (-2i) k |a|^2 \, d\Omega + \\ &\quad + a^* e^{-ikR} \int e^{ikR \cos\theta} [(-ikR - 1) - ikR \cos\theta] \, d\Omega + \\ &\quad + a e^{ikR} \int e^{-ikR \cos\theta} [(-ikR + 1) - ikR \cos\theta] \, d\Omega \quad (2.2.54) \end{aligned}$$

Il primo termine è ovviamente nullo (essendo  $\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = 0$ ), rappresentando il flusso dell'onda piana imperturbata attraverso la superficie sferica scelta. Il secondo termine, invece, è legato al flusso della sola parte della funzione d'onda che descrive lo stato scatterato e vale evidentemente

$$-2ik |a|^2 4\pi = -2ik \sigma_T \quad (2.2.55)$$

dove si è usato il fatto che la sezione d'urto totale del processo vale appunto

$$\sigma_T = \int d\sigma = \int |a|^2 d\Omega = 4\pi |a|^2 \quad (2.2.56)$$

Come si vede (e come, d'altronde, ci aspettavamo ...), sono i termini di interferenza fra l'onda piana e quella sferica a dover compensare per il flusso delle particelle deviate dalla direzione incidente a causa del processo d'urto. Essendo

$$\int e^{ikR \cos\theta} d\Omega = 4\pi \frac{\sin kR}{kR} \quad (2.2.57)$$

$$\int e^{ikR \cos\theta} \cos\theta d\Omega = 4\pi i \frac{\sin kR - (kR) \cos kR}{(kR)^2} \quad (2.2.58)$$

dalla (2.2.54) risulta che deve essere quindi

$$\begin{aligned} 0 &= -2ik \sigma_T + 4\pi a^* e^{-ikR} \left[ (-ikR - 1) \frac{\sin kR}{kR} - ikR i \frac{\sin kR - (kR) \cos kR}{(kR)^2} \right] + \\ &+ 4\pi a e^{ikR} \left[ (-ikR + 1) \frac{\sin kR}{kR} - ikR i \frac{-\sin kR + (kR) \cos kR}{(kR)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

ovvero

$$\begin{aligned} 2ik \sigma_T &= 4\pi a^* e^{-ikR} [-i \sin kR - \cos kR] + 4\pi a e^{ikR} [-i \sin kR + \cos kR] = \\ &= -4\pi a^* + 4\pi a = 4\pi (a - a^*) = 8\pi i \operatorname{Im}(a) \end{aligned} \quad (2.2.60)$$

e dunque, finalmente, che deve risultare

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}(a) \quad (2.2.61)$$

la quale è l'espressione del teorema ottico ( $\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}(f(\theta = 0))$ ) nel caso presente. Ne segue in particolare che l'ampiezza di scattering in avanti *non* potrà *mai* essere puramente reale!

E' infatti proprio attraverso la parte immaginaria di  $f(\theta = 0)$  che si realizza quell'interferenza dell'onda scatterata con quella incidente, la quale riduce la corrente di probabilità in avanti di quello che serve per render conto dello scattering agli altri angoli.

## 2.3 Approssimazione di Born

Ripartiamo dall'ampiezza di scattering  $f$  che abbiamo visto essere data dall'espressione

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}') \quad (2.3.62)$$

Essa, come si vede, oltre a dipendere dal potenziale di scattering che immaginiamo di conoscere, dipende anche dalla soluzione  $\Psi$ , che invece non conosciamo.

Supponiamo che lo scattering non sia particolarmente forte (e vedremo tra poco che cosa significhi questa affermazione). E' allora ragionevole supporre che  $\Psi$  non differisca troppo dalla funzione d'onda incidente.

In questo caso, sostituendo nell'integrale la soluzione esatta ma ignota  $\Psi$  con la sua soluzione approssimata rappresentata dall'onda incidente, cioè  $\Psi \rightarrow \Phi = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}}$ , otteniamo l'approssimazione di Born (al primo ordine) dell'ampiezza di scattering

$$\begin{aligned} f(\vec{k}, \vec{k}')_{Born} &= -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\vec{r}') \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} = \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' e^{i\vec{r}' \cdot (\vec{k} - \vec{k}')} V(\vec{r}') \end{aligned} \quad (2.3.63)$$



Figura 2.4: Max Born (1882-1970)

Come si vede, questa è semplicemente proporzionale alla trasformata di Fourier del potenziale, valutata al *momento trasferito*<sup>10</sup> dalla particella al



Figura 2.5: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

centro di scattering

$$\vec{q} \equiv \vec{k} - \vec{k}' \quad (2.3.64)$$

Nel caso in cui  $V(\vec{r})$  sia sfericamente simmetrico, allora per ogni fissato  $\vec{q}$  si possono scegliere coordinate polari sferiche in modo che  $\vec{q}$  sia allineato con l'asse polare  $z$ , e dunque

$$f(\vec{k}, \vec{k}')_{Born} = f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dr r^2 V(r) \sin\theta d\theta d\phi e^{iqr \cos\theta} \quad (2.3.65)$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} f(\vec{q})_B &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dr r^2 V(r) \sin\theta d\theta d\phi e^{iqr \cos\theta} = \\ &= -\frac{m}{\hbar^2} \int dr r^2 V(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} = \\ &= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty r dr V(r) \sin(qr) \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

Si osservi che l'ampiezza di scattering, in questo caso, essendo il potenziale a simmetria sferica, dipende solo dal modulo  $q$  del momento trasferito, il

<sup>10</sup>In realtà, il momento trasferito nell'interazione non è tanto  $q$  quanto, piuttosto,  $\hbar q$ , essendo  $\hbar\vec{k}$  l'impulso. Quando si parla di  $q$  come del momento trasferito, vuol dire che stiamo anche assumendo  $\hbar = 1$ .

quale, a sua volta, è legato all'angolo (di scattering)  $\theta$  fra i vettori  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$  (aventi lo stesso modulo ...) dalla relazione

$$\begin{aligned} q^2 &= |\vec{k} - \vec{k}'|^2 = 2k^2 (1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2(\theta/2) \\ \Rightarrow q &= |\vec{k} - \vec{k}'| = 2k \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (2.3.67)$$

Si osservi anche che l'ampiezza di scattering  $f(\vec{q})$  che, in approssimazione di Born, è data dalla (2.3.66), risulta essere una funzione reale: ritorneremo in seguito su questo punto.

Come applicazione, vediamo cosa accade quando il potenziale di scattering è il potenziale di Yukawa, ovvero quando  $V(r) = U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}$  dove  $\frac{1}{\mu}$  è il range del potenziale stesso. Risulta



Figura 2.6: Hideki Yukawa (1907-1981)

$$\begin{aligned} f(q)_B &= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int r dr V(r) \sin(qr) = -\frac{2m}{q\hbar^2} \int r dr U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} \sin(qr) \\ &= -\frac{2mU_0}{q\hbar^2} \int dr e^{-\mu r} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2i} = -\frac{2mU_0}{q\hbar^2} \frac{1}{2i} \left[ \frac{-1}{-\mu + iq} - \frac{-1}{-\mu - iq} \right] \\ &= -\frac{2mU_0}{q\hbar^2} \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{\mu - iq} - \frac{1}{\mu + iq} \right] = -\frac{2mU_0}{q\hbar^2} \frac{1}{2i} \left[ \frac{2iq}{\mu^2 + q^2} \right] = \\ &= -\frac{2mU_0}{\hbar^2} \frac{1}{\mu^2 + q^2} \end{aligned} \quad (2.3.68)$$

Quanto alla sezione d'urto, abbiamo dunque

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_B = |f(q)_B|^2 = \frac{4m^2 U_0^2}{\hbar^4} \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2} \quad (2.3.69)$$

ovvero, ricordando la (2.3.67),

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_B = \left( \frac{2mU_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{[\mu^2 + 2k^2 (1 - \cos \theta)]^2} \quad (2.3.70)$$

Come si vede, questa sezione d'urto differenziale è comunque limitata<sup>11</sup>, per cui anche la sezione d'urto totale  $\sigma$  risulta finita. Essa vale infatti

$$\sigma_B = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \left( \frac{2mU_0}{\hbar^2} \right)^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{[\mu^2 + 2k^2(1 - \cos\theta)]^2}$$

Siccome l'integrale in questione vale

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{[\mu^2 + 2k^2(1 - \cos\theta)]^2} = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{[\mu^2 + 2k^2(1 - x)]^2} = \\ & = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{[\mu^2 + 2k^2 - 2k^2x]^2} = \frac{1}{2k^2} \left[ \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2 + 4k^2} \right] = \frac{2}{\mu^2(\mu^2 + 4k^2)} \end{aligned}$$

alla fine, si ha

$$\sigma_B = 2\pi \left( \frac{2mU_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{2}{\mu^2(\mu^2 + 4k^2)} \quad (2.3.71)$$

che, ovviamente, se  $\mu \neq 0$ , è una quantità finita<sup>12</sup>

Evidentemente poi, se  $\mu \rightarrow 0$  e  $U_0 = Ze^2$ , ritroviamo il potenziale di Coulomb fra una carica  $e$  e una carica  $Ze$ . In questo caso, anche secondo la MQ, la sezione d'urto totale del processo diverge, mentre per quella differenziale, sempre in approssimazione di Born, otteniamo

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_B = \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{q^4} = \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{4k^4(1 - \cos\theta)^2} \quad (2.3.72)$$

ovvero, tenendo conto che  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_B &= \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{4k^4(1 - \cos\theta)^2} = \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{4 \frac{4m^2E^2}{\hbar^4} (1 - \cos\theta)^2} \\ &= \left( \frac{Ze^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} \end{aligned} \quad (2.3.73)$$

che coincide con l'espressione classica della sezione d'urto differenziale Rutherford, caratterizzata appunto dalla dipendenza  $q^{-4}$ .

Comunque, al di là di aver ritrovato il risultato classico nel caso coulombiano, ricordiamoci che, in generale, affinché l'approssimazione di Born possa essere ritenuta valida, occorre che la differenza fra la funzione d'onda  $\Psi(\vec{r})$  e la funzione d'onda imperturbata  $\Phi(\vec{r})$  sia piccola rispetto a quest'ultima,

<sup>11</sup>Essa, come funzione di  $\cos\theta$ , va da un minimo di  $\left( \frac{2mU_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{[\mu^2 + 4k^2]^2}$  a un massimo di  $\left( \frac{2mU_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{\mu^4}$

<sup>12</sup>Ricordiamo che, classicamente, la sezione d'urto totale anche nel caso del potenziale di Yukawa, sarebbe comunque infinita poiché il supporto del potenziale *non* è compatto ...

almeno laddove il potenziale di scattering è presente in modo sensibile, cioè risulti

$$|\Psi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r})| \ll |\Psi(\vec{r})| \quad (2.3.74)$$

laddove  $V(\vec{r})$  è sensibilmente diverso da zero.

Affinchè l'approssimazione sia autoconsistente, occorre evidentemente che la condizione di sopra sia soddisfatta quando il membro di sinistra venga valutato, appunto, in approssimazione di Born. Dalla (2.2.34) abbiamo quindi che deve essere

$$|\Psi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r})|_B = \frac{2m}{\hbar^2} \left| \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \Phi(\vec{r}') \right| \ll |\Phi(\vec{r})| \quad (2.3.75)$$

e dunque la condizione (2.3.74), tenendo conto che

$$\Phi(\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \quad (2.3.76)$$

può essere riscritta come

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \right| \ll 1 \quad (2.3.77)$$

Come si è detto, questa condizione deve valere laddove il potenziale è sensibilmente diverso da zero, ovvero nell'intorno di  $|\vec{r}'| \approx 0$ , laddove  $V$  assume, usualmente, il suo valore massimo ...

Imponendo la (2.3.77) per  $\vec{r} = 0$ , si ottiene la condizione di Born (necessaria, ma non sufficiente ...)

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3r' \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \right| \ll 1 \quad (2.3.78)$$

che, nel caso in cui  $V$  sia sfericamente simmetrico, essendo

$$\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \sin\theta d\theta d\phi = \int e^{ikr' \cos\theta} \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi \frac{e^{ikr'} - e^{-ikr'}}{ikr'} = 4\pi \frac{\sin kr'}{kr'}$$

diviene (per semplicità, indichiamo da ora in avanti con  $r$  la variabile di integrazione, precedentemente indicata con  $r'$ )

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{ikr}}{r} V(r) \frac{\sin kr}{kr} \right| \ll 1 \quad (2.3.79)$$

Osserviamo adesso, in generale, che se il range  $a$  del potenziale di scattering  $V$  è tale che (limite di basse energie)

$$ak \ll 1$$

allora nell'integrando della (2.3.79) potremo approssimare  $e^{ikr} \frac{\sin kr}{kr}$  con 1, per cui la condizione di Born diviene semplicemente

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty r dr V(r) \right| \ll 1 \quad (2.3.80)$$

e quindi, se definiamo  $V_0$  in modo tale che risulti

$$\int_0^\infty r dr V(r) \equiv V_0 a^2 \quad (2.3.81)$$

allora la condizione di Born, nel limite di bassa energia, diviene

$$\frac{2m}{\hbar^2} |V_0| a^2 \ll 1 \quad (2.3.82)$$

Nel limite di alte energie, ovvero nel limite di alti valori di  $k$ , se riscriviamo la (2.3.79) nella forma seguente

$$\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k} \left| \int_0^\infty dr e^{ikr} \sin kr V(r) \right| \ll 1 \quad (2.3.83)$$

allora, se esiste l'integrale

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^\infty dr |V(r)| \equiv \bar{V}_0 a \quad (2.3.84)$$

possiamo concludere che, visto che la condizione di Born è tale per cui<sup>13</sup>

$$\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k} \left| \int_0^\infty dr e^{ikr} \sin kr V(r) \right| \leq \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k} \mathcal{I} = \frac{2m}{\hbar^2} |\bar{V}_0| a^2 \frac{1}{ak} \quad (2.3.85)$$

certamente, da un certo  $k \geq k_0$  in poi, la condizione di Born sarà soddisfatta, qualunque sia il range della potenziale (purchè finito).

---

<sup>13</sup>Infatti risulta

$$\left| \int_0^\infty dr e^{ikr} \sin kr V(r) \right| \leq \int_0^\infty dr |e^{ikr} \sin kr V(r)| = \int_0^\infty dr |\sin kr| |V(r)| \leq \int_0^\infty dr |V(r)|$$

Come applicazione, riprendiamo il caso del potenziale di Yukawa

$$V(r) = U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (2.3.86)$$

Essendo  $1/\mu$  il suo range, il limite di bassa energia significa evidentemente

$$\frac{k}{\mu} \ll 1$$

e in questo caso, essendo

$$\int_0^\infty r V(r) dr = \int_0^\infty dr U_0 e^{-\mu r} = \frac{U_0}{\mu}$$

la condizione di Born (2.3.82), nel limite di bassa energia, diventa<sup>14</sup> semplicemente

$$\frac{2m|U_0|}{\hbar^2} \frac{1}{\mu} \ll 1 \quad (2.3.87)$$

Se volessimo ora considerare il limite di alta energia, alla luce di quanto detto sopra, ci troveremmo in difficoltà in quanto l'integrale (2.3.84)

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^\infty dr |V(r)| = \int_0^\infty dr U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (2.3.88)$$

non esiste. D'altronde la (2.3.85) è stata ottenuta maggiorando il modulo della funzione integranda  $|e^{ikr} \sin kr V(r)|$  direttamente con  $|V(r)|$ , e questa maggiorazione è in realtà troppo "violenta" in prossimità di  $r = 0$ , dove risulta piuttosto

$$|e^{ikr} \sin kr V(r)| \approx kr |V(r)| \quad (2.3.89)$$

Questo fatto non ha sostanziali conseguenze se il potenziale si mantiene comunque limitato, ma, nel caso diverga per  $r \rightarrow 0$ , come nel caso del potenziale di Yukawa, esso diventa cruciale.

Per questa ragione è opportuno dunque ripartire dalla condizione generale (2.3.79),

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{ikr}}{r} V(r) \frac{\sin kr}{kr} \right| \ll 1 \quad (2.3.90)$$

che, nel caso in esame, diventa,

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{ikr}}{r} U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\sin kr}{kr} \right| \ll 1 \quad (2.3.91)$$

<sup>14</sup>Si noti che, avendo identificato il range del potenziale con  $1/\mu$ , allora la definizione (2.3.81) di  $V_0$  implica che  $V_0 = U_0/a = \mu U_0$  e dunque c'è equivalenza fra la (2.3.82) e la (2.3.87).

e quindi studiare l'integrale che compare, in modulo, nell'espressione precedente, ovvero

$$Int = \int_0^\infty dr e^{ikr} U_0 e^{-\mu r} \frac{\sin kr}{kr} \quad (2.3.92)$$

Con la sostituzione  $x = kr$ , se definiamo anche  $\alpha = \mu/k$ , risulta

$$Int = \frac{U_0}{k} \int_0^\infty dx e^{ix} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \quad (2.3.93)$$

Ma

$$\frac{e^{ix} \sin x}{x} = i \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin x \cos x}{x} = i \frac{1 - \cos 2x}{2x} + \frac{\sin 2x}{2x}$$

quindi

$$\begin{aligned} Int &= \frac{U_0}{k} \int_0^\infty dx e^{-\alpha x} \left[ \frac{\sin 2x}{2x} + i \frac{1 - \cos 2x}{2x} \right] = \\ &= \frac{U_0}{2k} \int_0^\infty dy e^{-\alpha \frac{y}{2}} \frac{\sin y}{y} + i \frac{U_0}{2k} \int_0^\infty dy e^{-\alpha \frac{y}{2}} \frac{1 - \cos y}{y} \end{aligned} \quad (2.3.94)$$

D'altronde, se  $a > 0$ , risulta

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy e^{-ay} \frac{\sin y}{y} &= \frac{\pi}{2} - \arctan a \\ \int_0^\infty dy e^{-ay} \frac{1 - \cos y}{y} &= \ln \sqrt{\frac{1 + a^2}{a^2}} \end{aligned}$$

quindi, quanto alla condizione di Born, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dr e^{ikr} U_0 e^{-\mu r} \frac{\sin kr}{kr} \right| &= \\ \frac{m|U_0|}{k \hbar^2} \left| \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\alpha}{2} \right] + i \left[ \ln \sqrt{\frac{4 + \alpha^2}{\alpha^2}} \right] \right| &<< 1 \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

dove, come detto sopra  $\alpha \equiv \frac{\mu}{k}$ .

Siccome la quantità da considerare per stabilire o meno la validità della approssimazione di Born è complessa, affinché la (2.3.95) possa essere soddisfatta, è necessario, ovviamente che sia la sua parte reale come quella immaginaria soddisfino le disequazioni seguenti

$$\frac{m|U_0|}{k \hbar^2} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{m|U_0|}{k \hbar^2} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{2k} \right| << 1 \quad (2.3.96)$$

$$\frac{m|U_0|}{k \hbar^2} \left| \ln \sqrt{\frac{4 + \alpha^2}{\alpha^2}} \right| = \frac{m|U_0|}{k \hbar^2} \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2 + 4k^2}{\mu^2} << 1 \quad (2.3.97)$$

Consideriamo allora il limite di bassa energia, ovvero il limite per cui

$$0 < \frac{k}{\mu} \ll 1$$

Osserviamo che, posto

$$f(x) = \arctan \frac{1}{2x}$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

ed è

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2x})^2} \frac{-1}{2x^2} = -\frac{2}{1 + 4x^2}$$

dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{df}{dx} = -2$$

e perciò, intorno a  $x \approx 0^+$ , risulterà

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - 2x + \dots \mathcal{O}(x^2)$$

per cui l'espressione che compare nella (2.3.96), per  $\frac{k}{\mu} \ll 1$ , diventa

$$\frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{2k} \right| \approx \frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\frac{k}{\mu} \right| = \frac{2m|U_0|}{k\hbar^2} \frac{k}{\mu} = \frac{2m|U_0|}{\mu\hbar^2} \quad (2.3.98)$$

mentre per quanto riguarda quella che entra nella (2.3.97) si ha

$$\frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2 + 4k^2}{\mu^2} \approx \frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \frac{1}{2} \frac{4k^2}{\mu^2} = \frac{2m|U_0|}{\mu\hbar^2} \frac{k}{\mu} \quad (2.3.99)$$

ed evidentemente, visto che queste espressioni sono state ottenute nella ipotesi che  $\frac{k}{\mu} \ll 1$ , il contributo (2.3.99), proveniente dalla parte immaginaria, è trascurabile rispetto al contributo (2.3.98) relativo alla parte reale, per cui, in definitiva, nel limite di bassa energia, la condizione di Born per il potenziale di Yukawa diventa

$$\frac{2m|U_0|}{\mu\hbar^2} \ll 1 \quad (2.3.100)$$

in accordo con il risultato (2.3.87) precedentemente ottenuto.

Vediamo ora che succede nel limite di alta energia, cioè quando

$$\frac{k}{\mu} \gg 1$$

ovvero nel limite in cui  $\alpha = \frac{\mu}{k} \rightarrow 0$ .

In questo caso, per quanto riguarda il contributo (2.3.96) proveniente dalla parte reale, si ha

$$\frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{2k} \right| \approx \frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \frac{\pi}{2} \quad (2.3.101)$$

mentre, circa il contributo (2.3.97) dalla parte immaginaria, si ha

$$\frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2 + 4k^2}{\mu^2} \approx \frac{m|U_0|}{2k\hbar^2} \ln \frac{4k^2}{\mu^2} = \frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \ln \frac{2k}{\mu} \quad (2.3.102)$$

che diventerà dominante sul precedente per alti valori di  $k$ .

Nel limite di alta energia, dunque, la condizione di validità dell'approssimazione di Born per il potenziale di Yukawa è

$$\frac{m|U_0|}{k\hbar^2} \ln \frac{2k}{\mu} = \frac{2m|U_0|}{\mu\hbar^2} \frac{\ln \frac{2k}{\mu}}{\frac{2k}{\mu}} \ll 1 \quad (2.3.103)$$

e siccome la funzione  $\frac{\ln x}{x}$  è tale che, per  $x > 1$  essa è comunque minore di 1, la condizione di Born è certamente soddisfatta per  $k \gg \mu$  se

$$\frac{2m|U_0|}{\mu\hbar^2} \ll 1 \quad (2.3.104)$$

che è la stessa condizione trovata nel limite di bassa energia.

Si noti, comunque, che ad alta energia la condizione (2.3.103) è meno stringente della (2.3.104) proprio perchè la funzione  $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$  e dunque va nel verso di rafforzare la validità dell'approssimazione.

E che cosa si può dire sul potenziale coulombiano ?

Sappiamo che esso si ottiene da quello di Yukawa nel limite in cui  $\mu \rightarrow 0$ : è facile convincersi che, anche nel caso più favorevole di alta energia, la condizione di validità dell'approssimazione di Born *non* è mai soddisfatta!

Alla stessa conclusione si giunge anche direttamente, infatti, se poniamo (supporremo, senza perdita di generalità, che  $Z > 0$ )

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r}$$

allora la (2.3.90) diventa

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{ikr}}{r} \frac{Ze^2}{r} \frac{\sin kr}{kr} \right| = \frac{2mZe^2}{k\hbar^2} k \left| \int_0^\infty dr e^{ikr} \frac{\sin kr}{kr} \right| \ll 1 \quad (2.3.105)$$

ma questa condizione *non* può essere mai soddisfatta poiché l'integrale è divergente, essendo

$$\begin{aligned} k \int_0^\infty dr e^{ikr} \frac{\sin kr}{kr} &= \int_0^\infty dx e^{ix} \frac{\sin x}{x} = i \int_0^\infty dx \frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^\infty dx \frac{\sin x \cos x}{x} = \\ &= i \int_0^\infty dx \frac{1 - \cos 2x}{2x} + \int_0^\infty dx \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{i}{2} \int_0^\infty dy \frac{1 - \cos y}{y} + \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \frac{\sin y}{y} \end{aligned}$$

e mentre la funzione *SineIntegral*

$$Si(z) \equiv \int_0^z dt \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2} - F(z) \cos z - G(z) \sin z \quad (2.3.106)$$

è limitata per  $z \rightarrow \infty$  poichè le funzioni  $F(z)$  e  $G(z)$  si annullano per  $z \rightarrow \infty$ , l'altro integrale diverge logicamente, essendo tale per cui

$$\int_0^z dt \frac{1 - \cos t}{t} = \gamma + \ln z + Ci(z) \quad (2.3.107)$$

dove  $\gamma$  è la costante di Eulero-Mascheroni  $\gamma = 0.5772156649\dots$  mentre  $Ci(z)$  è la funzione *CosineIntegral*, definita da

$$Ci(z) \equiv - \int_z^\infty dt \frac{\cos t}{t} \quad (2.3.108)$$

anch'essa legata alle funzioni  $F$  e  $G$  precedentemente introdotte dalla relazione

$$Ci(z) = F(z) \sin z - G(z) \cos z \quad (2.3.109)$$

e quindi nulla per  $z \rightarrow \infty$ , come è ovvio che sia, data la sua definizione (2.3.108).

## 2.4 Il fattore di forma

Come abbiamo visto, sia classicamente come al primo ordine nello sviluppo perturbativo di Born, nel caso di una particella non relativistica di massa  $m$  e carica  $e$  che "urti" contro un potenziale coulombiano generato da una carica puntiforme  $Ze$  ferma e di massa infinita, risulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2} = \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{q^4} \quad (2.4.110)$$

dove  $\vec{q} \equiv \vec{k} - \vec{k}'$  è il momento trasferito (in unità  $\hbar$ ) al centro scatteratore

$$q^2 = 4k^2 \sin^2 \theta/2 \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2.4.111)$$

ed  $E$  è l'energia cinetica della particella urtante.

Ma supponiamo adesso che il centro di scattering non sia costituito da una carica puntiforme  $Ze$ , bensì abbia una struttura, descritta dalla distribuzione di carica  $\rho(\vec{r})$ , che assumeremo normalizzata in modo che risulti<sup>15</sup>

$$dq = Ze \rho(\vec{r}) d^3r \quad (2.4.113)$$

$$\int d^3r \rho(\vec{r}) = 1 \quad (2.4.114)$$

Supporremo ancora che  $\rho$  abbia simmetria sferica, per cui anche il potenziale  $V(\vec{r})$  da essa generato continuerà ad avere la stessa simmetria.

Abbiamo visto che, in approssimazione di Born al primo ordine, in generale abbiamo che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2, \quad \text{dove} \quad f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.115)$$

In questa approssimazione, l'ampiezza di scattering al momento trasferito  $\vec{q}$  risulta essere proporzionale alla trasformata di Fourier del potenziale di scattering, calcolata per quel momento trasferito.

Siccome la distribuzione di carica non è più puntiforme, avremo adesso

$$V(\vec{r}) = Ze^2 \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{r} - \vec{y}|} \quad (2.4.116)$$

<sup>15</sup>Nel caso in cui la carica totale associata alla distribuzione sia nulla, evidentemente non potremo più imporre la (2.4.114). In quel caso, normalizzeremo in modo che  $\rho(\vec{r})$  abbia comunque le dimensioni dell'inverso di un volume, ponendo l'elemento di carica  $dq$  presente nel volumetto  $d^3r$  centrato in  $\vec{r}$ , pari a  $dq = e \rho(\vec{r}) d^3r$ . Evidentemente, in questo caso avremo

$$\int d^3r \rho(\vec{r}) = 0 \quad (2.4.112)$$

e questa quantità, come la (2.4.114), ha le dimensioni di un numero puro.

che può essere visto come la convoluzione della densità di carica con il potenziale coulombiano prodotto da una carica puntiforme. Nell'ampiezza di scattering, questo si tradurrà nel fatto che, poichè la trasformata di Fourier di una convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier dei fattori,  $f(\vec{q})$  sarà esprimibile come prodotto della trasformata di Fourier della distribuzione di carica per quella del potenziale coulombiano, che abbiamo visto essere proporzionale a  $q^{-2}$ .

Ma vediamo in dettaglio. Valutiamo dunque

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.117)$$

Occupiamoci dell'integrale: si ha

$$\int d^3r V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = Ze^2 \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{r}-\vec{y}|} \quad (2.4.118)$$

D'altronde, se al posto della variabile  $\vec{r}$  usiamo la variabile  $\vec{z} \equiv \vec{r}-\vec{y}$ , abbiamo che l'integrale doppio che compare nelle (2.4.117) diventa

$$\begin{aligned} & \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{r}-\vec{y}|} = \int \int d^3r d^3y e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{r}-\vec{y}|} = \\ & = \int \int d^3z d^3y e^{i\vec{q}\cdot(\vec{z}+\vec{y})} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{z}|} = \int d^3z \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{z}}}{z} \int d^3y e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}} \rho(\vec{y}) \end{aligned} \quad (2.4.119)$$

Quindi il nostro integrale doppio si è separato nel prodotto di due integrali distinti, nelle variabili  $\vec{z}$  e  $\vec{y}$ . Ma il primo termine è proprio la trasformata di Fourier del potenziale coulombiano, e si ha

$$\begin{aligned} \int d^3z \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{z}}}{z} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int d^3z e^{i\vec{q}\cdot\vec{z}} \frac{e^{-\mu z}}{z} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty z^2 dz \int \sin\theta d\theta d\phi e^{izq \cos\theta} \frac{e^{-\mu z}}{z} \\ &= 2\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty z^2 dz \frac{e^{-\mu z}}{z} \int d(-\cos\theta) e^{izq \cos\theta} = 2\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty z^2 dz \frac{e^{-\mu z}}{z} \frac{e^{izq} - e^{-izq}}{izq} \\ &= \frac{2\pi}{iq} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty dz e^{-\mu z} (e^{izq} - e^{-izq}) = \frac{2\pi}{iq} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{iq - \mu} + \frac{1}{-iq - \mu} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{iq} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{1}{-iq + \mu} - \frac{1}{iq + \mu} \right) = \frac{2\pi}{iq} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2iq}{\mu^2 + q^2} = \frac{4\pi}{q^2} \end{aligned} \quad (2.4.120)$$

Ponendo allora

$$\tilde{\rho}(\vec{q}) \equiv \int d^3y \rho(\vec{y}) e^{i\vec{y}\cdot\vec{q}} \quad (2.4.121)$$

risulta infine

$$\int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{r}-\vec{y}|} = \frac{4\pi}{q^2} \tilde{\rho}(\vec{q}) \quad (2.4.122)$$

e dunque, in definitiva

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} Ze^2 \frac{4\pi}{q^2} \tilde{\rho}(\vec{q}) = -\frac{2mZe^2}{\hbar^2} \frac{\tilde{\rho}(\vec{q})}{q^2} \quad (2.4.123)$$

La funzione  $\tilde{\rho}$  è detta *fattore di forma* della distribuzione di carica. Dalla definizione segue immediatamente che  $\tilde{\rho} = 1$  corrisponde a  $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ , ovvero a una distribuzione di carica esattamente puntiforme.

Si noti altresì che, dalla definizione, segue anche che

$$\tilde{\rho}(0) = 1$$

il cui significato fisico è che, allorchè  $q \rightarrow 0$ , cioè quando la lunghezza d'onda di De Broglie  $\lambda = 1/q$ , associata alla particella urtante, tende a infinito, la carica su cui la particella scattera viene di nuovo "vista" nella sua interezza. E' come se il centro di scattering fosse puntiforme, dato che la particella urtante, nelle condizioni di scattering considerate, cioè a quel momento trasferito, non è in grado di "vederne" la struttura interna.

Per quanto riguarda, poi, la sezione d'urto, abbiamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 = \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{q^4} |\tilde{\rho}(\vec{q})|^2 \quad (2.4.124)$$

Evidentemente il termine  $|\tilde{\rho}(\vec{q})|^2$ , legato al fattore di forma, agisce come un fattore di riduzione<sup>16</sup> della sezione d'urto differenziale Rutherford

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} = \left( \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{q^4} \quad (2.4.127)$$

che avremmo se la distribuzione di carica  $Ze$  fosse puntiforme.

---

<sup>16</sup>Parliamo di *fattore di riduzione* perché

$$|\tilde{\rho}(\vec{q})| = \left| \int d^3r e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} \rho(\vec{r}) \right| \leq \int d^3r |e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}}| |\rho(\vec{r})| = \int d^3r |\rho(\vec{r})| \quad (2.4.125)$$

e se la distribuzione di carica è tutta di un segno, allora  $\rho(\vec{r}) \geq 0$  e dunque

$$|\tilde{\rho}(\vec{q})| \leq \int d^3r |\rho(\vec{r})| = \int d^3r \rho(\vec{r}) = \tilde{\rho}(0) = 1 \quad (2.4.126)$$

### 2.4.1 Distribuzione sferica uniforme

Consideriamo il caso di una distribuzione di carica uniforme a simmetria sferica, di raggio  $a$ . In prima approssimazione, questa può rappresentare la distribuzione di carica elettrica nel nucleo atomico (in quel caso  $a \approx 1 \text{ fm}$ ). Per ipotesi, dunque, la distribuzione di carica normalizzata  $\rho$  vale

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi a^3} & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (2.4.128)$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{q}) &= \int d^3r \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{3}{4\pi a^3} \int_0^a r^2 dr \int e^{iqr \cos\theta} \sin\theta d\theta d\phi = \\ &= 2\pi \frac{3}{4\pi a^3} \int_0^a r^2 dr \int_{\mathbb{F}} e^{iqr \cos\theta} d\cos\theta = \frac{3}{2a^3} \int_0^a r^2 dr \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \end{aligned} \quad (2.4.129)$$

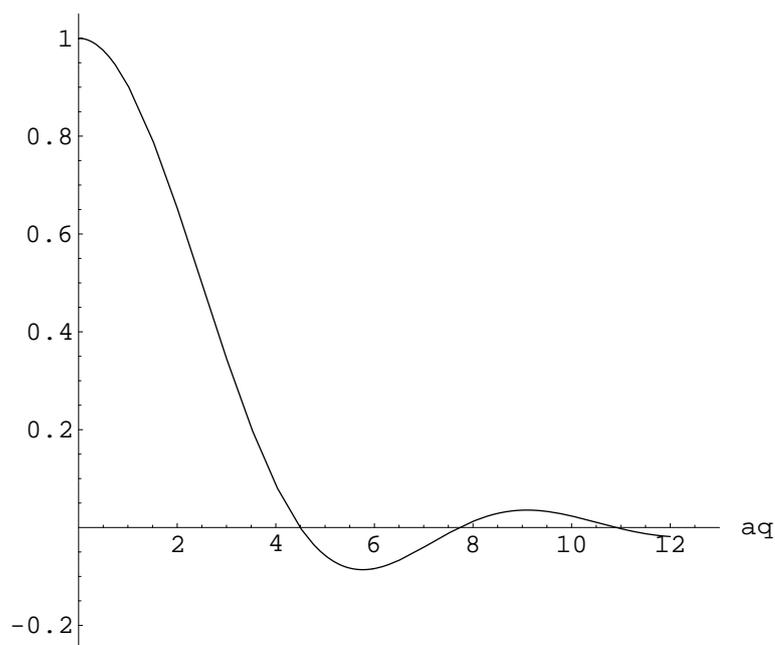


Figura 2.7: *Fattore di forma della distribuzione di carica uniforme a simmetria sferica.*

D'altronde

$$\begin{aligned} \int_0^a r dr e^{i\alpha r} &= -i \frac{d}{d\alpha} \int_0^a e^{i\alpha r} dr = -i \frac{d}{d\alpha} \frac{e^{i\alpha a} - 1}{i\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \frac{1 - e^{i\alpha a}}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha(-ia e^{i\alpha a}) - (1 - e^{i\alpha a})}{\alpha^2} = \frac{e^{i\alpha a}(1 - ia\alpha) - 1}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (2.4.130)$$

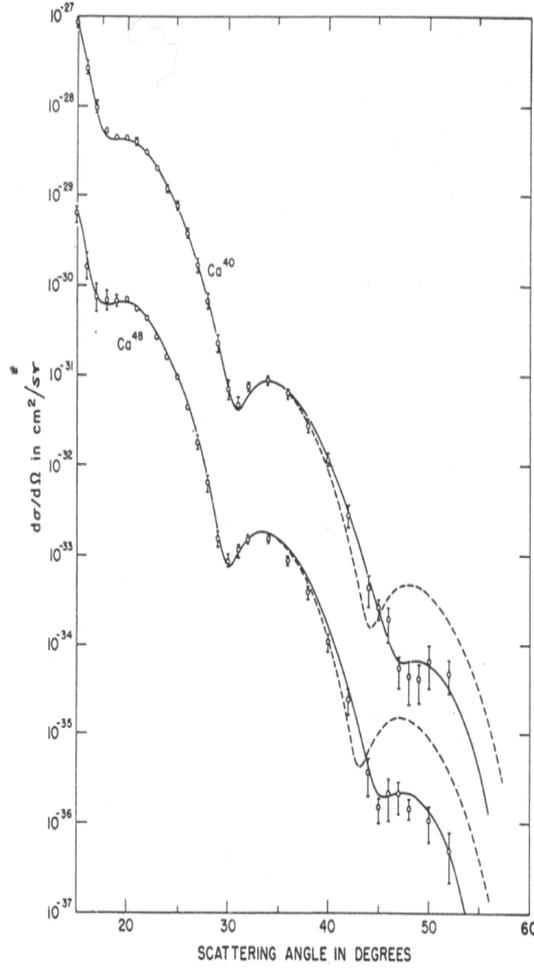


Figura 2.8: Sezione d'urto differenziale di scattering di elettroni su nuclei di due isotopi del Calcio: per ragioni grafiche la sezione d'urto su  $Ca^{40}$  è moltiplicata per 10, mentre quella su  $Ca^{48}$  è divisa per 10.

dunque

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}(\vec{q}) &= \frac{3}{2iqa^3} \int_0^a r dr (e^{iqr} - e^{-iqr}) = \\
 &= \frac{3}{2iqa^3} \frac{e^{iaq}(1 - iaq) - 1 - [e^{-iaq}(1 + iaq) - 1]}{q^2} \\
 &= \frac{3}{2iqa^3} \frac{e^{iaq} - e^{-iaq} - iqa[e^{iaq} + e^{-iaq}]}{q^2} = \frac{3}{qa^3} \frac{\sin(aq) - aq \cos(aq)}{q^2} \\
 &= 3 \frac{\sin(aq) - aq \cos(aq)}{(aq)^3} \tag{2.4.131}
 \end{aligned}$$

la cui forma è rappresentata<sup>17</sup> in fig.2.7, in funzione del parametro adimensionale  $aq$ , mentre in fig.2.8 è riportata la sezione d'urto differenziale di elettroni da  $757.5 \text{ MeV}$ , su due isotopi del Calcio<sup>18</sup>.

Il fatto che la sezione d'urto differenziale non si annulli laddove la trasformata di Fourier della densità di carica è nulla è dovuto a contributi di ordine superiore.

---

<sup>17</sup>Ricordiamo che, essendo  $\hbar c = 197.327 \text{ MeV fm}$ , la condizione  $aq = 1$  è raggiunta, per  $a = 1 \text{ fm}$ , quando  $q = 197.327 \text{ MeV}/(\hbar c)$ , essendo, come già osservato,  $\hbar q$  l'impulso trasferito nel processo.

<sup>18</sup>J.B. Bellicard et al., PRL, **19**, 527, (1967)  
Essendo  $a \approx 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$ , nel caso del Calcio risulta  $a \approx 4.1 \text{ fm}$ , per cui il primo zero del fattore di forma ( $aq \approx 4.5$ ) si ottiene quando  $q \approx 200 \text{ MeV}/c$ , ovvero, usando elettroni incidenti di impulso  $757.5 \text{ MeV}/c$ , per  $\theta \approx 15^\circ$ .

### 2.4.2 Distribuzione sferica esponenziale

Un altro caso interessante è quello in cui la carica è distribuita in modo esponenziale, come accade, per esempio, per la distribuzione della carica elettronica nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

Assumiamo dunque che la distribuzione di carica normalizzata sia

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi a^3} e^{-r/a} \quad (2.4.132)$$

dove  $a$  rappresenta quindi il raggio della carica stessa<sup>19</sup>. Risulta

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{q}) &= \int d^3r \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{8\pi a^3} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} e^{-r/a} = \\ &= 2\pi \frac{1}{8\pi a^3} \int r^2 dr d(\cos\theta) e^{iqr \cos\theta} e^{-r/a} = \frac{1}{4a^3} \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} e^{-r/a} = \\ &= \frac{1}{4iq a^3} \int_0^\infty r dr (e^{iqr} - e^{-iqr}) e^{-r/a} \end{aligned} \quad (2.4.133)$$

D'altronde, per  $a > 0$ , risulta

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r dr e^{(-a+ib)r} &= -\frac{d}{da} \int_0^\infty dr e^{(-a+ib)r} = -\frac{d}{da} \frac{-1}{-a+ib} = \frac{d}{da} \frac{1}{-a+ib} = \\ &= \frac{1}{(-a+ib)^2} \end{aligned} \quad (2.4.134)$$

quindi

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{q}) &= \frac{1}{4iq a^3} \left[ \frac{1}{(-\frac{1}{a} + iq)^2} - \frac{1}{(-\frac{1}{a} - iq)^2} \right] = \frac{1}{4iq a^3} \left[ \frac{1}{(\frac{1}{a} - iq)^2} - \frac{1}{(\frac{1}{a} + iq)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{4iq a^3} \frac{(\frac{1}{a} + iq)^2 - (\frac{1}{a} - iq)^2}{(q^2 + \frac{1}{a^2})^2} = \frac{1}{4iq a^3} \frac{\frac{4iq}{a}}{(\frac{1+a^2q^2}{a^2})^2} = \frac{1}{a^4} \frac{a^4}{(1+a^2q^2)^2} = \\ &= \frac{1}{(1+a^2q^2)^2} \end{aligned} \quad (2.4.135)$$

Di nuovo si vede che se  $aq \ll 1$ , ovvero quando il momento trasferito, in unità  $\hbar = 1$ , è molto minore dell'inverso della dimensione atomica  $a$ , la particella vede la carica come un tutt'uno, concentrata nell'origine.

Invece, quando  $aq \gg 1$ , ovvero quando  $a \gg \frac{1}{q} = \lambda_B$ , cioè quando la lunghezza d'onda di de Broglie  $\lambda_B$  associata al momento trasferito  $q$  è molto minore delle dimensioni atomiche, il fattore di forma finisce per tendere a zero.

<sup>19</sup>E' immediato dimostrare che  $a = \int d^3r r \rho(\vec{r})$ : in questo senso  $a$  rappresenta il valor medio del raggio di carica.

## 2.5 Sviluppo in onde parziali

Fino a ora abbiamo assunto che la particella incidente si trovi in un autostato dell'impulso, ovvero che lo stato iniziale  $|\Phi\rangle$  sia rappresentato da un'onda piana. Senza perdita di generalità, possiamo dunque assumere che la funzione d'onda incidente sia caratterizzata da un vettore d'onda  $\vec{k}$ , allineato con l'asse  $z$ . In coordinate polari avremo allora

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikr \cos\theta} \quad (2.5.136)$$

Abbiamo anche visto che la funzione d'onda scatterata è caratterizzata da un vettore d'onda  $\vec{k}'$  che ha lo stesso modulo di  $\vec{k}$  (conservazione dell'energia) ma è orientato in una direzione generica, individuata dagli angoli polari  $\theta$  e  $\phi$ .

Nel caso di un potenziale  $V(\vec{r}) = V(r)$  avente simmetria sferica<sup>20</sup>, siccome né lo stato imperturbato (condizione al contorno) né il potenziale dipendono dall'angolo azimutale  $\phi$ , nemmeno la soluzione generale  $\Psi(\vec{r})$  potrà avere questa dipendenza, e questo equivale a dire che l'ampiezza di scattering  $f(\vec{k}, \vec{k}')$  di cui alla (2.2.38) non può dipendere da  $\phi$ .

Potremo dunque scrivere la  $\Psi$  come

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{ikr \cos\theta} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \right] \quad (2.5.137)$$

D'altronde, fuori dal range di azione del potenziale (che assumeremo finito) anche la  $\Psi$  soddisfa l'equazione della particella libera, cioè

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0 \quad (2.5.138)$$

e siccome non dipende dall'angolo  $\phi$ , potremo rappresentarla come

$$\Psi(r, \theta) = \sum_l R_l(r) P_l(\cos\theta) \quad (2.5.139)$$

poichè i polinomi di Legendre<sup>21</sup>  $P_l(\cos\theta)$  sono un set completo in  $\theta$ .

<sup>20</sup>In realtà, per la conclusione che vogliamo trarre, basterebbe che il potenziale avesse simmetria cilindrica intorno all'asse  $z$ .

<sup>21</sup>Ricordiamo che i polinomi di Legendre sono definiti come

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

e risulta

$$P_0(z) = 1; \quad P_1(z) = z; \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1); \dots$$

Essi sono normalizzati in modo tale che

$$\int_{-1}^1 P_n(z) P_m(z) dz = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}$$



Figura 2.9: *Adrien-Marie Legendre (1752-1833)*

Sostituendo la (2.5.139) nella (2.5.138), otteniamo la ben nota equazione radiale<sup>22</sup>

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0 \quad (2.5.142)$$

le cui soluzioni indipendenti sono le funzioni sferiche di Bessel  $j_l(kr)$  e quelle

e il loro legame con le armoniche sferiche è il seguente

$$P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^0(\theta, \phi)$$

<sup>22</sup>Ricordiamo che, per un potenziale a simmetria sferica  $V(r)$ , l'equazione radiale è

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0 \quad (2.5.140)$$

Ponendo  $rR_l(r) \equiv u(r)$  e definendo  $\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$ , otteniamo per la funzione  $u(r)$  l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - \tilde{V}(r)] u = 0 \quad (2.5.141)$$

ovvero l'equazione agli autovalori per una particella di massa  $m$  che si muove, in una sola dimensione, in presenza di un potenziale  $V(r)$  a cui si somma il potenziale  $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \equiv \frac{J^2}{2mr^2}$  corrispondente al potenziale centrifugo agente su una particella di massa  $m$  e momento angolare orbitale totale  $J$ .

di Neumann  $\eta_l(kr)$ , definite come<sup>23</sup>

$$j_l(y) \equiv y^l \left( -\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^l \frac{\sin y}{y} \quad (2.5.143)$$

$$\eta_l(y) \equiv -y^l \left( -\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^l \frac{\cos y}{y} \quad (2.5.144)$$

Abbiamo dunque che

$$R_l(r) = A j_l(kr) + B \eta_l(kr) \quad (2.5.145)$$

Fuori dalla regione di scattering, cioè dove il potenziale è nullo, la soluzione del nostro problema di scattering potrà quindi essere scritta come

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l [A_l j_l(kr) + B_l \eta_l(kr)] P_l(\cos\theta) \quad (2.5.146)$$

dove  $A_l$  e  $B_l$  sono costanti opportune.

Si osservi che le funzioni di Neumann possono comparire nell'espressione della  $\Psi$  in quanto la zona di validità dello sviluppo (2.5.146), è quella dove il potenziale è nullo, che certamente non contiene l'origine, dove le  $\eta$  sono singolari.

Per esempio, se prendiamo la soluzione piana definita da  $\vec{k} = (0, 0, k)$ , che risolve l'equazione libera in tutto lo spazio, abbiamo

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikr \cos\theta} \quad (2.5.147)$$

e lo sviluppo<sup>24</sup> di questa funzione in polinomi di Legendre non contiene le funzioni di Neumann, essendo appunto

$$e^{ikr \cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (2.5.148)$$

Tornando al problema di esplicitare la soluzione  $\Psi(r, \theta)$ , ricordiamo che, nella zona asintotica, cioè per  $y \rightarrow \infty$ , risulta

$$j_l(y) \rightarrow \frac{\sin(y - l\pi/2)}{y} \quad (2.5.149)$$

$$\eta_l(y) \rightarrow -\frac{\cos(y - l\pi/2)}{y} \quad (2.5.150)$$

<sup>23</sup>Si noti che, mentre le funzioni  $j_l$  sono regolari all'origine, le  $\eta_l$  sono singolari.

<sup>24</sup>Siccome i polinomi di Legendre sono autofunzioni degli operatori di momento angolare  $J^2$  e  $J_z$  per gli autovalori  $l(l+1)$  ed  $m=0$ , lo sviluppo mostra come l'onda piana che si propaga lungo l'asse  $z$  sia una opportuna sovrapposizione di tutti gli stati di momento angolare con terza componente nulla (poiché non c'è dipendenza dall'angolo azimutale  $\phi$ ). Intuitivamente, essendo l'onda piana delocalizzata, essa consente infatti tutti i parametri d'impatto possibili.

quindi, molto lontano dalla zona di scattering, avremo

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} - B_l \frac{\cos(kr - l\pi/2)}{kr} \right) P_l(\cos \theta) \\ &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} P_l(\cos \theta)\end{aligned}\quad (2.5.151)$$

dove  $C_l$  e  $\delta_l$  sono definiti in modo che

$$C_l \cos \delta_l \equiv A_l; \quad C_l \sin \delta_l \equiv -B_l \quad (2.5.152)$$

Ma, evidentemente, ciascun termine

$$C_l \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} \quad (2.5.153)$$

è la sovrapposizione di un'onda sferica uscente dalla zona di scattering e una entrante, infatti

$$\frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} = \frac{e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_l)}}{2ikr} - \frac{e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_l)}}{2ikr} \quad (2.5.154)$$

D'altronde, le onde entranti *non* possono trovarsi nella parte della funzione d'onda che è originata dallo scattering perché quel contributo è fatto necessariamente *solo* da onde uscenti.

Da dove provengono, allora ?

Ricordiamo che, oltre alla parte scatterata, la soluzione  $|\Psi\rangle$  contiene anche (principalmente) l'onda piana incidente e per questa si è visto che vale la (2.5.148), ovvero, in zona asintotica risulta

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikr \cos \theta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} P_l(\cos \theta) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{e^{i(kr - l\pi/2)} - e^{-i(kr - l\pi/2)}}{2ikr} P_l(\cos \theta)\end{aligned}\quad (2.5.155)$$

Dunque, se vogliamo che l'onda scatterata sia solo *uscente*, cioè che, data la (2.5.137), risulti

$$(2\pi)^{3/2} [\Psi(r, \theta) - \Phi(r, \theta)] = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (2.5.156)$$

allora bisogna che il termine seguente, presente nella soluzione completa

$$-C_l e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} = -C_l e^{-i\delta_l} e^{-i(kr - l\pi/2)} \quad (2.5.157)$$

sia cancellato esattamente dall'analogo termine

$$-i^l (2l + 1) e^{-i(kr - l\pi/2)} \quad (2.5.158)$$

presente nell'onda incidente, ovvero che risulti

$$i^l (2l + 1) = C_l e^{-i\delta_l} \Rightarrow C_l = \left( e^{i\pi/2} \right)^l (2l + 1) e^{i\delta_l} = (2l + 1) e^{i(\delta_l + l\pi/2)} \quad (2.5.159)$$

In questo modo, nella regione asintotica, la quantità  $(2\pi)^{3/2} (\Psi(r, \theta) - \Phi(r, \theta))$ , risulta composta da sole onde uscenti, cioè

$$\begin{aligned} (2\pi)^{3/2} (\Psi(r, \theta) - \Phi(r, \theta)) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_l \frac{e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_l)}}{2ikr} - \frac{i^l (2l + 1) e^{i(kr - l\pi/2)}}{2ikr} \right] P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (2l + 1) e^{i(\delta_l + l\pi/2)} e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} - e^{i(l\pi/2)} (2l + 1) e^{i(kr - l\pi/2)} \right] \frac{P_l(\cos \theta)}{2ikr} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l + 1}{2ikr} P_l(\cos \theta) \left[ e^{i(kr + 2\delta_l)} - e^{ikr} \right] = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(\cos \theta) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \equiv \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \end{aligned}$$

ma  $e^{2i\delta} - 1 = e^{i\delta} (e^{i\delta} - e^{-i\delta}) = 2i e^{i\delta} \sin \delta$ , per cui, finalmente, si ha

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \frac{\sin \delta_l}{k} \quad (2.5.160)$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali fra loro e descrivono stati con  $l$  definito, ciascuna componente rappresenta l'ampiezza di scattering relativa al particolare momento angolare  $l$  a cui si riferisce.

In pratica, lo sviluppo è utile se l'interazione privilegia ampiezze di scattering a basso  $l$ . Questo accade, tipicamente, quando il potenziale  $V(r)$  ha un raggio d'azione limitato  $a$  (come, per esempio, nel caso delle forze nucleari o delle interazioni deboli). In questo caso, allo scattering di particelle di piccola energia parteciperanno soltanto le onde parziali di piccolo  $l$ .

Per convincersene, possiamo ragionare classicamente e concludere quindi che per parametri di impatto  $b > a$ , ovvero per valori di  $l = kb > ka$ , sostanzialmente non c'è scattering...

Quantisticamente possiamo arrivare alla stessa conclusione osservando che, se consideriamo solo il potenziale centrifugo, allora, fissata l'energia  $E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$ , la particella potrà avvicinarsi, al massimo, fino a che

$$\frac{\hbar^2 l(2l + 1)}{2mr^2} = E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow r_0 = \frac{\sqrt{l(l + 1)}}{k} \quad (2.5.161)$$

dopodichè la funzione d'onda diviene esponenzialmente decrescente.

Allora, se il raggio d'azione della forza  $a$  è più piccolo di  $r_0$ , quella particolare

onda non verrà, in buona sostanza, scatterata visto che la particella non penetra la regione dove è il potenziale e dunque lo scattering ci sarà solo per

$$a \geq r_0 = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \Rightarrow ak \geq l$$

dove abbiamo posto  $l \approx \sqrt{l(l+1)}$ .

Osserviamo infine che l'espressione trovata (2.5.160) per l'ampiezza di scattering ci dice che questa deve essere *necessariamente* complessa.

Questo fatto è direttamente legato al *teorema ottico* di cui parleremo a breve.

## 2.6 Phase-shifts e potenziale

Abbiamo visto che, dato un potenziale di scattering  $V(r)$  a simmetria sferica e di range finito, lo stato stazionario di scattering corrispondente all'autovalore  $E$  dell'hamiltoniana, che, nel limite in cui  $V \rightarrow 0$  è un'onda piana  $\Phi(\vec{r})$  di momento  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  ( $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$ ) che si propaga lungo l'asse  $z$ , è

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{irk \cos \theta} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \right] \quad (2.6.162)$$

dove

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (2.6.163)$$

Ovviamente gli sfasamenti  $\delta_l$ , che determinano le varie ampiezze parziali di scattering, sono legati al potenziale  $V(r)$ : cerchiamo adesso di stabilire qual è questo legame.

Per far questo, ripartiamo dall'equazione di Schroödinger stazionaria, cioè

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \Psi(\vec{r}) \quad (2.6.164)$$

e sviluppiamola in onde parziali. Siccome, come abbiamo già avuto modo di osservare, sia nella condizione al contorno  $\Phi(\vec{r}) \equiv \Phi(r, \theta)$  come nel potenziale  $V(r)$  non c'è dipendenza dall'angolo azimutale  $\phi$ , potremo scrivere

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) u_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (2.6.165)$$

dove la funzione radiale ridotta<sup>25</sup>  $u_l$  soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] u_l = 0 \quad (2.6.168)$$

Nel caso libero, ovvero per  $V = 0$ , la soluzione della (2.6.168) che soddisfa alle condizioni al contorno date ed è regolare per  $r = 0$ , è naturalmente l'onda

<sup>25</sup>Si noti che la funzione radiale vera e propria sarebbe propriamente  $R_l = u_l/(kr)$ , che soddisfa l'equazione radiale ben nota

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] R_l = 0 \quad (2.6.166)$$

le cui soluzioni libere (cioè per  $V(r) = 0$ ), come abbiamo già detto, sono della forma

$$R_l(r) = A j_l(kr) + B \eta_l(kr) \quad (2.6.167)$$

piana che viaggia lungo  $z$ , per la quale si ha, come abbiamo già avuto modo di vedere

$$u_l(r) = kr j_l(kr) \equiv v_l(r) \quad (2.6.169)$$

$$\Rightarrow \Psi(r, \theta) \rightarrow \Phi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l l^l (2l+1) \frac{v_l(r)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (2.6.170)$$

Per ipotesi, quindi, la funzione  $v_l$  definita sopra soddisfa l'equazione libera

$$\frac{d^2 v_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] v_l = 0 \quad (2.6.171)$$

e abbiamo già osservato che il suo andamento asintotico ( $r \rightarrow \infty$ ) è del tipo

$$(kr) j_l(kr) \equiv v_l(r) \rightarrow \sin(kr - l\pi/2) \quad (2.6.172)$$

Supponiamo adesso di indicare con  $u_l$  la soluzione radiale "completa", regolare in  $r = 0$  (cioè tale che  $u_l(0) = 0$ ). Per quanto abbiamo già avuto modo di osservare<sup>26</sup>, asintoticamente per  $r \rightarrow \infty$ , deve accadere che

$$u_l(r) \rightarrow e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \quad (2.6.175)$$

Moltiplichiamo allora l'equazione radiale (2.6.168) per  $v_l$  e la (2.6.171) per  $u_l$ : si ha

$$v_l \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] u_l v_l = 0 \quad (2.6.176)$$

$$u_l \frac{d^2 v_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] v_l u_l = 0 \quad (2.6.177)$$

e quindi sottraiamo l'equazione (2.6.177) dalla (2.6.176): risulta

$$v_l \frac{d^2 u_l}{dr^2} - u_l \frac{d^2 v_l}{dr^2} = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) u_l v_l \quad (2.6.178)$$

Integriamo ora il risultato ottenuto nella variabile radiale. Si ha

$$\int dr \left[ v_l \frac{d^2 u_l}{dr^2} - u_l \frac{d^2 v_l}{dr^2} \right] = \frac{2m}{\hbar^2} \int dr V(r) u_l v_l \quad (2.6.179)$$

<sup>26</sup>Ricordiamo che, dall'analisi fatta per giungere all'espressione dello sviluppo dell'ampiezza di scattering in onde parziali, risulta che, asintoticamente

$$\Psi(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l C_l \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} P_l(\cos(\theta)) \quad (2.6.173)$$

dove  $C_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l}$ . Dunque, dato lo sviluppo (2.6.165), risulta che

$$u_l \rightarrow e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \quad (2.6.174)$$

Ma chiaramente

$$v_l \frac{d^2 u_l}{dr^2} - u_l \frac{d^2 v_l}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[ v_l \frac{du_l}{dr} - u_l \frac{dv_l}{dr} \right] \quad (2.6.180)$$

quindi

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr V(r) u_l v_l = \left[ v_l \frac{du_l}{dr} - u_l \frac{dv_l}{dr} \right]_0^\infty \quad (2.6.181)$$

D'altronde, per  $r = 0$  sia  $v_l$  che  $u_l$  sono nulle, essendo le funzioni radiali ridotte di soluzioni radiali regolari all'origine, dunque

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr V(r) u_l v_l = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ v_l \frac{du_l}{dr} - u_l \frac{dv_l}{dr} \right] \quad (2.6.182)$$

D'altronde sappiamo che, asintoticamente, risulta

$$\begin{aligned} v_l \frac{du_l}{dr} - u_l \frac{dv_l}{dr} &= k e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2) \cos(kr - l\pi/2 + \delta_l) - \\ &- k e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \cos(kr - l\pi/2) = \\ &= -k e^{i\delta_l} \sin \delta_l \end{aligned} \quad (2.6.183)$$

per cui, finalmente, abbiamo

$$\begin{aligned} e^{i\delta_l} \sin \delta_l &= -\frac{2m}{k\hbar^2} \int_0^\infty dr V(r) u_l(r) j_l(kr) kr = \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r dr V(r) u_l(r) j_l(kr) \end{aligned} \quad (2.6.184)$$

Questa soluzione è esatta, però richiede, per essere valutata, la conoscenza esplicita della soluzione radiale completa  $u_l$ .

Se possiamo assumere che lo scattering non alteri troppo la soluzione radiale (cioè per piccoli sfasamenti) e quindi  $u_l$  e  $j_l$  abbiano lo stesso segno sostanzialmente ovunque, allora approssimando  $\sin \delta_l$  con  $\delta_l$  e ponendo  $e^{i\delta_l} \approx 1$ , ovvero facendo una approssimazione al primo ordine, si ha

$$\delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r dr V(r) j_l(kr) u_l(r) \quad (2.6.185)$$

la quale mostra che

$$\begin{aligned} \delta_l &< 0 \quad \text{se } V > 0 \quad (\text{repulsivo}) \\ \delta_l &> 0 \quad \text{se } V < 0 \quad (\text{attrattivo}) \end{aligned} \quad (2.6.186)$$

Si osservi infine che la (2.6.184) *non* dice, come potrebbe sembrare a prima vista, che gli sfasamenti sono una funzione lineare del potenziale, in quanto il potenziale, in generale, entra anche nella  $u_l$ .

### 2.6.1 Caso coulombiano

Uno dei casi fisicamente più interessanti è certamente quello in cui il potenziale di scattering è coulombiano.

Evidentemente esso non ha range finito, per cui possiamo aspettarci che alcune delle conclusioni tratte finora non risultino valide. Il metodo degli sfasamenti è stato dimostrato assumendo di poter affermare che, asintoticamente, la particella torna libera e quindi la sua fase, come quella dell'onda parziale  $l$ -esima dello sviluppo dell'onda piana, cresce come  $kr$ .

Per poter capire che succede nel caso del potenziale coulombiano, dobbiamo di nuovo partire dall'inizio, ovvero dalla considerazione che la più generale soluzione stazionaria  $\Psi$ , indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$ , potrà comunque sempre essere scritta come

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) R_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (2.6.187)$$

dove  $R_l(r)$  verifica l'equazione radiale omogenea con potenziale

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} + \left[ k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0 \quad (2.6.188)$$

La soluzione regolare all'origine, nel caso in cui  $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$ , è

$$R_l = e^{\pi\lambda/2} \left| \frac{\Gamma(l+1+i\lambda)}{(2l+1)!} \right| (2kr)^l e^{ikr} F(i\lambda+l+1, 2l+2, -2ikr) \quad (2.6.189)$$

dove abbiamo definito  $\lambda \equiv \frac{Ze^2 m}{k\hbar^2}$ , mentre la funzione  $F(a, b, z)$  è la funzione (di Kummer) ipergeometrica degenerata<sup>27</sup> e la funzione  $\Gamma$  è definita, al solito, come

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2.6.191)$$

L'andamento asintotico della  $R_l$  è dato da

$$R_l \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l - \lambda \log(2kr)) \quad (2.6.192)$$

dove

$$\delta_l = \arg(\Gamma(l+1+i\lambda)) \quad (2.6.193)$$

<sup>27</sup>Essa è definita nel modo seguente:

$$F(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (2.6.190)$$

Confrontando allora l'andamento asintotico della  $R_l$  con l'analogo andamento della stessa componente di momento angolare  $l$  presente nell'onda incidente

$$\frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}$$

identifichiamo immediatamente lo sfasamento indotto dal potenziale coulombiano nella somma dei due addendi

$$\delta_l - \lambda \ln(2kr)$$

Il termine che diverge logaritmicamente è indipendente da  $l$  e trae la sua origine proprio nel particolare carattere del potenziale coulombiano di annullarsi "molto" lentamente. L'altro termine viene identificato con lo sfasamento vero e proprio che entra nell'equazione (2.5.160).

### 2.6.2 Determinazione analitica dei phase-shifts

Nel caso di un potenziale a simmetria sferica  $V(r)$  che abbia un range  $a$  finito e dunque sia diverso da zero solo per  $r < a$ , abbiamo visto che il legame fra lo sfasamento  $\delta_l$  e il potenziale è espresso dalla relazione (2.6.184), ovvero

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r dr V(r) u_l(r) j_l(kr) \quad (2.6.194)$$

dove  $u_l(r)$  è la soluzione radiale ridotta, che soddisfa l'equazione (2.6.168)

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] u_l = 0 \quad (2.6.195)$$

con la condizione al contorno  $u_l(0) = 0$ .

In questo modo possiamo determinare lo sfasamento  $\delta_l$ .

Vediamo adesso, di seguito, un altro modo per determinare i  $\delta_l$ , che non richiede di fare l'integrale di cui alla (2.6.184), bensì una derivata in  $a$ , cioè laddove possiamo dire che inizia la zona di propagazione libera.

#### Derivata logaritmica

Nelle ipotesi di cui sopra, evidentemente, nella regione  $r \geq a$ , la funzione d'onda soddisfa l'equazione di Schroödinger libera

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0 \quad (2.6.196)$$

e, come sappiamo, la sua più generale soluzione indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$  è

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l [A_l j_l(kr) + B_l \eta_l(kr)] P_l(\cos \theta) \quad (2.6.197)$$

Abbiamo visto anche che, in termini dei *phase-shifts*, risulta

$$A_l = C_l \cos \delta_l \quad (2.6.198)$$

$$B_l = -C_l \sin \delta_l \quad (2.6.199)$$

dove

$$C_l = (2l+1) e^{i(\delta_l + l\pi/2)} = i^l (2l+1) e^{i\delta_l} \quad (2.6.200)$$

per cui risulta ( $r \geq a$ )

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) e^{i\delta_l} [j_l(kr) \cos \delta_l - \eta_l(kr) \sin \delta_l] P_l(\cos \theta) = \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) F_l(r) P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.6.201)$$

Calcoliamo adesso la *derivata logaritmica* dell'ampiezza  $l$ -esima  $F_l$

$$F_l(r) \equiv e^{i\delta_l} [j_l(kr) \cos \delta_l - \eta_l(kr) \sin \delta_l] \quad (2.6.202)$$

ovvero determiniamo, per  $r = a$ , la quantità

$$\begin{aligned} \beta_{l+} &\equiv \frac{a}{F_l} \frac{dF_l}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{1}{e^{i\delta_l} [j_l(ka) \cos \delta_l - \eta_l(ka) \sin \delta_l]} e^{i\delta_l} [j_l'(ka) \cos \delta_l - \eta_l'(ka) \sin \delta_l] k = \\ &= ak \frac{j_l'(ka) \cos \delta_l - \eta_l'(ka) \sin \delta_l}{j_l(ka) \cos \delta_l - \eta_l(ka) \sin \delta_l} \end{aligned}$$

da cui, con un po' di algebra, si ricava la tangente dello sfasamento  $\delta_l$ , data da

$$\tan \delta_l = \frac{ka j_l'(ka) - \beta_{l+} j_l(ka)}{ka \eta_l'(ka) - \beta_{l+} \eta_l(ka)} \quad (2.6.203)$$

Come si vede il problema di determinare gli sfasamenti  $\delta_l$  è ricondotto a quello di determinare le quantità  $\beta_{l+}$ .

Queste quantità vengono determinate risolvendo l'equazione radiale nella zona dove è presente il potenziale. Per  $r < a$ , dove il potenziale di scattering non è nullo, sappiamo che la più generale soluzione dell'equazione di Schroödinger che sia indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$  è di nuovo del tipo

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) R_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (2.6.204)$$

dove

$$R_l(r) \equiv \frac{u_l(r)}{r} \quad (2.6.205)$$

è tale per cui

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l = 0 \quad (2.6.206)$$

con la condizione al contorno  $u_l(0) = 0$ , dovendo  $R_l$  essere regolare anche all'origine. Risolvendo<sup>28</sup> rispetto a  $R_l$ , se ne calcola poi la derivata logaritmica  $\beta_{l-}$  sempre per  $r = a$ : poichè tanto la  $\Psi$  come la sua derivata prima sono continue, risulta

$$\beta_{l-} = \beta_{l+}$$

e in questo modo, in linea di principio, si possono determinare gli sfasamenti  $\delta_l$ .

<sup>28</sup>E' vero che l'equazione radiale, appena il potenziale diventa non banale, non si sa risolvere analiticamente, però, trattandosi di una equazione unidimensionale, non è troppo complicato risolverla numericamente (cfr., per esempio W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery: *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press) e quindi arrivare, attraverso questa strada, alla determinazione delle fasi  $\delta_l$ .

### 2.6.3 Determinazione sperimentale dei phase-shifts

Nel caso in cui siano solo poche le ampiezze parziali che partecipano al processo di scattering, gli sfasamenti  $\delta_l$  possono essere fittati a partire dalla sezione d'urto differenziale, che, ricordiamo, vale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta) \right|^2 \quad (2.6.207)$$

Supponiamo, per esempio, che sia presente solo scattering in onda  $s$ : essendo  $P_0(\cos\theta) = 1$ , il processo è evidentemente isotropo e risulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sin^2\delta_0 \quad (2.6.208)$$

Se lo scattering, invece, avviene anche in onda  $p$ , allora sarà

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{k^2} \left| e^{i\delta_0} \sin\delta_0 + 3e^{i\delta_1} \sin\delta_1 \cos\theta \right|^2 = \\ &= \frac{1}{k^2} \left( A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos^2\theta \right) \end{aligned} \quad (2.6.209)$$

dove

$$\begin{aligned} A_0 &= \sin^2\delta_0 \\ A_1 &= 3\sin\delta_0 \sin\delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) \\ A_2 &= 9\sin^2\delta_1 \end{aligned} \quad (2.6.210)$$

etc ...

E' evidente, comunque, come questa strada si presta a essere seguita solo se il numero di ampiezze parziali che partecipano al processo di scattering è molto limitato.

### 2.6.4 Carica totale nulla e ampiezze parziali

Vediamo cosa succede nel caso di una distribuzione di carica totale nulla. Supponiamo che lo scattering avvenga su un oggetto globalmente neutro (per esempio, su un atomo). Come abbiamo già detto, in questo caso supporremo che la densità di carica sia stata normalizzata in modo che risulti

$$dq = e \rho(\vec{r}) d^3r \quad (2.6.211)$$

Con gli stessi argomenti usati nel caso in cui la carica complessiva associata al centro scatteratore era  $Ze$ , otteniamo

$$f(\vec{q}) = -\frac{2me^2}{\hbar^2} \frac{1}{q^2} \tilde{\rho}(\vec{q}) \quad (2.6.212)$$

Stavolta, però, nel limite in cui  $\vec{q} \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\rho}(\vec{q}) \rightarrow 0$  (essendo  $\tilde{\rho}(0) = 0$ ).

Se poi  $\rho(\vec{r})$  possiede simmetria sferica, allora anche  $\tilde{\rho}(\vec{q})$  avrà questa simmetria<sup>29</sup> e dunque dipenderà solo da  $q = |\vec{q}|$ : sviluppando in serie di Taylor, si ha

$$\tilde{\rho}(q) = \tilde{\rho}(0) + q A + q^2 B + \dots \quad (2.6.213)$$

dove

$$A \equiv \left. \frac{d\tilde{\rho}}{dq} \right|_{q=0}; \quad B \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\tilde{\rho}}{dq^2} \right|_{q=0} \quad (2.6.214)$$

---

<sup>29</sup>Infatti, se  $R$  è una qualsiasi matrice di rotazione

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(R\vec{q}) &= \int d^3r e^{i\vec{r} \cdot (R\vec{q})} \rho(\vec{r}) = \int d^3r e^{i(R^{-1}\vec{r}) \cdot (R^{-1}R\vec{q})} \rho(\vec{r}) = \int d^3r e^{i(R^{-1}\vec{r}) \cdot \vec{q}} \rho(\vec{r}) = \\ &= \int d^3\mathbf{y} e^{i\vec{y} \cdot \vec{q}} \rho(R\vec{y}) = \int d^3\mathbf{y} e^{i\vec{y} \cdot \vec{q}} \rho(\vec{y}) = \tilde{\rho}(\vec{q}) \end{aligned}$$

Ma, per quanto già detto, essendo la carica totale nulla, è  $\tilde{\rho}(0) = 0$ .

Verifichiamo che anche il coefficiente  $A$  è necessariamente nullo. Infatti<sup>30</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \int d^3r e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} \rho(r) &= \frac{d}{dq} \int r^2 dr d\Omega e^{irq \cos\theta} \rho(r) = 2\pi \frac{d}{dq} \int r^2 dr \frac{e^{irq} - e^{-irq}}{irq} \rho(r) \\ &= 2\pi \frac{d}{dq} \int r^2 dr \frac{2i \sin(rq)}{irq} \rho(r) \end{aligned}$$

D'altronde

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

quindi

$$A = \lim_{q \rightarrow 0} 2\pi \int r^2 dr \frac{rq \cos(rq) - \sin(rq)}{(rq)^2} r \rho(r) \quad (2.6.215)$$

e nel limite in cui  $q \rightarrow 0$ , questa quantità si annulla dato che il numeratore della frazione presente nell'integrale, per  $rq \rightarrow 0$ , va com  $(rq)^3$ .

Quindi, per  $q \rightarrow 0$ , il primo termine dello sviluppo di Taylor della funzione  $\tilde{\rho}(q)$  è quello proporzionale a  $q^2$ , per cui abbiamo

$$f(\vec{q}) = -\frac{2me^2}{\hbar^2} \frac{1}{q^2} \tilde{\rho}(q) \approx -\frac{2me^2}{\hbar^2} B + O(q) \quad (2.6.216)$$

cioè l'ampiezza di scattering risulta (almeno nel limite di bassi  $q$ ) essere indipendente da  $q$  stesso.

Per quanto abbiamo visto circa lo sviluppo in onde parziali della  $f$ , evidentemente questo caso corrisponde a quello in cui il processo di scattering avviene in onda  $S$ , infatti, questo è l'unico caso in cui, essendo  $P_0(\cos\theta) = 1$ , l'ampiezza è isotropa.

---

<sup>30</sup>Un modo equivalente per giungere alla stessa conclusione è quello di ripartire dalla definizione della trasformata di Fourier della densità di carica e sviluppare l'esponenziale: si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{q}) &= \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(r) = \int d^3r \left( 1 + i\vec{q}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(i\vec{q}\cdot\vec{r})^2 + \dots \right) \rho(r) \\ &= \int d^3r \rho(r) + iq_j \int d^3r [r_j \rho(r)] - \frac{q_j q_k}{2} \int d^3r [r_j r_k \rho(r)] + \dots = \\ &= \int d^3r \rho(r) + iq_j \int d^3r [r_j \rho(r)] - \frac{q_j q_k}{2} \int d^3r [(r_j r_k - \frac{1}{3}r^2 \delta_{jk}) \rho(r)] - \frac{1}{6}q^2 \int d^3r r^2 \rho(r) + \dots \end{aligned}$$

e il secondo e terzo integrale, proporzionali, rispettivamente al momento di dipolo e al momento di quadrupolo della distribuzione, sono nulli se questa ha simmetria sferica, mentre il primo è nullo essendo nulla la carica totale. Dunque, nel caso di simmetria sferica, il primo termine non nullo nello sviluppo perturbativo in serie di  $q$  è proporzionale a  $q^2$ .

## 2.7 Il teorema ottico

Dalla rappresentazione dell'ampiezza di scattering in onde parziali

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (2.7.217)$$

si ricava immediatamente l'espressione della sezione d'urto in funzione degli sfasamenti  $\delta_l$ . Infatti

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \int |f(\theta)|^2 d\Omega \\ &= 2\pi \int d(\cos \theta) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} e^{-i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{2l'+1}{k} e^{i\delta_{l'}} \sin \delta_{l'} P_{l'}(\cos \theta) \end{aligned}$$

da cui, usando le relazioni<sup>31</sup> di ortogonalità per i polinomi di Legendre,

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= 2\pi \sum_l \sum_{l'} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{k^2} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} e^{i(\delta_{l'} - \delta_l)} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \end{aligned} \quad (2.7.218)$$

Questo risultato dice, fra l'altro che, fissato comunque  $l$ , il massimo contributo possibile alla sezione d'urto dalla corrispondente ampiezza parziale vale  $4\pi(2l+1)/k^2$  e decresce quindi come  $k^{-2}$ .

Inoltre, da quanto sopra, segue evidentemente che una sezione d'urto totale potrà risultare infinita solo se riceve contributi da  $l$  grandi a piacere, di valore tale da rendere divergente la serie, come accade nel caso coulombiano.

Tornando ora all'espressione dell'ampiezza, osserviamo che risulta<sup>32</sup>

$$f(\theta = 0) = \sum_l \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (2.7.219)$$

per cui

$$\frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(0)] = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l = \sigma_{tot} \quad (2.7.220)$$

Questo risultato è noto come *Teorema ottico*.

Esso riflette il fatto che la possibilità di esistere stesamente dello scattering richiede necessariamente che esso si manifesti anche nella direzione "in avanti",

<sup>31</sup>Abbiamo già detto che i polinomi di Legendre sono normalizzati in modo che

$$\int_{-1}^1 dz P_n(z) P_m(z) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

<sup>32</sup>Ricordiamo che i polinomi di Legendre sono tali che  $P_l(1) = 1$ , cioè per  $\theta = 0$   $P_l(\cos \theta) = 1$  qualunque sia  $l$ .

affinchè questa ampiezza possa interferire con l'onda incidente e dunque ridurre la corrente di probabilità in quella direzione, per compensare quella che si manifesta nelle altre direzioni di scattering.

## 2.8 La risonanza

Abbiamo visto che la sezione d'urto in un processo di scattering è data da

$$\sigma = \sum_l \sigma_l \quad (2.8.221)$$

dove le sezioni d'urto parziali sono espresse in termini degli sfasamenti come

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (2.8.222)$$

Evidentemente, come abbiamo avuto già modo di osservare, per una data energia, ovvero per un dato valore di  $k$ ,  $\sigma_l$  sarà massima quando  $\delta_l = \pi/2$ .

Supponiamo allora che, per un dato valore di  $l$  e una data energia  $E_0$  della particella incidente, sia

$$\delta_l(E_0) = \pi/2$$

Sviluppiamo allora la cotangente di  $\delta_l$  in prossimità dell'energia  $E_0$ : si ha

$$\cot \delta_l(E) = \cot \delta_l(E_0) + (E - E_0) \left. \frac{d \cot \delta_l}{dE} \right|_{E=E_0} + \dots \quad (2.8.223)$$

ma

$$\frac{d \cot \delta_l}{dE} = \frac{d \cot \delta_l}{d\delta_l} \frac{d\delta_l}{dE} = -\frac{1}{\sin^2 \delta_l} \frac{d\delta_l}{dE}$$

e se poniamo allora

$$\left. \frac{d\delta_l(E)}{dE} \right|_{E=E_0} \equiv \frac{2}{\Gamma} \quad (2.8.224)$$

ne segue che

$$\frac{d \cot \delta_l}{dE} = \frac{2}{\Gamma} \frac{1}{\sin^2 \delta_l}$$

e dunque (per  $E = E_0$ ,  $\sin^2 \delta_l = 1$ )

$$\begin{aligned} \cot \delta_l(E) &= \cot \delta_l(E_0) + (E - E_0) \left. \frac{d \cot \delta_l}{dE} \right|_{E=E_0} + \dots = 0 - (E - E_0) \frac{2}{\Gamma} + \dots \\ &= -\frac{2}{\Gamma} (E - E_0) \end{aligned} \quad (2.8.225)$$

dove abbiamo tenuto solo il termine lineare in  $E - E_0$ .

D'altronde

$$\begin{aligned}
 \sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{1}{1 + \cot^2 \delta_l} \\
 &\approx \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{1}{1 + \frac{4}{\Gamma^2} (E - E_0)^2} = \\
 &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{\frac{\Gamma^2}{4} + (E - E_0)^2} \qquad (2.8.226)
 \end{aligned}$$

che è la famosa espressione di *Breit-Wigner*.

La dipendenza della sezione d'urto parziale  $\sigma_l$  dall'energia della particella incidente segue la forma della classica curva di risonanza, dove  $\Gamma$  è la larghezza (in unità di energia) della risonanza stessa.

Questo risultato può essere interpretato quantisticamente come dovuto alla formazione di uno stato metastabile di energia  $E_0$ , che decade con vita media  $\tau = \hbar/\Gamma$ .

## 2.9 Oltre l'approssimazione di Born

Il problema dello scattering da un potenziale  $V$  è impostato esattamente attraverso l'equazione di Lippmann-Schwinger

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\Psi\rangle \quad (2.9.227)$$

che, però, non è facile da risolvere, dato che l'incognita  $|\Psi\rangle$  compare in entrambi i membri dell'equazione.

La struttura dell'equazione di  $LS$  (2.9.227) è comunque tale che si presta particolarmente bene per essere risolta in modo perturbativo.

Iniziamo dallo stato imperturbato  $|\Psi_0\rangle \equiv |\Phi\rangle$ , che rappresenta, appunto, l'approssimazione all'ordine  $n = 0$  dello sviluppo perturbativo della soluzione  $|\Psi\rangle$  cercata. Usando questa soluzione al secondo membro dell'equazione di  $LS$ , abbiamo

$$|\Psi_1\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\Phi\rangle \quad (2.9.228)$$

che è la soluzione approssimata di Born e rappresenta l'approssimazione all'ordine  $n = 1$  della soluzione cercata.

Usando questa soluzione (approssimata all'ordine  $n = 1$ ) al secondo membro dell'equazione di  $LS$ , troviamo la soluzione approssimata all'ordine  $n = 2$

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\Psi_1\rangle \\ &= |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (2.9.229)$$

per cui, in definitiva, otteniamo formalmente la soluzione esatta come somma della serie di Born

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Phi\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n |\Phi\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (2.9.230)$$

Verifichiamo per esercizio che la soluzione (2.9.230) è formalmente esatta. Sempre nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , si ha infatti (ricordiamo che  $(E - H_0)|\Phi\rangle = 0$ )

$$\begin{aligned} (E - H_0 + i\epsilon)|\Psi\rangle &= V|\Phi\rangle + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V|\Phi\rangle + \dots \\ &= V \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (2.9.231)$$

$$\begin{aligned} &\equiv V|\Psi\rangle \\ \Rightarrow (E - H_0)|\Psi\rangle &= V|\Psi\rangle \Rightarrow (H_0 + V)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \end{aligned} \quad (2.9.232)$$

Cerchiamo ora di capire, da un punto di vista fisico, il significato della serie di Born. Il primo termine ( $n = 0$ ) è l'onda non scatterata.

Il secondo termine descrive l'onda che viene scatterata in un punto dal potenziale e quindi si propaga<sup>33</sup> in avanti con l'operatore  $\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}$ . Il terzo termine si riferisce all'onda che viene scatterata in un punto dal potenziale, si propaga liberamente per un tratto, quindi viene scatterata di nuovo ed infine si propaga in avanti indefinitamente...

Da un punto di vista matematico, resta il problema di dimostrare la sommabilità della serie di Born, problema la cui soluzione diamo per buona.

Osserviamo infine che avremmo potuto arrivare formalmente al risultato (2.9.230) notando che, se poniamo per comodità

$$R = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \quad (2.9.233)$$

allora l'equazione di LS si scrive come

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + R|\Psi\rangle \quad (2.9.234)$$

e dunque

$$\begin{aligned} (1 - R)|\Psi\rangle &= |\Phi\rangle \Rightarrow |\Psi\rangle = \frac{1}{1 - R} |\Phi\rangle = (1 + R + R^2 + \dots) |\Phi\rangle \\ \Rightarrow |\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n |\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (2.9.235)$$

---

<sup>33</sup>Ricordiamo che  $\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}$  traduce, nel linguaggio degli operatori, la funzione di Green "forward", associata all'equazione della particella libera di energia  $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$ ,

$$(\nabla_x^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

e per questo motivo viene anche chiamato *propagatore libero*. Abbiamo infatti concluso che, in rappresentazione delle coordinate, è

$$\langle \vec{r} | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} | \vec{r}' \rangle = -\frac{2m}{\hbar^2} G^+(\vec{r}, \vec{r}')$$

Il nome *propagatore libero* deriva dal fatto che la funzione di Green "propaga" dal punto  $\vec{r}'$  al generico punto  $\vec{r}$  l'effetto del termine di sorgente  $s(\vec{r}')$ .

### 2.9.1 Alcuni aspetti formali della Teoria dello Scattering

Nella Teoria formale dello Scattering, gli stati  $|\psi^\pm\rangle$ , definiti dall'equazione di Lippmann-Schwinger (2.2.10)

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} H_1 |\Psi^\pm\rangle \quad (2.9.236)$$

vengono anche chiamati<sup>34</sup> stati stazionari *outgoing* e *ingoing*, rispettivamente secondo l'associazione<sup>35</sup>

$$|\Psi^+\rangle \rightarrow \textit{outgoing} \quad |\Psi^-\rangle \rightarrow \textit{ingoing}$$

Nel caso in cui questi stati si riferiscano a uno stato imperturbato<sup>36</sup>  $|\Phi\rangle \equiv |\vec{k}\rangle$ , autostato dell'impulso, essi vengono solitamente indicati anche con i simboli  $|\vec{k}\pm\rangle$  e si dimostra che, per una qualsiasi energia  $E > 0$ , essi costituiscono un insieme completo (una base normalizzata come gli stati  $|\vec{k}\rangle$ ) nello spazio degli stati del continuo, cioè nello spazio degli stati di scattering propriamente detti.

Gli stati imperturbati  $|\vec{k}\rangle$  e gli stati  $|\vec{k}\pm\rangle$  sono legati fra loro dagli operatori di Møller  $\Omega_\pm$ , così definiti sulla base  $|\vec{k}\rangle$

$$\Omega_\pm |\vec{k}\rangle = |\vec{k}\pm\rangle \equiv |\Psi^\pm_{\vec{k}}\rangle \quad (2.9.237)$$

da cui, in generale, nelle notazioni consuete, abbiamo

$$\Omega_\pm |\Phi\rangle = |\Psi^\pm\rangle \quad (2.9.238)$$

Evidentemente, poichè per l'equazione di *LS* risulta

$$|\vec{k}\pm\rangle = |\vec{k}\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\vec{k}\pm\rangle$$

gli operatori di Møller sono tali che

$$\Omega_\pm |\vec{k}\rangle = |\vec{k}\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V \Omega_\pm |\vec{k}\rangle \quad (2.9.239)$$

<sup>34</sup>M.L. Goldberger, K.M. Watson: *Collision theory*, J. Wiley and Sons, 1964, pag. 192

<sup>35</sup>Questa terminologia, al momento, vuole riflettere solo il fatto che  $|\psi^+\rangle$  è fatto dall'onda imperturbata e *onde uscenti*, mentre  $|\psi^-\rangle$  è fatto dall'onda imperturbata e *onde entranti*. Se pensiamo in termini di pacchetti d'onda su cui poi passare al limite, la prima soluzione,  $|\psi^+\rangle$ , si sviluppa, attraverso l'hamiltoniana completa, a partire da una precisa configurazione iniziale  $|\Phi\rangle$ , autostato dell'hamiltoniana libera nel remoto passato mentre la seconda soluzione,  $|\psi^-\rangle$ , è tale che, nel lontano futuro, evolvendo secondo l'hamiltoniana completa, coinciderà con una precisa configurazione finale  $|\Phi\rangle$ , di nuovo autostato dell'hamiltoniana libera.

<sup>36</sup>In queste considerazioni si assume che esista una base dello spazio di Hilbert fatta da autostati simultanei dell'hamiltoniana e dell'impulso  $|\vec{k}\rangle$ , ovvero assumiamo implicitamente che per il sistema fisico considerato, non esistano gradi di libertà interni. Se esistessero, comunque, essi fattorizzerebbero con l'impulso e non cambierebbero i termini del problema, solo ci costringerebbero ad appesantire le notazioni...

cioè vale l'equazione operatoriale

$$\Omega_{\pm} = 1 + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V \Omega_{\pm} \quad (2.9.240)$$

da cui si ottiene formalmente che

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{1 - \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V} \quad (2.9.241)$$

ovvero la rappresentazione in serie (cfr.eq.(2.9.235))

$$\Omega_{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V \right)^n \quad (2.9.242)$$

che è niente altro che la serie di Born, come doveva necessariamente accadere, data la (2.9.238).

Ricordiamo il significato fisico degli stati  $|\vec{k}_{\pm}\rangle$ .

Essi sono *autostati dell'hamiltoniana completa*  $H$  (valutati per  $t = 0$ , o, detto altrimenti, nella Heisenberg Picture), relativi all'autovalore  $E$  per cui  $|\vec{k}\rangle$  è l'autostato dell'hamiltoniana imperturbata  $H_0$  su cui entrambi convergono se l'interazione viene spenta, corrispondendo però a due diverse condizioni al contorno (uno contiene onde uscenti, l'altro onde entranti).

Pensando dunque in termini di pacchetti d'onda<sup>37</sup>, lo stato  $|\vec{k}_+\rangle$  origina dallo stato  $|\vec{k}\rangle$ , che, quindi, ne rappresenta il limite nel lontano passato; mentre lo stato  $|\vec{k}_-\rangle$  converge, nel lontano futuro, verso  $|\vec{k}\rangle$ .

Il processo di scattering è allora descritto completamente dalla matrice  $S$  fra gli stati imperturbati, definita come

$$\langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle \equiv \langle \vec{k}' - | \vec{k}_+ \rangle \quad (2.9.243)$$

ed è evidente dalla definizione precedente che i suoi elementi di matrice nella base degli autostati imperturbati dell'impulso forniscono semplicemente

<sup>37</sup>In quanto autostati, gli stati  $|\Psi^{\pm}\rangle$  evolvono nel tempo ( $\hbar = 1$ ) attraverso il semplice fattore di fase  $e^{-iEt}$ , per cui, per esempio, la densità di probabilità spaziale non dipende dal tempo. Per poter parlare di "prima" e "dopo", è necessario pensare questi stati come rappresentazioni limite di pacchetti d'onda i quali, pur non essendo quindi autostati dell'hamiltoniana  $H$ , potranno avere l'energia  $E$  definita con tutta la precisione che vogliamo (purchè finita ...).

Per esempio, nel caso degli stati  $|\vec{k}_+\rangle$ , già lo stesso stato imperturbato  $|\vec{k}\rangle$  dovrà essere visto, invece che come un'onda piana, piuttosto come un pacchetto d'onde di impulso quasi definito e pari a  $\vec{k}$ , il quale, per  $t \rightarrow -\infty$ , è localizzato lontanissimo dal centro di scattering e si muove verso di esso con velocità media  $\vec{v} = \vec{k}/m$ . Evidentemente, per  $t \rightarrow +\infty$ , lo stato sarà localizzato, di nuovo, lontano dal centro di scattering, ma avendo subito l'effetto del potenziale, sarà fatto anche dall'onda sferica uscente originatasi appunto durante il tempo in cui è avvenuta l'interazione con il potenziale di scattering. Nel caso degli stati  $|\vec{k}_-\rangle$ , invece, abbiamo che nel lontano passato lo stato è fatto sia dal pacchetto d'onda di impulso quasi definito che dall'onda sferica entrante, in modo che, nel lontano futuro, esso finisce per coincidere con un pacchetto d'onde quasi-autostato dell'impulso...

l'overlap fra lo stato iniziale  $|\vec{k}_+ \rangle$  (originatosi, nel senso spiegato sopra, da  $|\vec{k} \rangle$  a  $t = -\infty$ ) e lo stato finale  $|\vec{k}'_- \rangle$  (che, per  $t = +\infty$ , darà luogo a  $|\vec{k}' \rangle$ ).

Per quanto visto sopra, poi, essendo

$$\begin{aligned} |\vec{k}_+ \rangle &= \Omega_+ |\vec{k} \rangle \\ |\vec{k}'_- \rangle &= \Omega_- |\vec{k}' \rangle \Rightarrow \langle \vec{k}'_- | = \langle \vec{k}' | \Omega_-^\dagger \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k}'_- | \vec{k}_+ \rangle = \langle \vec{k}' | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \vec{k} \rangle \\ \Rightarrow S &= \Omega_-^\dagger \Omega_+ \end{aligned} \quad (2.9.244)$$

che mostra l'espressione formale della matrice di scattering  $S$  in termini dei due operatori di Møller.

Tornando adesso all'equazione di  $LS$  per gli stati outgoing

$$|\vec{k}_+ \rangle = |\vec{k} \rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\vec{k}_+ \rangle$$

Osserviamo che essa può anche essere scritta come

$$|\vec{k}_+ \rangle = |\vec{k} \rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \Omega_+ |\vec{k} \rangle \quad (2.9.245)$$

in modo che, formalmente, al secondo membro compaia di nuovo soltanto lo stato imperturbato.

L'operatore  $V \Omega_+$  solitamente viene indicato in letteratura con il simbolo  $T$ :

$$T \equiv V \Omega_+ \quad (2.9.246)$$

e quindi, in termini di questo operatore, risulta

$$\begin{aligned} |\vec{k}_+ \rangle &= |\vec{k} \rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T |\vec{k} \rangle \\ \Leftrightarrow |\Psi \rangle &= |\Phi \rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T |\Phi \rangle \end{aligned} \quad (2.9.247)$$

ma  $|\Psi \rangle = \Omega_+ |\Phi \rangle$  per cui, moltiplicando ambo i membri della (2.9.247) per  $V$ , otteniamo

$$V \Omega_+ |\Phi \rangle = V |\Phi \rangle + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T |\Phi \rangle \quad (2.9.248)$$

ovvero, data la definizione (2.9.246), otteniamo l'equazione

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T \quad (2.9.249)$$

da cui si ottiene la soluzione formale seguente

$$\begin{aligned} \left(1 - V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}\right) T = V &\Rightarrow T = \frac{1}{1 - V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}} V \\ \Rightarrow T = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left( V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \right)^n \right\} V = &\quad (2.9.250) \end{aligned}$$

$$= V + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V + \dots \quad (2.9.251)$$

in accordo, di nuovo, con quanto ottenuto considerando la serie di Born. Infatti, per la (2.9.247), risulta chiaramente che

$$(E - H_0 + i\epsilon) |\Psi\rangle = T |\Phi\rangle$$

mentre dalla (2.9.231) si ha altresì che

$$(E - H_0 + i\epsilon) |\Psi\rangle = V \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n |\Phi\rangle$$

e dunque, essendo evidentemente

$$(E - H_0 + i\epsilon) |\Psi\rangle = V |\Psi\rangle = V \Omega_+ |\Phi\rangle \equiv T |\Phi\rangle \quad (2.9.252)$$

deve essere<sup>38</sup>

$$T = V \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n \quad (2.9.253)$$

come mostra, appunto, la (2.9.251).

Osserviamo adesso che gli elementi di matrice dell'operatore  $T$  fra stati di impulso definito sono direttamente legati all'ampiezza di scattering  $f(\vec{k}, \vec{k}')$ , infatti, dalla (2.2.39), abbiamo

$$\begin{aligned} f(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V \Omega_+ | \vec{k} \rangle \\ &= -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \quad (2.9.254) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle = -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} f(\vec{k}, \vec{k}') \quad (2.9.255)$$

Siccome l'ampiezza di scattering descrive appunto il risultato dell'effetto della presenza del potenziale di scattering sull'onda imperturbata, non è certo stupefacente che l'operatore  $T$  sia altresì direttamente legato proprio alla matrice di scattering  $S$  del processo.

<sup>38</sup>Si noti che nella (2.9.250) l'operatore  $V$  è a destra, mentre nella (2.9.253) agisce a sinistra. E' evidente, però che, data la (2.9.251), le due espansioni in serie coincidono ! ...

Per dimostrarlo formalmente occorre osservare che gli stati  $|\Psi^\pm\rangle$ , che abbiamo scritto, seguendo la teoria di Lippmann e Schwinger, come

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} (H - H_0) |\Psi^\pm\rangle \quad (2.9.256)$$

possono essere scritti anche, equivalentemente, nella forma di Low<sup>39</sup> seguente<sup>40</sup>

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) |\Phi\rangle \quad (2.9.257)$$

dove, in entrambi i casi, ricordiamolo,  $E$  rappresenta l'energia dello stato imperturbato  $|\Phi\rangle$ .

Nel caso della equazione di *LS* (2.9.256), occorre determinare la funzione di Green *libera*, mentre nel caso della equazione di Low (2.9.257) occorre determinare, invece, la funzione di Green dell'hamiltoniana completa: dal punto di vista del calcolo esplicito, questo di solito non aiuta, perchè sposta semplicemente la difficoltà dalla funzione d'onda  $\Psi$  al kernel; però può risultare utile in alcune considerazioni di carattere formale come quelle che

<sup>39</sup>F.E. Low : *Boson-fermion scattering in the Heisenberg representation*  
Phys. Rev. 97,1392 (1955)

<sup>40</sup>Partiamo dall'identità operatoriale seguente

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} (B - A) \frac{1}{B} = \frac{1}{B} (B - A) \frac{1}{A}$$

da cui discende l'identità

$$\frac{1}{E - H \pm i\epsilon} - \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} = \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}$$

ovvero

$$\frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} = \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} - \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}$$

Sostituiamo allora l'espressione trovata nella (2.9.256)

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} (H - H_0) |\Psi^\pm\rangle$$

Si ha

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= |\Phi\rangle + \left[ \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} - \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} \right] (H - H_0) |\Psi^\pm\rangle = \\ &= |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) |\Psi^\pm\rangle - \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) [|\Psi^\pm\rangle - |\Phi\rangle] \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che, per la (2.9.256), risulta evidentemente

$$\frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} (H - H_0) |\Psi^\pm\rangle = [|\Psi^\pm\rangle - |\Phi\rangle]$$

Semplificando, si ottiene l'espressione cercata, cioè

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (H - H_0) |\Phi\rangle$$

ci accingiamo a fare adesso.

Torniamo infatti alla matrice  $S$ . Secondo quanto visto prima, si ha

$$\langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' - | \vec{k} + \rangle \quad (2.9.258)$$

ma, per la (2.9.257), risulta

$$|\vec{k}' - \rangle = |\vec{k}' \rangle + \frac{1}{E' - H - i\epsilon} V |\vec{k}' \rangle \quad (2.9.259)$$

avendo qui indicato con  $E'$ , in generale, l'energia dello stato libero  $|\vec{k}' \rangle$ .

Ne segue che<sup>41</sup>

$$\langle \vec{k}' - | = \langle \vec{k}' | + \langle \vec{k}' | V \frac{1}{E' - H + i\epsilon} \quad (2.9.260)$$

per cui abbiamo

$$\langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle \equiv \langle \vec{k}' - | \vec{k} + \rangle = \langle \vec{k}' | \vec{k} + \rangle + \langle \vec{k}' | V \frac{1}{E' - H + i\epsilon} |\vec{k} + \rangle \quad (2.9.261)$$

D'altronde, per la (2.9.256), abbiamo

$$|\vec{k} + \rangle = |\vec{k} \rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\vec{k} + \rangle \quad (2.9.262)$$

dove  $E$  è l'energia dello stato libero  $|\vec{k} \rangle$ . Sostituendo questo risultato al primo  $|\vec{k} + \rangle$  presente al secondo membro dell'equazione (2.9.261), si ha dunque

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle + \langle \vec{k}' | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\vec{k} + \rangle + \\ &+ \langle \vec{k}' | V \frac{1}{E' - H + i\epsilon} |\vec{k} + \rangle \end{aligned} \quad (2.9.263)$$

Ma

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} &= \frac{1}{E - E' + i\epsilon} \langle \vec{k}' | \\ \frac{1}{E' - H + i\epsilon} |\vec{k} + \rangle &= \frac{1}{E' - E + i\epsilon} |\vec{k} + \rangle \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle + \frac{1}{E - E' + i\epsilon} \langle \vec{k}' | V |\vec{k} + \rangle + \frac{1}{E' - E + i\epsilon} \langle \vec{k}' | V |\vec{k} + \rangle = \\ &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle + \langle \vec{k}' | V \Omega_+ | \vec{k} \rangle \left( \frac{1}{E - E' + i\epsilon} - \frac{1}{E - E' - i\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (2.9.264)$$

<sup>41</sup>Abbiamo qui usato il fatto che  $V$  ed  $H$  sono operatori autoaggiunti, per cui risulta

$$\left( \frac{1}{E - H - i\epsilon} V \right)^\dagger = V \frac{1}{E - H + i\epsilon}$$

Consideriamo ora la quantità entro parentesi tonda: essa vale

$$\left( \frac{1}{E - E' + i\epsilon} - \frac{1}{E - E' - i\epsilon} \right) = \frac{-2i\epsilon}{(E - E')^2 + \epsilon^2}$$

D'altronde, se consideriamo la funzione

$$f(x, \epsilon) = \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

è immediato renderci conto che essa gode delle seguenti proprietà

- 1)  $\forall x \neq 0 : \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x, \epsilon) = 0$
- 2)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(0, \epsilon) = +\infty$
- 2)  $\forall \epsilon > 0 : \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \epsilon) dx = \pi$

dunque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x, \epsilon) = \pi \delta(x)$$

per cui, in definitiva, ricordando la definizione dell'operatore  $T$ , si ha

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle + \langle \vec{k}' | V \Omega_+ | \vec{k} \rangle \left( \frac{1}{E - E' + i\epsilon} - \frac{1}{E - E' - i\epsilon} \right) = \\ &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle + [-2i\pi \delta(E - E')] \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \end{aligned} \quad (2.9.265)$$

ovvero

$$\Rightarrow S = I - 2i\pi \delta(E - E') T \quad (2.9.266)$$

## 2.10 Ancora sulla matrice S

Può essere interessante fare ancora alcune considerazioni generali sulla matrice di scattering  $S$ , allo scopo di inquadrarne ancora meglio il significato.

Ripartiamo, per questo, dai principi primi della Meccanica Quantistica. E' noto che se  $|\psi, t\rangle$  è il *ket* che rappresenta al tempo  $t$ , nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  associato al sistema fisico considerato, un certo stato di quello, allora

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t\rangle = H|\psi, t\rangle \quad (2.10.267)$$

dove  $H$  è l'operatore hamiltoniano del sistema che, per ipotesi è autoaggiunto. Quando  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo (sistemi conservativi) l'equazione precedente si integra facilmente nel modo seguente:

$$|\psi, t\rangle = e^{-iHt}|\psi, 0\rangle \quad (2.10.268)$$

e l'operatore unitario

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (2.10.269)$$

viene chiamato *operatore di evoluzione temporale*.

Se  $A$  è una qualsiasi osservabile del sistema, cioè un qualsiasi operatore autoaggiunto, risulta che se indichiamo con  $\bar{A}_\psi(t)$  il valor medio di tale osservabile sullo stato  $|\psi, t\rangle$ , questo, che è un numero reale, è pari a

$$\bar{A}_\psi(t) = \langle \psi, t | A | \psi, t \rangle = \langle \psi, 0 | e^{iHt} A e^{-iHt} | \psi, 0 \rangle \quad (2.10.270)$$

Come si vede, i due diversi punti di vista

- *i*) evolvono gli stati secondo la legge  $|\psi, t\rangle = e^{-iHt}|\psi, 0\rangle$ ,
- *ii*) evolvono solo le osservabili del sistema, secondo la legge  $A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$

sono equivalenti ai fini della valutazione dei valori medi delle osservabili a un dato istante (peraltro arbitrario).

Come al punto di vista *i*) (Schrödinger Picture *SP*) corrisponde l'equazione di moto per lo stato (equazione di Schrödinger)

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t\rangle = H|\psi, t\rangle \quad (2.10.271)$$

così al punto di vista *ii*) (Heisenberg Picture *HP*) corrisponde l'equazione di moto per le osservabili (equazione di Heisenberg)

$$i\frac{\partial}{\partial t}A(t) = [A(t), H] \quad (2.10.272)$$

Sia ora  $U(\alpha)$  una famiglia di operatori unitari, parametrizzata dalla variabile  $\alpha$ . Tanto nello schema di Heisenberg come in quello di Schrödinger è banale rendersi conto che la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\Rightarrow |\psi, \alpha\rangle = U^{-1}(\alpha)|\psi\rangle \\ A &\Rightarrow A_\alpha = U^{-1}(\alpha) A U(\alpha) \end{aligned}$$

lascia invarianti i valori di aspettazione, infatti (omettendo il parametro  $\alpha$ )

$$\langle \psi, \alpha | A_\alpha | \psi, \alpha \rangle = \langle \psi | U^{\dagger-1} U^{-1} A U U^{-1} | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (2.10.273)$$

Se poniamo adesso

$$U(\alpha) \equiv U(t) = e^{-iHt} \quad (2.10.274)$$

ecco che questa trasformazione unitaria ci fa passare dallo schema di Heisenberg a quello di Schrödinger, dato che

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_S &= U(t) |\psi\rangle = U(t) |\psi\rangle_H \\ A_S &= U(t) A_H U^{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.10.275)$$

Ponendo invece

$$U(\alpha) \equiv U^{-1}(t) = e^{iHt} \quad (2.10.276)$$

ovviamente passiamo dallo schema di Schrödinger a quello di Heisenberg.

Affrontiamo adesso il problema generale dell'interazione.

Supponiamo, al solito, che l'hamiltoniana del sistema possa essere scritta come

$$H = H_0 + H_I \quad (2.10.277)$$

dove, convenzionalmente,  $H_0$  rappresenta la parte "libera", cioè quella che solitamente sappiamo trattare per ciò che riguarda l'evoluzione del sistema (autostati, etc ...) e  $H_I$  rappresenta la perturbazione ovvero l'interazione.

Ammettiamo che  $H_0$  e  $H_I$  non dipendano esplicitamente dal tempo e poniamo

$$U_0(t) \equiv e^{-iH_0 t}, \quad U(t) \equiv e^{-iHt} \quad (2.10.278)$$

Indichiamo con  $|\psi, t\rangle_S$  e  $A_S$ , rispettivamente, gli stati e le osservabili nella *SP* (Schrödinger Picture) e con  $|\psi\rangle_H$ ,  $A_H(t)$  i medesimi nella *HP* (Heisenberg Picture).

Accanto a questi due schemi se ne pone un altro, quello che denomineremo *rappresentazione di interazione* (Interaction Picture, *IP*) che, come vedremo, è molto comodo per trattare, appunto, il problema dell'interazione stessa.

Facciamo per questo la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_S &\rightarrow |\psi, t\rangle_I \equiv U_0(-t) |\psi, t\rangle_S = e^{iH_0 t} e^{-iHt} |\psi\rangle_H \\ A_S &A_I(t) \equiv U_0(-t) A_S U_0(t) \end{aligned} \quad (2.10.279)$$

dove si è usato il fatto che  $U_0(-t) = U_0^{-1}(t)$ .

Per quanto detto prima, evidentemente gli stati  $|\psi, t\rangle_I$  e le osservabili  $A_I(t)$  sono "buoni" quanto gli stati  $|\psi, t\rangle_S$  e le osservabili  $A_S$ , oppure gli stati  $|\psi\rangle_H$  e le osservabili  $A_H(t)$  per ciò che concerne lo studio dell'evoluzione del sistema, cioè per quanto riguarda la valutazione dei valori medi delle osservabili, in funzione del tempo. Questi valori medi saranno dati infatti da (nel seguito, per comodità di notazione, ometteremo, quando questo non produrrà possibili confusioni, l'indice  $I$ )<sup>42</sup>

$$\langle \psi, t | A_I(t) | \psi, t \rangle_I \quad (2.10.280)$$

Vediamo ora come evolvono gli stati nella  $IP$ : si ha

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle &= i \frac{\partial}{\partial t} U_0(-t) U(t) |\psi\rangle_H = i \frac{\partial}{\partial t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} |\psi\rangle_H = \\ &= -H_0 e^{iH_0 t} e^{-iHt} |\psi\rangle_H + e^{iH_0 t} H e^{-iHt} |\psi\rangle_H = \\ &= -H_0 |\psi, t\rangle + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} |\psi\rangle_H = \\ &= e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH_0 t} |\psi, t\rangle \equiv H_I(t) |\psi, t\rangle_I \end{aligned} \quad (2.10.281)$$

mentre per le osservabili risulta

$$i \frac{\partial}{\partial t} A(t) = i \frac{\partial}{\partial t} U_0(-t) A_S U_0(t) = [A_I(t), H_0] \quad (2.10.282)$$

In sostanza, quindi, nella  $IP$ , mentre gli stati evolvono con l'hamiltoniana  $H_I(t)$ ,

$$H_I(t) = U_0(-t) H_I U_0(t) \quad (2.10.283)$$

le osservabili evolvono secondo l'hamiltoniana libera  $H_0$ , esattamente come accade, in assenza di interazione, nella Heisenberg Picture.

Veniamo adesso al problema dello scattering.

Assumiamo, per semplicità, che si tratti di scattering di una particella da un potenziale  $V$ , indipendente dal tempo e avente un raggio d'azione finito.

Indichiamo con  $|\Phi_n\rangle$ , secondo la simbologia<sup>43</sup> consueta, un generico auto-stato dell'hamiltoniana libera  $H_0$ , corrispondente all'autovalore  $E_n$ :

$$H_0 |\Phi_n\rangle = E_n |\Phi_n\rangle \quad (2.10.284)$$

<sup>42</sup>Questo schema, naturalmente, coincide con quello di Heisenberg quando l'interazione è assente.

<sup>43</sup>Anche se nei problemi di scattering, tipicamente si lavora nel continuo, tratteremo il problema, per comodità, come se gli autostati dell'hamiltoniana fossero numerabili

Precisiamo adesso che, per il sistema *libero* considerato, il vettore di stato  $|\Phi_n\rangle$  è inteso nella *SP* al tempo  $t = 0$ .

Consideriamo adesso uno di questi autostati di  $H_0$  e facciamolo evolvere secondo l'hamiltoniana completa  $H$  fino al tempo  $t$ , cioè

$$|\Phi_n, t\rangle = U(t) |\Phi_n, 0\rangle \equiv U(t) |\Phi_n, 0\rangle \quad (2.10.285)$$

Questo stato, in generale, non sarà più autostato di  $H_0$  per l'autovalore  $E_n$ , a meno che  $H$  e  $H_0$  non commutino fra loro. Effettuando allora una misura di  $H_0$  al tempo  $t$  sullo stato  $|\Phi_n, t\rangle$ , potremo ottenere valori diversi da  $E_n$ , con certe probabilità che chiamiamo, appunto, *probabilità di transizione*.

Se indichiamo con  $A_{mn}$  l'ampiezza al tempo  $t$  relativa alla transizione dallo stato  $|\Phi_n\rangle$  allo stato  $|\Phi_m\rangle$ , questa è data da

$$A_{mn}(t) = \langle \Phi_m, 0 | U_0^{-1}(t) U(t) | \Phi_n, 0 \rangle \quad (2.10.286)$$

ovvero essa si ottiene facendo il prodotto scalare fra lo stato considerato e l'evoluto libero dello stato verso il quale intendiamo valutare l'ampiezza di transizione, preso allo stesso istante temporale, cioè

$$A_{mn}(t) = \langle \Phi_m, t, lib | \Phi_n, t \rangle \quad (2.10.287)$$

Ricordiamo adesso che, per il sistema completo, cioè anche in presenza di interazione, risulta comunque che  $|\Phi_n, 0\rangle = |\Phi_n\rangle_H = |\Phi_n, 0\rangle_I$ , per cui, se definiamo

$$U_I(t) \equiv U_0^{-1}(t) U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} \quad (2.10.288)$$

si ha

$$\begin{aligned} A_{mn}(t) &= \langle \Phi_m, 0 | U_0^{-1}(t) U(t) | \Phi_n, 0 \rangle = \langle \Phi_m, 0 | U_0^{-1}(t) U(t) | \Phi_n \rangle_H = \\ &= \langle \Phi_m, 0 | \Phi_n, t \rangle_I = \langle \Phi_m, 0 | U_I(t) | \Phi_n, 0 \rangle \\ &\equiv \langle \Phi_m | U_I(t) | \Phi_n \rangle \end{aligned} \quad (2.10.289)$$

In generale quindi, volendo ottenere l'ampiezza di transizione al tempo  $t$  da uno stato generico  $|a\rangle$  a uno stato generico  $|b\rangle$ , si calcolerà la quantità

$$A_{ba} = \langle b | U_I(t) | a \rangle \quad (2.10.290)$$

dove è inteso che  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  sono i vettori che rappresentano gli stati considerati nello schema di Heisenberg relativo al caso imperturbato.

Definiamo adesso, per ragioni di opportunità che diventeranno chiare nel seguito, il seguente operatore unitario  $U(t, t')$

$$U(t, t') |a, t'\rangle_S \equiv |a, t\rangle_S \quad (2.10.291)$$

Dalla definizione si ottiene immediatamente che

$$U(t, t') U(t') |a \rangle_H = U(t) |a \rangle_H \quad \forall |a \rangle \in \mathcal{H} \quad (2.10.292)$$

ovvero, finalmente che risulta

$$U(t, t') = U(t) U^{-1}(t') \quad (2.10.293)$$

In base a questo risultato, è immediato dimostrare adesso che l'operatore  $U(t, t')$  gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} U(t, t') U(t', t'') &= U(t, t'') \\ U(t, t')^{-1} &= U(t', t) \\ U(t+p, t'+p) &= U(t, t') \\ U(t, 0) &= U(t) \end{aligned} \quad (2.10.294)$$

Accanto a questo operatore possiamo definire, in maniera del tutto analoga, l'operatore  $U_I(t, t')$ , ponendo appunto

$$U_I(t, t') |a, t' \rangle_I \equiv |a, t \rangle_I \quad (2.10.295)$$

e si ottiene ancora che risulta

$$U_I(t, t') = U_I(t) U_I^{-1}(t') \quad (2.10.296)$$

e che valgono anche per questo operatore le proprietà (2.10.294). Poichè dalla definizione (2.10.288) è

$$U_I(t) \equiv U_0^{-1}(t) U(t)$$

risulta altresì

$$\begin{aligned} U_I(t, t') &= U_I(t) U_I^{-1}(t') = U_0^{-1}(t) U(t) U^{-1}(t') U_0(t') \\ &= U_0^{-1}(t) U(t, t') U_0(t') \end{aligned} \quad (2.10.297)$$

Torniamo adesso al problema dello scattering e della matrice  $S$ : esistono essenzialmente due modi diversi per rappresentarla, che indicheremo rispettivamente con  $S_I$  ed  $S_H$ , per significare, rispettivamente, *rappresentativo dell'operatore S nella IP* e *rappresentativo dell'operatore S nella HP*.

- **Matrice S in rappresentazione di interazione**

Sia  $\alpha$  un set completo di osservabili per il sistema considerato.

Indichiamo con  $|\alpha\rangle$  la base da esso definita, vista nello schema di Heisenberg relativamente al caso imperturbato.

Supponiamo adesso che uno stato  $|\alpha\rangle$  si sia evoluto liberamente fino al tempo  $-t$  e quindi, fra  $-t$  e  $t'$ , si sia evoluto secondo l'hamiltoniana completa (perturbata dal potenziale  $V$ ). Ci chiediamo qual è, al tempo  $t'$ , l'ampiezza relativa alla transizione dallo stato così ottenuto a un certo stato  $|\beta\rangle$ , indotta dal potenziale di scattering  $V$ .

In altre parole, ci facciamo la seguente domanda: assumendo di considerare il sistema come libero sia prima di  $-t$  che dopo  $t'$ , lo stato che si è ottenuto dopo  $t'$  a partire dallo stato  $|\alpha\rangle$  al tempo  $-t$ , come è connesso con gli stati che risulterebbero da un'evoluzione libera del sistema ?

Per quanto concerne l'ampiezza di transizione di cui sopra, evidentemente avremo

$$A_{\beta\alpha}(t', -t) = {}_S \langle \beta, t', lib | U(t', -t) | \alpha, -t, lib \rangle_S \quad (2.10.298)$$

dove  $|\alpha, -t, lib\rangle_S$  è lo stato  $|\alpha\rangle$  che si è evoluto liberamente fino al tempo  $-t$  e, analogamente  $|\beta, t', lib\rangle_S$  è lo stato  $|\beta\rangle$  che si è evoluto liberamente fino al tempo  $t'$ . Poichè

$$|\alpha, -t, lib\rangle_S = U_0(-t) |\alpha\rangle_H \quad (2.10.299)$$

risulta

$$A_{\beta\alpha}(t', -t) = {}_H \langle \beta | U_0^{-1}(t') U(t', -t) U_0(-t) | \alpha \rangle_H \quad (2.10.300)$$

ovvero, per la (2.10.297),

$$A_{\beta\alpha}(t', -t) = \langle \beta | U(t', -t)_I | \alpha \rangle \quad (2.10.301)$$

Passando al limite la (2.10.301) per  $t$  e  $t'$  che vanno a  $+\infty$  otteniamo proprio l'elemento di matrice  $S_I$  fra i due stati considerati, cioè

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta | S_I | \alpha \rangle = \lim_{t, t' \rightarrow +\infty} A_{\beta\alpha}(t', -t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \beta | U_I(t, -t) | \alpha \rangle \quad (2.10.302)$$

ovvero

$$S_I = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I(t, -t) = U_I(\infty, -\infty) \quad (2.10.303)$$

In questa rappresentazione, dunque, la matrice  $S_I$  fornisce l'effetto che ha lo scattering dal potenziale  $V$  su un set completo di autostati dell'hamiltoniana libera, definiti in rappresentazione di Heisenberg, ovvero, equivalentemente, visti al tempo  $t = 0$  in rappresentazione di Schrödinger.

D'altronde, questi vettori di stato sono niente altro che gli evoluti *liberi* ( $SP$ ), fino al tempo  $t = 0$ , degli stati di scattering iniziale e finale che, avendo assunto che il potenziale abbia raggio di azione finito, sono appunto asintoticamente liberi, cioè autostati di  $H_0$ . In altri termini, possiamo dire altresì che gli stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  sono gli stati di scattering iniziale e finale (quindi, per quanto sopra detto, liberi ...) visti direttamente nella Heisenberg Picture *libera*.

Conveniamo adesso di indicare con

$$|\alpha, -\infty\rangle \quad (2.10.304)$$

il rappresentativo del generico stato libero del sistema, considerato nella  $HP$  libera, e con

$$|\alpha, +\infty\rangle \quad (2.10.305)$$

il rappresentativo nella  $IP$  dello stato medesimo, ottenuto tramite l'evoluzione da  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$  secondo l'hamiltoniana perturbata: si ha quindi

$$\begin{aligned} |\alpha, -\infty\rangle &\equiv |\alpha\rangle \\ |\alpha, +\infty\rangle &\equiv S_I |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (2.10.306)$$

e dunque risulta

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, -\infty | S_I | \alpha, -\infty \rangle = \langle \beta | S_I | \alpha \rangle = \langle \beta, -\infty | \alpha, +\infty \rangle \quad (2.10.307)$$

Chiaramente, per conoscere poi gli elementi di matrice  $S_{\beta\alpha}$ , occorrerà in qualche modo riuscire a esplicitare l'operatore  $U_I(t', -t)$  e quindi passare al limite.

D'altronde, per la (2.10.296), risulta

$$U_I(t', -t) = U_I(t') U_I^{-1}(-t)$$

dove, per la (2.10.288), è

$$U_I(t) = U_0^{-1}(t) U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$$

(la seconda uguaglianza è valida solo se, come abbiamo sempre assunto fin'ora, sia  $H_0$  che  $H$ , e quindi  $V$ , non dipendono esplicitamente dal tempo). Ne segue quindi che

$$\frac{dU_I(t', -t)}{dt'} = \left[ \frac{dU_I(t')}{dt'} \right] U_I^{-1}(-t) \quad (2.10.308)$$

Ma, evidentemente l'operatore  $U_I(t)$  soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned}
i \frac{dU_I}{dt} &= -H_0 e^{iH_0 t} e^{-iHt} + e^{iH_0 t} H e^{-iHt} = \\
&= -e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} \\
&= e^{iH_0 t} [H - H_0] e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} = V_I(t) U_I(t) \\
\Rightarrow \frac{dU_I}{dt} &= -i V(t) U_I(t) \tag{2.10.309}
\end{aligned}$$

dove si è posto<sup>44</sup>

$$V_I(t) \equiv e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} = V(t)$$

Quindi, sostituendo nella (2.10.308), si ha

$$\frac{dU_I(t', -t)}{dt'} = -i V(t') U_I(t') U_I^{-1}(-t) \equiv -i V(t') U_I(t', -t) \tag{2.10.310}$$

D'altronde, evidentemente,  $U_I(t', t') = I$  e con questa condizione al contorno si dimostra che l'equazione (2.10.310) può essere integrata in serie formalmente nel modo seguente:

$$U_I(t', -t) = I + (-i) \int_{-t}^{t'} V(\tau) d\tau + (-i)^2 \int_{-t}^{t'} V(\tau) d\tau \int_{-t}^{\tau} V(\tau') d\tau' + \dots$$

per cui, data la (2.10.303), risulta infine

$$\begin{aligned}
S_I &= I + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau) d\tau + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} V(\tau') d\tau' + \dots \\
&= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1, \dots, d\tau_n P(V(\tau_1) \dots V(\tau_n)) \tag{2.10.311}
\end{aligned}$$

dove  $P(V(\tau_1) \dots V(\tau_n))$  è il *prodotto cronologico (time-ordered)* degli operatori in parentesi, introdotto da Dyson, che coincide con il prodotto degli stessi operatori, con il tempo che cresce andando da destra verso sinistra.

D'altronde, formalmente noi avevamo già trovato, con la (2.9.266), una precisa espressione per la matrice  $S$  nella base degli stati  $|\vec{k}\rangle$ , ovvero

$$S = I - 2\pi i \delta(E - E') T \tag{2.10.312}$$

dove

$$T \equiv V \Omega_+; \quad \Omega_+ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right)^n \tag{2.10.313}$$

<sup>44</sup>Si ricordi che, per ipotesi, il potenziale, in rappresentazione di Schrödinger, non dipende esplicitamente dal tempo, quindi la notazione introdotta non può generare equivoci.

Vediamo come questo risultato (2.10.312) coincida con quanto ottenuto adesso, tramite la (2.10.311).

Operiamo, per semplicità, limitandoci al primo ordine dello sviluppo perturbativo. Evidentemente, dalla (2.10.311) si ha

$$S_I = I - i \int dt e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \quad (2.10.314)$$

Se proviamo allora a valutare l'ampiezza di scattering che ne deriva fra due autostati  $|\vec{k}\rangle$  e  $|\vec{k}'\rangle$  dell'impulso<sup>45</sup>, si ha

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | S_I | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle - i \int dt e^{i(E' - E)t} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \\ &= \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle - 2\pi i \delta(E - E') \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle \end{aligned} \quad (2.10.315)$$

D'altronde, per la (2.3.63), è

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3x e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3x V(\vec{x}) e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')} = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \left( -\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right) f(\vec{k}, \vec{k}')_{Born} \\ &\equiv -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} f(\vec{k}, \vec{k}')_{Born} \end{aligned} \quad (2.10.316)$$

e noi avevamo già dimostrato, con la (2.9.255), che per  $T$  valeva, in generale, la relazione

$$\langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle = -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} f(\vec{k}, \vec{k}') \quad (2.10.317)$$

e dunque, che al primo ordine risulta

$$\langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle = -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} f(\vec{k}, \vec{k}')_{Born} \quad (2.10.318)$$

Il confronto fra la (2.10.316) e la (2.10.318) implica quindi che, al primo ordine perturbativo, risulta

$$\langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle$$

come doveva essere visto che  $T = V\Omega_+$  e, all'ordine più basso, dalla definizione (2.10.313) segue evidentemente che  $\Omega_+ = I$ .

<sup>45</sup>Al solito, assumeremo che gli autostati dell'impulso siano normalizzati a  $\delta$ , ovvero che corrispondano loro le funzioni d'onda seguenti

$$\Phi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

• **Matrice S in rappresentazione di Heisenberg**

Consideriamo, di nuovo, l'ampiezza di scattering (2.10.301)

$$\begin{aligned} A_{\beta\alpha}(t', -t) &= \langle \beta | U(t', -t)_I | \alpha \rangle = \langle \beta | U_I(t') U_I^{-1}(-t) | \alpha \rangle = \\ &= \langle \beta | U_I(t') U_I(t) | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.10.319)$$

e definiamo i seguenti limiti deboli

$$\begin{aligned} |\alpha 1 \rangle &= \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I(t) | \alpha \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I(0, -t) | \alpha \rangle = \\ &= U_I(0, -\infty) | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.10.320)$$

$$\begin{aligned} |\beta 2 \rangle &= \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I^{-1}(t) | \beta \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I(0, t) | \beta \rangle = \\ &= U_I(0, +\infty) | \beta \rangle \end{aligned} \quad (2.10.321)$$

Lo stato  $|\alpha 1 \rangle$  è, nella *IP*, l'evoluto fino al tempo  $t = 0$  di uno stato che, al tempo  $t = -\infty$  era rappresentato, sempre nella *IP*, dal vettore  $|\alpha \rangle$ , ovvero quello che già abbiamo chiamato  $|\alpha+ \rangle$  mentre lo stato  $|\beta 2 \rangle$  è l'evoluto fino al tempo  $t = 0$  di uno stato che, al tempo  $t = +\infty$ , sarà rappresentato dal vettore  $|\beta \rangle$ , ovvero quello che già avevamo chiamato  $|\beta- \rangle$ .

Nel seguito supporremo che  $|\alpha \rangle$  e  $|\beta \rangle$  siano autostati dell'hamiltoniana libera  $H_0$ . Evidentemente, da quanto precede, ne segue il risultato ben noto

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta- | \alpha+ \rangle \quad (2.10.322)$$

ovvero, definendo

$$|\alpha- \rangle \equiv S_H^\dagger |\alpha+ \rangle \quad (2.10.323)$$

che

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta- | S_H | \alpha- \rangle \quad (2.10.324)$$

da confrontare con quanto ricavato prima, nella (2.10.302), cioè

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta | S_I | \alpha \rangle \quad (2.10.325)$$

Chiaramente  $S_H$  rappresenta ancora lo stesso operatore di scattering, ma in una base differente da quella in cui abbiamo potuto definire  $S_I$ . Per esempio, nel caso in cui  $|\alpha \rangle$  sia un pacchetto di impulso  $\vec{k}$ , mentre  $|\alpha+ \rangle$  e  $|\alpha- \rangle$  sono entrambi autostati<sup>46</sup> dell'hamiltoniana completa

<sup>46</sup>Lo stato  $|\alpha 1 \rangle = |\alpha+ \rangle$  è l'evoluto perturbato fino al tempo  $t = 0$  dell'autostato  $|\alpha \rangle$  dell'hamiltoniana  $H_0$  al tempo  $t = -\infty$ . Questo significa che lo stato, all'inizio, era un autostato anche di  $H$ , poichè, per  $t = -\infty$ ,  $H$  e  $H_0$  coincidevano: dopo esso si è evoluto secondo l'hamiltoniana completa, quindi ha mantenuto il suo carattere di autostato di  $H$  (e non più di  $H_0$ ). Questo stesso argomento vale tale e quale anche per  $|\alpha + \infty \rangle$ , che è l'evoluto perturbato fino al tempo  $t = +\infty$  del solito autostato  $|\alpha \rangle$  di  $H_0$  al tempo  $t = -\infty$ . Anche per  $|\beta 2 \rangle = |\beta- \rangle$  si può infine trarre la stessa conclusione, in quanto anche per  $t = +\infty$  la perturbazione, per ipotesi, è assente.

$H$ ,  $|\alpha \rangle \equiv |\alpha - \infty \rangle$  è autostato solo di  $H_0$ , mentre  $|\alpha + \infty \rangle$  lo è, di nuovo, dell'hamiltoniana completa  $H$ . Risulta

$$\begin{aligned} |\alpha + \rangle &= U_I(0, -\infty) |\alpha \rangle = U_I(0, -\infty) |\alpha - \infty \rangle = \\ &= U_I(0, -\infty) S_I^{-1} |\alpha + \infty \rangle = U_I(0, -\infty) U_I(-\infty, +\infty) |\alpha + \infty \rangle = \\ &= U_I(0, +\infty) |\alpha + \infty \rangle \end{aligned} \quad (2.10.326)$$

$$|\alpha - \rangle = U_I(0, +\infty) |\alpha - \infty \rangle \quad (2.10.327)$$

$$|\alpha - \infty \rangle = U_I^{-1}(0, +\infty) |\alpha - \rangle = U_I(+\infty, 0) |\alpha - \rangle \quad (2.10.328)$$

$$|\alpha + \infty \rangle = U_I^{-1}(0, +\infty) |\alpha + \rangle = U_I(+\infty, 0) |\alpha + \rangle \quad (2.10.329)$$

per cui, essendo per definizione

$$\begin{aligned} |\alpha + \infty \rangle &\equiv S_I |\alpha - \infty \rangle \\ |\alpha + \rangle &\equiv S_H |\alpha - \rangle \end{aligned}$$

si ha infine

$$\begin{aligned} |\alpha - \rangle &= U_I(0, +\infty) |\alpha - \infty \rangle = S_H^{-1} U_I(0, +\infty) |\alpha + \infty \rangle \\ \Rightarrow S_H U_I(0, +\infty) |\alpha - \infty \rangle &= U_I(0, +\infty) |\alpha + \infty \rangle \\ \Rightarrow |\alpha + \infty \rangle &= U_I^{-1}(0, +\infty) S_H U_I(0, +\infty) |\alpha - \infty \rangle \end{aligned}$$

ovvero

$$S_I = U_I^{-1}(0, +\infty) S_H U_I(0, +\infty) \quad (2.10.330)$$

$$S_H = U_I(0, +\infty) S_I U_I^{-1}(0, +\infty) \quad (2.10.331)$$

**Per concludere ...**

Abbiamo visto, nell'ambito della teoria di  $LS$ , che, partendo dall'autostato  $|\Phi\rangle$  di  $H_0$ , relativo all'autovalore  $E$ , si possono definire due autostati dell'hamiltoniana completa  $H$ , entrambi per lo stesso autovalore  $E$ , indicati con  $|\Psi^\pm\rangle \equiv |\Psi_\pm\rangle$ , i quali si riducono entrambi allo stato imperturbato  $|\Phi\rangle$  quando la perturbazione  $V = H - H_0 \rightarrow 0$ . Risulta

$$|\Psi_\pm\rangle \equiv |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm \epsilon} V |\Psi_\pm\rangle \quad (2.10.332)$$

Nel caso particolare in cui  $|\Phi\rangle$  sia un autostato dell'impulso  $|\vec{k}\rangle$ , rappresentato nella  $SP$  dall'onda piana  $(\frac{1}{2\pi})^{2/3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , abbiamo visto che gli stati  $|\Psi_\pm\rangle$  potevano essere scritti come

$$|\vec{k}_\pm\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \left( e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f_\pm(\vec{k}, \vec{k}') \frac{e^{\pm ikr}}{r} \right) \quad (2.10.333)$$

Abbiamo quindi indicato

- con il nome di *stato outgoing* lo stato  $|\Psi_+\rangle$  che, oltre all'onda incidente, in zona asintotica è fatto da onde uscenti dal centro di scattering;
- con il nome di *stato ingoing* lo stato  $|\Psi_-\rangle$  che, invece, a parte l'onda incidente, è composto da onde entranti, cioè convergenti verso il centro di scattering.

Abbiamo anche visto come, in termini degli operatori di Møller, sia

$$|\Psi_\pm\rangle = \Omega_\pm |\Phi\rangle \quad (2.10.334)$$

e abbiamo quindi scritto la matrice di scattering  $S$  nella base degli autostati dell'impulso (e quindi dell'hamiltoniana libera  $H_0$ ) nel modo seguente:

$$\langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' - | \vec{k}_+ \rangle = \langle \vec{k}' | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \vec{k} \rangle \quad (2.10.335)$$

$$\Leftrightarrow S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ \quad (2.10.336)$$

Quindi abbiamo cercato di descrivere il processo di scattering in termini di operatori di evoluzione temporale e, nella  $IP$ , abbiamo ottenuto

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle \beta | S | \alpha \rangle \equiv \langle \beta - \infty | S | \alpha - \infty \rangle \quad (2.10.337)$$

$$S = U_I(\infty, -\infty) \quad (2.10.338)$$

La prima osservazione che si impone adesso è che gli stati  $|\alpha - \infty\rangle$  sono esattamente gli stati che, nella trattazione formale, avevamo indicato con  $|\Phi\rangle$ , cioè gli autostati di  $H_0$  nella  $HP$  dell'evoluzione libera. Quindi

$$\begin{aligned} |\vec{k}\rangle &\equiv |\vec{k} - \infty\rangle &\Rightarrow |\vec{k} - \infty\rangle &= \Omega_-^\dagger |\vec{k}_-\rangle \\ |\vec{k}_-\rangle &\equiv \Omega_- |\vec{k}\rangle \end{aligned} \quad (2.10.339)$$

e dunque, come si è visto con la (2.10.335), risulta

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k}' | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle - 2\pi i \delta(E - E') \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \\
 &= \langle \vec{k}' - \infty | S | \vec{k} - \infty \rangle = \langle \vec{k}' | U_I(\infty, -\infty) | \vec{k} \rangle \\
 &\Leftrightarrow \Omega_-^\dagger \Omega_+ \equiv U_I(\infty, -\infty)
 \end{aligned} \tag{2.10.340}$$

Evidentemente, questo risultato unito al fatto che, come si è già detto,  $|\alpha - \infty \rangle = |\alpha \rangle$ , implica anche che

$$|\alpha + \infty \rangle \equiv S |\alpha - \infty \rangle \equiv S |\alpha \rangle = \Omega_-^\dagger \Omega_+ |\alpha \rangle = \Omega_-^\dagger |\alpha + \rangle \tag{2.10.341}$$

ovvero, in definitiva, che

$$|\alpha \pm \infty \rangle = \Omega_-^\dagger |\alpha \pm \rangle \Leftrightarrow |\alpha \pm \rangle = \Omega_- |\alpha \pm \infty \rangle \tag{2.10.342}$$

Prima di lasciare l'argomento delle rappresentazioni della matrice  $S$ , vale la pena spendere due parole ancora riguardo agli **stati asintotici**. Purtroppo le notazioni non sono delle più felici e si prestano a generare equivoci, anche perché non c'è un'unica convenzione al riguardo.

Abbiamo visto che uno stato di scattering  $|\Psi_{\pm} \rangle$  può essere sempre completamente individuato, fissata l'hamiltoniana  $H$ , dagli stati asintotici<sup>47</sup> da cui prende origine per  $t \rightarrow -\infty$  oppure a cui dà luogo per  $t \rightarrow +\infty$ . Questi stati vengono anche indicati, rispettivamente, con<sup>48</sup>  $|\Psi_{in} \rangle$  e  $|\Psi_{out} \rangle$ . Per definizione, risulta

$$|\Psi_+ \rangle \equiv \Omega_+ |\Psi_{in} \rangle = \left( 1 + \frac{1}{E - H + i\epsilon} \right) |\Psi_{in} \rangle \tag{2.10.343}$$

$$|\Psi_- \rangle \equiv \Omega_- |\Psi_{out} \rangle = \left( 1 + \frac{1}{E - H - i\epsilon} \right) |\Psi_{out} \rangle \tag{2.10.344}$$

Secondo la loro definizione,  $|\Psi_{in} \rangle$  e  $|\Psi_{out} \rangle$  sono autostati dell'hamiltoniana imperturbata  $H_0$ .

Abbiamo quindi

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta - | \alpha + \rangle = \langle \beta_{out} | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \alpha_{in} \rangle \tag{2.10.345}$$

Purtroppo, in vari testi, in realtà si finisce per identificare  $|\Psi_+ \rangle$  con  $|\Psi_{in} \rangle$  e  $|\Psi_- \rangle$  con  $|\Psi_{out} \rangle$  per cui si trova scritto

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle$$

<sup>47</sup>J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic quantum fields*, ch.16 McGraw-Hill 1965

<sup>48</sup>Si osservi che  $|\Psi_+ \rangle$  è uno stato *outgoing* mentre  $|\Psi_- \rangle$  è uno stato *ingoing*, per cui

$$\begin{aligned}
 \text{stato outgoing } |\Psi_+ \rangle &= \Omega_+ |\Psi_{in} \rangle \\
 \text{stato ingoing } |\Psi_- \rangle &= \Omega_- |\Psi_{out} \rangle
 \end{aligned}$$

e già questo non aiuta la chiarezza ...

ma deve essere chiaro che, mentre  $|\Psi_{in}\rangle$  e  $|\Psi_{out}\rangle$  sono, generalmente, stati "semplici" in quanto costituiti da particelle non interagenti fra loro, questo non è vero per  $|\Psi_{-}\rangle$  e  $|\Psi_{+}\rangle$ , che, di solito, sono molto complicati. Scrivere

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{out} | S | \alpha_{in} \rangle$$

corrisponde a considerare gli stati come "semplici" e "scaricare" sull'operatore  $S$  tutta la complessità prodotta dal processo di scattering, mentre scrivere

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{-} | \alpha_{+} \rangle$$

richiede di saper valutare gli stati di scattering stessi, nella loro completezza.

Per evitare fraintendimenti, nel seguito noi useremo la notazione  $|i\rangle$  per intendere lo stato asintotico a  $t = -\infty$  ed  $|f\rangle$  per intendere quello raggiunto a  $t = +\infty$ , per cui risulterà

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \tag{2.10.346}$$

## 2.11 Ampiezza di scattering e indice di rifrazione

Fino a ora abbiamo considerato processi di scattering singoli, cioè su un solo centro scatteratore, e dunque necessariamente incoerenti fra loro.

Vedremo adesso<sup>49</sup> come lo scattering coerente su vari centri di scattering possa render conto della nascita di un *indice di rifrazione del mezzo*, legato direttamente all'ampiezza di scattering in avanti del singolo processo, il quale descrive appunto l'effetto coerente, sul vettore d'onda della particella che si propaga nel mezzo, dei ripetuti urti casuali con i centri scatteratori presenti in esso.

Ripartiamo dalla teoria dello scattering di Lippmann-Schwinger.

Abbiamo visto che se  $H_0$  è l'hamiltoniana libera, allora, formalmente, gli stati stazionari di scattering ( $E > 0$ ) corrispondenti all'hamiltoniana

$$H = H_0 + V(r)$$

si scrivono nella forma seguente (stati outgoing)

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\Psi\rangle \quad (2.11.347)$$

e soddisfano (in rappresentazione delle coordinate) l'equazione di Schroödinger

$$\left[ \nabla^2 + k^2 - U(r) \right] \Psi = 0 \quad (2.11.348)$$

dove

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \quad U(r) = V(r) \frac{2m}{\hbar^2} \quad (2.11.349)$$

Abbiamo anche visto che, se lo stato imperturbato  $|\Phi\rangle$  è l'autostato dell'impulso

$$|\vec{k}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (2.11.350)$$

allora

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}, \vec{k}') \right] \quad (2.11.351)$$

dove

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -(2\pi)^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \Psi \rangle = -(2\pi)^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \quad (2.11.352)$$

<sup>49</sup>M. Lax: *Multiple scattering of waves*,  
Rev. Mod. Phys. 23, 287 (1951)

essendo  $T$  l'operatore<sup>50</sup> definito in modo tale che

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T|\Phi\rangle \quad (2.11.353)$$

dove  $|\Phi\rangle$  è l'onda imperturbata, mentre, evidentemente,  $\frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T|\Phi\rangle$  rappresenta proprio l'onda scatterata quando quella incidente è appunto  $|\Phi\rangle$ . Abbiamo quindi lo schema

$$(\text{onda scatterata}) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T \cdot (\text{onda incidente}) \quad (2.11.354)$$

Nel caso in cui, adesso, i centri scatteratori siano molti ma tutti uguali fra loro, se indichiamo (in rappresentazione di Schroödinger) con  $\Phi(\vec{r})$  l'onda incidente, allora avremo, in generale

$$\Psi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + \sum_j F(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (2.11.355)$$

dove  $F(\vec{r}, \vec{r}_j)$  rappresenta l'onda scatterata dal centro scatteratore che si trova in  $\vec{r}_j$ . D'altronde, l'onda incidente sul centro scatteratore  $j$ -esimo, che indicheremo con  $\Psi^j(\vec{r})$ , sarà data dalla somma dell'onda incidente e di tutte le altre onde diffuse, meno quella scatterata proprio dal centro  $j$ -esimo stesso, ovvero

$$\Psi^j(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) - F(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (2.11.356)$$

e, per quanto detto sopra, deve essere

$$F(\vec{r}, \vec{r}_j) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T(\vec{r}_j) \Psi^j(\vec{r}) \quad (2.11.357)$$

dove abbiamo indicato con  $T(\vec{r}_j)$  l'operatore  $T$  relativo al centro di scattering posto in  $\vec{r}_j$  invece che nell'origine.

D'altronde, per l'omogeneità dello spazio, dati due generici stati  $\Phi_a(\vec{r})$  e  $\Phi_b(\vec{r})$ , per quanto riguarda gli elementi di matrice dell'operatore  $T(\vec{r}_j)$ , deve essere naturalmente che

$$\langle \Phi_b(\vec{r} - \vec{r}_j) | T(\vec{r}_j) | \Phi_a(\vec{r} - \vec{r}_j) \rangle \equiv \langle \Phi_b(\vec{r}) | T | \Phi_a(\vec{r}) \rangle \quad (2.11.358)$$

dove  $T$  è l'operatore sopra definito nel caso in cui il centro scatteratore sia nell'origine. Dunque,

$$\begin{aligned} T_{ba}(\vec{r}_j) &\equiv \langle \Phi_b(\vec{r}) | T(\vec{r}_j) | \Phi_a(\vec{r}) \rangle = \langle \Phi_b(\vec{r} + \vec{r}_j - \vec{r}_j) | T(\vec{r}_j) | \Phi_a(\vec{r} + \vec{r}_j - \vec{r}_j) \rangle = \\ &= \langle \Phi_b(\vec{r} + \vec{r}_j) | T | \Phi_a(\vec{r} + \vec{r}_j) \rangle \end{aligned} \quad (2.11.359)$$

<sup>50</sup>Nella teoria formale dello scattering, l'operatore  $T$  è definito in termini dell'operatore di Møller  $\Omega_+$ , come  $T \equiv V \Omega_+$ .

Se poi gli stati  $\Phi(\vec{r})$  sono autostati dell'impulso, ne segue allora che

$$\Phi(\vec{r} + \vec{r}_j) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j} \Phi(\vec{r}) \quad (2.11.360)$$

per cui risulta infine

$$\begin{aligned} T_{ba}(\vec{r}_j) &= \langle \Phi_b(\vec{r} + \vec{r}_j) | T | \Phi_a(\vec{r} + \vec{r}_j) \rangle = e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_b)\cdot\vec{r}_j} \langle \Phi_b(\vec{r}) | T | \Phi_a(\vec{r}) \rangle = \\ &= e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_b)\cdot\vec{r}_j} T_{ba} \end{aligned} \quad (2.11.361)$$

Questo risultato (2.11.361), unito alle equazioni prima riportate, cioè

$$\Psi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + \sum_j F(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (2.11.362)$$

$$\Psi^j(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) - F(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (2.11.363)$$

$$F(\vec{r}, \vec{r}_j) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T(\vec{r}_j) \Psi^j(\vec{r}) \quad (2.11.364)$$

definiscono completamente il problema dello scattering multiplo su centri scatteratori uguali.

Risulta che, fissati i centri di scattering in  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ , sarà

$$\Psi(\vec{r} | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \Phi(\vec{r}) + \sum_j \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T(\vec{r}_j) \Psi^j(\vec{r} | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n) \quad (2.11.365)$$

dove  $\Psi^j(\vec{r} | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n)$  rappresenta l'onda incidente sul centro scatteratore  $j$ -esimo, data l'onda incidente  $\Phi$  e gli  $n - 1$  centri scatteratori nelle posizioni  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n$ .

Supponiamo adesso che i centri di scattering siano distribuiti in modo del tutto casuale e indichiamo con  $\mathcal{P}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) d\vec{r}_1, \dots, d\vec{r}_n$  la probabilità che essi di trovino nell'elemento di volume  $d\vec{r}_1, \dots, d\vec{r}_n$ , posizionato in  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ . Evidentemente, la distribuzione di probabilità relativa alla posizione del centro scatteratore  $j$ -esimo risulterà quindi data da

$$\mathcal{P}(\vec{r}_j) = \int \mathcal{P}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) d\vec{r}_1, \dots, d\vec{r}_{j-1} d\vec{r}_{j+1}, \dots, d\vec{r}_n \quad (2.11.366)$$

Indichiamo anche con  $\mathcal{P}(\vec{r}_j | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n)$  la densità di probabilità che i centri scatteratori siano posizionati in  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n)$ , essendo il centro scatteratore  $j$ -esimo, posizionato, per certo, in  $\vec{r}_j$ . Chiaramente, se queste densità di probabilità sono scorrelate (indipendenti), sarà

$$\mathcal{P}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \equiv \mathcal{P}(\vec{r}_1) \dots \mathcal{P}(\vec{r}_n) \quad (2.11.367)$$

$$\mathcal{P}(\vec{r}_j | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n) \equiv \mathcal{P}(\vec{r}_1) \dots \mathcal{P}(\vec{r}_{j-1}) \cdot \mathcal{P}(\vec{r}_{j+1}) \dots \mathcal{P}(\vec{r}_n) \quad (2.11.368)$$

ma, in ogni caso, anche in presenza di correlazione, per definizione di probabilità condizionata, è

$$\mathcal{P}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \mathcal{P}(\vec{r}_j) \cdot \mathcal{P}(\vec{r}_j | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n) \quad (2.11.369)$$

Definiamo allora

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \int \Psi(\vec{r}|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \mathcal{P}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n \quad (2.11.370)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\vec{r}) \rangle_j &= \int \Psi(\vec{r}|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n) \cdot \\ &\cdot \mathcal{P}(\vec{r}_j|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_{j-1} d\vec{r}_{j+1} \dots d\vec{r}_n \end{aligned}$$

dove il primo termine rappresenta la funzione  $\Psi$  mediata sulle posizioni di tutti i centri scatteratori, mentre il secondo termine fornisce la stessa media ma fatta su tutti i centri, meno quello  $j$ -esimo, considerato fisso, nella posizione  $\vec{r}_j$ .

Riprendiamo ora la equazione (2.11.365) e mediamola sulle posizioni dei centri scatteratori, ovvero moltiplichiamo ambo i membri per  $\mathcal{P}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n$  e integriamo. Risulta

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\vec{r}) \rangle &= \Phi(\vec{r}) + \langle \sum_j \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T(\vec{r}_j) \Psi^j(\vec{r}|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_n) \rangle \\ &= \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \sum_j \int \mathcal{P}(\vec{r}_j) d\vec{r}_j T(\vec{r}_j) \langle \Psi^j(\vec{r}) \rangle_j \quad (2.11.371) \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della (2.11.369) e si è indicato con  $\langle \Psi^j(\vec{r}) \rangle_j$  il campo effettivo "medio" sul centro  $j$ -esimo (che, come abbiamo già detto, differisce dall'onda totale solo per l'onda emessa dallo stesso centro scatteratore  $j$ -esimo ...).

Se i centri sono molti e disposti in modo casuale e ciascuna onda scatterata ha un'ampiezza che è molto piccola rispetto a quella incidente, potremo allora ragionevolmente assumere che

$$\langle \Psi^j(\vec{r}) \rangle_j \approx \langle \Psi(\vec{r}) \rangle \quad (2.11.372)$$

per cui risulta

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \bar{T} \langle \Psi(\vec{r}) \rangle \quad (2.11.373)$$

dove abbiamo posto

$$\bar{T} = \sum_j \int \mathcal{P}(\vec{r}_j) d\vec{r}_j T(\vec{r}_j) = \int \rho(\vec{r}) T(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.11.374)$$

avendo definito con  $\rho(\vec{r})$  la densità dei centri scatteratori (ricordiamo che, per ipotesi, questi sono tutti equivalenti fra loro ...).

D'altronde, ricordando la (2.11.361), gli elementi di matrice fra autostati dell'impulso dell'operatore  $\bar{T}$  sono dati da

$$\bar{T}_{ba} = T_{ba} \int d^3r \rho(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_b) \cdot \vec{r}} = T_{aa} \rho (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_a - \vec{k}_b) \quad (2.11.375)$$

dove abbiamo indicato con  $\rho$  in valor medio della densità dei centri scatteratori, supposti distribuiti in modo uniforme (sebbene scorrelato).

Ma dalla equazione (2.11.373)

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \bar{T} \langle \Psi(\vec{r}) \rangle$$

applicando l'operatore  $(E - H_0)$  a entrambi i membri dell'equazione, si ricava

$$(E - H_0) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \bar{T} \langle \Psi(\vec{r}) \rangle$$

ovvero

$$(E - H_0 - \bar{T}) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0 \quad (2.11.376)$$

Ma l'operatore  $\bar{T}$  è diagonale sugli autostati dell'impulso, esattamente come l'hamiltoniana libera  $H_0$ , infatti

$$\langle \vec{k}' | H_0 | \vec{k} \rangle = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (2.11.377)$$

$$\langle \vec{k}' | \bar{T} | \vec{k} \rangle = \rho (2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) T_{\vec{k}\vec{k}} \quad (2.11.378)$$

quindi si possono cercare soluzioni della (2.11.376) che siano ancora autostati simultanei dell'impulso.

D'altronde, per la (2.11.352), risulta

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -(2\pi)^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \Rightarrow \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle = -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} f(\vec{k}, \vec{k}') \quad (2.11.379)$$

per cui, sostituendo nella equazione (2.11.378), si ha

$$\langle \vec{k}' | \bar{T} | \vec{k} \rangle = \rho (2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \left( -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} \right) f(\vec{k}, \vec{k}) \quad (2.11.380)$$

Ma se i centri scatteratori sono disposti in modo casuale anche per quanto riguarda eventuali loro gradi di libertà interni (spin), non esistendo alcuna direzione privilegiata, sarà comunque

$$f(\vec{k}, \vec{k}) = F(k)$$

ovvero l'ampiezza di scattering in avanti potrà dipendere solo dal modulo dell'impulso  $k$ , e quindi, in completa analogia con la (2.11.377), avremo

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}' | \bar{T} | \vec{k} \rangle &= \rho (2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \left( -\frac{\hbar^2}{m(2\pi)^2} \right) f(\vec{k}, \vec{k}) = \\ &= -4\pi \rho \frac{\hbar^2}{2m} F(k) \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.11.381)$$

Dunque, per quanto riguarda l'equazione (2.11.376) (cercando ancora le soluzioni fra gli autostati dell'impulso), abbiamo

$$(E - H_0 - \bar{T}) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + 4\pi \rho \frac{\hbar^2}{2m} F(k) \right) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0 \quad (2.11.382)$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2; \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (2.11.383)$$

Ne segue allora che  $\langle \Psi(\vec{r}) \rangle$  deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\left[ \nabla^2 + k^2 + 4\pi \rho F(k) \right] \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0 \quad (2.11.384)$$

Definendo allora l'indice di rifrazione del mezzo  $n$  in modo che risulti

$$k^2 + 4\pi \rho F(k) \equiv n^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad (n^2 - 1) = \frac{4\pi \rho F(k)}{k^2} \quad (2.11.385)$$

è immediato che la soluzione corrispondente alla soluzione imperturbata

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.11.386)$$

è, quindi, la seguente

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.11.387)$$

Come si vede, l'indice di rifrazione è legato direttamente all'ampiezza di scattering in avanti: se  $n^2 - 1 \ll 1$ , ne segue in particolare che

$$n^2 - 1 \approx 2(n - 1) = \frac{4\pi\rho F}{k^2} \quad \Rightarrow \quad n \approx 1 + 2\pi\rho \frac{F}{k^2} \quad (2.11.388)$$

Ma noi sappiamo che il Teorema ottico lega direttamente la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti con la sezione d'urto totale, quindi la relazione precedente implica che anche  $n$  abbia *necessariamente* una parte immaginaria, legata alla sezione d'urto totale, che vale

$$\mathcal{I}m(n) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \mathcal{I}m(F) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \frac{k\sigma}{4\pi} = \frac{\rho\sigma}{2k} \quad (2.11.389)$$

ovvero, separando la parte reale e quella immaginaria dell'indice di rifrazione  $n$ , abbiamo

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathcal{R}e(n)\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\mathcal{I}m(n)\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.11.390)$$

la quale mostra come l'ampiezza dell'onda coerente, a causa degli scattering che subisce, si attenua mentre si propaga nel mezzo, secondo il fattore<sup>51</sup>

$$e^{-\frac{\rho\sigma}{2}\vec{n}\cdot\vec{r}} \quad (2.11.391)$$

ovvero che l'intensità (modulo quadro dell'ampiezza ... !) decresca con una lunghezza di attenuazione  $\lambda$  pari a

$$\lambda = \frac{1}{\rho\sigma} \quad (2.11.392)$$

Si osservi che questa dipendenza della soluzione  $\Psi$  dalle coordinate, in realtà viola il fatto che lo stato permanga un autostato dell'impulso. La ragione è che  $\overline{T}_{ba}$  non è hermitiano.

Comunque, le conclusioni ottenute costituiscono una valida approssimazione della realtà, almeno fino a che la lunghezza di attenuazione  $\lambda$  definita dalla (2.11.392) rimane molto grande rispetto alla lunghezza d'onda di De Broglie dello stato imperturbato, cioè finché

$$\lambda \gg \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho\sigma}{k} \ll 1 \quad (2.11.393)$$

per cui il processo di attenuazione avviene in un modo che possiamo senz'altro considerare "adiabatico".

---

<sup>51</sup>Si è qui posto  $\vec{n} = \vec{k}/k$ .

Vediamo adesso l'applicazione piú naturale di quanto abbiamo visto al caso dell'ottica.

Come sappiamo dalla Fisica Generale, nel caso di un mezzo dielettrico trasparente omogeneo e isotropo, la luce si propaga in esso con una velocità

$$w = \frac{c}{n} \quad (2.11.394)$$

dove  $n$  è appunto l'indice di rifrazione del mezzo, funzione, in generale, della frequenza, legato alla costante dielettrica  $\epsilon(\omega)$  del mezzo e alla sua permeabilità magnetica  $\mu(\omega)$  dalla relazione

$$n^2(\omega) = \epsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (2.11.395)$$

che, visto che i mezzi dielettrici piú comuni sono amagnetici ( $\mu = 1$ ), semplificheremo nella relazione

$$n^2 = n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = \epsilon \quad (2.11.396)$$

La costante dielettrica  $\epsilon$  lega il vettore spostamento elettrico  $\vec{D}$  al campo elettrico  $\vec{E}$ , risultando

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (2.11.397)$$

dove  $\vec{P}$  è il vettore densità di polarizzazione del mezzo.

Per calcolare  $\epsilon$  occorre, evidentemente, esplicitare la dipendenza

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (2.11.398)$$

dove  $\chi$  è la suscettività elettrica. In questo modo risulterà infine

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi \quad (2.11.399)$$

Per determinare la suscettività elettrica, iniziamo al solito considerando una sola molecola del mezzo e assumendo che essa abbia un solo elettrone, il quale risponde elasticamente al campo elettrico<sup>52</sup> dell'onda incidente, con frequenza di risonanza  $\omega_0$  e costante di smorzamento  $\gamma$ . Immaginiamo che l'onda incidente sia un'onda piana, linearmente polarizzata, ovvero che

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad \text{con} \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.11.400)$$

dove, al solito, si è definito il vettore d'onda  $\vec{k}$  in termini del versore di propagazione dell'onda  $\vec{n}$  nel modo consueto, cioè ponendo

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (2.11.401)$$

<sup>52</sup>Qui trascureremo gli effetti magnetici sul moto dell'elettrone, che corrisponde ad assumere che la sua velocità sia sempre ampiamente non relativistica, cioè  $v \ll c$ .

Assumendo che lo spostamento  $x_0$  dell'elettrone indotto dall'onda rispetto alla sua posizione di riposo sia molto minore della lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica (cioè  $kx_0 \ll 1$ ), possiamo trascurare la dipendenza di  $\vec{E}$  dalle coordinate spaziali e scrivere dunque l'equazione per il moto dell'elettrone nel modo seguente:

$$m\ddot{\vec{x}} + m\gamma\dot{\vec{x}} + m\omega_0^2\vec{x} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.11.402)$$

La soluzione particolare<sup>53</sup> la cerchiamo del tipo

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.11.403)$$

per cui, in definitiva, otteniamo

$$(-m\omega^2 - im\omega\gamma + m\omega_0^2)\vec{x}_0 e^{-i\omega t} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.11.404)$$

ovvero

$$\vec{x}_0 = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \vec{E}_0 \quad (2.11.405)$$

e questo risultato corrisponde a dire che si è determinato nella molecola un dipolo indotto dall'onda, il quale oscilla alla pulsazione  $\omega$  con ampiezza

$$\vec{p} \equiv e\vec{x}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \vec{E}_0 \quad (2.11.406)$$

Supponiamo ora, più realisticamente, che ci siano  $N$  molecole per unità di volume, con  $Z$  elettroni per molecola e che, invece di una singola costante di richiamo uguale per tutti, ci siano  $f_i$  elettroni per molecola con frequenza di risonanza  $\omega_i$  e costante di smorzamento  $\gamma_i$ . Evidentemente la densità di polarizzazione, in queste ipotesi, sarà data da

$$\vec{P} = N \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2} \vec{E}_0 \quad (2.11.407)$$

ovvero la suscettività elettrica del mezzo risulterà

$$\chi = N \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2} \quad (2.11.408)$$

e dunque avremo, finalmente, il risultato classico<sup>54</sup> ben noto secondo cui

$$\epsilon = n^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2} \quad (2.11.409)$$

<sup>53</sup>Il contributo alla soluzione proveniente dall'equazione omogenea associata assumeremo che sia nullo. Esso, infatti, sarà un'oscillazione smorzata, legata alla soluzione particolare e alle condizioni iniziali che, però, essendo appunto smorzata, pur di attendere un tempo sufficiente, diventerà comunque trascurabile.

<sup>54</sup>Questo risultato descrive accuratamente il processo di propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo dielettrico ed esso rimane valido anche in Meccanica Quantistica, con la sola avvertenza di ridefinire opportunamente il significato delle  $f_i$ .

dove  $f_i$  indica la forza dell'oscillatore (*oscillator strength*) e soddisfa la regola di somma

$$\sum_i f_i = Z \quad (2.11.410)$$

Cerchiamo ora di ottenere di nuovo questo risultato, visto che ben descrive la realtà del fenomeno, ma sulla base della conclusione (2.11.385), cioè sulla base del fatto che abbiamo dimostrato risultare

$$(n^2 - 1) = \frac{4\pi\rho F(k)}{k^2} \quad (2.11.411)$$

dove  $\rho$  è il numero di centri scatteratori per unità di volume,  $F(k)$  l'ampiezza di scattering in avanti del processo considerato e  $k$  l'impulso imperturbato dell'onda incidente.

Come abbiamo visto, il campo elettrico  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$  dell'onda incidente induce in ogni centro scatteratore (molecola) un momento di dipolo periodico di pulsazione  $\omega$  e di ampiezza

$$\vec{p} = \xi \vec{E}_0 \quad (2.11.412)$$

dove  $\xi$  è dato dalla relazione

$$\xi = \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\gamma_i\omega - \omega^2} \quad (2.11.413)$$

Il punto è che questo dipolo indotto, essendo dipendente dal tempo, irraggerà energia elettromagnetica !

Sappiamo, infatti dalla Fisica Classica che, per una carica accelerata posta nell'origine del riferimento tangente (e quindi anche quando  $\beta \ll 1$ ), risulta

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \left[ \frac{e}{c} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{r} \right]_{rit} \quad \vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = [\vec{n} \times \vec{E}]_{rit} \quad (2.11.414)$$

Per quanto riguarda, dunque, il campo elettrico irraggiato  $\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t)$  nel punto  $\vec{r}$  e al tempo  $t$ , assumendo che l'oscillazione della carica  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$  avvenga, appunto, intorno all'origine e che la sua ampiezza sia tale che  $\omega x_0 \ll 1$  (e dunque che il moto sia non relativistico), essendo evidentemente

$$\dot{\vec{\beta}} \Big|_{rit} = \frac{1}{c} \ddot{\vec{x}}(t - r/c) = -\frac{\omega^2}{c} \vec{x}_0 e^{-i\omega(t-r/c)} \quad (2.11.415)$$

risulta

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) &= \frac{e}{c^2} (-\omega^2) \frac{1}{r} [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}_0)] e^{-i\omega(t-r/c)} = \\ &= k^2 \frac{e}{r} [(\vec{n} \times \vec{x}_0) \times \vec{n}] e^{i(kr-\omega t)} \end{aligned} \quad (2.11.416)$$

mentre per il campo magnetico, siccome risulta

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}_0)] = \vec{n} \times [\vec{x}_0 - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}_0)] = \vec{n} \times \vec{x}_0 \quad (2.11.417)$$

si ha<sup>55</sup>

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = k^2 \frac{e}{r} (\vec{n} \times \vec{x}_0) e^{i(kr - \omega t)} \quad (2.11.418)$$

Da quanto sopra, segue in particolare che un dipolo oscillante  $\vec{p}$  irraggerà in modo da determinare in zona d'onda un campo elettrico (di radiazione) pari appunto a

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = k^2 [(\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n}] \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (2.11.419)$$

Ma noi abbiamo visto che, sotto l'azione dell'onda piana

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.11.420)$$

la molecola considerata acquista un momento di dipolo

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2} \vec{E}_0 = \xi \vec{E}_0 \quad (2.11.421)$$

quindi ogni molecola produce un'onda scatterata pari a

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = k^2 \xi [(\vec{n} \times \vec{E}_0) \times \vec{n}] \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (2.11.422)$$

ovvero, introducendo il versore che descrive la polarizzazione dell'onda incidente

$$\vec{e}_0 \equiv \frac{\vec{E}_0}{|\vec{E}_0|} \quad (2.11.423)$$

avremo un'onda complessiva pari a

$$\begin{aligned} E_0 \left\{ \vec{e}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + k^2 \xi \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} [(\vec{n} \times \vec{e}_0) \times \vec{n}] \right\} e^{-i\omega t} = \\ = E_0 \left\{ \vec{e}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + k^2 \xi \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} [\vec{e}_0 - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_0)] \right\} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.11.424)$$

<sup>55</sup>Come è noto, infatti, il campo elettrico di radiazione di dipolo giace nel piano  $(\vec{n}, \vec{x}_0)$ , definito appunto dal vettore di momento di dipolo  $e\vec{x}_0$  e dal versore  $\vec{n}$ , che va dal punto dove si trova il dipolo al punto dove vogliamo conoscere il campo. Il campo magnetico, invece, ha la stessa ampiezza del campo elettrico ma è ortogonale al piano suddetto.

In avanti allora, dove evidentemente  $\vec{n} \cdot \vec{e}_0 = 0$  essendo l'onda trasversale, abbiamo

$$E_0 \vec{e}_0 \left\{ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + k^2 \xi \frac{e^{ikr}}{r} \right\} e^{-i\omega t} \quad (2.11.425)$$

e il confronto<sup>56</sup> con la (2.2.38) mostra che l'ampiezza di scattering in avanti del processo è dunque

$$F(k) = k^2 \xi = k^2 \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2} \quad (2.11.426)$$

Usando questa espressione nella relazione (2.11.411), cioè nella relazione

$$(n^2 - 1) = \frac{4\pi\rho F(k)}{k^2} \quad (2.11.427)$$

si ottiene infine, in accordo con il risultato diretto (2.11.409), l'espressione

$$n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2} \quad (2.11.428)$$

dove abbiamo ora indicato con  $N$  la densità dei centri scatteratori che nella (2.11.411) avevamo indicato con  $\rho$ .

---

<sup>56</sup>In questo risultato è presente la dipendenza dal tempo, mentre nella (2.2.38) questa è assente. La ragione è che, nel caso della (2.2.38), si è cercato espressamente la dipendenza spaziale dello stato stazionario. Va da sé che questo, a cui corrisponde l'energia  $E_0$ , evolverà necessariamente nel tempo attraverso il fattore di fase  $e^{-iE_0 t/\hbar} = e^{-i\omega t} \dots$



# Appendice A

## Appendix: Generalità

### A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ( $1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$ ,  $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ )

<i>carica dell'elettrone</i>	$e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues}$
<i>massa dell'elettrone</i>	$m = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g}$
<i>costante di Planck</i>	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$
<i>velocità della luce</i>	$c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s}$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito come

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA ngstrom};$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli  $\frac{eV}{c^2}$  e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre  $c = 1$ , scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità  $\frac{eV}{c}$  e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità  $v$ , possiede un impulso<sup>1</sup>

$$p = mv = mc\beta = 0.511\beta \frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

e la costante di struttura fina  $\alpha$  è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{A.1.2})$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (*SI*) ed in quello di Heaviside-Lorentz (*HL*) risulta<sup>2</sup>

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \quad (\text{A.1.4})$$

<sup>1</sup>Se  $\beta \equiv v/c \approx 1$ , allora, in realtà, come è dimostrato nel testo,  $p = mc\gamma\beta$ , dove  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

<sup>2</sup>Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per  $\sqrt{4\pi}$ , e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= \rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

In particolare,  $q_{HL} = \sqrt{4\pi}q_{cgs}$ , da cui, se  $\hbar = c = 1$ , ne segue che  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ .

Ricordiamo infine che, sempre nel *SI*, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

<b>Factor</b>	<b>Name</b>	<b>Symbol</b>	<b>Factor</b>	<b>Name</b>	<b>Symbol</b>
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-1}$	deci	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	exa	E	$10^{-3}$	milli	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	pico	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	kilo	k	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hecto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deka	da	$10^{-24}$	yocto	y

Figura A.1: *Prefissi nel Sistema Internazionale*