

Fisica Moderna

Vol. IV

Alcune considerazioni sulle simmetrie CPT

E. Iacopini

9 giugno 2024



*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.

Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623)

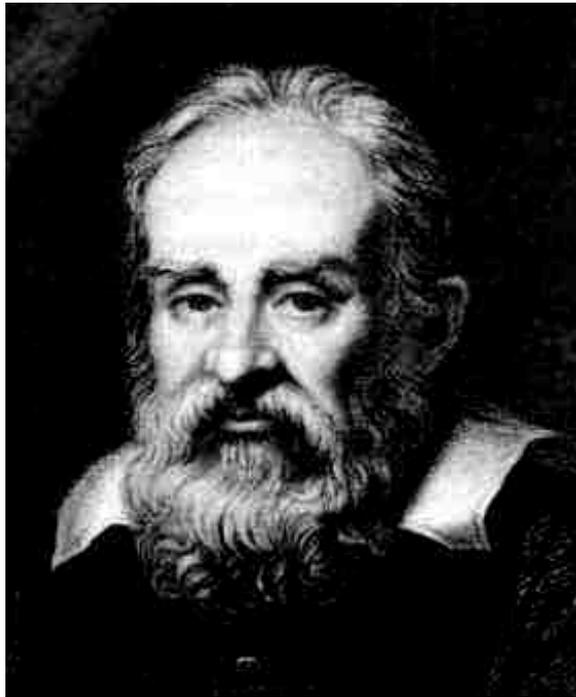


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

Indice

1	Simmetrie discrete	7
1.1	Cosa intendiamo per Simmetria in MQ	7
1.2	La Parità in MQ	24
1.3	La Coniugazione di Carica in MQ	27
1.4	La simmetria di inversione temporale T	28
1.5	L'operatore T^2	36
1.6	La violazione di parità dal punto di vista sperimentale	40
1.7	Il sistema dei $K^0 - \bar{K}^0$ e la violazione di CP	45
1.8	Il momento di dipolo elettrico, P e T	55
1.9	Ancora sul vettore di Runge-Lenz	66
1.10	Il decadimento del π^0	70
1.11	Il decadimento del positronio	75
A	Appendix: Generalità	79
A.1	Le unità di misura	79
A.2	Le notazioni	82

Capitolo 1

Simmetrie discrete

1.1 Cosa intendiamo per Simmetria in MQ

Nel Modello Standard (*MS*) le particelle elementari e i mediatori delle interazioni sono descritti da un campo $\Phi(x)$, in generale *complesso*, le cui proprietà di trasformazione dipendono dalle caratteristiche specifiche della particella stessa.

Se il campo è intrinsecamente complesso, ovvero se, più propriamente, $\Phi^\dagger(x)$ è indipendente¹ da $\Phi(x)$, allora particella e antiparticella risultano distinte (pur avendo esse la stessa massa e lo stesso spin), mentre se questo non accade come, per esempio, nel caso di un campo reale, la particella descritta è una sola e particella e antiparticella coincidono².

Il discriminare fra i due casi è l'eventuale presenza di carica (non necessariamente elettrica ...) associata alla particella: affinché essa possa essere antiparticella di se stessa è necessario che tutte le sue cariche (ovvero i numeri quantici additivi che la caratterizzano, come la carica elettrica, il numero barionico, la stranezza, etc ...) siano nulle.

Dunque, per esempio, nel caso dei fermioni, essendo essi tipicamente carichi, la particella risulta solitamente distinta³ dall'antiparticella⁴.

¹Questa affermazione va intesa nel senso che i campi $(\Phi + \Phi^\dagger)$ e $(\Phi - \Phi^\dagger)$ sono indipendenti.

²Un caso in cui questo accade è, per esempio, quello del fotone: il campo A_μ è intrinsecamente reale e il fotone non è diverso dall'antifotone.

³Questo non è in nessun modo una necessità legata al fatto che il campo usato per descrivere i fermioni è spinoriale, infatti il campo di Majorana, pur essendo spinoriale, non distingue la particella dall'antiparticella.

⁴Per i neutrini non è del tutto chiaro se questo sia vero, cioè se si tratti di particelle di Dirac (\Rightarrow neutrino \neq antineutrino) o di Majorana (\Rightarrow neutrino \equiv antineutrino). Ricordiamo, per prima cosa, che noi siamo soliti definire *antineutrino* quella particella che, interagendo, può convertirsi in un leptone carico positivamente, cioè in un *antileptone*, o che, in un processo di decadimento debole, viene emesso simultaneamente a un leptone carico negativamente. In modo analogo definiamo il *neutrino* come quella particella che, interagendo, può convertirsi in un leptone negativo oppure che è emesso, in un processo

Nemmeno per i bosoni neutri (come il fotone) però la cosa è così automatica: come sappiamo, il π^0 è antiparticella di se stesso, ma il K^0 no !

Il punto sta unicamente nella legge di trasformazione del campo sotto la coniugazione di carica C , una simmetria discreta che, insieme all'inversione temporale T e alla parità P , cercheremo adesso di approfondire.

Per chiarire meglio il significato e il modo di agire di queste simmetrie, inizieremo ricordando come operano nell'ambito dello schema di prima quantizzazione, ovvero nell'ambito della Meccanica Quantistica non relativistica elementare.

Anche se può sembrare banale, inizieremo con il puntualizzare, in questo contesto, la distinzione fra proprietà *cinematiche* e *dinamiche* di un sistema fisico, perchè questo è un punto che deve essere ben chiaro, per poter afferrare più compiutamente il concetto stesso di simmetria.

A questo scopo inizieremo richiamando, innanzitutto, alcuni aspetti formali relativi alla formulazione della MQ , che dovrebbero comunque essere già a tutti ben noti, ma che sono essenziali affinché sia chiara la distinzione in questione.

Questi aspetti riguardano

- la struttura matematica entro cui vengono descritti gli stati di un dato sistema fisico e la loro evoluzione temporale (il moto);
- la struttura fissata attraverso le osservabili cinematiche (quantità misurabili, la cui definizione operativa prescinde dalle interazioni, ovvero dalle forze) cioè attraverso le relazioni (non causali) esistenti fra di loro, come le loro regole di commutazione, le quali determinano appunto l'algebra delle osservabili del sistema;

di decadimento debole, simultaneamente a un leptone positivo.

E' lecito ora chiedersi, però, quale sia la caratteristica intrinseca che rende un neutrino capace di produrre leptoni negativi e che conferisce all'antineutrino le caratteristiche opposte.

Se i neutrini hanno massa diversa da zero, come ormai sembra ben assodato in base ai dati sperimentali di oscillazione di neutrino raccolti, allora sono possibili due risposte distinte.

La prima possibilità è che i neutrini posseggano una *carica*, il numero leptonico, che si conserva rigorosamente e che vale $+1$ per neutrini e leptoni carichi negativamente, e -1 per antineutrini e leptoni carichi positivamente. In questo caso, il neutrino è distinto dalla sua antiparticella dal numero leptonico, in modo simile a quanto avviene per esempio per l'elettrone quanto alla carica elettrica. Si parla allora di "particella di Dirac" in quanto gli stati (liberi) di una tale particella possono essere descritti in termini di soluzioni dell'equazione di Dirac, cioè

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0$$

- la struttura generale delle equazioni della dinamica, che forniscono la relazione causale fra le variabili cinematiche.

Iniziamo dal primo punto, cioè dalla struttura matematica.

Dalla teoria elementare della MQ (prima quantizzazione) sappiamo che

1. ogni stato puro è descritto da un raggio \mathcal{R} definito in generale come sottospazio lineare unidimensionale, privato del vettore nullo in uno spazio di Hilbert separabile⁵ \mathcal{H} , ovvero

$$\mathcal{R} = \{|\psi\rangle = a e^{i\alpha} |\psi_0\rangle, a > 0, \alpha \in R, \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1\};$$

C'è però una seconda possibilità, anch'essa in accordo con i dati sperimentali, secondo la quale la particella che chiamiamo *neutrino* potrebbe essere semplicemente lo stato di una particella neutra di spin 1/2, caratterizzato dal possedere elicità negativa, mentre per la particella che chiamiamo *antineutrino* essa sarebbe positiva.

In questo caso neutrino e antineutrino sono semplicemente la stessa particella, differenziate solo dallo stato di spin: il numero leptonico non ha nessun significato fisico.

In questo scenario, un neutrino siffatto può essere descritto in termini di soluzioni dell'equazione di Majorana (E. Majorana, *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone*, Il Nuovo Cimento 14 (1937) 171-184), la quale stabilisce che

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) - m\Psi_C(x) = 0$$

dove $\Psi_C(x) \equiv i\gamma^2 \Psi^*(x)$ (questo è equivalente alla notazione che useremo in seguito per il campo di Dirac, in cui $\Psi_C = C^{-1} \bar{\Psi}^t$, con $C = i\gamma^0 \gamma^2 = -C^{-1}$).

Nel caso particolare in cui $\Psi = \Psi_C$, l'equazione descrive una particella che coincide con la propria antiparticella, ovvero una particella di Majorana.

Se i neutrini fossero privi di massa, le due descrizioni sarebbero indistinguibili. Essendo in questo caso l'elicità un buon numero quantico (cioè invariante di Lorentz), scegliere una descrizione o l'altra risulta solo in una pura operazione di natura nominalistica, in cui si sostituisce, per esempio, l'espressione "elicità negativa" a quella "numero leptonico positivo" e viceversa.

I neutrini di Dirac hanno due componenti sterili che quelli di Majorana non hanno, ma, *nel caso di massa nulla*, non ci sono comunque differenze osservabili fra i due tipi di neutrino legate alle interazioni deboli.

Se però i neutrini hanno una massa non nulla, siccome elicità e chiralità sono ora due cose diverse e l'elicità non è un buon numero quantico (come lo dimostra il fatto che un opportuno boost di Lorentz è in grado di cambiarne il valore ...) ecco che un neutrino di Majorana può comportarsi sia come un neutrino che come un antineutrino di Dirac.

Nel caso di neutrini massivi di Majorana diventa possibile, per esempio, il decadimento *doppio beta* senza emissione di neutrini (decadimento proibito nel primo schema in cui il numero leptonico L è conservato),

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-$$

proprio perchè la particella neutra creata nel decadimento β^- ha, per ipotesi, elicità +1 e questa può essere riassorbita dal nucleo $(A, Z + 1)$ con conseguente seconda emissione β^- , dato che, nel caso di massa diversa da zero, il proiettore chirale $\chi_- \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}$ presente nella lagrangiana debole determina un elemento di matrice non nullo anche riguardo all'annichilazione di una particella di elicità +1, purché massiva.

⁵Uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è separabile se e solo se ogni suo elemento può essere scritto come sovrapposizione di elementi di una base ortonormale numerabile opportuna $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$.

2. se $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono due vettori dello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati, allora, se α e β sono due numeri complessi qualsiasi, il vettore $|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ individua uno stato⁶ del sistema (principio di sovrapposizione lineare) possibile;
3. ogni quantità misurabile è rappresentata da un operatore lineare hermitiano da \mathcal{H} in sé;
4. i soli valori ottenibili da una misura di un'osservabile sono gli autovalori dell'operatore hermitiano a essa associato e la misura fa "precipitare" lo stato assegnato in un autostato dell'osservabile misurata corrispondente all'autovalore osservato;
5. dati i vettori $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ normalizzati, allora la quantità $\langle\phi|\psi\rangle$ rappresenta l'ampiezza di transizione da $|\psi\rangle$ a $|\phi\rangle$, ovvero $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ fornisce la probabilità che una osservabile che abbia $|\phi\rangle$ come autovettore, determini, con una sua misura, la transizione $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$;
6. il valore di aspettazione di una data osservabile Q su uno stato puro $|\psi\rangle$ è $\langle\psi|Q|\psi\rangle$ quando $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Veniamo ora al secondo punto, relativo alle proprietà cinematiche delle osservabili del sistema: le relazioni cinematiche (non causali) sono definite attraverso l'algebra degli operatori costruiti a partire da quelli che rappresentano le variabili del sistema e sono usualmente formulate come regole di commutazione, le quali determinano appunto la struttura dell'algebra delle osservabili. Esempi ben noti sono

$$[x, p] = i\hbar \quad (1.1.1)$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.1.2)$$

Altre proprietà interne (ulteriori gradi di libertà ...) del sistema come, per esempio, lo spin isotopico, richiedono l'introduzione di altre variabili e delle relative regole di commutazione sia fra di loro che con le altre variabili che servono a caratterizzare il sistema.

Circa, infine, l'ultimo punto relativo alla dinamica, sappiamo che quest'ultima è definita completamente dall'operatore hamiltoniano H , il quale è esso stesso una osservabile, funzione, in generale, di variabili cinematiche (\vec{p} , \vec{x} , etc...).

⁶Ignoreremo, per il momento, il problema dell'esistenza delle regole di superselezione.

Nella Schrödinger Picture (*SP*), come sappiamo, sono gli stati a evolvere nel tempo, secondo l'equazione

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (1.1.3)$$

mentre nella Heisenberg Picture (*HP*) evolvono le osservabili e risulta equivalentemente che, se H non dipende esplicitamente dal tempo, è

$$i \hbar \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = [Q(t), H] \quad (1.1.4)$$

Dopo aver puntualizzato questi aspetti generali ben noti, torniamo adesso alla domanda riguardo a cosa debba essere considerato una Simmetria in *MQ*.

Partiamo per questo dal fatto che il prodotto scalare fra vettori di stato che siano normalizzati ha un significato fisico ben preciso: la quantità

$$| \langle \alpha | \beta \rangle |^2 \quad (1.1.5)$$

rappresenta la probabilità di transizione fra gli stati $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, ovvero, per esempio, la probabilità che, effettuando una misura⁷ sullo stato $|\beta\rangle$, si possa ottenere come risultato lo stato $|\alpha\rangle$.

Si capisce quindi la ragione per la quale, a una Simmetria del sistema, che assumeremo genericamente rappresentata dall'operatore \mathcal{O} , sia richiesto di conservare la (1.1.5), ovvero di essere tale per cui

$$| \langle \mathcal{O}\alpha | \mathcal{O}\beta \rangle |^2 = | \langle \alpha | \beta \rangle |^2 \quad \forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.1.6)$$

In altre parole, a una Simmetria viene richiesto di essere un isomorfismo fra gli stati (dunque fra i raggi ...), tale da mantenere invariata la soggiacente struttura probabilistica che, come sappiamo, ha rilevanza fisica in quanto definisce, per esempio, le probabilità di transizione (si ricordi la definizione di simmetria di Weyl: una simmetria deve agire su un sistema in modo che esso risulti indistinguibile da quello di partenza).

Segue allora dalla (1.1.6) che possono aversi solo due casi⁸: o l'operatore \mathcal{O}

⁷L'osservabile corrispondente deve avere $|\alpha\rangle$ come suo autovettore ...

⁸Una dimostrazione di questa conclusione si trova sia nell'Appendice al Capitolo 20 del libro

E. P. Wigner: *Group Theory and its applications to the quantum mechanics of the atomic spectra*, Academic Press, New York 1959.

come pure nell'Appendice A del secondo Capitolo del libro

S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge Univ. Press, 1995.

Vediamo in breve come procede il ragionamento.

Ricordiamo per questo che una Simmetria va considerata, in buona sostanza, come un cambiamento di punto di vista.

Se un osservatore vede un sistema fisico in uno stato (puro) rappresentato da un raggio \mathcal{R}_1 o \mathcal{R}_2 o, genericamente, \mathcal{R}_n , allora un altro osservatore, in virtù della trasformazione di simmetria, vedrà il sistema, rispettivamente, negli stati descritti dai raggi $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2, \dots, \mathcal{R}'_n$: i due osservatori, però, osservando lo stesso sistema da punti di vista differenti, dovranno comunque concordare sul valore delle probabilità di transizione fra stati corrispondenti, i.e.

$$P(\mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}_j) \equiv P(\mathcal{R}'_i \rightarrow \mathcal{R}'_j) \quad (1.1.7)$$

e questa è l'unica condizione che viene imposta affinché si possa parlare di simmetria !

Si osservi dunque che, in base a quanto stiamo dicendo, a priori dobbiamo intendere la simmetria come definita solo sui raggi, da cui ne segue la possibilità di definirla su almeno un vettore normalizzato per raggio.

Ricordiamo a questo proposito che un vettore di stato normalizzato $|e\rangle$ è definito e definisce un raggio $\mathcal{R} \equiv \{a e^{i\alpha} |e\rangle, a > 0, \alpha \in R\}$ nello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati (il raggio è, tecnicamente, un sottospazio vettoriale unidimensionale di \mathcal{H} , privato dell'origine...).

Questo significa che se \mathcal{R}_a ed \mathcal{R}_b sono due raggi qualsiasi, individuati rispettivamente, modulo una fase, dai vettori normalizzati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$, allora S è una Simmetria se e solo se, essendo $S\mathcal{R}_a$ ed $S\mathcal{R}_b$ i raggi corrispondenti attraverso S rispettivamente a \mathcal{R}_a e \mathcal{R}_b e $|S\phi\rangle$ e $|S\psi\rangle$ i vettori normalizzati che, sempre modulo una fase, individuano i raggi trasformati, risulta

$$|\langle S\phi|S\psi\rangle|^2 = |\langle \phi|\psi\rangle|^2 \quad (1.1.8)$$

Possiamo dimostrare adesso, seguendo la strada tracciata da Wigner già nel 1931, che, in questa ipotesi, S individua in modo univoco (a meno di una fase globale) un operatore unitario oppure antiunitario che opera dallo spazio di Hilbert in sé.

Iniziamo dimostrando che S deve essere invertibile sui raggi e per questo procediamo per assurdo. Se assumiamo che S non sia invertibile, allora esisteranno due raggi differenti \mathcal{R}_a e \mathcal{R}_b , individuati da due opportuni vettori normalizzati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ linearmente indipendenti, i quali sono mandati da S nello stesso raggio $S\mathcal{R}$, e quindi

$$|S\phi\rangle = |S\psi\rangle \quad (1.1.9)$$

Ma allora, da un lato avremmo che $|\langle S\phi|S\psi\rangle|^2 = |\langle S\phi|S\phi\rangle|^2 = 1$ mentre, essendo, per ipotesi, i due vettori $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ indipendenti e normalizzati, non può che essere $|\langle S\phi|S\psi\rangle|^2 = |\langle \phi|\psi\rangle|^2 < 1$, da cui l'assurdo.

Consideriamo adesso una base ortonormale numerabile in \mathcal{H} (lo spazio di Hilbert, per ipotesi, è separabile e dunque ammette almeno una base ortonormale numerabile), fatta dai vettori $\{|e_k\rangle, k = 1, \dots, n, \dots\}$, ciascuno dei quali individua, quindi, il raggio \mathcal{R}_k con $\mathcal{R}_k \equiv \{a e^{i\alpha} |e_k\rangle\}$.
Per ipotesi, dunque

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (1.1.10)$$

Consideriamo adesso i raggi trasformati dalla simmetria S , cioè

$$\mathcal{R}_k \rightarrow S\mathcal{R}_k \equiv \mathcal{R}'_k = \{b e^{i\beta} |S e_k\rangle\} \quad (1.1.11)$$

dove i vettori normalizzati $|S e_k\rangle$, sulla base del fatto che è loro richiesto solo di definire i raggi $S\mathcal{R}_k$, sono evidentemente definiti a meno di una fase arbitraria.

Vogliamo dimostrare che anche $\{|S e_k\rangle, k = 1, \dots, n, \dots\}$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert dato. Infatti, dalla (1.1.8) segue che

$$|\langle e_i | e_j \rangle|^2 = \delta_{ij} = |\langle S e_i | S e_j \rangle|^2 \quad (1.1.12)$$

e dunque i vettori $|S e_j\rangle$ costituiscono un set di vettori ortonormali.

Affinché essi costituiscano una base, occorre anche che non esista alcun vettore non nullo che sia ortogonale a tutti loro.

Di nuovo procediamo per assurdo e sia $|\Omega\rangle$ questo vettore che, senza perdita di generalità, potremo assumere normalizzato. Per ipotesi

$$\forall j : \langle \Omega | S e_j \rangle = 0 \quad (1.1.13)$$

Il vettore $|\Omega\rangle$ individua comunque un raggio che, essendo S invertibile sui raggi, è controimmagine di un altro opportuno raggio descritto (modulo una fase) dal vettore normalizzato che indicheremo con $|\hat{\Omega}\rangle$, per cui risulta

$$|\Omega\rangle = |S \hat{\Omega}\rangle \quad (1.1.14)$$

Sostituendo nella (1.1.13) e usando la (1.1.8), abbiamo

$$\forall j : 0 = |\langle \Omega | S e_j \rangle|^2 = |\langle S \hat{\Omega} | S e_j \rangle|^2 = |\langle \hat{\Omega} | e_j \rangle|^2 \quad (1.1.15)$$

e questo è impossibile perché $|\hat{\Omega}\rangle$ è normalizzato e quindi non nullo e $\{|e_i\rangle\}$ è, per ipotesi, una base: resta così dimostrato che $\{|S e_j\rangle\}$ è anch'essa una base ortonormale.

Ciascuno dei vettori $|S e_j\rangle$ è definito a meno di una fase arbitraria: per poter estendere la definizione di S ai vettori dello spazio di Hilbert dobbiamo adesso fissare una opportuna convenzione di fase al riguardo. Per fare questo, consideriamo i vettori

$$|\phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_k\rangle), \quad k > 1 \quad (1.1.16)$$

Ciascuno di essi individua univocamente il raggio \mathcal{R}_k che, attraverso la simmetria S , sarà trasformato nel raggio $\mathcal{R}'_k \equiv S\mathcal{R}_k$, a sua volta individuato da un opportuno versore $|S \phi_k\rangle$, definito, per ogni k , a meno di una fase arbitraria. Per la (1.1.8), abbiamo

$$|\langle S \phi_k | S e_1 \rangle|^2 = |\langle \phi_k | e_1 \rangle|^2 = \frac{1}{2} = |\langle S \phi_k | S e_k \rangle|^2 \quad (1.1.17)$$

mentre, per la stessa ragione, tutti gli altri coefficienti dello sviluppo di $|S \phi_k\rangle$ nella base $|S e_j\rangle$ sono identicamente nulli. Dunque

$$|S \phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\alpha} |S e_1\rangle + e^{i\beta} |S e_k\rangle) \quad (1.1.18)$$

Ma $|S\phi_k\rangle$ è definito a meno di una fase e così pure i vettori normalizzati $|Se_j\rangle$: possiamo dunque fissare la convenzione di fase in modo che risulti

$$\forall k > 1: |S\phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Se_1\rangle + |Se_k\rangle) \quad (1.1.19)$$

e resta comunque ancora indeterminata una fase "globale" del tutto irrilevante ...

Ma che cosa accade a un generico vettore normalizzato, relativo a un generico raggio \mathcal{R} ? Partiamo dunque dal vettore

$$|\psi\rangle = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \quad (1.1.20)$$

che assumeremo, senza perdita alcuna di generalità, essere tale che $\lambda_1 \neq 0$ (altrimenti basterà rinominare i vettori della base ...). Sia adesso $|S\psi\rangle$ il vettore (definito a meno di una fase) che individua il raggio trasformato $S\mathcal{R}$.

Chiaramente, dalla definizione stessa di base, segue che

$$|S\psi\rangle = \sum_j \lambda'_j |Se_j\rangle \quad (1.1.21)$$

Ma usando la (1.1.8), ricaviamo subito che

$$\forall j: |\langle e_j|\psi\rangle|^2 = |\langle Se_j|S\psi\rangle|^2 \Rightarrow |\lambda_j|^2 = |\lambda'_j|^2 \quad (1.1.22)$$

e analogamente

$$\forall k > 1: |\langle \phi_k|\psi\rangle|^2 = |\langle S\phi_k|S\psi\rangle|^2 \Rightarrow |\lambda_1 + \lambda_k|^2 = |\lambda'_1 + \lambda'_k|^2 \quad (1.1.23)$$

da cui, usando il fatto che abbiamo assunto, per ipotesi, $\lambda_1 \neq 0$, si ha

$$\left| \frac{\lambda_1 + \lambda_k}{\lambda_1} \right|^2 = \left| \frac{\lambda'_1 + \lambda'_k}{\lambda'_1} \right|^2 \Rightarrow \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \right|^2 \quad (1.1.24)$$

la quale, visto che deve altresì risultare $|\lambda_k/\lambda_1| = |\lambda'_k/\lambda'_1|$, implica che

$$(a) : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \quad (1.1.25)$$

$$(b) : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \right)^* \quad (1.1.26)$$

A priori potrebbe accadere, comunque, che, al variare di k potesse valere l'una o l'altra delle due condizioni di cui sopra ...

Non è così!

Per dimostrarlo, procediamo per assurdo e supponiamo che per un indice $k \neq 1$ valga la condizione (a) mentre per un indice $j \neq 1$ valga la condizione (b) (assumeremo che i rapporti siano intrinsecamente complessi e quindi deve essere necessariamente anche che $j \neq k$...). Definiamo allora il vettore normalizzato

$$|\phi_{kj}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|e_1\rangle + |e_k\rangle + |e_j\rangle) \quad (1.1.27)$$

Poiché i rapporti fra i coefficienti che esprimono il vettore dato nella base dei vettori $|e_i\rangle$ sono tutti reali, in ogni caso resteranno reali anche nel caso del vettore $|S\phi\rangle$ espresso nella base $|Se_i\rangle$, e quindi

$$|S\phi_{kj}\rangle = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{3}}(|Se_1\rangle + |Se_k\rangle + |Se_j\rangle) \quad (1.1.28)$$

è lineare e allora la Simmetria che esso descrive è rappresentata da un operatore $\mathcal{O} = U$ unitario, infatti

$$\langle U a | U b \rangle \equiv \langle a | U^\dagger U b \rangle = \langle a | b \rangle \Leftrightarrow U^\dagger U = I \quad (1.1.37)$$

oppure l'operatore \mathcal{O} è antilineare⁹, e allora la Simmetria è rappresentata da

ma allora, ritornando al generico vettore di stato $|\psi\rangle$, abbiamo che deve essere altresì

$$|\langle \phi_{kj} | \psi \rangle|^2 = |\langle S \phi_{kj} | S \psi \rangle|^2 \Rightarrow |\lambda_1 + \lambda_k + \lambda_j|^2 = |\lambda'_1 + \lambda'_k + \lambda'_j|^2 = (1.1.29)$$

unitamente al fatto che $|\lambda_1| = |\lambda'_1|$. Risulta allora

$$|\lambda_1 + \lambda_k + \lambda_j|^2 = |\lambda'_1 + \lambda'_k + \lambda'_j|^2 \Rightarrow \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} + \frac{\lambda'_j}{\lambda'_1} \right|^2 \quad (1.1.30)$$

e quindi, per l'ipotesi fatta sopra,

$$\left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^* \right|^2 \quad (1.1.31)$$

Ma in generale, dati due numeri complessi z e z' ,

$$\left| 1 + z + z' \right|^2 = \left| 1 + z + z'^* \right|^2 \Leftrightarrow (\Im(z + z'))^2 = (\Im(z - z'))^2 \Rightarrow \Im(z) \cdot \Im(z') = 0 \quad (1.1.32)$$

che, nel caso particolare della (1.1.31), in generale è falso.

Resta dunque provato che, data una simmetria S che soddisfa la (1.1.8), può accadere che

$$\forall k : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \Leftrightarrow \lambda'_k = \lambda_k \frac{\lambda'_1}{\lambda_1} \Leftrightarrow \lambda'_k = e^{i\epsilon} \lambda_k \quad (1.1.33)$$

oppure può essere che

$$\forall k : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \right)^* \Leftrightarrow \lambda'_k = \lambda_k^* \frac{\lambda'_1}{\lambda_1^*} \Leftrightarrow \lambda'_k = e^{i\epsilon} \lambda_k^* \quad (1.1.34)$$

Ridefinendo la trasformazione a meno della fase globale inessenziale $e^{i\epsilon}$, arriviamo alle sole due possibilità:

$$(a) : \lambda'_k = \lambda_k \quad (1.1.35)$$

$$(a) : \lambda'_k = \lambda_k^* \quad (1.1.36)$$

estendibili in modo ovvio a tutto lo spazio di Hilbert in modo che, nel caso (a) l'operatore che descrive la simmetria sia lineare e unitario, mentre nel caso (b) sia antilineare e antiunitario.

⁹Ricordiamo che, nella ben nota terminologia di Dirac, a ogni *ket* $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati, è associato un *bra* $\langle \psi|$ nel duale di \mathcal{H} (coincidente con esso, data la sua struttura hilbertiana) tale che

$$|\psi\rangle = \alpha |a\rangle + \beta |b\rangle \Leftrightarrow \langle \psi| = \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b| \quad (1.1.38)$$

Un operatore \mathcal{O} dello spazio di Hilbert in sé è lineare se accade che

$$\mathcal{O} (\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle) = \alpha \mathcal{O} |a\rangle + \beta \mathcal{O} |b\rangle \quad (1.1.39)$$

mentre è antilineare se

$$\mathcal{O}(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha^* \mathcal{O}|a\rangle + \beta^* \mathcal{O}|b\rangle \quad (1.1.40)$$

Vediamo le conseguenze che discendono da queste definizioni.

Se $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert, allora ogni suo vettore è univocamente rappresentato da un'unica combinazione lineare dei vettori della base. Posto dunque che sia

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \quad (1.1.41)$$

ne segue che per l'operatore lineare V risulta

$$V|\psi\rangle = \lambda_i V|e_i\rangle \equiv \lambda_i V_{ji} |e_j\rangle \quad (1.1.42)$$

dove la matrice complessa V_{ji} descrive appunto l'azione dell'operatore V sugli elementi della base, ovvero

$$V|e_i\rangle \equiv V_{ji} |e_j\rangle \Leftrightarrow V_{ji} \equiv \langle e_j | V |e_i\rangle \equiv \langle e_j | V |e_i\rangle \quad (1.1.43)$$

Per l'operatore antilineare A , invece, risulta

$$A|\psi\rangle = \lambda_i^* A|e_i\rangle \equiv \lambda_i^* A_{ji} |e_j\rangle \quad (1.1.44)$$

dove la matrice complessa A_{ji} descrive ancora l'azione dell'operatore A sugli elementi della base assegnata in modo formalmente identico al caso precedente, cioè

$$A|e_i\rangle = A_{ji} |e_j\rangle \Leftrightarrow A_{ji} \equiv \langle e_j | A |e_i\rangle \equiv \langle e_j | A |e_i\rangle \quad (1.1.45)$$

Come si vede, sugli elementi della base, gli operatori lineari e antilineari agiscono sostanzialmente nello stesso modo, essendo la loro azione descritta in entrambi i casi da una opportuna matrice complessa. Ciò che li differenzia è il comportamento sulle combinazioni lineari a coefficienti complessi degli elementi della base. Inoltre, dati due vettori generici

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle, \quad |\phi\rangle = \mu_j |e_j\rangle \quad (1.1.46)$$

per un operatore lineare si ha

$$\langle \phi | V | \psi \rangle \equiv \langle \phi | V \psi \rangle = \mu_j^* \langle e_j | \lambda_i V_{ki} e_k \rangle = \mu_j^* V_{ji} \lambda_i \quad (1.1.47)$$

Anche per un operatore antilineare si ha ancora

$$\langle \phi | A \psi \rangle \equiv \mu_j^* \langle e_j | A \psi \rangle \quad (1.1.48)$$

ma adesso è

$$|A\psi\rangle = A(\lambda_i |e_i\rangle) = \lambda_i^* A|e_i\rangle = \lambda_i^* A_{ki} |e_k\rangle \quad (1.1.49)$$

per cui ne segue che, in questo caso, risulta

$$\langle \phi | A \psi \rangle = \mu_j^* \lambda_i^* A_{ji} \quad (1.1.50)$$

Come si vede, la differenza rispetto al caso dell'operatore lineare è che i coefficienti dello sviluppo del ket a cui l'operatore antilineare è applicato, entrano nel prodotto scalare non direttamente ma attraverso i loro complessi coniugati.

A ogni operatore lineare V viene poi associato il suo aggiunto V^\dagger , ponendo

$$\langle V \phi | \psi \rangle \equiv \langle \phi | V^\dagger \psi \rangle \Leftrightarrow \langle V \phi | = \langle \phi | V^\dagger \quad (1.1.51)$$

un operatore $\mathcal{O} = A$ antiunitario, per il quale risulta

$$\langle Aa|Ab \rangle \equiv \langle a|A^\dagger Ab \rangle^* = \langle a|b \rangle^* \quad (1.1.61)$$

Dalla definizione segue che per un operatore lineare è

$$\langle e_i|V^\dagger \equiv \langle V e_i| = V_{ji}^* \langle e_j| \quad (1.1.52)$$

e dunque, definita la matrice V^+ come l'hermitiana coniugata della matrice V , si ha

$$\langle e_i|V^\dagger e_j \rangle \equiv \langle e_i|V^\dagger|e_j \rangle = (V^+)_{ij} \quad (1.1.53)$$

ovvero, su due generici vettori $|\psi \rangle$ e $|\phi \rangle$, è appunto

$$\begin{aligned} \langle V\phi|\psi \rangle &= \langle V(\mu_i e_i)|\lambda_k e_k \rangle = \mu_i^* V_{ki}^* \lambda_k = \mu_i^* \lambda_k (V^+)_{ik} \\ &\equiv \langle \phi|V^\dagger \psi \rangle = \mu_i^* \lambda_k (V^+)_{ik} \\ &\Leftrightarrow (V^\dagger) = V^+ \end{aligned} \quad (1.1.54)$$

Dunque, nel caso di un operatore lineare V , la matrice che descrive, in una base assegnata, l'operatore V^\dagger è la matrice V^+ , hermitiana coniugata della matrice che, nella stessa base, descrive l'operatore V stesso.

Anche per un operatore antilineare A si può definire l'aggiunto A^\dagger , però occorre qualche cautela, dato che la definizione usata per l'operatore lineare (1.1.51) non è più direttamente applicabile, come lo dimostra il fatto che, se λ è un numero complesso qualsiasi, allora

$$\langle A(\lambda\phi)|\psi \rangle = \langle \lambda^* A\phi|\psi \rangle = \lambda \langle A\phi|\psi \rangle \quad (1.1.55)$$

mentre

$$\langle \lambda\phi|A^\dagger \psi \rangle = \lambda^* \langle \phi|A^\dagger \psi \rangle \quad (1.1.56)$$

L'unica definizione di operatore aggiunto che sia coerente con il carattere antilineare di A è infatti quella secondo cui anche A^\dagger è antilineare e risulta

$$\langle A\phi|\psi \rangle \equiv \langle \phi|A^\dagger \psi \rangle^* \quad (1.1.57)$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \langle A\phi|\psi \rangle &= \langle A(\mu_i e_i)|\lambda_j e_j \rangle = \langle \mu_i^* A_{ki} e_k|\lambda_j e_j \rangle = \mu_i^* A_{ki}^* \lambda_k = \mu_i^* \lambda_k (A^\dagger)_{ik} \\ &\equiv \langle \phi|A^\dagger \psi \rangle^* = \langle \mu_i e_i|\lambda_j^* (A^\dagger)_{kj}^* e_k \rangle^* = [\mu_i^* \lambda_j^* (A^\dagger)_{ij}]^* = \mu_i \lambda_j (A^\dagger)_{ij}^* \\ &\Rightarrow (A^\dagger) = A^t \end{aligned} \quad (1.1.58)$$

Dunque, per l'operatore antilineare A , la matrice che descrive il suo aggiunto A^\dagger in una base assegnata è la matrice (A^t) , trasposta della matrice che, nella stessa base, descrive appunto l'operatore A .

Si parla infine di un operatore lineare V come di un operatore unitario se accade che

$$\langle V\phi|V\psi \rangle \equiv \langle \phi|V^\dagger V\psi \rangle = \langle \phi|\psi \rangle \quad \Leftrightarrow \quad V^\dagger V = I \quad (1.1.59)$$

Questa definizione resta formalmente la stessa anche nel caso di un operatore antilineare; infatti A è antiunitario se accade che

$$\langle A\phi|A\psi \rangle \equiv \langle \phi|A^\dagger A\psi \rangle^* = \langle \phi|\psi \rangle^* \quad \Leftrightarrow \quad A^\dagger A = I \quad (1.1.60)$$

Sempre a proposito degli operatori antiunitari, osserviamo che, fissata una base ortonormale qualsiasi $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots$ possiamo definire su questa base l'operatore antiunitario K di coniugazione complessa nel modo seguente¹⁰

$$K|e_i\rangle \equiv |e_i\rangle \Rightarrow K \sum_i \lambda_i |e_i\rangle = \sum_i \lambda_i^* |e_i\rangle \quad (1.1.62)$$

Esso è antiunitario, infatti, se

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle, \quad |\phi\rangle = \mu_j |e_j\rangle \quad (1.1.63)$$

allora risulta

$$\begin{aligned} K|\psi\rangle &= \lambda_i^* |e_i\rangle; \\ K|\phi\rangle &= \mu_j^* |e_j\rangle \Rightarrow \langle K\phi| = \mu_j \langle e_j| \end{aligned} \quad (1.1.64)$$

e dunque

$$\langle K\phi|K\psi\rangle = \mu_i \lambda_i^* \equiv \langle \psi|\phi\rangle \quad (1.1.65)$$

Evidentemente, poi, dalla (1.1.62) risulta altresì che

$$K^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad K = K^{-1} \quad (1.1.66)$$

e siccome K è antiunitario, dunque tale per cui $K^\dagger K = I$, evidentemente si ha

$$K = K^\dagger \quad (1.1.67)$$

In termini di questo operatore K , dimostreremo adesso che ogni operatore antiunitario A si può scrivere come

$$A = U K \quad (1.1.68)$$

dove U è un opportuno operatore unitario.

Consideriamo infatti l'operatore AK e dimostriamo che esso è unitario.

Poiché, per ipotesi, A è antiunitario, si ha infatti

$$\langle (AK)\phi|(AK)\psi\rangle = \langle K\phi|K\psi\rangle^* \equiv \langle K\psi|K\phi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle \quad (1.1.69)$$

¹⁰Si osservi che, date due basi diverse $|e_i\rangle$ ed $|f_j\rangle$, i due operatori di coniugazione complessa K_e e K_f definiti in ciascuna base attraverso la (1.1.62) non coincidono, bensì differiscono per una trasformazione unitaria. Abbiamo infatti che, poiché $|e_i\rangle$ ed $|f_j\rangle$ sono entrambe basi ortonormali, potremo certamente scrivere $|f_j\rangle = U_{ij}|e_i\rangle$ per cui

$$K_e K_f |f_j\rangle = K_e |f_j\rangle = U_{ij}^* |e_i\rangle = U_{ij}^* (U^{-1})_{ki} |f_k\rangle \equiv V_{kj} |f_k\rangle$$

dove $V \equiv U^{-1}(U)^*$ è, evidentemente, unitaria ma, in generale, diversa dall'identità, e risulta $K_e K_f = V \Rightarrow K_e = V K_f$.

la quale dimostra come l'operatore $AK = U$ sia appunto unitario¹¹ e quindi, moltiplicando a destra per K e tenendo conto che $K^2 = I$, che valga appunto la (1.1.68).

Come già detto, K viene chiamato *operatore di coniugazione complessa*.

Vale la pena vedere K in azione in un caso molto semplice.

Consideriamo una particella senza gradi di libertà interni. Sappiamo allora che possiamo scegliere come base dello spazio di Hilbert quella fatta dagli autovettori $|x\rangle$ della posizione, per cui, dalla definizione, in questa base è

$$K|x\rangle = |x\rangle \quad (1.1.70)$$

Consideriamo lo stato $|\psi\rangle$, descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$,

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle \quad (1.1.71)$$

Evidentemente questo stato viene trasformato dall'operatore K in quello descritto dalla funzione d'onda $\psi^*(x)$, infatti

$$K|\psi\rangle = K \int dx \psi(x) |x\rangle = \int dx \psi^*(x) K|x\rangle = \int dx \psi^*(x) |x\rangle \quad (1.1.72)$$

Un altro modo equivalente per determinare la funzione d'onda associata allo stato $K|\psi\rangle$ parte dal fatto che, così come la funzione d'onda associata, in rappresentazione delle coordinate, allo stato $|\psi\rangle$ è

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad (1.1.73)$$

analogamente la funzione d'onda associata, nella stessa rappresentazione, allo stato $K|\psi\rangle$, sarà

$$\langle x|K\psi\rangle \quad (1.1.74)$$

D'altronde K è antiunitario, $K^2 = I$ e, per definizione, $K|x\rangle = |x\rangle$, per cui risulta

$$\langle x|K\psi\rangle = \langle K K x|K\psi\rangle = \langle K x|K\psi\rangle = \langle x|\psi\rangle^* \equiv \psi^*(x) \quad (1.1.75)$$

E' interessante, a questo punto, osservare, data la definizione (1.1.70), che cosa succede a un autostato dell'impulso. Si ha

$$|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{x}\rangle \quad (1.1.76)$$

per cui, evidentemente, risulta

$$K|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{x}\rangle = |-\vec{p}\rangle \quad (1.1.77)$$

¹¹In generale, risulta infatti che il prodotto di un operatore unitario per un operatore antiunitario è antiunitario, mentre il prodotto di due operatori antiunitari risulta unitario.

ovvero, avendo definito K in modo che lasci invariati gli autostati della posizione, ecco che questo operatore manda $|\vec{p}\rangle$ in $|\vec{-p}\rangle$.

Naturalmente, se altrettanto lecitamente avessimo definito K partendo dalla base degli autostati dell'impulso $|p\rangle$, sarebbero stati gli autostati della posizione a cambiare di segno sotto il suo effetto ...

Ma riprendiamo adesso la questione delle Simmetrie in MQ .

Abbiamo concluso con Wigner che una simmetria deve essere rappresentata da un operatore unitario o da un operatore antiunitario \mathcal{O} , il quale manda lo spazio di Hilbert degli stati \mathcal{H} in sé

$$\mathcal{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (1.1.78)$$

e dunque ne costituisce un isomorfismo che, nel linguaggio della teoria degli spazi di Hilbert, è un modo per dire che esso descrive una trasformazione di base ortonormale¹²

$$|e_i\rangle \rightarrow \mathcal{O}|e_i\rangle \equiv |e_i'\rangle : \delta_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle = \langle \mathcal{O}e_i | \mathcal{O}e_j \rangle \quad (1.1.80)$$

In Meccanica Quantistica, però, sappiamo che gli effetti prodotti da una trasformazione lineare \mathcal{O} sui vettori di stato, possono essere resi equivalentemente¹³ con la seguente trasformazione sulle osservabili Q del sistema

$$Q \rightarrow Q' = \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} \quad (1.1.81)$$

per cui, almeno nel caso di simmetrie unitarie, possiamo equivalentemente adottare i due punti di vista per cui

$$a) \quad |e_i\rangle \rightarrow |e_i'\rangle = \mathcal{O}|e_i\rangle; \quad Q \rightarrow Q' \quad (1.1.82)$$

$$b) \quad Q \rightarrow Q' = \mathcal{O}^{-1} Q \mathcal{O}; \quad |e_i\rangle \rightarrow |e_i\rangle \quad (1.1.83)$$

¹²E' facile convincersi che questo vale sia nel caso (ovvio !) dell'operatore unitario che in quello dell'operatore antiunitario, visto che, in ogni caso risulta

$$|\langle \mathcal{O}e_i | \mathcal{O}e_j \rangle| = |\langle e_i | e_j \rangle| = \delta_{ij} \quad (1.1.79)$$

¹³Se \mathcal{O} è un operatore lineare, la conclusione è immediata per il fatto che risulta

$$\langle \mathcal{O}\psi | Q | \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \mathcal{O}\psi | Q \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} \phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} | \phi \rangle$$

e dunque, ponendo $Q' = \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O}$ si ha equivalentemente

$$\langle \mathcal{O}\psi | Q | \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \psi | Q' | \phi \rangle$$

Si osservi che, nel caso antilineare, risulta invece

$$\langle \mathcal{O}\psi | Q | \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \mathcal{O}\psi | Q \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} \phi \rangle^* = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} | \phi \rangle^*$$

e l'associazione che occorre fare è ancora quella di porre $Q' = \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O}$ ma va unita alla trasformazione antilineare che manda lo spazio di Hilbert nel suo duale, ovvero $|\psi\rangle \rightarrow \langle \psi|$.

Chiaramente, se indichiamo adesso con \mathcal{A} l'algebra delle osservabili del sistema dato, la simmetria \mathcal{O} definisce un isomorfismo dell'algebra in sé

$$\mathcal{I}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \text{ per cui } Q' = \mathcal{I}(Q) \equiv \mathcal{O}^{-1} Q \mathcal{O} \quad (1.1.84)$$

il quale, in quanto isomorfismo, conserva certamente le regole di commutazione (anticommutazione) fra gli operatori¹⁴ dell'algebra.

In molti casi, però, *non* si conosce esplicitamente l'operatore \mathcal{O} , ovvero il suo modo di agire sui vettori di stato del sistema, bensì, magari, si hanno informazioni *a priori* sulla forma che l'isomorfismo indotto da \mathcal{O} dovrebbe produrre su un set opportuno di osservabili o operatori dell'algebra \mathcal{A} .

In questo caso, per definire \mathcal{O} , si può procedere partendo proprio da queste leggi di trasformazione sulle osservabili, badando bene a verificare, comunque, che resti rispettata la loro compatibilità cinematica, ovvero che non si producano incompatibilità con le loro regole di commutazione o di anticommutazione.

Parleremo poi, come già detto, di *simmetria conservata* se essa è anche compatibile con la dinamica e di *simmetria rotta*, se invece questo non accade.

Per una simmetria conservata, se $|\psi, t\rangle$ è il risultato al tempo t dell'evoluzione temporale dello stato $|\psi, 0\rangle$ al tempo $t = 0$, allora deve accadere che $\mathcal{O}|\psi, t\rangle$ descriva il risultato al tempo t dell'evoluzione temporale dello stato $\mathcal{O}|\psi, 0\rangle$ al tempo $t = 0$, ottenuto attraverso la stessa dinamica !

E' facile convincersi che se l'operatore \mathcal{O} che descrive la simmetria è unitario, la simmetria è conservata se e solo se risulta $[\mathcal{O}, H] = 0$, ovvero se l'operatore che descrive la simmetria commuta con l'hamiltoniana.

Partiamo infatti dall'equazione di evoluzione temporale per gli stati

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (1.1.88)$$

Evidentemente risulta

$$\mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle \right) = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle \quad (1.1.89)$$

¹⁴Per capirci meglio, se R è una rotazione e \mathcal{O}_R l'operatore (unitario) che la rappresenta, allora, per esempio, per quanto riguarda il momento angolare, che è un operatore vettoriale, si avrà

$$\mathcal{O}_R^{-1} J_i \mathcal{O}_R \equiv J'_i = R_{ij} J_j \quad (1.1.85)$$

e deve aversi (come in realtà si ha)

$$[J'_i, J'_j] = i \epsilon_{ijk} J'_k \quad (1.1.86)$$

così come è

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.1.87)$$

ma, poiché \mathcal{O} è lineare, risulterà

$$\mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t \rangle \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t \rangle \quad (1.1.90)$$

dunque

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t \rangle = \mathcal{O} H |\psi, t \rangle = \mathcal{O} H \mathcal{O}^{-1} \mathcal{O} |\psi, t \rangle \quad (1.1.91)$$

la quale mostra che l'hamiltoniana con cui evolve il vettore $\mathcal{O} |\psi, t \rangle$ è $\mathcal{O} H \mathcal{O}^{-1}$.

Dunque, se vogliamo che la dinamica che governa l'evoluzione dei due stati sia la stessa, deve essere evidentemente che

$$\mathcal{O} H \mathcal{O}^{-1} = H \Rightarrow \mathcal{O} H = H \mathcal{O} \Rightarrow [\mathcal{O}, H] = 0 \quad (1.1.92)$$

In modo analogo, per una generica simmetria antiunitaria \mathcal{O} , si arriva invece alla conclusione che, per essere conservata, essa deve anticommutare¹⁵ con H , cioè essere tale che

$$\{\mathcal{O}, H\} = 0 \quad (1.1.94)$$

Questa proprietà di anticommutazione dell'hamiltoniana con un operatore antiunitario, però ha come conseguenza che se $|E \rangle$ è autovettore di H per l'autovalore E , allora il vettore $\mathcal{O}|E \rangle$ (necessariamente non nullo ...) è autovettore di H per l'autovalore $-E$ e dunque lo spettro dell'hamiltoniana deve essere simmetrico rispetto allo zero.

Questo, però, non è possibile perché lo spettro dell'hamiltoniana H risulta limitato verso il basso (esiste uno stato di minima energia del sistema), mentre non lo è per valori positivi, data la presenza della parte cinetica ...

Questa è la ragione per la quale Wigner, all'inizio, esclude la possibilità che potessero esistere simmetrie conservate antiunitarie: come vedremo, questa conclusione ha una eccezione che è proprio la time-reversal T (in cui, comunque H e T commutano!).

¹⁵Se $|\psi, t \rangle$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale e \mathcal{O} è antiunitario, allora

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t \rangle &= H |\psi, t \rangle \Rightarrow \mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t \rangle \right) = \mathcal{O} H |\psi, t \rangle \\ &\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t \rangle = \mathcal{O} H |\psi, t \rangle = \mathcal{O} H \mathcal{O}^{-1} \mathcal{O} |\psi, t \rangle \end{aligned} \quad (1.1.93)$$

per cui $|\psi, t \rangle$ e $\mathcal{O} |\psi, t \rangle$ evolvono con la stessa hamiltoniana se e solo se $\{\mathcal{O}, H\} = 0$.

In alcune formulazioni, poi, nel concetto di simmetria conservata, si include pure la richiesta che anche la dinamica libera sia compatibile con la trasformazione, ovvero che

$$[\mathcal{O}, H_0] = 0 \quad (1.1.95)$$

dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1.96)$$

Nel seguito del Corso, come già anticipato, ci limiteremo a trattare solo il caso delle simmetrie discrete¹⁶ di parità P , di coniugazione di carica C e inversione temporale (time-reversal) T .

¹⁶Come già detto, non tratteremo il caso delle simmetrie continue, o meglio il caso in cui le simmetrie del sistema costituiscono una rappresentazione di un opportuno gruppo di Lie: ricordiamo che i casi di $SU2$, $SU3$ e del gruppo di Lorentz ortocrono proprio sono stati già ampiamente trattati nei Volumi precedenti.

Può essere però utile ricordare qui che, poichè ciascun elemento del gruppo di simmetria continua dovrà essere rappresentato da un operatore unitario che commuta con l'hamiltoniana, affinché questo accada, occorre e basta che l'hamiltoniana commuti con i generatori del gruppo (o, piuttosto, con la loro rappresentazione nell'algebra degli operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert ...) i quali, essendo quindi hermitiani, rappresentano osservabili che risultano dunque conservate durante l'evoluzione temporale del sistema.

Di questo genere è la simmetria imposta dal principio di Relatività e dalla richiesta di omogeneità dello spazio-tempo, secondo cui lo spazio di Hilbert degli stati di un qualunque sistema fisico che sia isolato *deve* essere isomorfo a se stesso quando si osservi il sistema dato da un diverso sistema di riferimento inerziale.

Questo significa, come sappiamo, che deve essere definita sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema una rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré $U(a, \Lambda)$, dove (a, Λ) è il generico elemento del gruppo, con a generica traslazione nello spazio-tempo e Λ generica trasformazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

1.2 La Parità in MQ

Consideriamo adesso, sempre nello schema della prima quantizzazione (equazione di Schrödinger), la simmetria di parità P .

Questa deve operare sulle osservabili rispettando il loro modo classico di trasformarsi e inoltre, come ogni simmetria, deve essere cinematicamente ammissibile.

Iniziamo richiedendo dunque che, sulla base dell'analogia classica, risulti

$$\vec{X} \xrightarrow{P} \vec{X}' \equiv P^{-1} \vec{X} P = -\vec{X} \quad (1.2.97)$$

da cui segue evidentemente¹⁷ che $P|\vec{x}\rangle$ deve essere autovettore dell'operatore di posizione \vec{X} per l'autovalore $-\vec{x}$ (ma non necessariamente coincidente con $|\vec{x}\rangle$!).

Una conseguenza¹⁸ è allora che $P^2|\vec{x}\rangle$ deve coincidere, di nuovo, con il vettore di stato iniziale, a meno di un possibile fattore di fase, cioè

$$P^2|\vec{x}\rangle = e^{i\eta}|\vec{x}\rangle \quad (1.2.99)$$

Se vogliamo che P^2 rispetti il principio di sovrapposizione, la fase η non può che essere unica per tutti i vettori dello spazio di Hilbert degli stati e quindi, assumendo che P sia unitario, essa può essere riassorbita¹⁹ nella definizione stessa dell'operatore P in modo tale che risulti

$$P^2 = I \quad (1.2.100)$$

Per quanto riguarda P , a priori siamo autorizzati solo a dire che

$$P|\vec{x}\rangle = e^{i\alpha(\vec{x})}|\vec{x}\rangle \quad (1.2.101)$$

e il vincolo su P^2 impone solo che $\alpha(\vec{x}) + \alpha(-\vec{x}) = 2k\pi$, avendo qui già assunto che la simmetria sia unitaria²⁰. Riguardo alla fase α , se vogliamo

¹⁷Infatti se $|\vec{x}\rangle$ è autovettore dell'osservabile \vec{X} per l'autovalore \vec{x} , allora, dalla (1.2.97) segue evidentemente che

$$\vec{X}'|\vec{x}\rangle = -\vec{x}|\vec{x}\rangle = P^{-1}\vec{X}P|\vec{x}\rangle \Rightarrow -\vec{x}P|\vec{x}\rangle = \vec{X}P|\vec{x}\rangle \quad (1.2.98)$$

¹⁸Stiamo qui assumendo che il sistema sia semplice e senza spin, altrimenti occorrerebbe tenere conto anche delle proprietà di trasformazione delle altre variabili che, insieme alle coordinate, costituiscono un set completo di osservabili per il sistema.

¹⁹Con questo intendiamo dire che se $P^2|\vec{x}\rangle$ deve rappresentare lo stesso stato rappresentato dal vettore $|\vec{x}\rangle$, allora $P^2(|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle)$ deve anch'esso coincidere con $|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle$ a meno di un fattore di fase, e questo può accadere solo se η è indipendente da \vec{x} . Ridefinendo allora $\hat{P} \equiv e^{-i\eta/2}P$ ecco che, nell'ipotesi che P sia unitario, $\hat{P}^2 = I \dots$

²⁰Non dimentichiamoci, infatti, che quanto stiamo facendo è di cercare di arrivare ad una definizione di P , per cui abbiamo ampia libertà sul suo modo di operare, limitata solo dall'analogia classica, dalla coerenza interna e dal fatto che vogliamo arrivare alla definizione di una simmetria che, almeno nei casi in cui classicamente questo già accade, sia *conservata*.

di nuovo che le fasi relative fra gli stati *non* siano alterate dalla simmetria, è necessario che essa non dipenda da \vec{x} e dunque, dovendo essere $P^2 = I$, potrà risultare solo

$$P|\vec{x}\rangle = \pm|-\vec{x}\rangle \quad (1.2.102)$$

Chiameremo "scalari" i sistemi per cui $P|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$ e "pseudoscalari" quelli per cui, invece $P|\vec{x}\rangle = -|-\vec{x}\rangle$.

Osserviamo adesso che, avendo in questo modo definito l'operatore di parità P su una base²¹, esso risulta completamente determinato.

Vediamo dunque come agisce, per esempio, sull'operatore di impulso \vec{P} .

Ricordiamo che \vec{P} è il generatore delle traslazioni spaziali, per cui una traslazione infinitesima $\delta\vec{a}$ è rappresentata dall'operatore

$$\mathcal{T}(\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}} \Rightarrow \mathcal{T}(\delta\vec{a}) \approx I + \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\delta\vec{a} \quad (1.2.103)$$

Siccome una traslazione di \vec{a} seguita da una parità è evidentemente equivalente a una parità seguita da una traslazione di $-\vec{a}$, risulta

$$P\mathcal{T}(\delta\vec{a}) = \mathcal{T}(-\delta\vec{a})P \quad (1.2.104)$$

ovvero che

$$P\left(I + \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\delta\vec{a}\right) = \left(I - \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\delta\vec{a}\right)P = \quad (1.2.105)$$

e dunque che

$$P(i\vec{P}) = -i\vec{P}P \quad (1.2.106)$$

Questa relazione, essendo per ipotesi l'operatore P unitario, implica che, come ci aspettiamo in base all'analogia classica, la parità anticommuti anche con l'impulso, cioè risulti

$$P^{-1}\vec{P}P = -\vec{P} \quad (1.2.107)$$

Quanto poi all'azione indotta dalla simmetria di parità P sull'algebra delle osservabili, visto il modo come siamo arrivati alla sua definizione e cioè attraverso la sua azione su una base (quella degli autostati delle coordinate), questa non può che essere compatibile²² con le regole di commutazione che, in ultima analisi, si riducono a quelle canoniche fra posizione e impulso

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.2.108)$$

²¹Di nuovo, stiamo qui assumendo di trattare il caso della particella singola senza spin.

²²Si osservi che se avessimo assunto P come antiunitario, allora per la (1.2.106) esso dovrebbe commutare con l'impulso e questo sarebbe ancora compatibile con le regole di commutazione canoniche!

Solamente, secondo questa definizione, si andrebbe contro l'aspettativa classica, in base alla quale ci attendiamo che, sotto parità, tutte le grandezze vettoriali cambino di segno ...

dato che, come sappiamo, tutta l'algebra delle osservabili²³ della particella materiale senza struttura interna poggia unicamente su queste regole di commutazione.

Affinché questa simmetria sia conservata, come abbiamo già detto, occorre e basta che

$$[P, H] = 0 \quad (1.2.111)$$

ovvero, essendo

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (1.2.112)$$

occorre e basta²⁴ che $P^{-1} V P = V \Leftrightarrow V(-\vec{x}) = V(\vec{x})$, cioè, come c'era ovviamente da aspettarci, che il potenziale sia una funzione *pari* della posizione.

²³Un'altra variabile cinematica importante per il sistema di una particella singola senza spin è certamente il momento angolare \vec{J} . E esso, essendo definito come

$$\vec{J} = \vec{X} \wedge \vec{P} \quad (1.2.109)$$

ha proprietà di trasformazione sotto parità immediatamente deducibili da quelle della posizione (1.2.97) e dell'impulso (1.2.107), risultando, ovviamente,

$$[\vec{J}, P] = 0 \quad (1.2.110)$$

in accordo con quanto ci aspetteremmo in base all'analogia classica, visto che \vec{J} è un vettore assiale (pseudovettore).

²⁴Si osservi che l'operatore di parità P così definito commuta certamente con l'hamiltoniana libera $H_0 = \frac{1}{2m} |\vec{p}|^2$.

1.3 La Coniugazione di Carica in MQ

Un'altra simmetria discreta molto interessante è certamente quella della coniugazione di carica C .

Essa, però, è facilmente comprensibile solo nell'ambito della QFT (Teoria Quantistica dei Campi).

Per poterne parlare nello schema della prima quantizzazione (MQ), occorre considerare un sistema fatto da una carica in interazione con il campo elettromagnetico, per cui l'hamiltoniana completa del sistema è

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + eV = \\ &= \frac{|\vec{P}|^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \left(\vec{A} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{A} \right) + \frac{e^2}{2mc^2} |\vec{A}|^2 + eV \quad (1.3.113) \end{aligned}$$

dove e è la carica elettrica, \vec{A} è il potenziale vettore e V il potenziale scalare.

E' immediato verificare che l'hamiltoniana di cui sopra è invariante sotto la seguente trasformazione²⁵ di simmetria C del campo elettromagnetico e della carica elettrica

$$e \rightarrow -e \quad (1.3.114)$$

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A} \quad (1.3.115)$$

$$V \rightarrow -V \quad (1.3.116)$$

con \vec{P} e \vec{X} invariati.

Visto che gli operatori di impulso e di posizione non cambiano sotto C , affinché essa conservi le regole di commutazione è necessario che risulti

$$C^{-1}iC = i \quad (1.3.117)$$

ovvero che C sia lineare e non antilineare, e dunque sia una simmetria unitaria.

²⁵Questa trasformazione, in questo contesto, deve agire necessariamente anche sulla carica elettrica la quale, però, in prima quantizzazione non è un operatore. Quanto ad \vec{A} e V , essi sono operatori ma solo in quanto funzioni delle coordinate le quali, però, commutano con C ! Di nuovo, affinché C possa agire sui potenziali deve essere coinvolta la carica elettrica ...

Per questi motivi, la coniugazione di carica C è correttamente inseribile nel quadro delle simmetrie discrete solo nello schema della seconda quantizzazione, ovvero nello schema della teoria dei campi.

1.4 La simmetria di inversione temporale T

Si tratta della simmetria discreta meno intuitiva di tutte.

Intanto va notato che essa, nonostante il nome, non ha tanto a che vedere con l'inversione del tempo (di difficile realizzazione!), quanto piuttosto con la reversibilità dei processi fisici.

Per capire meglio di che si tratta, prima ancora di parlarne nell'ambito della MQ , vale la pena iniziare addirittura dalla Meccanica Classica, considerando appunto un sistema meccanico, per esempio quello costituito da un punto materiale di massa m soggetto alla forza di gravità.

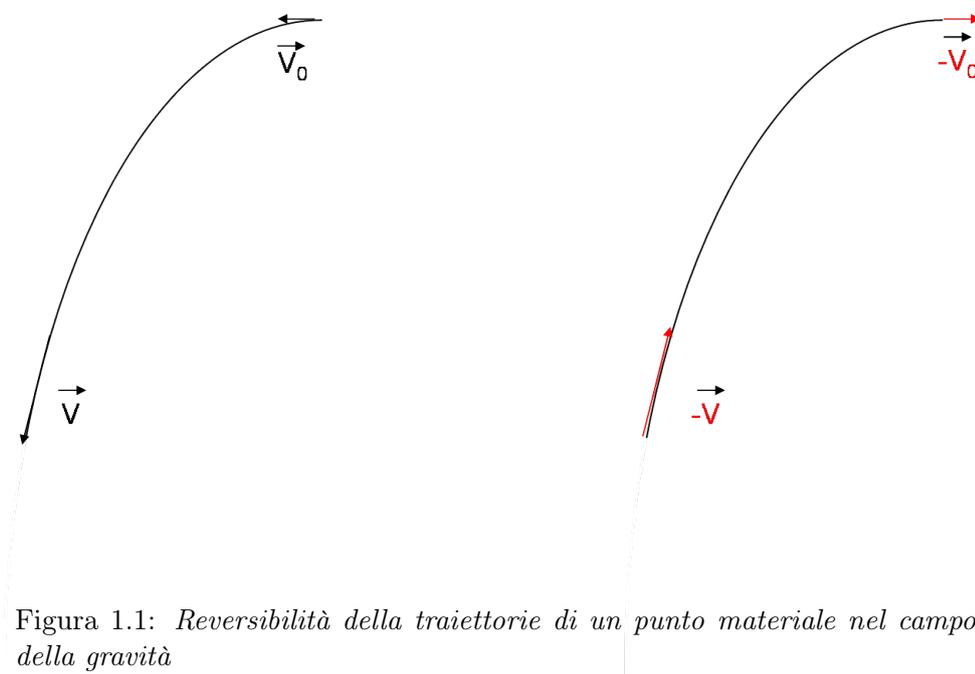


Figura 1.1: *Reversibilità della traiettorie di un punto materiale nel campo della gravità*

Al tempo $t + \Delta t$, fissate le condizioni iniziali al tempo t , i.e. $(\vec{X}(t) \equiv \vec{X}_0, \vec{v}(t) \equiv \vec{v}_0)$, il punto materiale si troverà nella posizione $\vec{X}(t + \Delta t)$ e la sua velocità sarà data da

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \Delta t \equiv \vec{v}' \quad (1.4.118)$$

Chiedersi se c'è invarianza per inversione temporale (Time-reversal) della legge del moto significa

- prendere come stato iniziale quello di arrivo, ovvero $(\vec{X}(t + \Delta t) \equiv \vec{X}', \vec{v}(t + \Delta t) \equiv \vec{v}')$;
- applicare la trasformazione di Time-reversal allo stato e dunque cambiare il segno della velocità $\vec{v}' \rightarrow T(\vec{v}') \equiv -\vec{v}'$, lasciando inalterata la posizione;

- lasciare evolvere lo stato così ottenuto ancora per il solito intervallo di tempo Δt , secondo la stessa dinamica;
- verificare se lo stato finale così raggiunto coincide o meno con il T -trasformato di quello da cui si era originariamente partiti.

Nel caso considerato della sola forza di gravità in assenza di attrito, questo è ciò che effettivamente accade, infatti, dopo il tempo Δt , la stessa legge di moto avrà fatto sì che la nuova velocità acquisita dal punto materiale sia

$$\vec{v}'' = T(\vec{v}') + \vec{g} \Delta t = -(\vec{v}_0 + \vec{g} \Delta t) + \vec{g} \Delta t = -\vec{v}_0$$

e avrà fatto ripercorrere a ritroso la stessa traiettoria descritta originariamente dal grave, per cui possiamo concludere che il moto di un punto materiale nel campo della gravità è effettivamente T -invariante.

E' opportuno, comunque, puntualizzare che, nel trarre questa conclusione, abbiamo implicitamente assunto che la massa m del corpo e il campo della gravitazione non siano alterati dalla trasformazione di Time-reversal, ovvero che siano T -invarianti. Per capire meglio cosa intendiamo dire, osserviamo che, nella trattazione precedente, nulla cambierebbe se, al posto di un punto materiale nel campo della gravità ci fosse una carica elettrica in un campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ dato. Avremmo ancora reversibilità del moto, pur di assumere che la carica e il campo elettrico siano invarianti per Time-reversal.

Che cosa succederebbe, però, se fosse presente, per esempio, (anche) un campo magnetico ?

E' evidente dall'espressione della forza di Lorentz che, visto che per Time-reversal la velocità cambia segno, affinché T possa essere una simmetria conservata in elettrodinamica, occorre assumere che \vec{B} , a differenza di \vec{E} , cambi segno²⁶ sotto T .

Tutto questo per rimarcare una cosa altrimenti ovvia e cioè che, nel momento in cui dovremo trattare un problema in cui è presente un'interazione con campi esterni, prima di trarre conclusioni, sarà necessario tenere conto anche delle proprietà di trasformazione di questi ultimi sotto la simmetria considerata ...

Un altro modo equivalente a quello esposto sopra per verificare se in un certo sistema meccanico sia rispettata o meno l'invarianza per Time-reversal è quello di partire dalla legge oraria

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \tag{1.4.119}$$

²⁶Questo non ha nulla di misterioso né di contraddittorio con quanto accade per il campo elettrico, visto che il campo magnetico è prodotto da cariche in moto e che, sotto T , la velocità cambia verso ...

e verificare se, sotto la trasformazione

$$T : \quad t \rightarrow \bar{t} = -t \quad (1.4.120)$$

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(t) \quad (1.4.121)$$

la nuova legge oraria

$$\vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(-\bar{t}) \quad (1.4.122)$$

implica comunque la stessa dinamica²⁷ relativamente alla variabile temporale trasformata \bar{t} .

Veniamo adesso al problema della simmetria di Time-reversal in Meccanica Quantistica e poniamoci, per comodità, nella Schrödinger Picture.

Alla luce di quanto detto sopra, se $|\psi, t\rangle$ è l'evoluto al tempo t dello stato $|\psi, 0\rangle$ al tempo $t = 0$, vogliamo che, se T è rispettata, allora lo stato $T|\psi, t\rangle$, lasciato evolvere ancora per un tempo t , conduca di nuovo a $T|\psi, 0\rangle$.

Ma come agisce l'operatore T sui vettori dello spazio di Hilbert ?

Iniziamo per questo cercando di vedere come, sulla base dell'analogia classica, noi ci aspettiamo che T agisca sulle osservabili \vec{X} e \vec{P} .

Evidentemente, partendo dal significato classico che attribuiamo a questa simmetria, siamo indotti a richiedere che risulti

$$T^{-1} \vec{X} T = \vec{X} \quad (1.4.127)$$

$$T^{-1} \vec{P} T = -\vec{P} \quad (1.4.128)$$

Queste due semplici richieste, però, sono già sufficienti per dirci che se vogliamo che T possa essere una simmetria, e dunque che rispetti, per esempio, le regole di commutazione canoniche $[x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij}$, allora è necessario che

$$T^{-1} i T = -i \quad (1.4.129)$$

²⁷Evidentemente, nel caso di un punto materiale di massa m soggetto a una forza esterna $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$, questa simmetria è sempre rispettata, poiché la seconda legge della dinamica

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (1.4.123)$$

è T -invariante, essendo

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(-\bar{t}) = \vec{x}(t) \Rightarrow \vec{x}_T(t) = \vec{x}(-t) \quad (1.4.124)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_T(t) = -\dot{\vec{x}}(-t) \Rightarrow \ddot{\vec{x}}_T(t) = \ddot{\vec{x}}(t) \quad (1.4.125)$$

Più in generale, in Meccanica Classica c'è invarianza per Time reversal quando la dinamica del sistema è determinata da un potenziale funzione solo delle coordinate e quindi il sistema è descritto da una lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_i) \quad (1.4.126)$$

che, chiaramente, è invariante in forma sotto la trasformazione (1.4.120), cioè sotto la trasformazione $q_i \rightarrow q_i$, $\dot{q}_i \rightarrow -\dot{q}_i$.

ovvero che T sia rappresentato da un operatore antiunitario²⁸.

Vediamo allora che cosa deve essere richiesto²⁹ all'hamiltoniana affinché la simmetria di Time-reversal antiunitaria così introdotta sia conservata.

Ripartiamo per questo dalla legge di evoluzione temporale degli stati che ben conosciamo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (1.4.132)$$

$$\Rightarrow T H |\psi, t\rangle = T i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle \quad (1.4.133)$$

e poniamo per definizione

$$T |\psi, t\rangle \equiv |\psi_T, \bar{t}\rangle \quad (1.4.134)$$

Per quanto detto, T sarà una simmetria conservata se $|\psi_T, \bar{t}\rangle$ evolve nella variabile temporale \bar{t} con la stessa dinamica (i.e., con la stessa hamiltoniana) secondo la quale lo stato $|\psi, t\rangle$ evolve nella variabile temporale t .

Quali ne sono le implicazioni?

²⁸Nel suo lavoro originario del 1932

E.P. Wigner; *Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik*
Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Physik Kl. 32, 546 (1932)

Wigner richiede che l'hamiltoniana libera H_0 sia T -invariante e usa l'equazione di evoluzione temporale nella Schrödinger Picture per dimostrare che T deve essere antiunitario. Questo viene dedotto dal fatto che l'equazione contiene il fattore $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ al primo ordine. Ciò però non è corretto, infatti, nel caso, per esempio, della generalizzazione relativistica dell'equazione del moto libero di una particella (scalare), l'equazione di Klein-Gordon è del secondo ordine ...

In realtà l'antiunitarietà dell'operatore T è imposta piuttosto dal rispetto delle regole di commutazione fra posizione ed impulso !

Si osservi che saremmo giunti alla stessa conclusione (e non è un caso ...) circa il carattere antiunitario di T anche se fossimo partiti dal fatto che, per l'analogia classica, deve valere la legge di trasformazione

$$T^{-1} \vec{J} T = -\vec{J} \quad (1.4.130)$$

la quale può essere compatibile con le regole di commutazione fra le sue componenti

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.4.131)$$

se e solo se T è antiunitario.

²⁹Si ricorderà che, per una generica simmetria antiunitaria, avevamo dimostrato che, per essere conservata, essa doveva anticommutare con H , da cui, poi, il problema dello spettro di H non limitato verso il basso ...

Essendo, per ipotesi, T antiunitario, risulta

$$T i \hbar \frac{\partial}{\partial t} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} T = i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} T \quad (1.4.135)$$

e quindi si ha

$$T H |\psi, t \rangle = T i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} T |\psi, t \rangle \quad (1.4.136)$$

ovvero

$$T H T^{-1} T |\psi, t \rangle \equiv T H T^{-1} |\psi_T, \bar{t} \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} |\psi_T, \bar{t} \rangle \quad (1.4.137)$$

ed è evidente allora che $|\psi_T, \bar{t} \rangle$ e $|\psi, t \rangle$ evolveranno secondo la stessa hamiltoniana se e solo se

$$[H, T] = 0 \quad (1.4.138)$$

Dunque, per quanto riguarda l'operatore di inversione temporale T , possiamo concludere che esso deve essere antiunitario e, affinché possa rappresentare una simmetria conservata del sistema, così come nel caso delle simmetrie unitarie, deve commutare con l'hamiltoniana.

Vediamo adesso di esplicitare l'azione dell'operatore T sui vettori di stato, iniziando dal caso più semplice della particella senza spin. Come sappiamo, lo stato fisico $|\psi, t \rangle$ di una generica particella di massa m senza spin è univocamente determinato dalla sua funzione d'onda

$$\psi(x, t) = \langle x | \psi, t \rangle \quad (1.4.139)$$

tale quindi per cui

$$|\psi, t \rangle = \int dx \psi(x, t) |x \rangle \quad (1.4.140)$$

Per il fatto che T ed X commutano, poniamo

$$T |x \rangle = |x \rangle \quad (1.4.141)$$

ovvero definiamo T sulla base degli autostati della posizione in modo che sia coincidente con l'operatore di coniugazione complessa K , che abbiamo precedentemente già incontrato, definito sulla stessa base.

Ne segue dunque che³⁰

$$T |\psi, t \rangle = \int dx \psi(x, t)^* |x \rangle \quad (1.4.144)$$

e dunque che la funzione d'onda associata allo stato $T |\psi, t \rangle \equiv |\psi_T, \bar{t} \rangle$ è semplicemente la funzione $\psi^*(x, t) \equiv \psi^*(x, -\bar{t})$.

Verifichiamo ora che, come occorre aspettarsi in base all'analogia classica, T sarà una simmetria conservata se e solo se la particella interagisce con un potenziale funzione solo delle coordinate ma non del tempo.

Iniziamo osservando che se $\psi(x, t)$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale (equazione di Schrödinger)

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (1.4.145)$$

con $H = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x)$, allora, dovendo essere la funzione V reale affinché l'operatore H possa essere hermitiano, evidentemente risulta, prendendo il complesso coniugato dell'equazione data, che vale anche la relazione

$$-i \hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H \psi^* \quad (1.4.146)$$

e dunque, essendo $\bar{t} = -t$, se H e dunque V sono indipendenti da t , ecco che si ha

$$i \hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial \bar{t}} = H \psi^* \quad (1.4.147)$$

la quale dimostra quanto enunciato sopra, ovvero che $\psi(x, t)$ e $\psi^*(x, -t)$ evolvono secondo la stessa dinamica.

Una volta ancora, per fissare bene le idee su come agisce la trasformazione di Time-Reversal prima definita, vale la pena, adesso, di vedere che cosa succede nel caso della particella libera (senza spin) di impulso definito \vec{p} . Chiaramente lo stato $|\vec{p}, t \rangle$, posto $E \equiv p^2/2m$, ha come funzione d'onda la funzione

$$\psi(\vec{x}, t) \equiv \langle \vec{x} | \vec{p}, t \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-iEt/\hbar} \quad (1.4.148)$$

³⁰Ricordiamo che, partendo dalla definizione dell'operatore di coniugazione complessa definito sulla base delle coordinate, abbiamo già visto, per la (1.1.77), che risulta

$$K |\vec{p} \rangle = |-\vec{p} \rangle \quad (1.4.142)$$

ovvero, dato che abbiamo identificato T con K , ne risulta che l'operatore di inversione temporale applicato all'autostato dell'impulso per l'autovalore \vec{p} lo trasforma nell'autostato dello stesso operatore per l'autovalore $-\vec{p}$, i.e.

$$T |\vec{p} \rangle = |-\vec{p} \rangle \quad (1.4.143)$$

in perfetto accordo con quanto ci aspetteremmo in base all'analogia classica.

Per quanto abbiamo detto, la funzione d'onda associata allo stato $T|\vec{p}, t\rangle$ risulta coincidere con la funzione che si ottiene dalla (1.4.148) prendendone la complessa coniugata, ma *scritta come funzione di $\bar{t} = -t$* , ovvero

$$\langle \vec{x} | T | \vec{p}, t \rangle = \psi^*(\vec{x}, t) = \psi_T(\vec{x}, \bar{t}) \quad (1.4.149)$$

e dunque

$$\psi_T(\vec{x}, \bar{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-iE\bar{t}/\hbar} \quad (1.4.150)$$

da cui, evidentemente, ne concludiamo che lo stato descritto dal vettore $T|\vec{p}, t\rangle$ risulta avere impulso opposto a quello dello stato iniziale (come avevamo già osservato) ma *continua ad avere la stessa energia* dello stato di partenza, e non energia opposta (che non significherebbe nulla di sensato), come potremmo erroneamente ritenere, basandoci solo sull'effetto della coniugazione complessa.

Questo fatto³¹ discende formalmente dall'azione congiunta della coniugazione complessa e dal fatto che, dopo la trasformazione T , la nuova variabile temporale rispetto a cui occorre riferire l'evoluzione dello stato è \bar{t} e non t !

Vediamo adesso che cosa succede quando c'è anche lo spin.

In questo caso la sola coniugazione complessa K in generale non basta più per rappresentare T nello spazio di Hilbert delle funzioni d'onda poichè questo operatore non è sufficiente per garantire l'invarianza delle regole di commutazione per quanto concerne gli operatori di spin. Ricordiamo infatti che \vec{S} dovrà, come il momento orbitale \vec{L} , anticommutare con T , ovvero questo operatore dovrà essere tale che

$$T S_k = -S_k T \quad (1.4.151)$$

Poniamoci, per semplicità, nel caso di spin 1/2: gli operatori di spin sono proporzionali alle matrici di Pauli σ_1 , σ_2 e σ_3 .

³¹La conclusione a cui siamo giunti era del tutto prevedibile sulla base dell'analogia classica. Nell'ambito della MQ , comunque, le cose non cambiano; infatti se T è conservata allora, come sappiamo, essa deve commutare con l'hamiltoniana H del sistema e quindi risulta

$$H|E\rangle = E|E\rangle \quad \Rightarrow \quad TH|E\rangle = HT|E\rangle = ET|E\rangle$$

la quale mostra appunto che se $|E\rangle$ è autostato di H per l'autovalore E , allora anche $T|E\rangle$ lo è, per lo stesso autovalore.

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \quad (1.4.152)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \quad (1.4.153)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \quad (1.4.154)$$

E' subito evidente, allora, che in effetti la sola coniugazione complessa non può essere più sufficiente, infatti essa, mentre potrebbe bastare per S_y , che è rappresentata da una matrice fatta da immaginari puri, certamente non può bastare per S_x ed S_z , rappresentate entrambe da matrici reali.

Ci dobbiamo dunque attendere adesso che risulti

$$T = U K \quad (1.4.155)$$

dove U sarà una matrice unitaria che agisce nello spazio dello spin in modo da garantire, complessivamente, che T soddisfi la (1.4.151).

Quali sono allora le condizioni sulla matrice U ?

Evidentemente, per quanto detto, occorre che U , commutando con S_y , inverta il segno di S_x e S_z .

Chiaramente si deve trattare quindi di una rotazione di π intorno all'asse y , cioè dell'operatore unitario³²

$$U = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_2} \quad (1.4.158)$$

$$= I \cos(\pi/2) + i\sigma_2 \sin(\pi/2) = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv R \quad (1.4.159)$$

Dunque, nel caso dello spin 1/2, proprio per ragioni cinematiche, affinché le regole di commutazione (dello spin) siano preservate, sarà

$$T = R K \quad (1.4.160)$$

dove R è la matrice di rotazione (unitaria) data dalla (1.4.159).

³²Ricordiamo infatti che, per definizione

$$e^{i\alpha\sigma_2} \equiv I + i\alpha\sigma_2 + \frac{1}{2!}(i\alpha\sigma_2)^2 + \frac{1}{3!}(i\alpha\sigma_2)^3 + \dots \quad (1.4.156)$$

ma siccome $(\sigma_2)^2 = I$, ne segue che

$$e^{i\alpha\sigma_2} = I \left[1 + \frac{1}{2!}(i\alpha)^2 + \dots \right] + \sigma_2 \left[i\alpha + \frac{1}{3!}(i\alpha)^3 + \dots \right] = I \cos\alpha + i\sigma_2 \sin\alpha \quad (1.4.157)$$

1.5 L'operatore T^2

Consideriamo adesso l'operatore T^2 : esso è unitario e, applicato a un vettore di stato qualsiasi, questo potrà cambiarlo solo per un fattore di fase che, essendo T antiunitario, non può essere riassorbito attraverso una sua ridefinizione.

Decidiamo dunque una base ortonormale qualsiasi $|e_1 \rangle, \dots, |e_n \rangle, \dots$ dello spazio di Hilbert. In questa base avremo

$$T^2 |e_i \rangle = e^{i\eta_i} |e_i \rangle \quad (1.5.161)$$

e la coerenza con il principio di sovrapposizione impone, per le considerazioni già svolte per P^2 , che il fattore di fase sia lo stesso su tutti i vettori di stato, ovvero che

$$e^{i\eta_i} = e^{i\eta} \quad (1.5.162)$$

D'altronde T è antiunitario, quindi, in generale, in termini dell'operatore di coniugazione complessa K già introdotto, esso può essere scritto nella base data mediante l'ausilio di un opportuno operatore unitario U , nella forma $T = U K$. Abbiamo allora

$$T = U K \quad \Rightarrow \quad T^2 = U K U K \quad (1.5.163)$$

ovvero, posto che

$$U |e_i \rangle = U_{ji} |e_j \rangle \quad (1.5.164)$$

risulta

$$\begin{aligned} T^2 |e_i \rangle &= U K U K |e_i \rangle = U K U |e_i \rangle = U K U_{ji} |e_j \rangle = U U_{ji}^* |e_j \rangle = \\ &= U_{ji}^* U_{kj} |e_k \rangle = (U U^*)_{ki} |e_k \rangle = \left[U (U^t)^{-1} \right]_{ki} |e_k \rangle \end{aligned} \quad (1.5.165)$$

e dunque la matrice unitaria che rappresenta l'operatore T^2 nella base $|e_i \rangle$ sarà data, in generale, da

$$T^2 = U (U^t)^{-1} \quad (1.5.166)$$

D'altronde, per quanto detto sopra, essa deve essere multipla dell'identità, cioè deve essere

$$T^2 = e^{i\eta} I \quad (1.5.167)$$

e dunque

$$U (U^t)^{-1} = e^{i\eta} I \quad \Rightarrow \quad U = e^{i\eta} U^t \quad (1.5.168)$$

per cui, prendendo la trasposta di entrambi i membri, otteniamo

$$U^t = e^{i\eta} U \quad (1.5.169)$$

Sostituendo allora nella (1.5.168), ricaviamo che

$$U = e^{2i\eta} U \Rightarrow e^{i\eta} = \pm 1 \quad (1.5.170)$$

In conclusione, T^2 deve essere multipla dell'identità e i suoi valori possibili nello spazio di Hilbert degli stati di un sistema fisico assegnato, sono³³ soltanto ± 1 .

Per capire meglio il significato fisico di questo risultato, vediamone adesso il legame con lo spin.

Iniziamo considerando un sistema con spin intero S e siano $|S, m\rangle$ gli autostati di S_z per l'autovalore m . Siccome $T S_z = -S_z T$, ne segue che deve essere³⁴

$$T |S, m\rangle = e^{i\phi(m)} |S, -m\rangle \quad (1.5.171)$$

D'altronde esiste lo stato con $m = 0$, per il quale deve essere, evidentemente

$$T |S, 0\rangle = e^{i\phi} |S, 0\rangle \quad (1.5.172)$$

Ma siccome T è antiunitario, allora, applicandolo ancora una volta, avremo

$$T(T |S, 0\rangle) = e^{-i\phi} T |S, 0\rangle = e^{-i\phi} e^{i\phi} |S, 0\rangle = |S, 0\rangle \quad (1.5.173)$$

ovvero

$$T^2 |S, 0\rangle = |S, 0\rangle \quad (1.5.174)$$

Dunque, per quanto già detto, su tutti gli stati del sistema sovrapponibili con quello considerato deve essere $T^2 = 1$. I sistemi con spin intero sono quindi caratterizzati tutti dal fatto che, su di essi

$$T^2 = I \quad (1.5.175)$$

³³Questa conclusione non è valida per operatori unitari come P e C , per i quali, a priori, nulla vieta che $P^2 = e^{i\alpha}$ e $C^2 = e^{i\beta}$. Resta comunque vero che, dato il principio di sovrapposizione lineare, per tutti questi operatori P, C, T il fattore di fase deve essere unico per tutti i vettori dello spazio di Hilbert (a meno di regole di superselezione).

Come abbiamo già avuto modo di dire, questo fatto consente, nel caso degli operatori unitari P e C , di riassorbire l'eventuale fattore di fase presente nel loro quadrato, in modo che risulti comunque $P^2 = C^2 = I$.

Per il suo carattere antiunitario, questo non è possibile per T , infatti, anche ponendo $T' = e^{i\phi} T$, risulta comunque che $(T')^2 = T^2$!

³⁴Questa conclusione discende anche dal fatto che T commuta con S^2 , per cui i sottospazi con S fissato sono T -invarianti.

Veniamo ora ai sistemi con spin semidispari.

Ovviamente, l'argomento usato prima non si può più usare perché non esiste l'autostato con $m = 0$.

Iniziamo dunque dal caso già studiato di spin $1/2$.

Si è visto che, definita la matrice R attraverso la (1.4.159), essendo R reale, risulta

$$T = RK \quad \Rightarrow \quad T^2 = R^2 \quad (1.5.176)$$

ovvero

$$T^2 = R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -I \quad (1.5.177)$$

Questo risultato, come mostreremo adesso, è del tutto generale.

Infatti, nel caso di spin semidispari, risulta necessariamente che $T^2 = -I$, per cui, vista la conclusione opposta a cui siamo giunti per gli spin interi, evidentemente l'operatore T^2 discrimina i fermioni dai bosoni !

Veniamo alla dimostrazione generale.

Consideriamo un sistema con momento angolare S qualsiasi (intero o semidispari) e siano $|S, m\rangle$ gli autostati simultanei di S^2 e di S_z .

La (usuale) convenzione³⁵ di fase fatta è tale per cui ($\hbar = 1$)

$$S_z |S, m\rangle = m |S, m\rangle \quad (1.5.178)$$

$$S_+ |S, m\rangle = \sqrt{(S-m)(S+m+1)} |S, m+1\rangle \quad (1.5.179)$$

$$S_- |S, m\rangle = \sqrt{(S+m)(S-m+1)} |S, m-1\rangle \quad (1.5.180)$$

dove

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y \quad \Rightarrow \quad S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}; \quad S_y = -i \frac{S_+ - S_-}{2} \quad (1.5.181)$$

E' evidente, allora, che, così come nel caso di spin $1/2$, gli operatori S_z e S_x sono rappresentati da matrici reali, mentre S_y è rappresentato da una matrice immaginaria pura.

L'operatore T , che anticommuta con \vec{S} , non può quindi essere rappresentato solo dall'operatore K , ma occorre, in generale, che questo sia accompagnato anche da una opportuna trasformazione unitaria che anticommuti con S_x e S_z e commuti invece con S_y .

Giungiamo così, in generale, alla conclusione già tratta nel caso dello spin $1/2$, ovvero che, in presenza di qualsivoglia spin, la trasformazione U che, insieme a K , descrive la time-reversal T , è una rotazione di π intorno all'asse y , cioè

$$T = UK; \quad U = e^{i\pi S_y} \quad (1.5.182)$$

³⁵Si tratta della convenzione seguita, per esempio, da
L. Landau, E. Lifchitz: *Mécanique Quantique*, ed. MIR 1974, pag 110

D'altronde, essendo S_y immaginario puro, U è reale, per cui

$$T^2 = U K U K = U U K K = U U = e^{2i\pi S_y} \quad (1.5.183)$$

quindi, nella base considerata, T^2 è *sempre* una rotazione di 2π intorno all'asse y . Solo che, nel caso degli spin interi, questa rotazione è semplicemente l'identità I , mentre per gli spin semidispari, come sappiamo, essa vale $-I$ (nel gruppo $SU(2)$ è la rotazione di 4π che coincide con l'identità ...).

Veniamo infine a un'ultima conseguenza che si ha per i sistemi caratterizzati dall'aver $T^2 = -1$.

Supponiamo di avere un sistema per cui $T^2 = -I$ e assumiamo che T sia una simmetria conservata. Indichiamo con $|E\rangle$ un generico autostato dell'hamiltoniana. Siccome T è conservata, l'operatore T commuta con l'hamiltoniana e quindi anche il vettore di stato

$$|E_T\rangle \equiv T|E\rangle \quad (1.5.184)$$

è autostato dell'hamiltoniana per lo stesso autovalore E . Si ha

$$\begin{aligned} \langle E|E_T\rangle &\equiv \langle E|T|E\rangle = \langle T|E\rangle^* \\ &= -\langle E|T|E\rangle \equiv -\langle E|E_T\rangle \end{aligned} \quad (1.5.185)$$

dove le prime due uguaglianze sono ovvie, la terza proviene dall'antiunitarietà di T e l'ultima dal fatto che, per ipotesi, $T^2 = -I$.

La relazione ottenuta mostra chiaramente che gli stati $|E\rangle$ ed $|E_T\rangle$ sono necessariamente ortogonali fra loro e quindi che descrivono stati diversi³⁶.

Si tratta della cosiddetta *degenerazione di Kramers*³⁷ ed è presente, per quanto visto, solo nei sistemi con spin semidispari.

³⁶Il risultato ottenuto implica che, se $T^2 = -I$ allora l'hamiltoniana non può costituire, da sola, un set completo di osservabili. Il sistema deve possedere anche un qualche grado di libertà che viene cambiato da T , in modo da produrre la degenerazione: solitamente questo grado di libertà è proprio la componente z dello spin.

³⁷H.A. Kramers; *Théorie générale de la rotation paramagnétique dan les cristaux* Proc. Amsterdam Acad. 33, 959 (1930)

1.6 La violazione di parità dal punto di vista sperimentale

La simmetria di Parità è violata (in modo massimale) nelle interazioni deboli (ipotesi di Lee e Yang: cfr. *Ch.III*). I primi esperimenti che provarono la correttezza di questa ipotesi furono quello di M.me Wu e quello di Garwin e Lederman.

E' interessante notare come entrambi siano stati ricevuti dall'editore il 15/1/1957: una coincidenza che mostra un evidente accordo fra i due gruppi sperimentali, entrambi della Columbia University.

Veniamo alla loro descrizione e iniziamo da quello di M.me Wu³⁸.

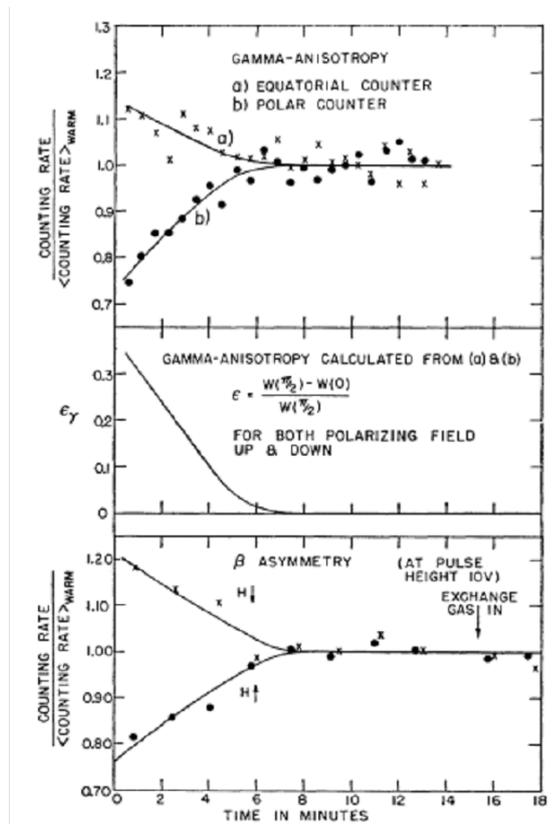
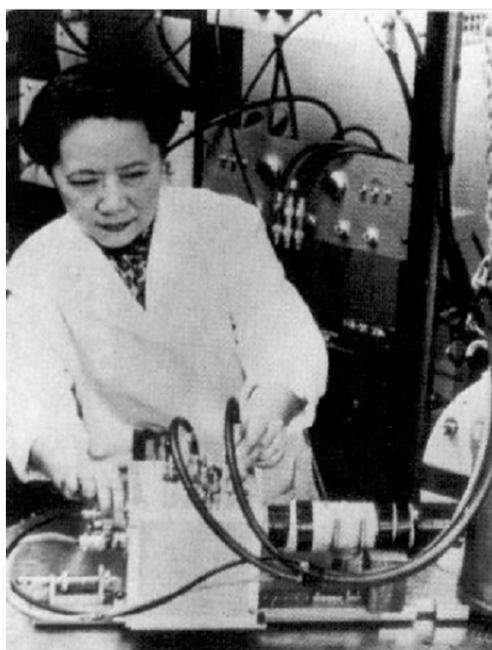


Figura 1.2: M.me Wu ed i risultati del suo esperimento con il ^{60}Co

L'esperimento fu fatto allo scopo di mettere in evidenza e quindi misurare possibili asimmetrie nella distribuzione degli elettroni emessi nel processo di decadimento β relativamente al piano normale allo spin del ^{60}Co polarizzato.

³⁸C.S. Wu et al.: *Experimental test of parity conservation in beta decay*
Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

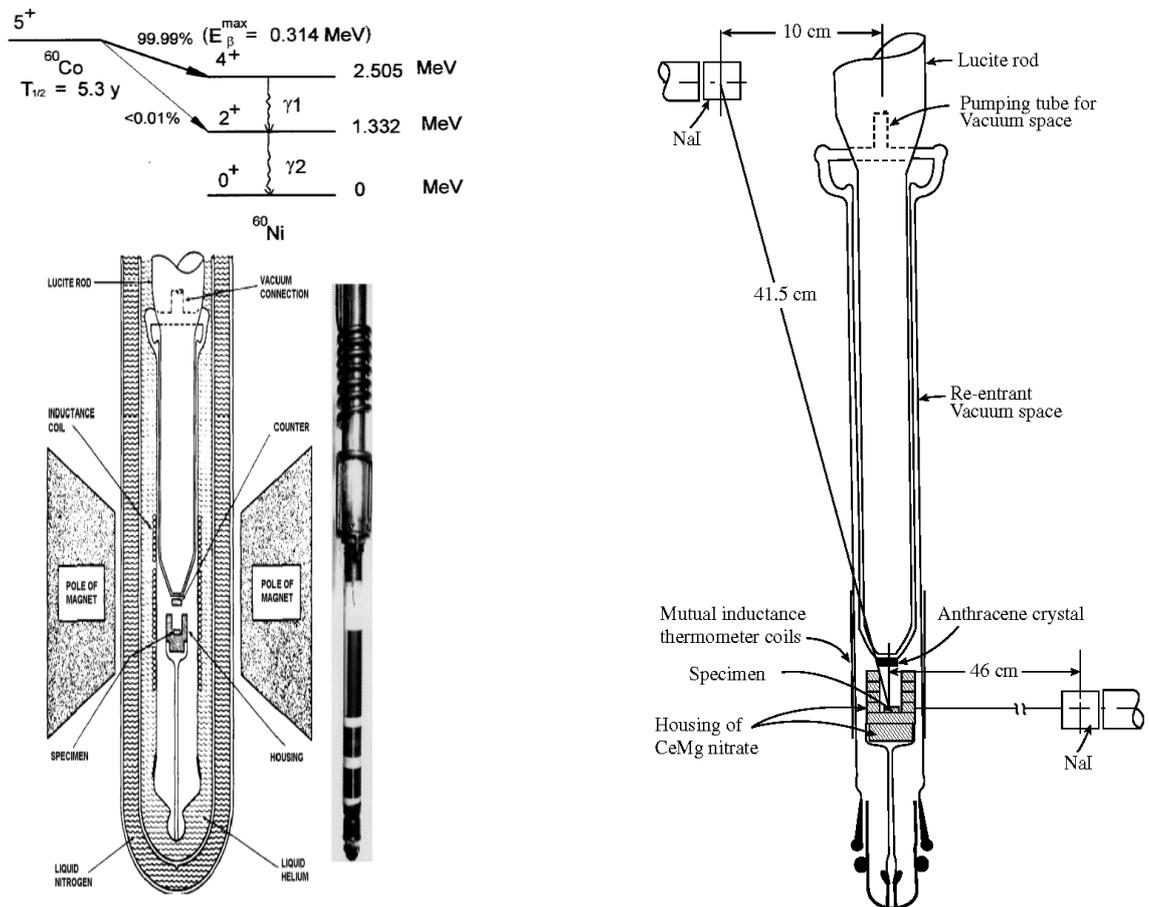


Figura 1.3: *Esperimento di M.me Wu*

L'orientamento dei nuclei di Cobalto era ottenuto attraverso un campo magnetico relativamente poco intenso ($B \approx 500 \text{ gauss}$) agente su questi atomi, raffreddati fino a $\approx 0.003^0 K$ mediante la tecnica del raffreddamento tramite demagnetizzazione adiabatica, di Rose e Gorter³⁹.

³⁹M.E. Rose: "On the production of nuclear polarization", Phys. Rev. 75, 213 (1949)
C.J. Gorter: "A new suggestion for aligning certain atomic nuclei", Physica 14, 504 (1949)

Iniziamo osservando che una temperatura molto bassa risulterà senz'altro necessaria in quanto il magnetone nucleare $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ vale $\mu_N = 3.152 \times 10^{-8} \text{ eV} \cdot T^{-1}$ e dunque, anche immaginando di disporre di campi magnetici molto intensi per esempio di $10 T$, tenendo conto che il nucleo di Cobalto ha un momento magnetico pari a circa tre magnetoni nucleari, risulta $\mu_{Co} B \approx 10^{-6} \text{ eV}$, da confrontare con un $kT = 86.2 \cdot 10^{-6} \text{ eV} @ 1^0 K$.

Il problema di riuscire a produrre una temperatura sufficientemente bassa fu risolto attraverso, appunto, il metodo messo a punto da Rose e Gorter, citati sopra. Nel caso specifico, esso fu realizzato ponendo in un bagno termico di He liquido a pressione di vapore inferiore alla pressione atmosferica ($T_{He} \approx 1^0 K$) un cristallo di Nitrato di Cerio e Magnesio ($2Ce(NO_3)_3 \cdot 3Mg(NO_3)_2 \cdot 24H_2O$), realizzato in modo che, al suo interno, potesse essere poi depositato un layer molto sottile ($\approx 50 \mu m$) di $^{60}_{27}Co$. Questo sale è una sostanza fortemente paramagnetica e anisotropa, che presenta due assi di magnetizzazione con costanti di polarizzabilità molto differente: l'asse di maggiore polarizzabilità era disposto nel piano orizzontale mentre quello di minore polarizzabilità era allineato con la direzione verticale. Come illustrato nella parte sinistra della Fig.1.3, veniva prodotto un forte campo magnetico orizzontale. Questo allineava gli spin elettronici (ricordiamo che μ_e è circa 2000 volte maggiore di μ_N) del sale paramagnetico: i livelli che prima dell'imposizione del

Il processo di decadimento del ${}^{60}\text{Co}$ inizia con un decadimento β con $\Delta J = 1$ (transizione di Gamow-Teller permessa, tempo di dimezzamento 5.3 a) ${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}$ da un livello 5^+ a un livello 4^+ ($E_{\beta}^{\text{max}} = 314 \text{ KeV}$), seguito da una cascata elettromagnetica $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ con emissione di due fotoni via transizioni $E2$ da 1.173 MeV e 1.332 MeV , rispettivamente. I due fotoni sono emessi preferibilmente in una direzione ortogonale alla polarizzazione nucleare del ${}^{60}\text{Co}$ e dunque, la loro asimmetria poteva essere usata come controllo dell'allineamento nucleare.

Un sottile cristallo di antracene nel criostato rivelava gli elettroni: la luce emessa dal cristallo raggiungeva un fotomoltiplicatore posto in cima al criostato, attraverso una guida di luce. Due contatori a scintillazione di ioduro di sodio esterni al criostato, posti in una configurazione che permetteva il controllo dell'asimmetria di emissione dei gamma, verificavano lo stato di polarizzazione del ${}^{60}\text{Co}$ in funzione del tempo.

Per invertire lo spin nucleare bastava procedere di nuovo a un raffreddamento dell'intero sistema e quindi invertire il senso di circolazione della corrente nel solenoide.

L'esperimento mostrò una notevole asimmetria⁴⁰ nell'emissione β , la quale seguiva strettamente l'evoluzione nel tempo della polarizzazione nucleare

campo magnetico erano equipopolati, si popolavano favorendo, secondo la statistica di Boltzmann, i livelli di energia più bassa. Questo processo libera energia che viene però assorbita dal bagno di elio e dunque la temperatura resta costante. Una volta raggiunto l'equilibrio spin-reticolo, veniva tolto il bagno di elio, isolando così termicamente il cristallo di nitrato di Cerio e Magnesio e quindi la sorgente radioattiva di ${}^{60}_{27}\text{Co}$. Diminuendo il campo magnetico in modo adiabatico (ovvero su tempi più brevi di quelli di rilassamento spin-reticolo, dell'ordine della decina di minuti), poiché la popolazione dei vari livelli non varia (transizione adiabatica), ecco che il sistema, restando con la stessa distribuzione di popolazione, calava la temperatura del cristallo e della sorgente su di esso, restando, almeno in prima approssimazione, $\mu B/kT = \text{cost}$. Partendo allora da campi $B \approx 2T$, si potevano raggiungere, in questo modo, temperature di pochi milliKelvin, partendo da quella dell'elio liquido. Una volta effettuato il raffreddamento, il magnete veniva tolto e veniva invece inserito un solenoide che serviva per polarizzare il Cobalto.

Esso generava un campo dell'ordine di 500 gauss . Questo non riscaldava apprezzabilmente il sistema sia perché era molto meno intenso del campo usato in precedenza, sia perché era applicato secondo l'asse di minor magnetizzazione del sale. Questo campo B , comunque, era in grado di polarizzare molto efficacemente gli spin *elettronici* del Cobalto che finiva per trovarsi alla temperatura di $\approx 10 \text{ m}^{\circ}\text{K}$

$$\frac{\mu_e B}{kT} \approx \frac{5.788 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-2}}{8.617 \cdot 10^{-5} \times 10^{-2}} \approx 3.3$$

La polarizzazione nucleare era determinata dal campo magnetico che i momenti magnetici associati agli elettroni, allineati dal campo esterno, generavano sul nucleo, campi che sono dell'ordine della decina di Tesla.

Al passare del tempo, in circa sei minuti, la temperatura risaliva, distruggendo così la polarizzazione nucleare.

⁴⁰La presenza del campo solenoidale durante la misura si limita a canalizzare il moto degli elettroni lungo le linee di forza dello stesso, intorno a cui, data la relativamente bassa energia degli stessi, descrivono spirali piuttosto strette.

$\mathcal{P}(t)$, come misurata dall'anisotropia di emissione dei fotoni, risultando

$$Y(\theta) = 1 - \mathcal{P}(t) \left\langle \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E} \right\rangle = 1 - \mathcal{P}(t) \frac{\langle v \rangle}{c} \cos\theta \quad (1.6.186)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di volo dell'elettrone e la direzione della polarizzazione nucleare e, per il decadimento considerato, risulta $\langle v/c \rangle \approx 0.6$.

Veniamo adesso all'esperimento⁴¹ di Garwin e Lederman, condotto presso il ciclotrone di Nevis.

Essi misero in evidenza la violazione di parità nel decadimento debole del pione, studiando le caratteristiche del decadimento del μ^+ generato dalla disintegrazione del π^+ , ovvero studiando la catena

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ (+\nu_\mu); \quad \mu^+ \rightarrow e^+ (+\nu_e + \bar{\nu}_\mu) \quad (1.6.187)$$

Come era stato osservato da Lee e Yang, il muone doveva nascere polarizzato longitudinalmente e questo stato di polarizzazione doveva a sua volta essere correlato con la direzione di emissione del positrone.

Il fascio, che conteneva circa il 10% di μ^+ dal decadimento di π^+ in volo, veniva filtrato dai pioni stessi fermanone e assorbendone quanti più possibile in 8" di grafite ($\lambda_I = 5''$).

In questo modo veniva massimizzato il numero di $m\bar{u}$ -stop nel bersaglio, posto davanti al telescopio che osservava i positroni di decadimento, realizzato con due scintillatori e un moderatore fra loro, in modo da dare un segnale di coincidenza solo quando l'energia dei positroni era superiore a 25 MeV (35 MeV in una seconda fase dell'esperimento).

Un campo magnetico $B(I) = 80 \text{ gauss}/A$ nella regione del bersaglio induceva una precessione⁴² nota (ma variabile in funzione di I) dello spin del muone.

⁴¹R.L. Garwin, L.M. Lederman, M.Weinrich: *Observation of the failure of Conservation of parity and Charge Conjugation in meson decays: the magnetic moment of the free muon* Phys. Rev. 105, 1415 (1957)

⁴²Ricordiamo che in campo magnetico uniforme e costante B , un momento magnetico che non sia allineato con il campo stesso, precessa con una frequenza angolare pari a (SI)

$$2\pi \nu \equiv \omega = \frac{\mu B}{s\hbar} \quad \text{dove} \quad \mu = \frac{e\hbar}{2m} \quad (1.6.188)$$

e dunque, nel caso del muone (spin $s = 1/2$), assumendo nessun momento anomalo, abbiamo una frequenza di precessione dello spin con cui il momento magnetico è comunque allineato, pari a

$$\omega = \frac{eB}{2sm} \Rightarrow \frac{\omega}{B} = \frac{e}{m} = \frac{ec^2}{mc^2} \quad (1.6.189)$$

D'altronde

$$mc^2 = 105.66 \cdot 10^6 \text{ eV} = 1.06 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (1.6.190)$$

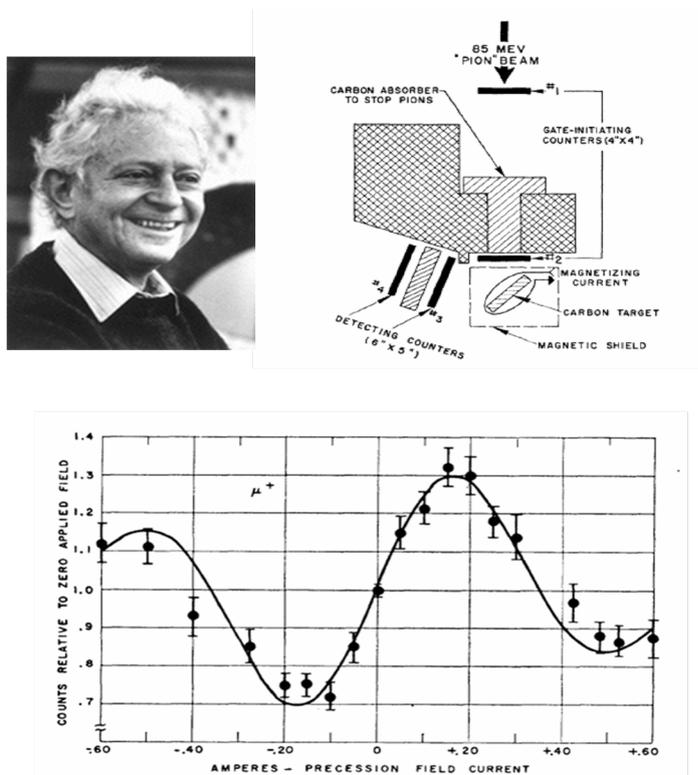


Figura 1.4: *L'apparato sperimentale usato da Garwin e Lederman per osservare la violazione di parità nel decadimento del muone ed i risultati ottenuti.*

Sperimentalmente si osservava una modulazione del numero dei positroni emessi fra $0.75 \mu\text{s}$ e $2.0 \mu\text{s}$ dopo il trigger di $\mu\text{-stop}$ in funzione della corrente di induzione magnetica I , compatibile con una correlazione di tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ fra lo spin del muone al momento del decadimento e la direzione di volo del positrone, indice di violazione di parità sia nel decadimento del pione (se il muone non fosse stato polarizzato, anche se nel suo decadimento si fosse poi violata la parità, non avremmo potuto osservare alcuna modulazione poichè lo stato di spin del muone sarebbe stato distribuito isotropicamente) che nel decadimento del muone.

e dunque

$$\frac{\omega}{B} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} (3 \cdot 10^8)^2}{1.06 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.06 \cdot 10^8} \approx 8.5 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} T^{-1} \quad (1.6.191)$$

da cui, per un campo di $50 \text{ gauss} = 50 \cdot 10^{-4} T$ (massimo valore raggiunto sul bersaglio) ne risulta una frequenza di precessione pari a

$$\omega = 8.5 \cdot 10^8 \times 50 \cdot 10^{-4} = 4.25 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,48 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (1.6.192)$$

1.7 Il sistema dei $K^0 - \bar{K}^0$ e la violazione di CP

Abbiamo visto che le interazioni deboli violano P . Esse violano anche C ma, almeno in un primo tempo si ritenne che il prodotto CP fosse conservato. Fu quindi un'altra sorpresa quella di scoprire che nel sistema dei mesoni K neutri questo non era vero !

Vediamo come ci si arrivò.

Ricordiamo che i mesoni K neutri hanno spin nullo e sono particelle pseudoscalari, ovvero essi hanno parità intrinseca $P = -1$.

Essi furono individuati da Rochester e Butler nel 1947 in interazioni di raggi cosmici in camera a nebbia come particelle V^0 , e infatti un loro modo frequente di decadimento è quello in due pioni

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

Poiché questi mesoni hanno stranezza, essi *non* possono coincidere con la propria antiparticella⁴³, quindi dovranno esistere sia il K^0 che il \bar{K}^0 .

Gell-Mann e Pais furono i primi che si posero il problema⁴⁴ delle conseguenze osservabili che derivano dall'esistenza di due mesoni neutri coniugati di carica. Essi partirono dall'assunto che C fosse una simmetria rispettata⁴⁵ anche dalle interazioni deboli: oggi sappiamo che questo non è vero, anzi che essa è violata in modo massimale, ma vale la pena ripercorrere il loro ragionamento sostituendo semplicemente alla loro ipotesi quella che sia invece CP la simmetria conservata anche dalle interazioni deboli. Siccome CP è violata solo marginalmente, questa resta comunque una ipotesi di lavoro molto utile.

Assumiamo dunque che esistano i due stati ortogonali $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$ e definiamo la simmetria CP in modo che risulti

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle; \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (1.7.193)$$

Iniziamo trattando il problema dell'evoluzione del sistema delle due particelle nell'ipotesi di *assenza* di interazione debole.

Chiaramente, in questa ipotesi, esse non possono decadere e ponendo

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad |\Psi(t)\rangle = a(t)|K^0\rangle + b(t)|\bar{K}^0\rangle \quad (1.7.194)$$

⁴³In termine di quark, oggi sappiamo che

$$|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle; \quad |\bar{K}^0\rangle = |\bar{d}s\rangle$$

e la stranezza del K^0 è $S = +1$, mentre quella del \bar{K}^0 è $S = -1$.

⁴⁴M. Gell-Mann, A. Pais: *Behavior of neutral particles under charge conjugation*, Phys. Rev. 97, 1387 (1955)

⁴⁵Si ricordi che la violazione della parità nelle interazioni deboli fu osservata solo nel 1957, cioè due anni dopo l'analisi di Gell-Mann e Pais.

ne segue che la funzione d'onda $\Psi(t)$ evolverà in modo libero per cui, nel sistema del CM , sarà

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H \Psi(t), \quad H = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad (1.7.195)$$

dove si è assunta valida la simmetria CPT e dunque che

$$m(K^0) = m(\bar{K}^0) \equiv M \quad (1.7.196)$$

In questa ipotesi, il sistema è dunque costituito da due stati degeneri.

Immaginiamo adesso di "accendere" l'interazione debole.

A causa, per esempio, del fatto che sia il $|K^0\rangle$ che il $|\bar{K}^0\rangle$ possono decadere in una coppia di pioni, si apre la possibilità che essi si trasformino, al secondo ordine nelle interazioni deboli, l'uno nell'altro

$$\left(|K^0\rangle \rightarrow \pi\pi; |\bar{K}^0\rangle \rightarrow \pi\pi \right) \Rightarrow |K^0\rangle \rightarrow \pi\pi \rightarrow |\bar{K}^0\rangle \quad (1.7.197)$$

Dunque la dinamica debole deve consentire (al secondo ordine) oscillazioni del tipo

$$|K^0\rangle \leftrightarrow |\bar{K}^0\rangle \quad (1.7.198)$$

per cui l'hamiltoniana del sistema $\{|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle\}$, deve piuttosto essere della forma⁴⁶

$$H = \begin{pmatrix} M & \Delta_1 \\ \Delta_2 & M \end{pmatrix} \quad (1.7.199)$$

Se però CP è conservata dall'hamiltoniana, allora

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle K^0 | H | \bar{K}^0 \rangle = \langle K^0 | (CP) H (CP) | \bar{K}^0 \rangle = \\ &= \langle \bar{K}^0 | H | K^0 \rangle = \Delta_2 \end{aligned} \quad (1.7.200)$$

e dunque l'hamiltoniana H sarà in realtà del tipo

$$H = \begin{pmatrix} M & \Delta \\ \Delta & M \end{pmatrix} \quad (1.7.201)$$

Questa hamiltoniana, indipendentemente dal valore effettivo di Δ (che, pur essendo certamente piccolissimo in confronto a M , visto che descrive un processo al secondo ordine nell'interazione debole, esso non è nullo), ha comunque i due autovettori della forma

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad (1.7.202)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (1.7.203)$$

⁴⁶L'invarianza sotto $\Theta \equiv CPT$ implica in generale che, per il suo carattere antiunitario, risulti $\langle \Phi | H | \Psi \rangle = \langle \Theta \Psi | H | \Theta \Phi \rangle$ e dunque che $\langle K^0 | H | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | H | \bar{K}^0 \rangle$.

corrispondenti, rispettivamente, agli autovalori $M \pm \Delta$ per cui il sistema non è più degenere.

Siccome per ipotesi $[H, CP] = 0$ questi autovettori dell'hamiltoniana devono essere anche autovettori simultanei di CP ed è immediato che lo sono per gli autovalori ± 1 , rispettivamente.

L'interazione debole, però, come si è detto, accoppia gli stati di $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$ ad altri stati, sia di multi-pione che semileptonici, etc ..., i quali non stanno nello spazio di Hilbert bidimensionale fin'ora considerato. Questo a priori significa che non è possibile descrivere compiutamente l'evoluzione del sistema $|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle$ senza allargare lo spazio comprendendo anche questi stati. Se però non siamo interessati a conoscere il dettaglio degli stati finali ma solo a sapere che cosa accade agli stati di $|K^0\rangle$ e di $|\bar{K}^0\rangle$, allora si può restare nello spazio bidimensionale da essi definito ma occorre ammettere che l'hamiltoniana non sia più hermitiana bensì contenga i termini opportuni che descrivono il decadimento esponenziale degli stati altrimenti stazionari. Dunque, sempre nell'ipotesi che CP sia una simmetria rispettata dall'interazione debole, i due stati ortogonali $|K_1^0\rangle$ e $|K_2^0\rangle$ evolveranno verso stati con lo stesso autovalore di CP , senza mescolamenti, ciascuno con una propria larghezza di decadimento Γ_1 e Γ_2 , per cui, in questa stessa base, avremo piuttosto che

$$H = \begin{pmatrix} M + \Delta - \frac{i}{2}\Gamma_1 & 0 \\ 0 & M - \Delta - \frac{i}{2}\Gamma_2 \end{pmatrix} \quad (1.7.204)$$

e dunque, quanto all'evoluzione temporale, sarà ($\hbar = c = 1$)

$$|K_1^0, t\rangle = e^{-i(M+\Delta-\frac{i}{2}\Gamma_1)t} |K_1^0\rangle = e^{-i(M+\Delta)t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t} |K_1^0\rangle \quad (1.7.205)$$

$$|K_2^0, t\rangle = e^{-i(M-\Delta-\frac{i}{2}\Gamma_2)t} |K_2^0\rangle = e^{-i(M-\Delta)t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_2 t} |K_2^0\rangle \quad (1.7.206)$$

Ciò che Gell-Mann e Pais misero in evidenza era che mentre il $|K_1^0\rangle$ poteva decadere in due pioni perché questo è uno stato CP -pari⁴⁷, se CP era conservata, il $|K_2^0\rangle$ non poteva farlo, bensì doveva decadere in almeno tre pioni.

Però, in questo caso, per esempio lo spazio delle fasi era molto più ridotto e quindi c'era da aspettarsi che il $|K_2^0\rangle$ avesse una vita media sensibilmente

⁴⁷Nel caso, per esempio, del sistema $\pi^+\pi^-$, coniugazione di carica e parità equivalgono entrambe alla simmetria di scambio e dunque moltiplicano ciascuna la funzione d'onda dello stato per $(-1)^L$, per cui l'applicazione di entrambe lascia la funzione d'onda inalterata.

Nel caso di due pioni neutri, la coniugazione di carica non altera lo stato, ma la parità continua a equivalere allo scambio e, trattandosi di bosoni identici ...

Il contrario accade nel decadimento in tre π^0 , che sappiamo avvenire in onda S .

I tre pioni devono avere la funzione d'onda globalmente simmetrica, da cui ne segue che, essendo autostati di C per l'autovalore $+1$ e avendo la parità intrinseca negativa, lo stato avrà l'autovalore di CP necessariamente uguale a -1 .

più lunga.

Osserviamo adesso che, nel processo forte di produzione dei mesoni strani, non vengono però prodotti né il $|K_1^0\rangle$ né il $|K_2^0\rangle$, bensì viene prodotto tipicamente un K^0 , magari insieme alla Λ o a una Σ ... E' quindi dell'evoluzione dello stato di K^0 così prodotto che occorre, piuttosto, occuparci⁴⁸ !

Per sapere come esso evolve nel tempo, basta in realtà applicare semplicemente i principi primi della Meccanica Quantistica. Essa ci dice che

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \quad (1.7.207)$$

dunque

$$|K^0, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iMt} (e^{-it\Delta} e^{-t\Gamma_1/2} |K_1^0\rangle + e^{it\Delta} e^{-t\Gamma_2/2} |K_2^0\rangle) \quad (1.7.208)$$

Questo implica che, al tempo $t \geq 0$, le probabilità che si abbia a che fare con un $|K_1^0\rangle$ oppure con un $|K_2^0\rangle$ valgono, rispettivamente

$$|\langle K_1^0 | K^0, t \rangle|^2 = \frac{1}{2} e^{-t\Gamma_1} \quad (1.7.209)$$

$$|\langle K_2^0 | K^0, t \rangle|^2 = \frac{1}{2} e^{-t\Gamma_2} \quad (1.7.210)$$

per cui, su tempi brevi, osserveremo molto frequentemente il decadimento del $|K_1^0\rangle$, il quale procede con la vita media più breve Γ_1 , mentre su tempi lunghi, lo stato tenderà a divenire uno stato puro di $|K_2^0\rangle$ poiché la componente $|K_1^0\rangle$ sarà nel frattempo tutta decaduta, e quindi, per tempi lunghi, dovremo aspettarci, per esempio, solo decadimenti a tre pioni (e verso altri canali magari divenuti competitivi con questo ...), ma certamente non più in due pioni !

Effettivamente in natura si osserva sia uno stato di K neutro, chiamato $|K_S\rangle$, il quale decade tipicamente in due pioni (carichi o neutri) con una vita media relativamente breve ($\tau_S = 0.895 \times 10^{-10}$ s) come pure uno stato chiamato $|K_L\rangle$ il quale decade in tre pioni (oltre ad alcuni canali semileptonici) con una vita media relativamente lunga ($\tau_L = 5.12 \times 10^{-8}$ s).

Tutto bene, dunque ? Non esattamente ...

La novità venne con l'esperimento⁴⁹ di Cronin, Christenson, Fitch e Turlay che mostrò come il $|K_L\rangle$ poteva decadere, in circa lo 0.2% dei casi in due pioni. Come poteva succedere ?

Le spiegazioni possibili richiedevano di rimettere in discussione la simmetria CP ed erano sostanzialmente due:

⁴⁸ Anche nel caso che venga prodotto il $|K^{\bar{0}}\rangle$, la conclusione che segue è la stessa ...

⁴⁹ J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch, R. Turlay: *Evidence for 2π decay of the $|K_2^0\rangle$ meson*, Phys. rev. Lett. 13, 138 (1964)

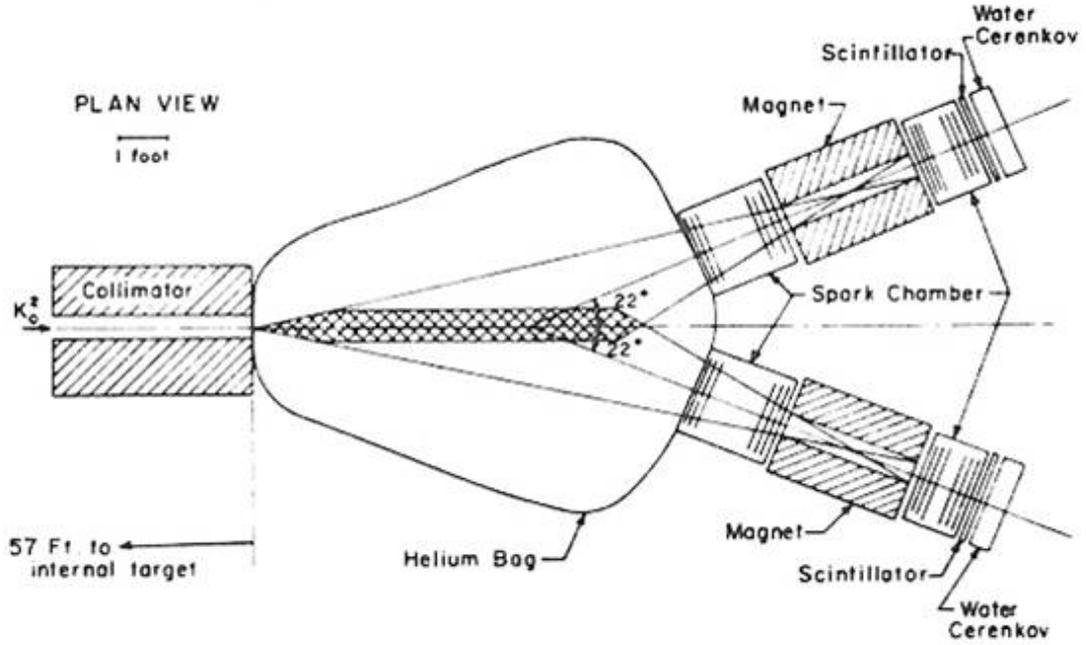


Figura 1.5: *Apparato sperimentale di Cronin et al.*

- i due autostati dell'hamiltoniana $|K_S\rangle$ e $|K_L\rangle$ non coincidevano esattamente con $|K_1^0\rangle$ e $|K_2^0\rangle$ e quindi non erano autostati di CP ; però il decadimento debole rispettava questa simmetria. E' questo il cosiddetto meccanismo della *violazione indiretta*.
- CP non era rispettata nel decadimento debole: è il meccanismo della *violazione diretta*.

Oggi sappiamo che sono presenti entrambi i meccanismi, però quanto osservato da Cronin e collaboratori era un effetto dovuto alla violazione indiretta. Cerchiamo di capire che cosa questo significa e come avviene.

Ripartiamo per questo dall'hamiltoniana H che descrive l'evoluzione del sistema $|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle$ in questa stessa base. Nel caso più generale possibile, essa sarà una matrice complessa 2×2 , cioè della forma

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.7.211)$$

I suoi autovalori sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[a + d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc} \right] \quad (1.7.212)$$

e i corrispondenti autovettori $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{\pm}$ sono tali per cui il rapporto fra le loro due componenti è dato da

$$\left(\frac{q}{p} \right)_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm} - a}{b} = \frac{d - a \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2b} \quad (1.7.213)$$

Ricordiamo però che l'hamiltoniana deve rispettare⁵⁰ almeno CPT , per cui

$$a = d \equiv M - \frac{i}{2}\Gamma \quad (1.7.214)$$

Questo significa che, per la (1.7.212), risulta

$$\lambda_{\pm} = M - \frac{i}{2}\Gamma \pm \sqrt{bc} \quad (1.7.215)$$

ovvero, definendo⁵¹

$$\sqrt{bc} \equiv -\frac{1}{2}\left(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma\right) \quad (1.7.216)$$

quanto agli autovalori dell'hamiltoniana si ha

$$\lambda_{\pm} = M - \frac{i}{2}\Gamma \mp \frac{1}{2}\left(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma\right) \quad (1.7.217)$$

Veniamo ora agli autovettori dell'hamiltoniana H .

Dalla (1.7.213) risulta adesso che

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{c}{b}} \quad (1.7.218)$$

Nell'ipotesi in cui CP commuti con H , come abbiamo visto la quantità sotto radice vale proprio 1, mentre in generale sarà

$$\sqrt{\frac{c}{b}} \equiv z = \rho e^{i\beta} \quad (1.7.219)$$

dove z è un opportuno numero complesso di modulo ρ e fase β .

Definiamo allora il seguente parametro complesso ϵ , il quale descrive appunto l'entità della violazione (indiretta) di CP e risulta nullo se CP è rispettata.

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = z \Leftrightarrow \epsilon \equiv \frac{1-\rho e^{i\beta}}{1+\rho e^{i\beta}} \quad (1.7.220)$$

Da quanto precede otteniamo che gli autovettori corrispondenti agli autovalori λ_{\pm} sono tali che

$$\begin{aligned} |\pm\rangle &\propto \left[(1+\epsilon)|K^0\rangle \pm (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle \right] \\ &= \left[(|K^0\rangle \pm |\bar{K}^0\rangle) + \epsilon(|K^0\rangle \mp |\bar{K}^0\rangle) \right] \end{aligned} \quad (1.7.221)$$

⁵⁰Poiché l'hamiltoniana ristretta al sottospazio bidimensionale dei K neutri non è hermitiana per le ragioni che abbiamo detto, l'invarianza sotto T (e quindi anche sotto CPT), per il carattere antiunitario di T stesso, richiede che $THT^{-1} = H^{\dagger}$.

⁵¹La scelta dei segni è fatta in modo che all'autovettore corrispondente a λ_{+} corrisponda una larghezza maggiore, ovvero una vita media minore.

ovvero, normalizzandoli, abbiamo finalmente

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} \left[(1+\epsilon)|K^0\rangle + (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[|K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle \right] \\ |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} \left[(1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[|K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle \right] \end{aligned}$$

la quale mostra come una hamiltoniana CPT -invariante che descrive l'evoluzione del sistema $|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle$ in cui, però, sono presenti termini che violano CP , può generare un mescolamento degli stati con CP opposta e quindi, anche nell'ipotesi che i decadimenti in due o tre pioni del $|K_1^0\rangle$ e $|K_2^0\rangle$ rispettino CP , può rendere conto, attraverso il meccanismo della *violazione indiretta*, dell'osservazione fatta da Cronin e collaboratori.

La ragionevolezza di questa spiegazione è suffragata anche dalla asimmetria di carica che viene osservata nei decadimenti semileptonici del K_L . Vediamo di che si tratta.

Il mesone $|K^0\rangle$ è un sistema $(d\bar{s})$ e, via corrente carica, il quark \bar{s} può trasformarsi in \bar{u} emettendo un W^+ virtuale che può materializzarsi in una coppia leptonica, per esempio $e^+ \nu_e$. Ne discende quindi il decadimento

$$|K^0\rangle \equiv |d\bar{s}\rangle \rightarrow |d\bar{u}\rangle + e^+ + \nu_e \equiv \pi^- e^+ \nu_e \quad (1.7.222)$$

Per lo stesso motivo accade però che

$$|\bar{K}^0\rangle \equiv |s\bar{d}\rangle \rightarrow |u\bar{d}\rangle + e^- + \bar{\nu}_e \equiv \pi^+ e^- \bar{\nu}_e \quad (1.7.223)$$

Se adesso abbiamo un fascio di K_L (basta mettersi abbastanza lontani dalla loro sorgente e questo accade in modo naturale ...) siccome il $|K^0\rangle$ vi compare pesato con $(1+\epsilon)$ mentre il $|\bar{K}^0\rangle$ vi compare pesato con $(1-\epsilon)$, ecco che se N_+ indica il numero degli eventi di decadimento con positrone e N_- quello degli eventi con elettrone, allora questi numeri differiranno fra loro in relazione proprio al valore di ϵ , infatti avremo

$$\delta \equiv \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = \frac{|1+\epsilon|^2 - |1-\epsilon|^2}{|1+\epsilon|^2 + |1-\epsilon|^2} = \frac{2\Re(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2} \approx 2\Re(\epsilon) \quad (1.7.224)$$

Sperimentalmente il valore misurato è

$$\delta = (3.32 \pm 0.06) \times 10^{-3} \quad (1.7.225)$$

Non è affatto un caso che la quantità osservabile⁵² δ non misuri il parametro di mixing ϵ ma la combinazione $\frac{2\Re(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2}$.

Il punto sta nel fatto che la simmetria di coniugazione di carica C contiene, nella sua definizione, una arbitrarietà di fase che occorre fissare. Definendo

⁵²Si osservi che, proprio per il meccanismo che la genera, l'asimmetria di carica deve risultare la stessa anche quando la coppia leptonica sia fatta da $\mu^+ \nu_\mu$!

la base (1.7.193) noi lo abbiamo fatto in modo implicito: è la convenzione di fase di Wu-Yang. Però, al posto della base $\{|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle\}$ così definita, avremmo potuto equivalentemente usare la base $\{|K_\alpha^0\rangle, |\bar{K}_\alpha^0\rangle\}$ seguente

$$\begin{aligned} |K_\alpha^0\rangle &\equiv e^{-i\alpha/2} |K^0\rangle & \Leftrightarrow & CP |K_\alpha^0\rangle \equiv e^{-i\alpha} |\bar{K}_\alpha^0\rangle \\ |\bar{K}_\alpha^0\rangle &\equiv e^{i\alpha/2} |\bar{K}^0\rangle & & CP |\bar{K}_\alpha^0\rangle \equiv e^{i\alpha} |K_\alpha^0\rangle \end{aligned} \quad (1.7.226)$$

In questa base l'hamiltoniana (1.7.211) assume la forma⁵³ seguente:

$$H \rightarrow H' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b e^{-i\alpha} \\ c e^{i\alpha} & d \end{pmatrix} \quad (1.7.227)$$

Le due descrizioni del sistema dei due mesoni K neutri devono però essere equivalenti e dunque nessuna osservabile fisica deve poter essere affetta da questa trasformazione. Però dalla definizione (1.7.220) risulta evidente che

$$\sqrt{\frac{c}{b}} = \rho e^{i\beta} \rightarrow \sqrt{\frac{c'}{b'}} = \rho e^{i(\alpha+\beta)} \equiv \frac{1-\epsilon'}{1+\epsilon'} \quad (1.7.228)$$

Evidentemente, per l'arbitrarietà di α , solo il parametro ρ può avere un significato indipendente dalla convenzione di fase e dunque solo ρ può essere legato a quantità osservabili.

In particolare accade che la violazione di CP è presente nel sistema se e solo se $\rho \neq 1$, indipendentemente dal valore della fase β .

A conferma di questa affermazione, abbiamo per esempio che il parametro δ definito dalla (1.7.224), il quale misura appunto l'asimmetria di carica nel decadimento dei K_L , direttamente legato alla violazione indiretta, dipende da ϵ solo attraverso ρ , essendo infatti⁵⁴

$$\frac{2\Re(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2} = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \quad (1.7.232)$$

⁵³Non meravigli che adesso i termini fuori diagonale siano proporzionali a fattori di fase inversi uno dell'altro: abbiamo cambiato la definizione di C e quindi di CP per cui, per esempio, non è più vero che i due termini debbano essere uguali se CP è conservata ...

⁵⁴Poniamo per semplicità

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c}{b}} &= \rho e^{i\beta} \equiv z \Rightarrow \epsilon = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-z}{1+z} \frac{1+z^*}{1+z^*} = \frac{1-|z|^2 - 2i\Im(z)}{1+|z|^2 + 2\Re(z)} \quad (1.7.229) \\ \Rightarrow \Re(\epsilon) &= \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 + 2\Re(z)} \end{aligned} \quad (1.7.230)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} 1+|\epsilon|^2 &= 1 + \frac{1-z}{1+z} \frac{1-z^*}{1+z^*} = 1 + \frac{1-|z|^2 - 2\Re(z)}{1+|z|^2 + 2\Re(z)} = 1 + \frac{1+\rho^2 - 2\Re(z)}{1+\rho^2 + 2\Re(z)} = \\ &= 2 \frac{1+\rho^2}{1+\rho^2 + 2\Re(z)} \end{aligned} \quad (1.7.231)$$

e mettendo insieme questa relazione con la precedente (1.7.230), otteniamo immediatamente la (1.7.232).

Un altro fenomeno molto interessante che vale la pena di ricordare riguarda la cosiddetta *oscillazione di stranezza*.

Supponiamo che al tempo $t = 0$ sia stato formato uno stato di $|K_0\rangle$ (di $|\bar{K}^0\rangle$): ci domandiamo quale sia la probabilità che al tempo t esso sia trovato (per esempio attraverso un decadimento semileptonico) in uno stato di $|\bar{K}^0\rangle$ ($|K_0\rangle$).

Trattiamo senz'altro il problema nella convenzione di fase di Wu-Yang. Come si è già visto in precedenza, risulta

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[|K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[(|K_0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) + \epsilon (|K_0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[(1+\epsilon)|K_0\rangle + (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle \right] \end{aligned} \quad (1.7.233)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[|K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[(|K_0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) + \epsilon (|K_0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \left[(1+\epsilon)|K_0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle \right] \end{aligned} \quad (1.7.234)$$

per cui abbiamo che

$$|K_0\rangle = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon)} (|K_S\rangle + |K_L\rangle) \quad (1.7.235)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{\sqrt{2}(1-\epsilon)} (|K_S\rangle - |K_L\rangle) \quad (1.7.236)$$

Evidentemente, allora

$$|K_0, t\rangle = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon)} (|K_S, t\rangle + |K_L, t\rangle) \quad (1.7.237)$$

Ma gli stati $|K_S\rangle$ e $|K_L\rangle$ sono, per definizione, autostati dell'hamiltoniana per gli autovalori λ_{\pm} di cui alla (1.7.217), quindi

$$|K_S, t\rangle = e^{-i[M - \frac{i}{2}\Gamma - \frac{1}{2}(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t} |K_S\rangle = e^{-i[M - \frac{1}{2}\Delta M]t} e^{-[\Gamma + \frac{1}{2}\Delta\Gamma]t/2} |K_S\rangle \quad (1.7.238)$$

$$|K_L, t\rangle = e^{-i[M - \frac{i}{2}\Gamma + \frac{1}{2}(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t} |K_L\rangle = e^{-i[M + \frac{1}{2}\Delta M]t} e^{-[\Gamma - \frac{1}{2}\Delta\Gamma]t/2} |K_L\rangle \quad (1.7.239)$$

mentre abbiamo

$$\langle \bar{K}^0 | K_S \rangle = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2}\sqrt{1 + |\epsilon|^2}}; \quad \langle \bar{K}^0 | K_L \rangle = -\frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2}\sqrt{1 + |\epsilon|^2}} \quad (1.7.240)$$

per cui, se poniamo per comodità

$$a(t) = e^{-i[M - \frac{i}{2}\Gamma - \frac{1}{2}(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t} \quad (1.7.241)$$

$$b(t) = e^{-i[M - \frac{i}{2}\Gamma + \frac{1}{2}(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t} \quad (1.7.242)$$

allora la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned} |\langle \bar{K}^0 | K_0, t \rangle|^2 &= \frac{1 + |\epsilon|^2}{2(1 + |\epsilon|^2)} \left| a(t) \langle \bar{K}^0 | K_S \rangle + b(t) \langle \bar{K}^0 | K_L \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{1 + |\epsilon|^2}{2(1 + |\epsilon|^2)} \left\{ |a(t)|^2 |\langle \bar{K}^0 | K_S \rangle|^2 + |b(t)|^2 |\langle \bar{K}^0 | K_L \rangle|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\Re \left(a(t)b(t)^* \langle \bar{K}^0 | K_S \rangle \langle \bar{K}^0 | K_L \rangle^* \right) \right\} \quad (1.7.243) \end{aligned}$$

ovvero, usando il fatto che risulta

$$\begin{aligned} |\langle \bar{K}^0 | K_S \rangle|^2 &= |\langle \bar{K}^0 | K_L \rangle|^2 = -\langle \bar{K}^0 | K_S \rangle \langle \bar{K}^0 | K_L \rangle^* = \\ &= \left| \frac{1 - \epsilon}{2(1 + |\epsilon|^2)} \right|^2 \quad (1.7.244) \end{aligned}$$

e che

$$|a(t)|^2 = e^{-t\Gamma_S}; \quad |b(t)|^2 = e^{-t\Gamma_L}; \quad a(t)b(t)^* = e^{-t(\Gamma_S + \Gamma_L)/2} e^{i\Delta M t} \quad (1.7.245)$$

abbiamo infine che

$$\begin{aligned} |\langle \bar{K}^0 | K_0, t \rangle|^2 &= \left| \frac{1 - \epsilon}{2(1 + \epsilon)} \right|^2 \left[e^{-t\Gamma_S} + e^{-t\Gamma_L} - 2e^{-t(\Gamma_S + \Gamma_L)/2} \cos(\Delta M t) \right] = \\ &= \frac{\rho^2}{4} \left[e^{-t\Gamma_S} + e^{-t\Gamma_L} - 2e^{-t(\Gamma_S + \Gamma_L)/2} \cos(\Delta M t) \right] \quad (1.7.246) \end{aligned}$$

Se adesso ripetiamo il conto nel caso opposto, otteniamo invece

$$|\langle K^0 | \bar{K}^0, t \rangle|^2 = \frac{1}{4\rho^2} \left[e^{-t\Gamma_S} + e^{-t\Gamma_L} - 2e^{-t(\Gamma_S + \Gamma_L)/2} \cos(\Delta M t) \right] \quad (1.7.247)$$

la quale mostra che le due probabilità di oscillazione non coincidono se $\rho \neq 1$, ovvero se CP è violata.

Per concludere l'argomento, nel 2002 è stato infine dimostrato⁵⁵ sperimentalmente che, oltre al meccanismo indiretto descritto sopra, nel decadimento dei K neutri in due pioni, è presente anche un piccolo contributo di violazione diretta (pari a circa lo 0.14% del contributo indiretto), come previsto dal MS attraverso la fase complessa nella matrice di mixing dei quark.

⁵⁵NA48 Collaboration: *A precision measurement of direct CP violation in the decay of neutral kaons into two pions*, Phys. Lett. 544B, 97, (2002)

1.8 Il momento di dipolo elettrico, P e T

Consideriamo un sistema fisico come, per esempio, quello di una particella elementare, un atomo, una molecola, etc ... che sia posto in un campo elettrico esterno "debole". L'energia del sistema potrà essere scritta come

$$\mathcal{E} = qV + \vec{d} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} Q_{ij} E_i E_j + \dots \quad (1.8.248)$$

dove V ed $\vec{E} \equiv (E_1, E_2, E_3)$ rappresentano il valore del potenziale e del campo elettrico misurati nell'origine del sistema di riferimento nel quale stiamo studiando il sistema fisico assegnato, di carica q , momento di dipolo elettrico (EDM) \vec{d} , momento di quadrupolo Q ,

Il momento di dipolo \vec{d} , come è ben noto dall'elettrodinamica classica, è una misura della polarizzazione della carica nel sistema, *preesistente* all'applicazione del campo elettrico esterno. Risulta infatti

$$\vec{d} = \sum e_i \vec{r}_i \quad (1.8.249)$$

ed esso è indipendente dalla scelta dell'origine del sistema di coordinate se il sistema fisico considerato è globalmente neutro ($q = 0$).

Supponiamo adesso che la parità P sia una simmetria conservata nel sistema fisico considerato e dunque

$$[P, H] = 0 \quad (1.8.250)$$

Gli stati stazionari possono allora essere scelti in modo che siano anche autostati della parità e, se il sistema *non presenta degenerazione accidentale* (cioè nessuna degenerazione oltre quella eventualmente legata al momento angolare⁵⁶ orbitale), allora a ogni autovalore dell'hamiltoniana corrispondono autostati di parità definita, eventualmente degeneri nell'autovalore di J_z .

Anche lo stato fondamentale avrà dunque parità definita, per cui

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle &= \langle \psi_0 | P^\dagger P \vec{d} P^\dagger P | \psi_0 \rangle = \langle P \psi_0 | P \vec{d} P^{-1} | P \psi_0 \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | P \vec{d} P^{-1} | \psi_0 \rangle = - \langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (1.8.251)$$

ovvero il suo momento di dipolo⁵⁷ dovrà essere nullo⁵⁸.

Storicamente questo argomento fu usato per verificare la conservazione della

⁵⁶Se il sistema è invariante per rotazioni (e siamo in assenza di spin) H , J^2 e J_z costituiscono un set completo di osservabili che commutano. Siccome il momento angolare commuta a sua volta con la parità, se non ci sono degenerazioni accidentali, ciascun multipletto *deve* avere parità definita.

⁵⁷Abbiamo qui usato il fatto che ψ_0 ha parità definita e che $P \vec{d} P^{-1} = P^{-1} \vec{d} P = -\vec{d}$. Chiaramente infatti, data la definizione (1.8.249), assumendo che la carica elettrica sia uno scalare per parità, il momento di dipolo risulta essere un operatore vettoriale e dunque deve anticommutare con P , così come \vec{r} .

⁵⁸Si noti che questo argomento vale non solo per lo stato fondamentale ma anche per qualunque altro autostato dell'hamiltoniana, visto che discende unicamente dal fatto che esso ha, necessariamente, parità definita, per l'ipotesi di assenza di degenerazione accidentale.

parità nelle interazioni forti, misurando l'eventuale *EDM* del neutrone⁵⁹.

Fu però osservato successivamente da Landau⁶⁰ che un eventuale valore non nullo dell'*EDM* su uno stato stazionario di un sistema elementare *senza degenerazione accidentale* avrebbe richiesto anche la violazione di *T*.

Vediamo perché.

Nel caso di un sistema isolato, se esso non presenta degenerazione accidentale, allora una base dello spazio di Hilbert degli stati del sistema potrà essere costituita da autostati simultanei dell'hamiltoniana, di J^2 e di J_z e dunque potrà essere data nella forma⁶¹

$$| E, J_E, m \rangle \quad (1.8.252)$$

dove, per l'ipotesi circa la non esistenza di degenerazione accidentale, fissato E , allora J_E risulta univocamente determinato.

In questo caso, se T è una simmetria conservata e dunque commuta con H , allora, poiché $[T, J^2] = 0$, lo stato $T | E, J_E, m \rangle$ deve appartenere ancora al multipletto corrispondente all'energia E e, per quanto già osservato,

⁵⁹Nell'articolo citato sotto, gli autori considerano la possibilità che il nucleone possa avere un momento di dipolo elettrico, data la scarsa conoscenza che si aveva a quel tempo (1950) delle interazioni forti e delle loro proprietà.

E.M. Purcell, N.F. Ramsey: *On the possibility of electric dipole moment for elementary particles and nuclei* Phys. Rev. 78, 807, (1950)

Usando la tecnica della risonanza magnetica applicata a un fascio di neutroni polarizzati e misurando la frequenza di precessione di Larmor in presenza di un campo magnetico ed elettrico parallelo o antiparallelo al primo, data da

$$\hbar \omega_{\pm} = 2\mu B \pm 2dE$$

essi raggiunsero la precisione di $2.4 \cdot 10^{-20} e \cdot cm$

J.H. Smith, E.M. Purcell, N.F. Ramsey: *Experimental limit to the electric dipole moment of the neutron* Phys. Rev. 108, 120, (1957)

Più recentemente, la precisione raggiunta nella misura del momento di dipolo elettrico con la tecnica *NMR* applicata all'atomo diamagnetico di ^{199}Hg ($I = 1/2$), iniziata con l'esperimento di

S.K. Lamoreaux, J.P. Jacobs, B.R. Heckel, F.J. Raab, and E.N. Fortson: *New constraints on Time-Reversal asymmetry from a search for a permanent electric dipole moment of ^{199}Hg* ; Phys. Rev. Lett. 59, 2275 (1987) è oggi di $\approx 2.1 \cdot 10^{-28} e \cdot cm$

(cfr. M.V. Romalis, W.C. Griffith, J.P. Jacobs, and E.N. Fortson: *New limit on the Permanent electric dipole moment of ^{199}Hg* Phys. Rev. Lett. 86, 2505 (2001))

ed esistono esperimenti in corso che dovrebbero permettere di raggiungere sensibilità ancora maggiori. Il motivo di questa ricerca non ha più a che fare con la violazione di P , ma, come vedremo a breve, con il fatto che un *EDM* non nullo in un sistema elementare implica anche una violazione di T . Sappiamo che lo *SM* prevede una violazione di CP nel settore adronico, e quindi una violazione di T (assumendo *CPT*...) che comunque situa il valore dell'*EDM* del neutrone a non più di $10^{-32} e \cdot cm$.

Un valore più elevato sarebbe quindi un segnale importante di fisica oltre il *MS*.

⁶⁰L. Landau; *On the conservation laws in weak interactions*

Nucl. Phys. 3, 127 (1957)

⁶¹Nel caso di spin semidispari, la degenerazione di Kramer, comunque, non altera il discorso che stiamo facendo perché, siccome T commuta con J^2 come si è già avuto modo di osservare, T non può far uscire dal multipletto.

è evidente che dovrà essere

$$T |E, J_E, m \rangle = e^{i\phi} |E, J_E, -m \rangle \quad (1.8.253)$$

dove la fase ϕ potrà in generale dipendere da E , J_E ed m .

Veniamo ora al momento di dipolo elettrico. Poiché \vec{d} è un operatore vettoriale, per il teorema⁶² di Wigner-Eckart risulta allora che⁶³

$$\langle E, J_E, m | \vec{d} | E, J_E, m' \rangle = C(E) \langle J, m | \vec{J} | J, m' \rangle \quad (1.8.256)$$

da cui ne segue quindi, per esempio, che dovrà essere

$$\langle E, J_E, m | d_z | E, J_E, m \rangle = C(E) \langle J_E, m | J_z | J_E, m \rangle = m C(E) \quad (1.8.257)$$

Riguardo a T , abbiamo già detto che risulta

$$T |E, J_E, m \rangle = e^{i\phi} |E, J_E, -m \rangle \quad (1.8.258)$$

D'altronde, evidentemente è

$$\langle E, J_E, m | d_z | E, J_E, m \rangle = \langle E, J_E, m | T^{-1} T d_z T^{-1} T | E, J_E, m \rangle \quad (1.8.259)$$

ma, per la (1.4.127) e la definizione (1.8.248), risulta

$$T^{-1} \vec{d} T = \vec{d} \Leftrightarrow T \vec{d} T^{-1} = \vec{d} \Rightarrow T d_z T^{-1} = d_z \quad (1.8.260)$$

⁶²Ricordiamo che il teorema di Wigner-Eckart stabilisce che, se O_k^L è la componente k di un operatore tensoriale (per rotazioni) di rango L , allora, su stati che siano anche autostati di J^2 e di J_z , risulta in generale che, in termini del coefficiente di Clebsh-Gordan $\langle J', m' | L, J; k, m \rangle$, si ha

$$\langle J', m', \alpha' | O_k^L | J, m, \alpha \rangle = \langle J', \alpha' | O | J, \alpha \rangle \langle J', m' | L, J; k, m \rangle \quad (1.8.254)$$

dove $\langle J', \alpha' | O | J, \alpha \rangle$ viene detto *elemento di matrice ridotto*.

Per un operatore vettoriale in particolare, questa relazione può essere riscritta, *all'interno dello stesso multipletto*, più semplicemente come

$$\langle J, m', \alpha | \vec{V} | J, m, \alpha \rangle = C(\alpha, J) \langle J, m' | \vec{J} | J, m \rangle \quad (1.8.255)$$

dove $C(\alpha, J)$ è il rapporto fra l'elemento di matrice ridotto definito sopra per l'operatore \vec{V} e quello per \vec{J} (certamente non nullo in multipletti in cui $J \neq 0$: se $J = 0$, comunque, la relazione resta valida in quanto sia \vec{V} che \vec{J} hanno comunque solo elementi di matrice nulli).

Si osservi che la *proporzionalità* fra \vec{V} e \vec{J} esiste solo e soltanto all'interno di uno stesso multipletto (e la costante può dipendere dal multipletto stesso ...).

Infatti, nel caso di multipletti con J differente, mentre può accadere che \vec{V} abbia elementi di matrice e quindi che $\langle J', \alpha' | V | J, \alpha \rangle \neq 0$, è certo che \vec{J} non può averne perché esso commuta con J^2 e dunque, se $J \neq J'$ o $\alpha \neq \alpha' \Rightarrow \langle J', \alpha' | J | J, \alpha \rangle = 0$!

⁶³Siccome per ipotesi il sistema non possiede degenerazione accidentale, questo implica che E_J determini univocamente J per cui è inutile precisare formalmente la dipendenza della costante C anche da questo autovalore.

quindi

$$\begin{aligned} \langle E, J_E, m | d_z | E, J_E, m \rangle &= \langle E, J_E, m | T^{-1} d_z T | E, J_E, m \rangle \equiv \\ &\equiv \langle E, J_E, m | T^{-1} d_z T (E, J_E, m) \rangle = \\ &= \langle T^{-1} T (E, J_E, m) | T^{-1} d_z T (E, J_E, m) \rangle \end{aligned}$$

ovvero, tenendo conto che T e quindi T^{-1} sono antiunitari e usando la (1.8.253), abbiamo

$$\begin{aligned} \langle E, J_E, m | d_z | E, J_E, m \rangle &= \langle T (E, J_E, m) | d_z | T (E, J_E, m) \rangle^* = \\ &= \langle e^{i\phi} (E, J_E, -m) | d_z | e^{i\phi} (E, J_E, -m) \rangle^* = \\ &= |e^{i\phi}|^2 \langle E, J_E, -m | d_z | E, J_E, -m \rangle^* \quad (1.8.261) \end{aligned}$$

Ma d_z è un operatore hermitiano, quindi

$$\langle E, J_E, -m | d_z | E, J_E, -m \rangle^* = \langle E, J_E, -m | d_z | E, J_E, -m \rangle$$

e dunque, essendo ovviamente $|e^{i\phi}|^2 = 1$, abbiamo che

$$\langle E, J_E, m | d_z | E, J_E, m \rangle = \langle E, J_E, -m | d_z | E, J_E, -m \rangle$$

relazione che, evidentemente, non può essere in accordo con la (1.8.257) senza che $C(E) = 0$, visto che essa fornisce la relazione

$$m C(E) = -m C(E) \quad (1.8.262)$$

Questo significa che, dato un qualunque autostato di una hamiltoniana che sia T -invariante e si riferisca a un sistema che non presenta degenerazione accidentale, il valor medio su quello stato del momento di dipolo elettrico (EDM) \vec{d} deve essere nullo.

Ma significa questo che nessun sistema può mai avere un EDM non nullo senza che T sia violata ?

La risposta alla domanda dipende se è verificata o meno l'ipotesi di assenza di degenerazione accidentale, ovvero dal fatto che il sistema non abbia un'altra direzione intrinseca (polare) indipendente da quella (assiale) definita dal momento angolare.

Se questo accade, la conclusione per cui la presenza di un momento di dipolo elettrico non nullo implica violazione di T non è più vera.

Un caso particolarmente istruttivo è quello dello stesso atomo di idrogeno. La teoria non relativistica (senza spin) prevede infatti, come è ben noto, che tutti gli stati con lo stesso numero quantico principale⁶⁴ n siano degeneri fra loro e che, fissato n , esistano multipletti con quel valore di n , corrispondenti a un diverso valore del momento angolare L , da $L = 0$ a $L = n - 1$, quindi fra loro degeneri.

Siamo dunque in presenza di degenerazione accidentale, legata alla particolare forma del potenziale coulombiano. Per questo potenziale accade che l'equazione di Schrödinger, oltre a essere separabile nelle consuete coordinate polari, è separabile anche in coordinate paraboliche⁶⁵, e in queste coordinate gli autostati dell'hamiltoniana sono individuati da $|n_1, n_2, m \rangle$ dove n_1

⁶⁴Ricordiamo infatti che

$$E_n = -Ry \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{dove} \quad Ry \equiv \frac{e^2}{2a_0} = \frac{mc^2}{2} \alpha^2 \quad (1.8.263)$$

essendo l'energia di Rydberg Ry , nel caso dell'atomo di idrogeno, pari a 13.6 eV.

⁶⁵La definizione del sistema di coordinate paraboliche è la seguente:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\phi \quad (1.8.264)$$

$$y = \sqrt{\xi\eta} \sin\phi \quad (1.8.265)$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \quad (1.8.266)$$

con $\xi, \eta \geq 0$ e ϕ compreso fra 0 e 2π . Risulta

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad (1.8.267)$$

$$\xi = r + z; \quad \eta = r - z; \quad \phi = \arctg \frac{y}{x} \quad (1.8.268)$$

e le superfici $\xi = \text{cost}$ e $\eta = \text{cost}$ sono, appunto, paraboloidi di rotazione intorno all'asse z con fuoco nell'origine (la prima con concavità verso il basso e piano direttore di equazione $z = \xi$, la seconda con concavità verso l'alto e piano direttore di equazione $z = -\eta$).

ed n_2 sono interi non negativi legati al numero quantico principale⁶⁶ n e all'autovalore m di L_z dalla relazione⁶⁷

$$n = n_1 + n_2 + 1 + |m| \quad (1.8.269)$$

Si dimostra che questi stati hanno un momento di dipolo elettrico pari a

$$d_z = \frac{3}{2} n(n_1 - n_2) |e| a_0 \quad (1.8.270)$$

dove abbiamo indicato, al solito, con a_0 il raggio di Bohr.

Questo *EDM* non nullo, ovviamente, non implica alcuna violazione né di T né di P , visto appunto che siamo in presenza di degenerazione accidentale⁶⁸.

Vediamo di capire a che cosa questa sia dovuta.

Essa discende dal fatto che, nel caso del potenziale coulombiano

$V(\vec{r}) = -k/r$, esiste un altro vettore conservato, indipendente dal momento angolare orbitale \vec{L} , che è il vettore di Runge-Lenz, il quale classicamente⁶⁹,

⁶⁶Fissato n , i possibili valori di $|m|$ vanno da 0 a $n-1$. Fissati n e $|m|$, data la (1.8.269) n_1 può assumere tutti i valori che vanno da 0 a $n-|m|-1$, ovvero può assumere $n-|m|$ valori differenti, dopodiché n_2 , invece, è univocamente fissato. Tenendo conto che per ogni $m > 0$ esiste un corrispondente $m < 0$, ecco che gli stati $|n_1, n_2, m\rangle$ con n fissato sono

$$2 \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) + (n-0)$$

dove l'ultimo addendo corrisponde ad $m=0$. Risulta quindi

$$2 \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) + (n-0) = 2n(n-1) - n(n-1) + n = n^2$$

che rappresenta, come sappiamo, la degenerazione del livello n dell'atomo di idrogeno.

⁶⁷Cfr. L. Landau E. Lifchitz: *Mécanique Quantique* Ed. Mir, 1974, pagg. 154 e successive e pagg. 328 e successive.

⁶⁸Si noti che d_z è comunque nullo sul livello fondamentale che è non degenero e per il quale $n_1 = n_2 = m = 0$.

⁶⁹Come è noto, l'hamiltoniana classica di un punto materiale di massa m in un potenziale kepleriano $V(r) = -k/r$ è data da

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (1.8.271)$$

Come sappiamo, il moto avviene lungo una traiettoria ellittica *chiusa*. Essendo l'hamiltoniana indipendente esplicitamente dal tempo e invariante per rotazioni, esistono i consueti integrali primi del moto, cioè l'energia E e il momento angolare \vec{L} , la costanza della direzione del quale implica in particolare che il moto sia piano. Risulta

$$E = -\frac{k}{2a} \quad (1.8.272)$$

$$L^2 = km \frac{b^2}{a} \quad (1.8.273)$$

dove a e b rappresentano, rispettivamente, il semiasse maggiore e minore dell'ellisse percorsa dal punto materiale.

Oltre a questi integrali primi, caratteristici di qualunque sistema conservativo in cui il potenziale sia sfericamente simmetrico, nel caso kepleriano esiste un altro vettore conservato che è appunto il vettore di Runge-Lenz, definito da

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.8.274)$$

Per rendercene conto, ripartiamo dall'espressione che la seconda legge della dinamica assume in questo caso, i.e.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k}{r^3} \vec{r} \equiv -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad (1.8.275)$$

dove abbiamo indicato con \vec{u}_r il versore $\vec{u}_r \equiv \vec{r}/r$. Calcoliamo adesso la quantità

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (1.8.276)$$

Ma poiché \vec{L} è una costante del moto, abbiamo che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L}) \quad (1.8.277)$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L}) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (1.8.278)$$

D'altronde, dalla sua definizione, essendo $\vec{r} \equiv r \vec{u}_r$, ne segue che

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad (1.8.279)$$

e dunque

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \left(r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right) \quad (1.8.280)$$

per cui

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L}) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \times \left[\vec{r} \times \left(r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right) \right] = -k \vec{u}_r \times \left(\vec{u}_r \times \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right) \quad (1.8.281)$$

Usando adesso la relazione vettoriale ben nota per cui

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.8.282)$$

e ricordando che, essendo \vec{u} un versore, necessariamente risulta che $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, abbiamo che

$$\vec{u}_r \times \left(\vec{u}_r \times \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right) = -\frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad (1.8.283)$$

per cui, sostituendo, ricaviamo che

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L}) = k \frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad (1.8.284)$$

da cui, infine

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \right) \equiv \frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \quad (1.8.285)$$

è dato da

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.8.290)$$

Quantisticamente, siccome \vec{p} ed \vec{L} non commutano fra loro, la definizione che rende altresì l'operatore \vec{G} hermitiano, è la seguente

$$G_i = \frac{1}{2m} \epsilon_{ijk} (p_j L_k + L_k p_j) - k \frac{r_i}{r} = \frac{1}{m} (p^2 r_i - (\vec{p} \cdot \vec{r}) p_i) - k \frac{r_i}{r} \quad (1.8.291)$$

L'operatore \vec{G} così definito è un operatore vettoriale⁷⁰ tale che

$$\vec{G} \cdot \vec{L} = 0 = \vec{L} \cdot \vec{G} \quad (1.8.292)$$

$$[\vec{G}, H] = 0 \quad (1.8.293)$$

$$[L_i, G_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} G_k \quad (1.8.294)$$

$$[G_i, G_j] = \frac{2H}{m} i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (1.8.295)$$

$$\vec{G} \cdot \vec{G} \equiv G^2 = \frac{2}{m} H (L^2 + \hbar^2) + k^2 \quad (1.8.296)$$

E' proprio l'esistenza di questa osservabile conservata che implica l'esistenza di una degenerazione⁷¹ ulteriore dei livelli, oltre a quella legata a L_z !

la quale stabilisce appunto che, nel moto kepleriano, il vettore di Runge-Lenz \vec{G} , definito dalla (1.8.290), è una costante del moto.

Dalla definizione risulta poi che questo vettore è ortogonale a \vec{L} , essendo

$$\vec{G} \cdot \vec{L} = \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \vec{L} = -k \frac{\vec{r}}{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad (1.8.286)$$

Si dimostra inoltre che esso è diretto dal fuoco dell'ellisse verso il perielio e possiede un modulo pari a

$$G^2 = \frac{2}{m} H L^2 + k^2 \quad (1.8.287)$$

ovvero

$$G^2 = \frac{2}{m} \left(\frac{-k}{2a} \right) \left(mk \frac{b^2}{a} \right) + k^2 = -k^2 \frac{b^2}{a^2} + k^2 = k^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2 e^2 \quad (1.8.288)$$

dove abbiamo indicato con e l'eccentricità dell'ellisse, definita nel modo consueto come

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (1.8.289)$$

⁷⁰Esso anticommuta con la parità e dunque non può avere elementi di matrice diversi da zero fra stati all'interno di uno stesso multipletto (stati aventi la stessa parità ...) mentre può avere elementi di matrice fra multipletti diversi, degeneri in energia ma solo con $|\Delta L| = 1$, essendo l'operatore \vec{G} di rango 1.

⁷¹Consideriamo lo spazio vettoriale generato dagli autovettori dell'hamiltoniana che corrispondono a un dato numero quantico principale n e quindi a una certa energia $E < 0$.

La base $|n_1, n_2, m\rangle$ degli autostati di H che abbiamo ricavato in coordi-

Come mostrato in

A. Bohm: *Quantum mechanics: foundations and applications*, III edition, 1993, Springer, Ch.VI riscaldando in questo spazio il vettore \vec{G} nel modo seguente (si ricordi che E è negativa ...)

$$\vec{A} \equiv \vec{G} \sqrt{\frac{-m}{2E}} \quad (1.8.297)$$

otteniamo le seguenti regole di commutazione

$$[L_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} A_k \quad (1.8.298)$$

$$[A_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (1.8.299)$$

che, unitamente a quella del momento angolare

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (1.8.300)$$

costituiscono l'algebra di Lie di $SO(4)$, il quale è un gruppo di Lie a sei parametri, isomorfo a $SU(2) \otimes SU(2)$, come si dimostra immediatamente ponendo

$$\vec{R} \equiv \frac{\vec{L} + \vec{A}}{2\hbar}; \quad \vec{S} \equiv \frac{\vec{L} - \vec{A}}{2\hbar}; \quad (1.8.301)$$

e osservando che le regole di commutazione per questi operatori sono le seguenti

$$[R_i, R_j] = i \epsilon_{ijk} R_k \quad (1.8.302)$$

$$[S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} S_k \quad (1.8.303)$$

$$[R_i, S_j] = 0 \quad (1.8.304)$$

Chiaramente gli operatori R_i e S_i continuano a commutare con l'hamiltoniana per cui lo spazio dei vettori che corrispondono a un dato autovalore E di H è necessariamente sede di una rappresentazione di quest'algebra. Assumendo, al minimo, che la rappresentazione sia irriducibile, avremo che essa sarà il prodotto diretto di una rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ generata da \vec{R} per un'altra rappresentazione irriducibile di $SU(2)$, indipendente dalla precedente, generata da \vec{S} . Essa sarà dunque caratterizzata da

$$R^2 = r(r+1) \quad (1.8.305)$$

$$S^2 = s(s+1) \quad (1.8.306)$$

e lo spazio avrà dimensione $(2r+1)(2s+1)$.

Consideriamo ora l'invariante

$$Q = R^2 - S^2 = \left(\frac{\vec{L} + \vec{A}}{2\hbar}\right)^2 - \left(\frac{\vec{L} - \vec{A}}{2\hbar}\right)^2 = \frac{\vec{L} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{L}}{2\hbar^2} \quad (1.8.307)$$

Esso, come abbiamo già detto, è identicamente nullo, per cui

$$R^2 = S^2 = s(s+1) \quad (1.8.308)$$

e dunque il sottospazio dei autovettori di H corrispondenti a un dato numero quantico principale n avrà dimensione proprio $(2s+1)^2$.

Vediamo come questa dimensione è legata allo stesso numero quantico principale.

Abbiamo osservato che

$$G^2 = \frac{2H}{m}(L^2 + \hbar^2) + k^2 \quad (1.8.309)$$

nate paraboliche è infatti definita da vettori che sono autovettori simultanei di H , L_z e A_z , i cui autovalori sono pari a $\frac{n_2-n_1}{n} \frac{|e|^2}{c} \equiv \hbar \alpha \frac{n_2-n_1}{n}$.

L'osservabile \vec{d} , nel supermultipletto definito dal numero quantico principale n , invece che essere parallela a \vec{L} , come dovrebbe necessariamente accadere se non ci fosse alcuna degenerazione accidentale (con le conseguenze viste sopra circa $\langle |\vec{d}| \rangle$, dovute, in buona sostanza al fatto che T e \vec{L} anticommutano mentre T e \vec{d} commutano), risulta in questo caso parallela ad \vec{A} (senza conseguenze su $\langle |\vec{d}| \rangle$, visto che anche T ed \vec{A} commutano), infatti si dimostra che risulta⁷²

$$\langle |\vec{d}| \rangle = \frac{3}{4} \frac{|e|c}{E_n} \langle |\vec{A}| \rangle \quad (1.8.319)$$

Questo per quanto riguarda T .

e dunque

$$A^2 = -(L^2 + \hbar^2) - \frac{m}{2E} k^2 \Rightarrow A^2 + L^2 = -\hbar^2 - \frac{m}{2E} k^2 \quad (1.8.310)$$

Ma, per quanto detto sopra

$$R^2 + S^2 = \frac{1}{2\hbar^2} (L^2 + A^2) = 2S^2 = 2s(s+1) \Rightarrow L^2 + A^2 = 4s(s+1)\hbar^2 \quad (1.8.311)$$

Sostituendo, si ha dunque

$$\begin{aligned} 4s(s+1)\hbar^2 &= -\hbar^2 - \frac{m}{2E} k^2 \Rightarrow \frac{m}{2E} k^2 = -\hbar^2 (4s(s+1) + 1) = -\hbar^2 (2s+1)^2 \\ \Rightarrow E &= -\frac{mk^2}{2} \frac{1}{\hbar^2 (2s+1)^2} \equiv -\frac{mk^2}{2\hbar^2 n^2} \end{aligned} \quad (1.8.312)$$

che individua quindi il numero quantico principale n proprio nella dimensione $(2s+1)$ dei sottospazi sede delle rappresentazioni generate da \vec{R} e \vec{S} , entrambe di rango s .

Possiamo così ritrovare per questa strada il fatto che lo spazio degli autovettori corrispondenti a un certo numero quantico principale sia fatto dalla somma diretta degli spazi associati ai multipletti definiti da $L = 0, \dots, n-1$.

Abbiamo infatti che, dalla definizione, è $\vec{L} = \hbar(\vec{R} + \vec{S})$ e le regole di composizione del momento angolare ci dicono che L , in unità di \hbar , deve essere compreso fra $|r-s|$ e $r+s$. D'altronde $r=s$ e quindi $0 \leq L \leq 2s = n-1$.

Resta così spiegata l'origine della degenerazione accidentale: essa è legata al fatto che, nel caso kepleriano/coulombiano, il gruppo di simmetria dell'hamiltoniana è più grande del solo gruppo delle rotazioni e, su ogni supermultipletto, è appunto $SO(4)$.

⁷²Le due osservabili \vec{d} ed \vec{A} non sono proporzionali tra loro poiché la costante che le lega è in effetti funzione dell'energia e quindi la proporzionalità è limitata solo all'interno di un multipletto degenerare.

Riguardo infine al legame fra EDM e parità, da cui eravamo partiti, siccome A_z non commuta con L^2 bensì ha elementi di matrice fra stati con $|\Delta L| = 1$, gli stati⁷³ $|n_1, n_2, m\rangle$ sono, in generale, combinazioni lineari di stati con lo stesso autovalore di L_z (ovvio!), ma appartenenti a multipletti differenti, corrispondenti allo stesso numero quantico principale n .

Essi non hanno parità definita, per cui, l'esistenza di un EDM non nullo su questi autostati dell'hamiltoniana, non implica, evidentemente, alcuna violazione di P !

Risulta infatti

$$\langle |d_z| \rangle = \frac{3}{2}n(n_1 - n_2)|e|a_0 \quad (1.8.313)$$

$$\langle |A_z| \rangle = \frac{n_2 - n_1}{n} \frac{|e|^2}{c} \quad (1.8.314)$$

dunque

$$\langle |d_z| \rangle = -\frac{3}{2}n^2 |e| a_0 \langle |A_z| \rangle \frac{c}{|e|^2} \quad (1.8.315)$$

ma, come è noto, l'energia del livello n -esimo è data da

$$E_n = -\frac{|e|^2}{2a_0 n^2} \quad (1.8.316)$$

dunque risulta

$$n^2 = -\frac{|e|^2}{2a_0 E_n} \quad (1.8.317)$$

e quindi si ha infine appunto che

$$\langle |d_z| \rangle = \frac{3}{2} \frac{|e|^2}{2a_0 E_n} |e| a_0 \langle |A_z| \rangle \frac{c}{|e|^2} = \frac{3}{4} \frac{|e|c}{E_n} \langle |A_z| \rangle \quad (1.8.318)$$

⁷³Giusto per completezza, osserviamo che se consideriamo, per esempio, il primo livello eccitato ($n = 2$), allora, nella base $|n_1, n_2, m\rangle$ i quattro stati degeneri, espressi come combinazione degli stati nella base più consueta $|n, L, m\rangle$, sono dati da

$$|1, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0, 0\rangle + |2, 1, 0\rangle) \quad (1.8.320)$$

$$|0, 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0, 0\rangle - |2, 1, 0\rangle) \quad (1.8.321)$$

$$|0, 0, 1\rangle = |2, 1, 1\rangle \quad (1.8.322)$$

$$|0, 0, -1\rangle = |2, 1, -1\rangle \quad (1.8.323)$$

ed è allora del tutto evidente come d_z possa avere valor medio non nullo sugli stati $|1, 0, 0\rangle$ e $|0, 1, 0\rangle$ visto che la funzione d'onda di $|2, 0, 0\rangle$ ha simmetria sferica, mentre quella di $|2, 1, 0\rangle$ è proporzionale a z .

1.9 Ancora sul vettore di Runge-Lenz

Classicamente, nel caso del moto di un punto materiale di massa m in un campo kepleriano o coulombiano centrato nell'origine del sistema di riferimento, fra le grandezze fisiche conservate c'è, come è noto, il vettore assiale del momento angolare⁷⁴

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

e, oltre a questo, il cosiddetto vettore (polare) di *Runge – Lenz* \vec{G} .
Se il potenziale lo scriviamo come

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

allora il vettore di Runge-Lenz è definito come

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.9.324)$$

Esso, come vedremo, individua *la direzione dell'asse fuoco-direttrice, nel verso del perielio.*

Iniziamo provando che \vec{G} è davvero una costante del moto.
Ricordiamo a questo proposito che \vec{L} è indipendente dal tempo, per cui

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} \quad (1.9.325)$$

ma, per la seconda legge della dinamica si ha che

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \frac{k}{r^3} (-\vec{r}) \quad (1.9.326)$$

dunque

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = -\frac{k}{mr^3} \vec{r} \times \vec{L} = -\frac{k}{mr^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})) = -\frac{k}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

D'altronde, risultando evidentemente

$$\vec{r} = r \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{n} + r \dot{\vec{n}} \quad (1.9.327)$$

si ha che

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times (r \dot{\vec{n}}) = r (\vec{r} \times \dot{\vec{n}}) \quad (1.9.328)$$

⁷⁴Questo è dovuto al carattere centrale della forza, cioè al fatto che $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{n}$, dove $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$, infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{dt} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = f(r) \vec{r} \times \vec{n} = 0$$

per cui ne segue che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = -\frac{k}{r^2} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{n}}) = -\frac{k}{r^2} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{n}}) - \dot{\vec{n}} r^2] \quad (1.9.329)$$

D'altronde, essendo

$$n^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{n}} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{n}} \cdot \vec{r} = 0$$

ecco che, finalmente, si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = k \dot{\vec{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \vec{n} \right) = 0 \quad (1.9.330)$$

che prova appunto il fatto che il vettore di Runge-Lenz risulta una costante del moto.

Vediamo ora come da questa legge di conservazione si possa dedurre che la traiettoria percorsa dal punto materiale deve essere una conica.

Moltiplichiamo scalarmente il vettore \vec{G} per la coordinata radiale \vec{r} : si ha

$$\vec{G} \cdot \vec{r} = \frac{1}{m} (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - k r \quad \Rightarrow \quad G r \cos\theta = (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - k r \quad (1.9.331)$$

dove l'angolo θ è l'angolo fra \vec{r} e \vec{G} . Ricordiamo adesso l'identità vettoriale

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

per cui risulta che

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} = \frac{1}{m} |\vec{L}|^2 \equiv \frac{l^2}{m}$$

dove abbiamo indicato con l il modulo (costante) del momento angolare della particella. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} G r \cos\theta &= \frac{l^2}{m} - k r \quad \Rightarrow \quad r (G \cos\theta + k) = \frac{l^2}{m} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{r} &= \frac{km}{l^2} + \frac{Gm}{l^2} \cos\theta \end{aligned} \quad (1.9.332)$$

che è appunto l'equazione di una conica di eccentricità

$$\epsilon = \frac{\frac{Gm}{l^2}}{\frac{km}{l^2}} = \frac{A}{k} \quad (1.9.333)$$

Nel caso di potenziale attrattivo ($k > 0$) e nel caso particolare di un sistema legato, come è noto la traiettoria è un'ellisse.

Vediamo, in questo caso, come è fatto il vettore \vec{G} . Senza perdita di generalità, visto che il moto è piano data la costanza di \vec{L} a cui il vettore posizione è ovviamente sempre ortogonale, possiamo supporre che esso avvenga nel piano (x, y) . Poniamo allora

$$\vec{r} = r (\cos\phi, \sin\phi, 0) \quad (1.9.334)$$

e dunque

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} (\cos\phi, \sin\phi, 0) + r \dot{\phi} (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (1.9.335)$$

da cui

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r^2 \dot{\phi} (0, 0, 1) \equiv (0, 0, l) \quad (1.9.336)$$

Veniamo ora al calcolo esplicito di \vec{G} : dalla definizione si ha

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}) - k \vec{n} = \frac{p^2}{m} \vec{r} - \frac{1}{m} \vec{p} (\vec{r} \cdot \vec{p}) - k \vec{n} \quad (1.9.337)$$

ma per determinare il vettore, essendo costante durante il moto, basta calcolarlo in un punto qualsiasi dell'orbita. Osserviamo allora che, essendo

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = m r \dot{r}$$

il secondo addendo nell'espressione (1.9.337) è nullo sia al perielio che all'afelio, dove $\dot{r} = 0$. In ciascuno di questi due punti, quindi, l'espressione del vettore di Runge-Lenz si semplifica in

$$\vec{G} = \frac{p^2}{m} \vec{r} - \frac{1}{m} \vec{p} (\vec{r} \cdot \vec{p}) - k \vec{n} \Rightarrow \vec{G} = \frac{p^2}{m} \vec{r} - k \vec{n} = \vec{n} \left(r \frac{p^2}{m} - k \right) \quad (1.9.338)$$

D'altronde l'energia totale E della particella è anch'essa una costante del moto e vale

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

per cui ne segue che

$$2r E = r \frac{p^2}{m} - 2k \quad (1.9.339)$$

da cui, sempre unicamente al perielio e all'afelio, risulta

$$\vec{G} = (2rE + k) \vec{n} \quad (1.9.340)$$

Ma in un moto kepleriano l'energia totale E risulta essere data da

$$E = -\frac{k}{2a}$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse per cui, detti α e β ($\alpha > \beta$), rispettivamente, la distanza dell'afelio e del perielio dall'origine (fuoco dell'ellisse), risulta⁷⁵

$$E = -\frac{k}{2a} = -\frac{k}{\alpha + \beta} \quad (1.9.341)$$

per cui abbiamo che

$$\text{afelio} : \vec{G} = \vec{n}_a \left(2\alpha \frac{-k}{\alpha + \beta} + k \right) = \frac{k(\beta - \alpha)}{\alpha + \beta} \vec{n}_a = |E|(\beta - \alpha)\vec{n}_a \quad (1.9.342)$$

$$\text{perielio} : \vec{G} = \vec{n}_b \left(2\beta \frac{-k}{\alpha + \beta} + k \right) = \frac{k(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \vec{n}_b = |E|(\alpha - \beta)\vec{n}_b \quad (1.9.343)$$

ed evidentemente i due risultati coincidono visto che $\vec{n}_a = -\vec{n}_b$.

Concludendo, il vettore di Runge-Lenz classico (vedi fig.1.6) ha per modulo il prodotto del valore assoluto dell'energia totale per la differenza afelio-perielio, ha per direzione quella dell'asse dell'ellisse e verso quello che va dal fuoco al perielio.

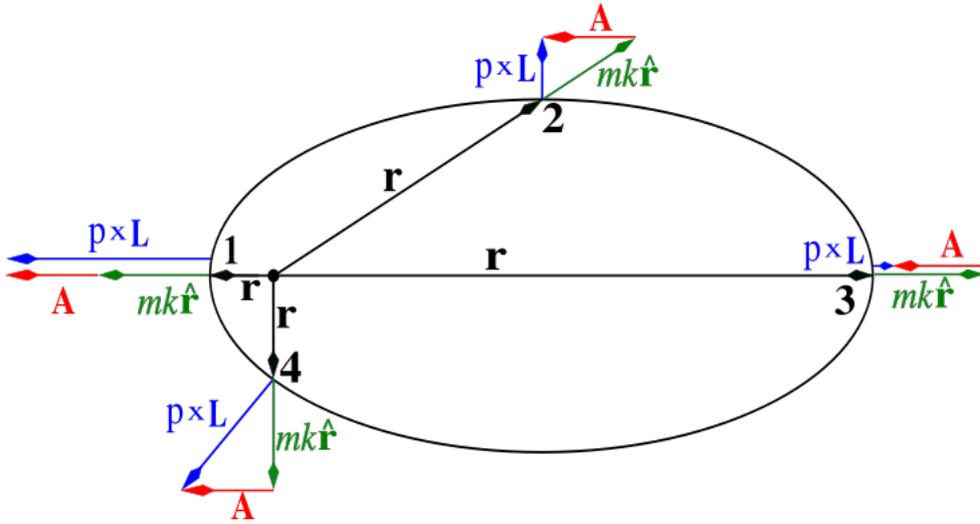


Figura 1.6: Vettore di Runge Lenz

⁷⁵Si ricordi che il semiasse maggiore a di una ellisse coincide con la semisomma della distanze del fuoco dall'afelio (α) e dal perielio (β): $a = (\alpha + \beta)/2$, mentre la distanza f dei fuochi dal centro dell'ellisse vale $f = (\alpha - \beta)/2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, dove b sta per la lunghezza del semiasse minore. Dalle (1.9.342) - (1.9.343) segue quindi che $G^2 = k^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

1.10 Il decadimento del π^0

Proviamo adesso ad applicare quanto detto fin'ora circa le simmetrie discrete al caso del decadimento del pione π^0 .

Esso decade per via elettromagnetica (vita media $\tau = (8.4 \pm 0.5) \times 10^{-17} \text{s}$) quasi unicamente in due fotoni ($B.R. = 98.8\%$)

$$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma \quad (1.10.344)$$

attraverso l'annichilazione della coppia di quark/antiquark che lo compongono. Siccome il processo è, appunto, elettromagnetico, si devono conservare separatamente C , P e T . Vediamo quali ne sono le conseguenze.

Iniziamo dalla conservazione di C .

Il fotone è autostato della coniugazione di carica per l'autovalore -1 , dovendo il campo A_μ , che lo descrive, cambiare di segno sotto C in modo che il termine di interazione nella lagrangiana $J^\mu A_\mu$ resti invariante in forma sotto la stessa trasformazione di simmetria.

Ne segue allora che il pione sarà anch'esso autostato della coniugazione di carica, ma corrispondente all'autovalore $+1$, dovendo appunto essere

$$e^{i\eta_C(\pi^0)} = (-1)^2 = +1, \quad \Rightarrow \quad C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle \quad (1.10.345)$$

Vediamo ora quali sono le conseguenze sullo stato dei due fotoni in relazione alla conservazione della parità⁷⁶ P .

⁷⁶La parità intrinseca del π^0 viene determinata, come vedremo tra breve, proprio attraverso lo studio della correlazione fra gli stati di polarizzazione lineare dei due fotoni emessi; ma questa strada però, come è ovvio, è percorribile solo per il pione neutro.

Quanto, invece al pione carico, per esempio al pione π^- , la sua parità intrinseca è stata determinata attraverso lo studio della reazione di cattura nucleare che segue la cattura elettromagnetica del π^- da parte del deutone, cioè la reazione

$$\pi^- + d \rightarrow n + n \quad (1.10.346)$$

Il deutone, come è noto, è in uno stato $J^P = 1^+$. Ricordiamo a questo proposito che, siccome la forza forte conserva la parità, ci attendiamo che lo stato fondamentale di deutone abbia parità definita: si trova infatti che questo è sostanzialmente uno stato $L = 0$, con una piccola contaminazione da $L = 2$ (infatti possiede un piccolo momento di quadrupolo elettrico, incompatibile con la simmetria sferica di $L = 0$), dunque uno stato pari.

Quanto allo spin, esso deve essere $S = 1$ per ragioni di statistica: i due nucleoni devono essere infatti in uno stato globalmente dispari per scambio e, visto che l'isospin del deutone è nullo e dunque lo stato di isospin dei due nucleoni che lo formano è dispari mentre la parte orbitale è pari, ne segue che lo stato di spin deve essere anch'esso pari e dunque può essere solo $S = 1$.

Quanto al mesone π^- , si assume di sapere che esso abbia spin nullo (la dimostrazione sperimentale di questo fatto sarà data in seguito e si basa sul confronto delle sezioni d'urto della reazione $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ con quella della sua inversa).

Ne segue che (cfr. K. Brueckner et al. in Phys. Rev. 81, 575 (1951)), siccome la cattura (1.10.346) avviene in onda S (la forza forte è una forza a corto range, perché possa agire è necessario dunque che la funzione d'onda del pione si sovrapponga apprezzabilmente a quella del deutone e questo, come è noto dalla teoria dell'atomo di idrogeno, avviene

Assumiamo, per semplicità, che il decadimento avvenga a riposo.

La conservazione del quadriimpulso richiede che entrambi i fotoni abbiano la stessa energia (pari a metà della massa del π^0 ...) e impulsi spaziali esattamente opposti: chiameremo asse z il loro asse di propagazione, di versore \vec{k} . Per avere informazioni sulla parità intrinseca del π^0 , occorre studiare lo stato di polarizzazione dei due fotoni e, più precisamente, la loro correlazione.

A questo riguardo ricordiamo che una base per gli stati di polarizzazione di un fotone che viaggia nel verso positivo \vec{k} dell'asse z potrà essere costituita dai vettori che descrivono le due polarizzazioni lineari, ovvero da

$$\vec{\epsilon}_z(1) = (1, 0, 0), \quad \vec{\epsilon}_z(2) = (0, 1, 0) \quad (1.10.348)$$

oppure dalla base fatta dalle due polarizzazioni circolari

$$\vec{\epsilon}_z(+)=\frac{-1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_z(1)+i\vec{\epsilon}_z(2))=\frac{-1}{\sqrt{2}}(1,i,0) \quad (1.10.349)$$

$$\vec{\epsilon}_z(-)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_z(1)-i\vec{\epsilon}_z(2))=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0) \quad (1.10.350)$$

sostanzialmente solo per stati aventi $L = 0$) evidentemente lo stato di partenza deve essere tale che $J^P = 1^x$ dove x è appunto la parità intrinseca, ignota, del pione.

Lo stato finale dei due neutroni, essendo la reazione mediata dalla forza forte che conserva P , ha la stessa parità dello stato iniziale e dunque (visto che il momento angolare deve anche lui conservarsi!) è anch'esso tale per cui $J^P = 1^x$. Trattandosi di un sistema non relativistico, spin e momento orbitale sono separabili: siccome i neutroni hanno spin $1/2$, lo stato di spin della coppia può essere solo $S = 0$ oppure $S = 1$ per cui, per le ben note regole di composizione dei momenti angolari, dovendo lo stato avere $J = 1$, può solo essere

$$\begin{aligned} J = 1 \Rightarrow \quad & L = 0, S = 1 \\ & L = 1, S = 0 \\ & L = 1, S = 1 \\ & L = 2, S = 1 \end{aligned}$$

D'altronde lo stato dei due neutroni deve essere antisimmetrico per scambio, ovvero, visto che, per scambio, la funzione d'onda orbitale va come $(-1)^L$ e quella di spin come $(-1)^{S+1}$, deve risultare

$$(-1)^L \cdot (-1)^{S+1} = -1 \quad (1.10.347)$$

la quale implica che $L + S$ debba essere pari e l'unico caso che realizza questa condizione ed è compatibile con $J = 1$ è $L = 1, S = 1$. Ma allora, assunto che la parità si conservi nel processo (interazione forte), poiché la parità dello stato dei due neutroni è $(-1)^L = -1$, questa deve essere anche la parità dello stato iniziale e dunque, per quanto detto sopra, la parità intrinseca del pione deve essere $P_\pi = -1$, cioè il pione negativo deve essere, appunto, una particella *pseudoscalare*.

Per il pione positivo, ovviamente non si può fare lo stesso ragionamento perché, essendo positivo, non subisce la cattura elettromagnetica da parte del nucleo e quella nucleare che ne consegue; però, siccome esso è C -coniugato con il pione negativo e le simmetrie P e C commutano, dobbiamo aspettarci che valga anche per lui la stessa conclusione, cioè che sia pseudoscalare.

corrispondenti, rispettivamente, alle elicità $\lambda = +1$ e $\lambda = -1$.

Riguardo alle polarizzazioni lineari, la convenzione prevede che $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$ e \vec{k} formino una terna destrorsa. Se poi il fotone viaggia in una direzione \vec{k}' diversa da quella positiva dell'asse z , la nuova terna fatta dalle polarizzazioni lineari e dal versore di propagazione si ottiene dalla terna $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$, \vec{k} attraverso una rotazione⁷⁷ avente asse nel piano (\vec{k}, \vec{k}') . Nel caso in cui $\vec{k}' = -\vec{k}$, ovvero per un fotone che viaggia nella direzione opposta a quella positiva dell'asse z , si può vedere che, per continuità con quanto sopra detto, abbiamo

$$\vec{\epsilon}_{-z}(1) = -\vec{\epsilon}_z(1); \quad \vec{\epsilon}_{-z}(2) = \vec{\epsilon}_z(2) \quad \Rightarrow \quad \vec{\epsilon}_{-z}(\pm) = \vec{\epsilon}_z(\mp) \quad (1.10.351)$$

Torniamo adesso al decadimento del π^0 . Sappiamo che esso ha spin nullo, dunque le elicità dei due fotoni dovranno essere le stesse (conservazione del momento angolare) e quindi lo stato dei due fotoni (onda s) potrà essere rappresentato come

$$|k, + \rangle | -k, + \rangle \quad \text{oppure} \quad |k, - \rangle | -k, - \rangle \quad (1.10.352)$$

dove $\pm k$ indica la componente dell'impulso del fotone lungo il verso positivo dell'asse z . Occorre però tenere ora conto del fatto che i fotoni sono bosoni identici e quindi che lo stato deve essere simmetrico di scambio, per cui, in realtà, gli stati possibili sono piuttosto

$$|A \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, + \rangle | -k, + \rangle + | -k, + \rangle |k, + \rangle) \quad (1.10.353)$$

$$|B \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, - \rangle | -k, - \rangle + | -k, - \rangle |k, - \rangle) \quad (1.10.354)$$

dove il primo ket descrive lo stato del fotone che chiamiamo "1" mentre il secondo vettore quello del fotone che chiamiamo "2", fra i quali si opera lo scambio.

D'altronde, per parità, risulta⁷⁸

$$P |\vec{k}, \pm \rangle = - | -\vec{k}, \mp \rangle \quad (1.10.355)$$

evidentemente né $|A \rangle$ né $|B \rangle$ sono autostati della parità, bensì⁷⁹

$$P |A \rangle = |B \rangle; \quad P |B \rangle = |A \rangle \quad (1.10.356)$$

⁷⁷Se $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e $\vec{k}' = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, allora la rotazione in questione è definita da

$$R = e^{-i\phi L_3} e^{-i\theta L_2} e^{i\phi L_3}$$

e si tratta di una rotazione di $-\theta$ intorno all'asse $e^{-i\phi L_3} \vec{n}_0$, dove $\vec{n}_0 = (0, 1, 0)$.

⁷⁸Anche se è irrilevante ai fini del risultato che ci accingiamo a valutare perché i fotoni di decadimento sono due, la (1.10.355) tiene conto che la parità intrinseca del fotone è -1 , perché il vettore di polarizzazione ϵ^μ può essere scelto in modo che abbia solo le componenti spaziali (gauge di Coulomb) e questo, unito al fatto che, per parità deve accadere che $A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(Px)$, richiede che il fotone sia P -dispari.

⁷⁹Si noti, di nuovo, che la parità intrinseca del fotone, ancorchè negativa, non ha rilevanza in quanto stiamo dicendo, essendo coinvolti un numero pari di fotoni ...

D'altronde, per la conservazione di P nelle interazioni elettromagnetiche, se il π^0 ha parità intrinseca negativa come i π^\pm , cosa che adesso assumeremo

$$P |\pi^0 \rangle = -|\pi^0 \rangle \quad (1.10.357)$$

lo stato dei due fotoni deve essere autovettore di P per l'autovalore -1 , e quindi deve essere descritto dalla combinazione lineare seguente

$$\begin{aligned} |2\gamma \text{ dal } \pi^0 \rangle &\equiv |2\gamma, P = -1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|A \rangle - |B \rangle] = \\ &= \frac{1}{2} [(|k, + \rangle | -k, + \rangle + | -k, + \rangle |k, + \rangle) - \\ &- (|k, - \rangle | -k, - \rangle - | -k, - \rangle |k, - \rangle)] \quad (1.10.358) \end{aligned}$$

Come possiamo distinguere questo stato, per esempio, da quello corrispondente allo stato di parità $+1$ (che imporrebbe o la non conservazione della parità nel decadimento o una parità intrinseca positiva del π^0) ?

Per esempio, se guardiamo il fotone che viaggia nel verso positivo dell'asse z e osserviamo che ha una certa elicità definita λ , è immediato che ne concludiamo comunque che anche l'altro fotone ha la stessa elicità e quindi questo non ci fa apprendere nulla circa la parità dello stato.

Proviamo a vedere che succede se osserviamo invece lo stato di polarizzazione lineare del fotone che si muove nel verso positivo dell'asse z lungo, per esempio, l'asse x . Poiché dalle definizioni precedenti segue evidentemente che

$$\vec{\epsilon}_x(\vec{k}) \equiv \vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}(\vec{k}, -) - \vec{\epsilon}(\vec{k}, +)) \quad (1.10.359)$$

se partiamo dallo stato $|2\gamma, P = -1 \rangle$ di cui sopra, allora se il fotone che si muove nel verso positivo dell'asse z viene osservato trovarsi nello stato di polarizzazione lungo l'asse x , ne segue che lo stato del fotone che si muove nel verso negativo dell'asse z , vista la (1.10.358) e la (1.10.359) deve essere il seguente

$$\begin{aligned} |\gamma(-k) \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (-| -k, - \rangle - | -k, - \rangle - | -k, + \rangle - | -k, + \rangle) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (| -k, - \rangle + | -k, + \rangle) \quad (1.10.360) \end{aligned}$$

e dunque il suo stato di polarizzazione risulta essere il seguente

$$\vec{\epsilon}(\gamma(-k)) = -\frac{1}{2} (-2i \vec{\epsilon}(-\vec{k}, 2)) = i\vec{\epsilon}_y(-k) \quad (1.10.361)$$

ovvero il fotone che viaggia lungo il verso negativo dell'asse z deve risultare polarizzato lungo y : in altri termini, la polarizzazione lineare dei due fotoni deve risultare ortogonale.

Questo risultato è una diretta conseguenza della parità dello stato di partenza: se assumiamo infatti che questa sia $+1$, ovvero che

$$\begin{aligned} |2\gamma\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle) \equiv |2\gamma, P = +1\rangle = \\ &= \frac{1}{2}(|k, +\rangle | -k, +\rangle + | -k, +\rangle |k, +\rangle + \\ &+ |k, -\rangle | -k, -\rangle + | -k, -\rangle |k, -\rangle) \end{aligned} \quad (1.10.362)$$

allora, se è stata osservata la polarizzazione del fotone che viaggia nel verso positivo dell'asse z allineata lungo l'asse x , lo stato del fotone che si propaga in verso opposto deve necessariamente essere il seguente

$$\begin{aligned} |\gamma(-k)\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(| -k, -\rangle + | -k, -\rangle - | -k, +\rangle - | -k, +\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(| -k, -\rangle - | -k, +\rangle) \end{aligned} \quad (1.10.363)$$

e il suo stato di polarizzazione risulta dunque il seguente

$$= \frac{1}{2} \left(2 \vec{\epsilon}(-\vec{k}, 1) \right) = \vec{\epsilon}_x(-k) \quad (1.10.364)$$

ovvero le polarizzazioni lineari dei due fotoni risulteranno, in questo caso, parallele.

Sperimentalmente si verifica che le polarizzazioni sono ortogonali⁸⁰, coerentemente con il fatto che P è conservata e che il π^0 è pseudoscalare.

⁸⁰La polarizzazione di un fotone di alta energia viene inferita attraverso l'osservazione della correlazione fra il piano definito dagli impulsi della coppia e^+e^- e quello individuato dalla direzione della polarizzazione lineare del gamma e da quella di propagazione dello stesso, come mostrato da N.M. Kroll e W. Wada in Phys. Rev. 98, 1355 (1955).

1.11 Il decadimento del positronio

Come ulteriore applicazione di quanto abbiamo visto fin'ora, studiamo i modi di decadimento (annichilazione) del positronio.

Questo è un sistema legato costituito da un elettrone e un positrone.

Esso è del tutto analogo a un atomo di idrogeno, a parte la massa ridotta $\mu = \frac{m_e}{2}$ invece di $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e$ e quanto a essa collegato (Rydberg $\propto \mu$, raggio di Bohr $a \propto \mu^{-1}$...).

Inoltre, siccome elettrone e positrone non hanno fattore di forma e hanno momenti magnetici uguali in modulo e opposti in segno, a differenza di quanto accade nel caso dell'atomo di idrogeno, nel positronio non c'è effetto Zeeman⁸¹.

Ma la differenza fondamentale naturalmente è che, essendo esso costituito da un sistema particella/antiparticella, non è stabile, bensì si annichila in fotoni.

Lo stato fondamentale del positronio, analogamente a quanto accade per l'atomo di idrogeno, è lo stato $n = 1, L = 0$ e il sistema dei due fermioni può trovarsi in uno stato di tripletto di spin ($S = 1$) oppure in uno stato di singoletto ($S = 0$). Nel primo caso si parla di *ortopositronio* (*Ops*), mentre nel secondo caso, si parla di *parapositronio* (*Pps*).

Questa distinzione è molto importante in quanto *Ops* e *Pps* hanno vite medie e modi di annichilazione del tutto diversi. Vediamo perché.

Occupiamoci per prima cosa della simmetria di coniugazione di carica C la quale, poiché il processo di annichilazione avviene per via puramente elettromagnetica, sappiamo essere una simmetria conservata dalla dinamica.

Lo stato di positronio sarà descrivibile in termini di operatori di creazione a^\dagger e b^\dagger sia dell'elettrone che del positrone e dunque avremo

$$|ps\rangle = a_1^\dagger b_2^\dagger |\Omega\rangle \quad (1.11.365)$$

⁸¹La ragione dell'assenza dell'effetto Zeeman al primo ordine si può capire facilmente dai seguenti due argomenti. Dato che le masse delle due particelle sono uguali ed esse hanno cariche opposte, il moto orbitale non può mai determinare nessuna corrente, per cui il fattore di Landé g_L è necessariamente nullo. D'altronde, nemmeno gli stati di spin possono contribuire, visto che

- se il sistema si trova in stato di singoletto, non esiste nessuna direzione definita dello spin e quindi il valore di aspettazione sullo stato di singoletto del momento magnetico non può che essere nullo;
- se il sistema è in stato di tripletto, allora gli spin delle due particelle sono allineati ma poiché i loro momenti magnetici sono uguali ed opposti, si compensano uno con l'altro.

Per questi motivi, quindi, semplicemente l'effetto Zeeman *non* può manifestarsi nel positronio, a meno di usare campi magnetici estremamente intensi, tali da provocare lo splitting dei livelli al secondo ordine in B .

dove, per semplicità, non abbiamo indicato né le variabili orbitali né quelle di spin, ma le abbiamo indicate globalmente con l'indice "1" per l'elettrone e con l'indice "2" per il positrone.

Sotto l'operatore di coniugazione di carica⁸², si ha (ricordiamo che il vuoto è C -invariante)

$$\begin{aligned} C |ps\rangle &= C a_1^\dagger b_2^\dagger |\Omega\rangle = C a_1^\dagger C^{-1} C b_2^\dagger C^{-1} C |\Omega\rangle = b_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle = \\ &= -a_2^\dagger b_1^\dagger |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (1.11.366)$$

ovvero, a parte il segno meno che viene dalle regole di anticommutazione degli operatori del campo spinoriale, l'operatore di coniugazione di carica si comporta esattamente come l'operatore di scambio fra le due particelle, e dunque uno stato con L ed S definiti sarà autostato di C per l'autovalore

$$C = -(-1)^L (-1)^{S+1} \equiv (-1)^{L+S} \quad (1.11.367)$$

Il parapositronio, allora, il quale ha $L = 0$ ed $S = 0$, è *pari* sotto C , ovvero

$$C |Pps\rangle = + |Pps\rangle \quad (1.11.368)$$

e questo implica, per quanto visto circa l'effetto della coniugazione di carica sul vettore di stato di singolo fotone, che

$$(e^+ e^-)_{Pps} \rightarrow 2\gamma, 4\gamma, \dots \quad (1.11.369)$$

Si dimostra che la probabilità di decadimento dello stato di Pps per unità di tempo (all'ordine più basso, ovvero trascurando i decadimenti con un numero pari di fotoni maggiore di due) è data da

$$\lambda_{2\gamma} = \sigma_0 c |\psi(0)|^2 s^{-1} \quad (1.11.370)$$

dove σ_0 è la sezione d'urto di annichilazione elettrone-positrone in due fotoni a momento trasferito nullo, pari a

$$\begin{aligned} \sigma_{2\gamma} &= \sigma_0 = 4\pi r_0^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{mc^2} \right)^2 = \\ &= 4\pi \alpha^2 \chi^2 \end{aligned} \quad (1.11.371)$$

mentre $|\psi(0)|^2$ fornisce la densità di probabilità di sovrapposizione delle funzioni d'onda dell'elettrone e del positrone che, sullo stato fondamentale $n = 1, L = 0$, vale⁸³

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{a^3} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\mu e^2}{\hbar^2} \right)^3 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 = \frac{1}{8\pi} \alpha^3 \chi^{-3} \quad (1.11.372)$$

⁸²Un eventuale fattore di fase e^{in_C} non è rilevante, trattandosi di un sistema particella/antiparticella, per il quale ci sarebbe comunque compensazione fra quello che moltiplicherebbe a^\dagger e quello, complesso coniugato, che moltiplicherebbe b^\dagger .

⁸³Con μ intendiamo qui la massa ridotta del sistema, mentre con m indichiamo la massa dell'elettrone (positrone).

per cui risulta

$$\lambda_{2\gamma} = 4\pi \alpha^2 \lambda^2 c \frac{1}{8\pi} \alpha^3 \lambda^{-3} = \frac{c}{2} \alpha^5 \lambda^{-1} = \frac{1}{2} \alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \quad (1.11.373)$$

e quindi, essendo la vita media $\tau_{2\gamma}$ niente altro che l'inverso di $\lambda_{2\gamma}$, abbiamo infine che

$$\tau_{2\gamma} = 2 \alpha^{-5} \frac{\hbar}{mc^2} \approx 2 \times (137)^5 \frac{6.582 \times 10^{-22}}{0.511} = 1.24 \times 10^{-10} \text{ s} \quad (1.11.374)$$

Veniamo adesso allo stato dei due fotoni emessi.

Visto che $(e^+ e^-)_{Pps}$ ha evidentemente $J = 0$, possiamo dire senz'altro che, nel sistema dove esso è a riposo, i due fotoni emessi in direzione necessariamente opposta (con la stessa energia, pari alla massa dell'elettrone) dovranno avere la stessa elicità dato che la componente del momento angolare totale in ogni direzione (e dunque anche in quella di volo dei fotoni) deve comunque essere nulla.

Questo, però, come abbiamo già visto nel caso del decadimento del π^0 , non basta a definire completamente lo stato, visto che questa prescrizione individua due stati indipendenti, cioè (prescindendo dalla simmetrizzazione dello stato ...)

$$|\vec{k}, + \rangle | -\vec{k}, + \rangle \quad e \quad |\vec{k}, - \rangle | -\vec{k}, - \rangle \quad (1.11.375)$$

per cui, a priori, una qualunque loro combinazione lineare soddisferebbe ancora la condizione di conservazione del momento angolare.

In realtà lo stato dei due fotoni è univocamente determinato perchè il Pps ha parità definita e questa simmetria è anch'essa conservata dalla dinamica che è l'interazione elettromagnetica.

Ma qual è la parità del positronio nel suo stato fondamentale ?

Evidentemente risulta

$$P = (-1)^L P_{e^+} P_{e^-} \quad (1.11.376)$$

dove $P_{e^+} P_{e^-}$ è il prodotto delle parità intrinseche del positrone e dell'elettrone che sarà comunque sempre pari a -1 , trattandosi di un sistema particella-antiparticella di Dirac.

Dunque, essendo sul fondamentale $L = 0$, ne segue che la parità sia del parapositronio che dell'ortopositronio è comunque $P = -1$.

Per il parapositronio ci troviamo quindi esattamente nella stessa situazione che nel caso del decadimento del π^0 , avendo lo stato iniziale momento angolare nullo e parità negativa: per quanto visto trattando il decadimento del π^0 , i due fotoni avranno dunque polarizzazioni lineari ortogonali.

Non è un caso che si sia ritrovato questo risultato.

Il π^0 , infatti, è fatto proprio dello stesso tipo di combinazione particella/antiparticella del positronio, essendo

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \quad (1.11.377)$$

e accade che ogni coppia ($q\bar{q}$) nel π^0 ha momento angolare orbitale relativo $L = 0$ e si trova in uno stato di singoletto di spin, cioè $S = 0$, per cui lo spin del π^0 , cioè il momento angolare complessivo J del sistema, è nullo.

La particella risulta quindi pseudoscalare⁸⁴ proprio perché è costituita da coppie quark/antiquark che essendo fermioni, hanno parità intrinseca opposta, ed essi si trovano in uno stato che ha $L = 0$.

Quanto infine all'*Ops*, esso, avendo $S = 1$, pur continuando ad avere parità negativa, è autostato della coniugazione di carica C per l'autovalore -1 .

Esso non può decadere in un numero pari di fotoni e quindi, non potendo decadere per ragioni cinematiche in un solo fotone, deve decadere in almeno tre. Questo significa che questo processo di annichilazione avviene a un ordine perturbativo più alto di quello in due fotoni e dunque dobbiamo aspettarci che

$$\lambda_{3\gamma} \approx \alpha \lambda_{2\gamma} \quad (1.11.378)$$

Per ragioni di spazio delle fasi, compare poi un fattore extra $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^2 (\pi^2 - 9)$ per cui alla fine risulta

$$\begin{aligned} \lambda_{3\gamma} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^2 (\pi^2 - 9) \alpha \frac{1}{2} \alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \\ \Rightarrow \tau_{3\gamma} &= \tau_{2\gamma} \alpha^{-1} \left(\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^2 (\pi^2 - 9) \right)^{-1} = 1.38 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (1.11.379) \end{aligned}$$

⁸⁴Sia chiaro che esistono anche mesoni neutri che hanno autovalori diversi da $J^{PC} = 0^{-+}$, ma, generalmente, quelli di massa più bassa hanno $L = S = 0$ e dunque $J = 0$, $P = -1$, ovvero sono dei mesoni pseudoscalari.

Appendice A

Appendix: Generalità

A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ($1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$, $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)

<i>carica dell'elettrone</i>	$e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues}$
<i>massa dell'elettrone</i>	$m = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g}$
<i>costante di Planck</i>	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$
<i>velocità della luce</i>	$c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s}$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito come

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA};$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{eV}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{eV}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v , possiede un impulso¹

$$p = mv = mc\beta = 0.511\beta \frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{A.1.2})$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (*SI*) ed in quello di Heaviside-Lorentz (*HL*) risulta²

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \quad (\text{A.1.4})$$

¹Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\gamma\beta$, dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

²Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= \rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

In particolare, $q_{HL} = \sqrt{4\pi}q_{cgs}$, da cui, se $\hbar = c = 1$, ne segue che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Ricordiamo infine che, sempre nel *SI*, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deka	da	10^{-24}	yocto	y

Figura A.1: *Prefissi nel Sistema Internazionale*

A.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, \dots) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italiani (i, j, \dots) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \quad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \quad (\text{A.2.5})$$

e il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq , oppure (pq) , se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \quad (\text{A.2.6})$$

Dato un quadrivettore p , rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (pp) = p^\mu p_\mu \quad (\text{A.2.7})$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.2.8})$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\text{A.2.9})$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\text{A.2.10})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{A.2.11})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.2.12})$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu \equiv \not{p} \quad (\text{A.2.13})$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.2.14})$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.2.15})$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{A.2.16})$$

$$(\gamma_5)^2 = I \quad (\text{A.2.17})$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.2.18})$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ , i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.19})$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.20})$$

ed in questa rappresentazione, la matrice γ_5 assume la forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.21})$$