

Fisica Moderna

Vol. III

Le particelle elementari

E. Iacopini

2 maggio 2024



*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.

Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623)

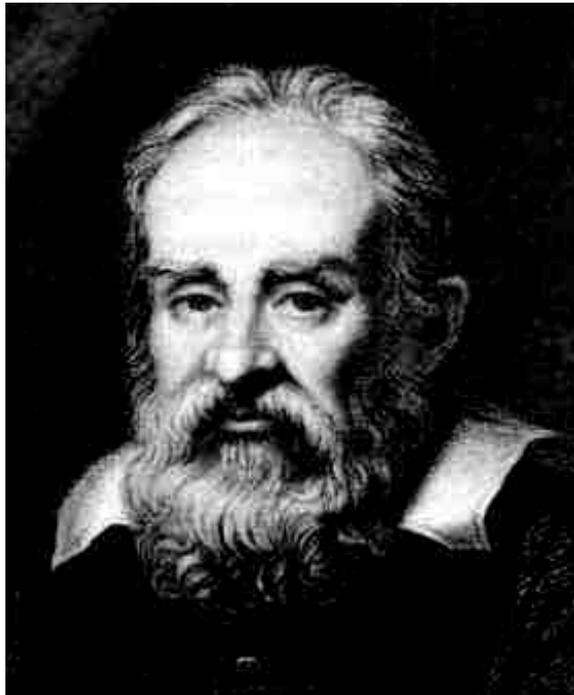


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

Capitolo 1

Introduzione

Questo terzo volume ha come soggetto le *particelle elementari* o, più precisamente, sia quelle che, in passato, abbiamo ritenuto fossero *elementari*, cioè senza una struttura interna, come quelle che riteniamo lo siano, oggi. Il concetto di particella elementare, infatti, è *dinamico*, nel senso che l'affinamento dei mezzi di indagine ha condotto spesso, e condurrà verosimilmente anche in futuro, a dover rivedere l'assegnazione di questa qualifica.

Indice

1	Introduzione	5
2	Le particelle	9
2.1	Introduzione	9
2.2	L'elettrone, il protone, il neutrone e il fotone	14
2.3	Il muone μ e il mesone π	34
2.4	I raggi cosmici	49
2.5	L'antimateria	62
2.6	Le particelle strane	78
2.7	I quarks	84
2.8	Il Modello Standard: una introduzione	93
3	Una particella fantasma: il neutrino	121
3.1	Il neutrino	121
3.2	La teoria di Fermi	128
3.3	Verifica dell'esistenza del neutrino	134
3.4	Modifiche alla Teoria di Fermi	140
3.5	L'elicità del neutrino	150
3.6	Il fenomeno delle oscillazioni di neutrino	154
3.7	Ancora sulle oscillazioni di neutrino	158
3.8	Misura della massa del $\bar{\nu}_e$	163
4	Appendix: Generalità	169
4.1	Le unità di misura	169
4.2	Le notazioni	172

Capitolo 2

Le particelle

2.1 Introduzione

Iniziamo domandandoci che cosa intendiamo quando diciamo che una particella è *elementare*.

Chiaramente questo aggettivo vuole richiamare il concetto di una entità non fatta di parti: una matryoska non la chiameremmo certo elementare !

Diremo allora che è elementare una particella che non ha (o più correttamente, *di cui noi non conosciamo...*) una struttura interna.

E' quindi subito evidente come questo concetto non sia "assoluto": ciò che oggi ci appare elementare, domani potrebbe non apparirci più tale !

Dipende, infatti, dalla nostra attuale comprensione dell'oggetto, che, a sua volta, dipende dalla scala di energia a cui siamo capaci di osservarlo.

Se usiamo, per esempio, radiazione elettromagnetica (ma la conclusione ha valenza del tutto generale, grazie al principio di De Broglie, secondo il quale una particella di impulso p è descritta attraverso un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$), ecco che con fotoni di energia $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ potremo "vedere" solo particolari di dimensioni $D \geq \lambda = \frac{hc}{E}$; e questa è la ragione per la quale, volendo spingere la nostra indagine a distanze sempre più piccole, occorre aumentare l'energia della sonda e quindi è necessario poter disporre di acceleratori sempre più potenti ...

Ma ritornando alla nostra domanda iniziale, dobbiamo quindi ammettere che ciò che oggi ci appare elementare, domani potrà non risultarlo più ed è proprio per questa ragione, dunque, che, parlando di una particella *elementare*, è più corretto farlo facendo sempre riferimento alla scala di energia del processo in cui essa è coinvolta.

Per esempio, si può trattare un nucleo come elementare fino a energie dell'ordine delle centinaia di keV , ma per energie più alte, occorrerà trattarlo come composto di neutroni e protoni ... E così pure i protoni e i neutroni sarà lecito considerarli "elementari" solo fino alla scala delle centinaia di MeV , ma dopo essi non appaiono più come puntiformi e, se vogliamo spiegare i

dati sperimentali, occorre trattarli come composti di quarks¹ e gluoni ...

In conclusione, dipende dall'energia in gioco nel processo se una particella si *comporta* o no come "elementare", cioè senza struttura interna, fermo restando il fatto che esistono particelle le quali, per qualunque energia a noi oggi accessibile, si comportano *sempre* come elementari (ma non è detto, ovviamente, che, al crescere della stessa, questo comportamento non possa cambiare ...): sono solo queste le particelle *elementari* che entrano nel Modello Standard (*MS*) come tali.

Viste le difficoltà insite nella definizione stessa di particella elementare, chiediamoci adesso se esistono caratteristiche che sono comunque loro *necessarie*.

La risposta è affermativa !

Infatti, procedendo solo sulla base di considerazioni del tutto generali legate alla invarianza relativistica e all'omogeneità dello spazio-tempo, a una particella elementare dobbiamo richiedere comunque di possedere almeno due caratteristiche intrinseche tipiche, che sono la massa m e lo spin s .

Poi, oltre a questo, per il fatto che tra le interazioni fondamentali c'è, per esempio, quella elettromagnetica, la particella sarà caratterizzata anche da altri attributi, come la sua carica elettrica, il momento magnetico, etc..., e infine, in relazione alle altre interazioni, potrà possedere carica barionica, stranezza, numero leptonico, e così via.

Sempre a proposito del concetto di *particella elementare*, si osservi infine che c'è un altro modo che, intuitivamente, potrebbe sembrare utile per stabilirlo che è quello di vedere se essa decade in altre particelle o meno.

Questa idea che suona molto bene, però è sbagliata.

Essa presume infatti che, per esempio, se

$$A \rightarrow B + C$$

allora A sia fatta da B e C , ovvero B e C preesistano in A , per liberarsi al momento del decadimento.

Questo è quanto accade, per esempio, in una reazione di dissociazione chimica, ma non vale, in generale, nella fisica delle particelle elementari.

¹Circa l'origine del nome *quark*, esiste tutta una leggenda in proposito ... Comunque, pare appropriato riferirsi direttamente alla fonte, cioè al padre del nome stesso, ovvero a Gell-Mann. Come riferisce H.W. Kendall nella sua *Nobel Lecture* dell'8 dicembre 1990 a pag. 679,

The word quark was invented by Murray Gell-Mann, who later found quark in the novel Finnegans Wake by James Joyce, and adopted what has become the accepted spelling. Joyce apparently employed the word as a corruption of the word quart. The author is grateful to Murray Gell-Mann for a discussion clarifying the matter.

La frase del libro di Joyce è "Three quarks for Munster Mark".

Va comunque ricordato per completezza che alcuni testi presentano invece la parola "quark" come una contrazione di "question mark" ...

Vediamo, per chiarire, un esempio ovvio.

Consideriamo un atomo eccitato, il quale si diseccita emettendo un fotone:

$$A^* \rightarrow A + \gamma$$

Il fotone era forse "racchiuso" nell'atomo eccitato ?

Certo che no! Il fotone ha avuto origine al momento della diseccitazione dell'atomo e non preesisteva.

Il punto è che il numero delle particelle, in genere, non si conserva (mentre in chimica² il numero degli atomi, sì !).

Abbiamo visto sopra quanto sia delicata la definizione di particella elementare ... passiamo adesso a dimostrare quanto anticipato riguardo alle due caratteristiche essenziali che, comunque, una particella elementare deve possedere, ovvero una massa definita m e uno spin s .

Queste caratteristiche discendono direttamente da un principio di simmetria, ovvero dal fatto che, se lo spazio-tempo è omogeneo (invariante per traslazioni) e vale l'invarianza relativistica, allora lo spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati di un sistema fisico deve essere trasformato in sé sotto il gruppo di Poincaré \mathcal{P} (traslazioni in quattro dimensioni e trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio \mathcal{L}_+^\uparrow), i cui elementi agiscono in \mathcal{H} come simmetrie unitarie.

Alla particella elementare viene allora richiesto di essere tale per cui lo spazio di Hilbert \mathcal{H} dei vettori di stato non deve avere sottospazi invarianti (non banali) sotto queste trasformazioni, ovvero di essere caratterizzata dal fatto che la rappresentazione unitaria di \mathcal{P} su \mathcal{H} sia irriducibile.

Questo vuol dire che, preso un qualsiasi vettore non nullo $|v\rangle$ dello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati, i vettori $U(a, \Lambda)|v\rangle$, ottenuti a partire da quello applicando a esso una generica trasformazione di \mathcal{P} , sono tali per cui *nessun* vettore non nullo di \mathcal{H} è ortogonale a tutti loro, al variare di (a, Λ) in \mathcal{P} .

In altri termini, possiamo trovare una base di vettori di stato che, semplicemente, rappresentano lo stesso stato fisico ma visto da sistemi di riferimenti diversi.

Le rappresentazioni unitarie e irriducibili di \mathcal{P} , come è stato dimostrato da Wigner³, sono individuate completamente dagli autovalori assunti sullo spazio di Hilbert dei vettori di stato del sistema dai due soli operatori di Casimir (costruiti quindi con i generatori del gruppo) indipendenti (almeno nel caso di particelle con massa), i quali, per loro definizione, commutano con tutti i

²Questo avviene non perché le leggi della chimica siano diverse da quelle della fisica, ma solo per ragioni energetiche, essendo la scala dell'energia caratterizzante i processi chimici (eV) ben inferiore a quella per la quale potrebbero iniziare a manifestarsi, per esempio, processi di trasmutazione (MeV).

³E. Wigner: *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*
Ann. Math. 40, 149 (1939)

generatori del gruppo stesso, cioè gli invarianti

$$P^\mu P_\mu \rightarrow m^2; \quad W^\mu W_\mu \rightarrow -m^2 s(s+1) \quad (2.1.1)$$

dove P^μ è l'operatore di quadrimpulso, cioè l'operatore che genera le traslazioni nello spazio-tempo $U(a) = e^{-ia_\mu P^\mu}$, mentre W_μ è l'operatore⁴ quadrivettoriale di Pauli-Lubanski $W_\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} M^{\nu\sigma} P^\rho$ ($\epsilon_{0123} = +1$), dove $M^{\sigma\rho}$ sono i generatori del gruppo di Lorentz. Risulta

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J}; \quad \vec{W} = P_0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K} \quad (2.1.2)$$

dove si è usata la solita definizione dei generatori delle rotazioni \vec{J} ($\Rightarrow R(\vec{\phi}) = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{J}}$) e dei generatori dei boosts di Lorentz \vec{K} ($\Rightarrow B(\beta\vec{n}) = e^{i th^{-1}(\beta) \vec{n} \cdot \vec{K}}$), da cui ne segue che

$$\vec{J} \equiv -(M^{23}, M^{31}, M^{12}); \quad \vec{K} \equiv -(M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (2.1.3)$$

$$[J_m, J_n] = i\epsilon_{mnr} J_r; \quad [J_m, K_n] = i\epsilon_{mnr} K_r; \quad [K_m, K_n] = -i\epsilon_{mnr} J_r \quad (2.1.4)$$

I generatori $M^{\sigma\rho}$ sono definiti dalla consueta parametrizzazione della generica trasformazione di Lorentz, secondo la quale abbiamo

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}; \quad (M^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} = -i (\delta^{\mu\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta^{\nu\alpha} \delta_{\beta}^{\mu}) \quad (2.1.5)$$

essendo $\omega_{\mu\nu}$ la consueta matrice reale antisimmetrica dei parametri.

Le regole di commutazione dei generatori $M^{\mu\nu}$, che discendono direttamente dalla (2.1.5) e da cui si ottengono le (2.1.4), sono le seguenti

$$[M^{\mu\nu}, M^{\sigma\rho}] = i \{ \delta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} + \delta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \delta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \delta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} \} \quad (2.1.6)$$

Quanto, poi, alle regole di commutazione di questi generatori con l'impulso, risulta

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = i(P^\mu \delta^{\nu\sigma} - P^\nu \delta^{\mu\sigma}) \quad (2.1.7)$$

$$\Rightarrow [J_m, P_n] = i\epsilon_{mnr} P_r; \quad [J_m, P_0] = 0; \quad [K_m, P_n] = i P_0 \delta_{mn}; \quad [K_m, P_0] = -i P_m \quad (2.1.8)$$

le quali ci consentono, senza troppa difficoltà, di verificare appunto che lo scalare di Lorentz $W^\mu W_\mu$ commuta⁵ con P^σ (essendo scalare, esso, peraltro, non può che commutare con i generatori del gruppo di Lorentz ...).

⁴Per non appesantire le notazioni, confonderemo qui i generatori del gruppo con gli operatori hermitiani che li rappresentano.

⁵Osserviamo infatti che già W_μ commuta con P_σ , infatti risulta

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\sigma] &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} [M^{\alpha\beta} P^\gamma, P_\sigma] = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} M^{\alpha\beta} [P^\gamma, P_\sigma] + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} [M^{\alpha\beta}, P_\sigma] P^\gamma \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

ma il primo addendo è certamente nullo perché i generatori delle traslazioni commutano

Venendo infine al caso di massa nulla, le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{P} sono ancora più semplicemente caratterizzate solo in termini di un numero quantico intero o semidispari λ , che è chiamato *elicità*. Questa grandezza può essere definita anche nel caso di particelle con massa non nulla in modo che descriva la proiezione dello spin della particella nella direzione del suo impulso: però, solo nel caso di massa nulla, essa risulta invariante per trasformazioni di Lorentz.

fra loro e, quanto al secondo, data la (2.1.7), si ha

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\sigma] &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} (i) (P^\alpha \delta_\sigma^\beta - P^\beta \delta_\sigma^\alpha) P^\gamma = \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\alpha\sigma\gamma} P^\alpha P^\gamma - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\sigma\beta\gamma} P^\beta P^\gamma = i \epsilon_{\mu\alpha\sigma\gamma} P^\alpha P^\gamma \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

e questa quantità è nulla perché $\epsilon_{\mu\alpha\sigma\gamma}$ è antisimmetrico nello scambio dei suoi indici mentre $P^\alpha P^\gamma$ è, ovviamente, simmetrico.

2.2 L'elettrone, il protone, il neutrone e il fotone

Le prime particelle elementari sono state, in un certo senso, gli atomi. Poi, intorno alla fine del secolo XIX (1897), gli esperimenti di J.J. Thomson stabilirono l'esistenza dell'elettrone⁶ e valsero all'autore il Nobel nel 1906.



Figura 2.1: *Joseph John Thomson (1856-1940)*

Questa scoperta dimostrava che gli atomi non erano realmente *indivisibili*, bensì erano datti di parti.

⁶J.J. Thomson: *Cathode rays*, Phil. Mag. 44, 293 (1897).

Thomson risolse per primo il problema della natura dei raggi catodici. Con questo termine si indicavano allora i raggi che venivano emessi dal catodo quando era bombardato da ioni positivi in un tubo a scarica a gas rarefatto ($10^{-3} - 10^{-4} \text{ mmHg}$). Questi raggi sono gli stessi che vengono emessi anche da un metallo riscaldato (effetto termoelettronico, scoperto da Edison una ventina di anni prima), come fu correttamente spiegato dalla teoria di Richardson del 1902.

Thomson controllò ancora una volta che i raggi catodici erano sensibili sia alla deflessione elettrica che alla deflessione magnetica. Ne concluse che doveva trattarsi di particelle cariche (negativamente) e ne misurò il rapporto e/m , provando che questo non dipendeva né dal materiale di cui era costituito il catodo né dal gas rarefatto presente nel tubo a scarica.

I raggi catodici erano dunque fatti di particelle *universali* di carica negativa !

Per dimostrarlo, Thomson operò in varie maniere, una delle quali è la seguente. Dopo aver accelerato i raggi con una ddp ΔV di circa 2000 V, li fece passare, alternativamente, attraverso un campo elettrico e magnetico ortogonali fra loro e con la direzione di propagazione dei raggi, aggiustando l'intensità dei campi finché la deflessione ottenuta non era la stessa. Siccome la forza elettrica è semplicemente proporzionale ad E mentre quella magnetica dipende da vB , in questo modo poté determinare la velocità di queste particelle e quindi, noto ΔV il rapporto e/m . Egli poté osservare quindi che questo rapporto era indipendente dal metallo usato come catodo:

2.2. L'ELETTRONE, IL PROTONE, IL NEUTRONE E IL FOTONE 15

Si giunse così, in modo naturale, al modello⁷ dell'atomo di Thomson, che era fatto di una carica positiva diffusa e di elettroni disposti all'interno di essa come l'uvetta nel panettone ...

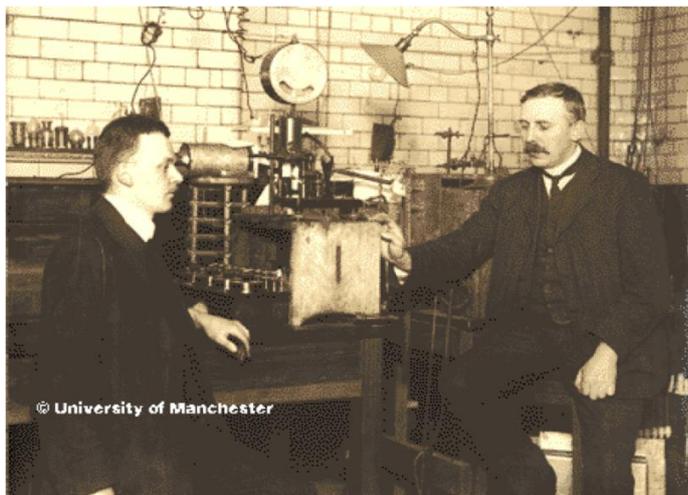


Figura 2.2: Hans Geiger ed Ernest Rutherford nel loro laboratorio di Manchester

Nel 1909, Geiger e Marsden⁸, che lavoravano con Rutherford a Manchester, trovarono però uno strano risultato per cui accadeva che particelle α lanciate contro un sottile fogliolino d'oro⁹ rimbalzassero indietro in una quantità tale (circa una particella α ogni 20000 deviava più di 90°) da essere del tutto inconsistente¹⁰ con quanto ci si poteva aspettare dal modello atomico di Thomson.

⁷J.J. Thomson: *On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure*, Phil. Mag. 7, 237 (1904).

⁸H. Geiger, E. Marsden: *On a diffuse reflection of α particles*, Proc. Roy. Soc. 82, 495 (1909).

⁹L'effetto fu osservato in realtà anche con altri metalli, come il Piombo, il Platino, lo Stagno, l'Argento, il Rame, il Ferro e l'Alluminio. In queste misure fu messo in evidenza la forte dipendenza dell'effetto dal peso atomico: per esempio, l'effetto in Piombo risultava essere circa venti volte maggiore che in Alluminio ... L'oro fu usato più estensivamente per la sua duttilità, che dava la possibilità di ridurlo in fogliolini estremamente sottili (inferiori al micron) e quindi di misurare la dipendenza dell'effetto anche dallo spessore del metallo. Si osservò così che l'effetto dei rimbalzi all'indietro saturava al crescere dello spessore e che esso aveva luogo, sostanzialmente solo nel primo micron di metallo.

¹⁰Nel modello di Thomson, la carica positiva del nucleo era distribuita più o meno uniformemente all'interno del raggio dell'atomo, ed essa era bilanciata da quella degli elettroni, i quali si trovavano immersi in questo *nucleo* come, appunto, l'uvetta nel panettone ... Secondo questo modello, una particella α avrebbe potuto avere uno scattering, in pratica, solo con gli elettroni puntiformi che, data la loro massa relativamente molto più piccola, mai avrebbero potuto farla rimbalzare all'indietro.

Vediamo invece come questo possa accadere, nel caso del modello atomico di Rutherford, che adesso tratteremo, per semplicità, assumendo nucleo (massa M e carica Ze) e particella α (massa m e carica ze) entrambi puntiformi.

Come è noto, in questa ipotesi, l'urto può essere descritto, nel sistema del CM delle due particelle, usando la variabile \vec{r} della posizione relativa della particella α rispetto al nucleo, come se si trattasse di un processo di scattering di una singola particella da un potenziale esterno, pur di usare per massa di questa particella fittizia, la massa ridotta del sistema, cioè la quantità

$$\mu \equiv \frac{mM}{m+M} \quad (2.2.11)$$

Se adesso, per semplicità, trascuriamo l'effetto di schermo degli elettroni (approssimazione giustificata almeno per gli scattering a grande angolo), il potenziale di scattering risulta essere quello coulombiano fra le due cariche, ovvero

$$V(\vec{r}) = V(r) = \frac{zZe^2}{r} \quad (2.2.12)$$

Siccome il potenziale è centrale, il momento angolare relativo al centro di scattering \vec{L} si conserva e dunque, nel sistema di riferimento del CM delle due particelle, che coincide con quello del centro di scattering a riposo, il moto è piano. Ne segue che $\vec{r}(t)$ e $\dot{\vec{r}}(t)$ giacciono entrambi in un piano fisso, la cui normale, appunto, è diretta come \vec{L} .

Per descrivere il problema, possiamo così usare le coordinate polari piane r, θ (rispetto al centro di scattering): risulta dunque

$$\vec{r} = r(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta) \quad (2.2.13)$$

e dunque

$$|\vec{L}| = |\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (2.2.14)$$

$$E = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 + V(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (2.2.15)$$

Ma \vec{L} è una costante del moto, dunque

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (2.2.16)$$

dove l è indipendente dal tempo.

Usando questa equazione per eliminare $\dot{\theta}$ dall'equazione (2.2.15), si ottiene

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \frac{l^2}{\mu^2 r^4}) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (2.2.17)$$

la quale, fissato l , rappresenta, in una dimensione, l'energia di una particella di massa μ , sottoposta a una forza conservativa derivabile dal potenziale fittizio $\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$: il secondo termine è il ben noto *potenziale centrifugo*.

Si osservi che, nel caso coulombiano (o newtoniano), il potenziale $\tilde{V}(r)$ è comunque sempre positivo per $r \rightarrow 0$, mentre tende a zero per $r \rightarrow \infty$ in modo monotono crescente/decescente a seconda che $zZ < 0$ oppure $zZ > 0$.

E' altresì immediato che $\tilde{V}(r)$ non ha minimi se $zZ > 0$, mentre ha un solo minimo quando $zZ < 0$ e in questo caso risulta

$$r_{min} = -\frac{l^2}{\mu z Z e^2} \quad (2.2.18)$$

in cui il potenziale fittizio assume il valore

$$\tilde{V}_{min} = \frac{1}{2} \frac{zZe^2}{r_{min}} = -\frac{\mu}{2} \frac{(zZe^2)^2}{l^2} \quad (2.2.19)$$

Quanto sopra implica anche che, in questo caso (potenziale attrattivo), il potenziale $\tilde{V}(r)$ debba possedere uno zero e risulta che questo si realizza per $r_0 = r_{min}/2$.

E' evidente allora che, essendo l'energia cinetica solo positiva, per $E > 0$ non potranno esistere stati legati ma solo stati di scattering, mentre per $\tilde{V}_{min} \leq E < 0$ potranno esistere eventualmente solo stato legati !

Ritornando al problema dell'equazione del moto, se adesso deriviamo rispetto al tempo la (2.2.17), troviamo, naturalmente, l'espressione dell'accelerazione \ddot{r} , prevista in questo caso dalla seconda legge della dinamica, cioè

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}(V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}) \quad (2.2.20)$$

Comunque, se non siamo interessati alla legge oraria bensì, come accade nel caso di un processo di scattering, solo all'equazione della traiettoria della particella, allora possiamo procedere esplicitando semplicemente \dot{r} direttamente dalla (2.2.17), la quale fornisce

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (2.2.21)$$

dove l'argomento della radice deve essere positivo e questo vincolo determina appunto il range dei possibili valori di r . L'equazione (2.2.21), insieme alla (2.2.16), eliminando il tempo, consente appunto di esplicitare l'equazione della traiettoria. Si ha infatti

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \\ \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (2.2.22)$$

$$(2.2.23)$$

e l'integrazione della (2.2.22) consente, almeno in linea di principio, di risolvere per quadrature, per qualunque potenziale centrale, il problema della traiettoria.

Nel caso coulombiano che ci interessa, abbiamo quindi

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - \frac{zZe^2}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (2.2.24)$$

da cui si ricava

$$\theta(r) = \theta_0 + \int^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu zZe^2}{xl^2} - \frac{1}{x^2}}} \quad (2.2.25)$$

L'integrale può essere calcolato per sostituzione di variabile, ponendo $\xi = \frac{1}{x}$: si ottiene

$$\theta(r) = \theta_0 + \arccos \left(\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \right) \quad (2.2.26)$$

dove

$$\xi_0 \equiv \frac{\mu zZe^2}{l^2}; \quad A \equiv \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \xi_0^2} = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 z^2 Z^2 e^4}{l^4}} \quad (2.2.27)$$

infatti, dalla (2.2.25), con la sostituzione $\xi = \frac{1}{x} \Rightarrow d\xi = -\frac{dx}{x^2}$, si ottiene

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu z Z e^2}{l^2} \xi - \xi^2}} \quad (2.2.28)$$

Ponendo allora $\xi = \eta - \xi_0$, con $\xi_0 \equiv \frac{\mu z Z e^2}{l^2}$ ecco che l'argomento della radice quadrata, dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si riduce a $\frac{2\mu E}{l^2} + \xi_0^2 - \eta^2 \equiv A^2 - \eta^2$ dove si è definito

$$A^2 \equiv \frac{2\mu e}{l^2} + \xi_0^2 = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 z^2 Z^2 e^4}{l^4} \quad (2.2.29)$$

Dunque

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A^2 - \eta^2}} = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.2.30)$$

e ponendo $\zeta = \cos\phi$, questo integrale si risolve immediatamente e fornisce appunto il risultato citato sopra, cioè

$$\theta(r) = \theta_0 + \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A}\right) \quad (2.2.31)$$

Dalla (2.2.26) segue quindi che

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \quad (2.2.32)$$

ovvero, infine, che

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (2.2.33)$$

In generale, questa equazione rappresenta una conica. Nel caso che ci interessa, quando cioè $E > 0$, siccome dalla (2.2.27) risulta evidentemente che $A > |\xi_0|$, essa rappresenta il ramo di una iperbole, avente uno dei due fuochi nell'origine ed eccentricità

$$\epsilon = \frac{A}{|\xi_0|} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mZ^2e^4}}.$$

Ricordiamo infatti che, in generale, nel piano, dato un punto (fuoco) F e una retta direttrice D , una conica è definita dalla relazione $\frac{PF}{PH} = \epsilon$, dove ϵ è l'eccentricità, PF è la distanza del generico punto P della conica con il fuoco, mentre PH rappresenta la distanza del punto dalla direttrice. Quando $\epsilon > 1$ si ha un'iperbole, quando $\epsilon = 1$ si ha una parabola, quando $\epsilon < 1$ si descrive un'ellisse che, nel caso in cui $\epsilon = 0$ degenera in una circonferenza. Nel caso dell'iperbole, se l'origine è il fuoco e questo si trova all'interno della falda di iperbole considerata, per cui la direttrice è opposta al fuoco rispetto al vertice della curva, misurando θ rispetto alla direzione *fuoco* \rightarrow *vertice*, l'equazione è

$$\frac{r}{h - r \cos\theta} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos\theta \quad (2.2.34)$$

dove h è la distanza del fuoco F dalla direttrice.

Se invece il fuoco è opposto alla falda e dunque la direttrice è tra il vertice della curva e il fuoco, misurando θ sempre rispetto alla direzione *fuoco* \rightarrow *vertice*, l'equazione è

$$\frac{r}{-h + r \cos\theta} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos\theta \quad (2.2.35)$$

E' immediato verificare che il primo caso descrive lo scattering da potenziale attrattivo ($zZ < 0$) (la falda *contiene* l'origine, cioè il centro di scattering), mentre il secondo caso descrive lo scattering da potenziale repulsivo, come nel nostro caso ($zZ > 0$), in cui l'origine (centro di scattering) è opposta alla falda dell'iperbole descritta dalla particella.

Ma torniamo all'equazione (2.2.33).

Scegliamo la costante arbitraria di integrazione θ_0 in modo che sia $\theta = 0$ quando $r = r_{min}$, ovvero quando $\frac{1}{r} = -\xi_0 + A$, i.e. per $\theta - \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$.

In questo modo abbiamo

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos\theta \quad (2.2.36)$$

E' evidente che, affinché $\frac{1}{r} > 0$, l'angolo θ deve essere compreso fra $-\theta_M$ e θ_M , dove $\theta_M \equiv \arccos \frac{\xi_0}{A}$.

Distinguiamo, adesso, i due casi in cui $\xi_0 > 0$ (repulsione) e $\xi_0 < 0$ (attrazione).

Nel primo caso (repulsivo), in cui θ_M è, evidentemente, nel primo quadrante visto che $\xi_0/A > 0$, ricordando che l'angolo di scattering è definito come l'angolo fra \vec{v}_{in} e \vec{v}_{out} , risulta

$$\theta_{sc} = \pi - 2\theta_M \quad (2.2.37)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \theta_{sc} &= \pi - 2 \arccos \frac{\xi_0}{A} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\epsilon} \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{z^2 Z^2 \mu e^4}}} \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Nel secondo caso (attrattivo), in cui θ_M , invece, è nel secondo quadrante, usando semplici considerazioni di geometria, possiamo concludere che l'angolo di scattering è dato da

$$\theta_{sc} = \pi - 2(\pi - \theta_M) = -\pi + 2\theta_M \quad (2.2.39)$$

Ma adesso

$$\theta_M = \arccos \frac{\xi_0}{A} = \arccos\left(-\frac{|\xi_0|}{A}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \theta_{sc} &= -\pi + 2\theta_M = -\pi + 2\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{z^2 Z^2 \mu e^4}}} \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Si osservi che la (2.2.38) e la (2.2.40) affermano che, per le stesse condizioni iniziali di energia e parametro d'impatto, a parità di cariche e massa, l'angolo di scattering è lo stesso sia nel caso attrattivo che in quello repulsivo.

Per arrivare adesso all'espressione della sezione d'urto Rutherford, poniamo

$$\alpha \equiv \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{z^2 Z^2 \mu e^4}}} \quad (2.2.41)$$

per cui risulta

$$\cos\theta_{sc} = -\cos(2\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{\mu z^2 Z^2 e^4}} \quad (2.2.42)$$

Ricordiamo adesso che, per un processo d'urto a simmetria assiale, risulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)} \right| \quad (2.2.43)$$

per cui, per determinare la sezione d'urto differenziale a partire dalla (2.2.42), occorre esplicitare la funzione $b^2 = b^2(\cos\theta_{sc})$. Questo può essere fatto ricordando che i due integrali primi dell'energia E e del momento angolare l , usati nella (2.2.42), sono esprimibili in termini del parametro d'impatto b e del modulo della velocità iniziale v , nel modo seguente

$$\begin{aligned} l &= \mu v b \\ 2E &= \mu v^2 \end{aligned}$$

per cui, sostituendo, risulta

$$\begin{aligned} \cos\theta_{sc} &= 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{\mu z^2 Z^2 e^4}} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{(\mu v^2)(\mu v b)^2}{\mu z^2 Z^2 e^4}} = 1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{\mu v^2}{zZe^2}\right)^2 b^2} = \\ &= \frac{(\mu b v^2)^2 - (zZe^2)^2}{(\mu b v^2)^2 + (zZe^2)^2} \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

da cui si ricava, con semplici passaggi algebrici (per semplicità indicheremo l'angolo di scattering con θ invece che con θ_{sc} ...)

$$b^2 = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.2.45)$$

e dunque, per la (2.2.43), abbiamo finalmente che la *sezione d'urto Rutherford* per scattering di una particella di massa m e carica ze contro un centro di scattering di massa M e carica Ze , risulta, *indipendentemente* dal segno delle cariche, essere data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{d\cos\theta} \right| = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.2.46)$$

dove μ è la massa ridotta del sistema e v la sua velocità nel sistema del CM .

In termini della costante di struttura fine $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$, abbiamo infine che

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \left(\frac{zZ\alpha \hbar c}{pv} \right)^2 \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} = \left(\frac{zZ\alpha \hbar c}{pv} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.2.47)$$

Possiamo adesso determinare la sezione d'urto totale di back-scattering di una particella α contro un nucleo isolato, trascurando gli effetti di schermo e di massa ridotta.

Occorre per questo integrare la (2.2.46) sull'intero angolo azimutale e, nell'angolo polare θ , fra $\pi/2$ e π . Poiché risulta

$$\int d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = 2\pi \cdot \frac{-1}{1 - \cos\theta} \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \pi$$

abbiamo che

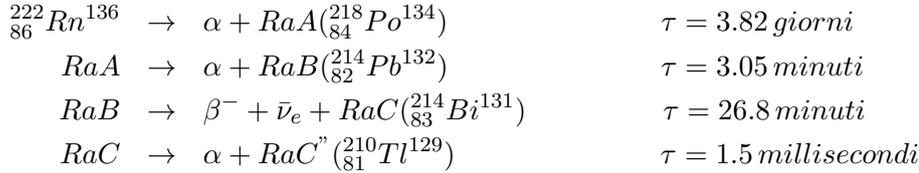
$$\sigma_{bk} = \int d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \pi \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 = \pi \left(\frac{zZe^2}{2E} \right)^2 \quad (2.2.48)$$

che, nel caso di una particella α da $5 MeV$ contro un nucleo d'oro, fornisce

$$\sigma_{bk} = \pi \left(\frac{2 \cdot 79 \cdot (4.8 \times 10^{-10})^2}{10^7 \cdot 1.6 \times 10^{-12}} \right)^2 = 14.3 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 14.3 \text{ barn} \quad (2.2.49)$$

2.2. L'ELETTRONE, IL PROTONE, IL NEUTRONE E IL FOTONE 21

Geiger e Mardsen usarono nel loro esperimento particelle α , cioè nuclei di elio, con energie dell'ordine di 5 MeV , che erano prodotte sia dall'*emanazione del Radio*, come allora si chiamava il ^{222}Rn , che dal *RaA* (^{218}Po) e dal *RaC* (^{214}Bi), secondo la catena radioattiva seguente:



Il risultato inatteso dello scattering all'indietro condusse all'abbandono del modello di Thomson a favore del modello¹¹ di Rutherford, in cui il nucleo centrale massiccio era l'analogo del Sole nel sistema planetario. Esso concentrava in sé quasi tutta la massa e aveva una carica che caratterizzava l'elemento chimico.

Purtroppo, come sappiamo, se questo modello risolveva un problema, esso ne generava un altro, cioè quello della instabilità elettromagnetica¹²

mentre se urta un nucleo di alluminio, la stessa sezione d'urto diminuisce del fattore $(Z_{\text{Au}}/Z_{\text{Al}})^2 = (79/13)^2 \approx 37$, in buon accordo con i risultati di Geiger e Mardsen, tenendo conto che abbiamo trascurato sia gli effetti di schermo elettronico che quelli di riassorbimento.

Circa la sezione d'urto Rutherford, occorre infine notare che essa conduce a un valore infinito della sezione d'urto totale a causa del suo andamento come θ^{-4} quando $\theta \rightarrow 0$. Questo è dovuto al fatto che, essendo la forza coulombiana a range infinito, non esiste, a rigore, alcun limite superiore al parametro d'impatto oltre il quale non c'è urto. Questa patologia scompare se si tiene conto dell'effetto di schermo degli elettroni e quindi del fatto che il potenziale prodotto dall'atomo si annulla esattamente da una opportuna distanza dal centro in poi (stiamo trascurando effetti di polarizzazione ...), quando la carica nucleare viene completamente schermata da quella della nuvola elettronica (raggio atomico).

¹¹E. Rutherford: *The scattering of the α and β rays and the structure of the atom*, Phil. Mag. 21, 669 (1911).

E. Rutherford: *The structure of the atom*, Phil. Mag. 27, 488 (1914).

¹²Nel caso di una carica accelerata, a causa dell'irraggiamento, nel riferimento tangente (cioè nel riferimento in cui la particella è istantaneamente in quiete), la sua perdita di energia, come è noto, è data da (sistema *cgs es...*)

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt d\Omega} = \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{a}|^2 \sin^2\theta \quad (2.2.50)$$

dove \vec{a} è l'accelerazione della carica e θ è l'angolo fra la direzione di osservazione e l'accelerazione stessa.

Da questo segue che, integrando nell'angolo solido, la potenza totale irraggiata vale

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|^2 \equiv \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 \quad (2.2.51)$$

dove la quantità $\frac{d\vec{p}}{dt}$ è determinata nel riferimento tangente.

Questa espressione non relativistica classica, dovuta a Larmor, vale nel riferimento tangente, cioè nel riferimento inerziale *RS* in cui la velocità della carica è istantaneamente nulla.

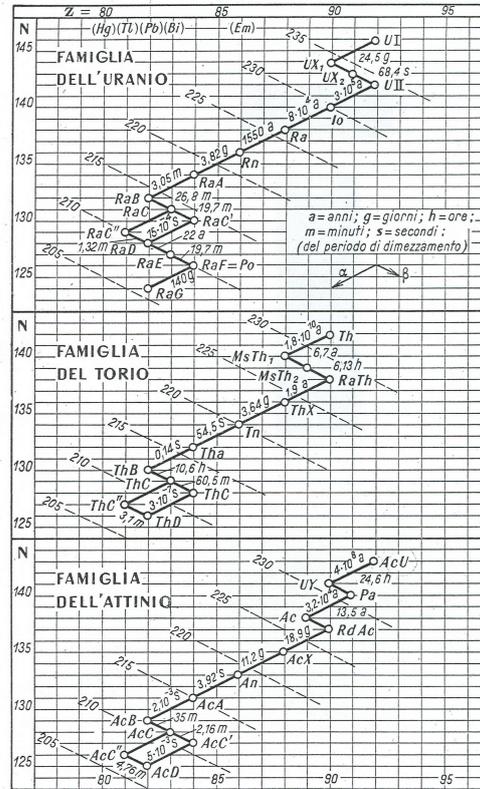


Figura 2.3: Tabella dei decadimenti delle catene dell'Uranio, Torio e Attinio

Si dimostra (cfr. Vol. II) che \mathcal{P} è uno scalare per trasformazioni di Lorentz e che come fu dimostrato originariamente da Liénard già nel 1898, la sua generalizzazione relativistica può essere scritta in termini di $\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{\beta}}$ nel modo seguente

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - |\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}|^2 \right] \quad (2.2.52)$$

Tornando all'atomo di idrogeno classico, dalla seconda legge della dinamica abbiamo

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{mR} \Rightarrow \beta^2 = \frac{e^2}{mc^2} \frac{1}{R} \equiv \frac{r_e}{R} \quad (2.2.53)$$

dove r_e è il raggio classico dell'elettrone ($r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.81794092(38) \times 10^{-13} \text{ cm}$).

Questo risultato mostra che, almeno sulla scala del raggio di Bohr ($R_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-2} r_e$), il moto dell'elettrone è non relativistico, per cui, riguardo alla potenza da esso irradiata, possiamo porre

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{R^2} \quad (2.2.54)$$

Questa perdita di energia avviene, evidentemente, a spese dell'energia dell'atomo stesso

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{e^2}{R} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{R} \quad (2.2.55)$$

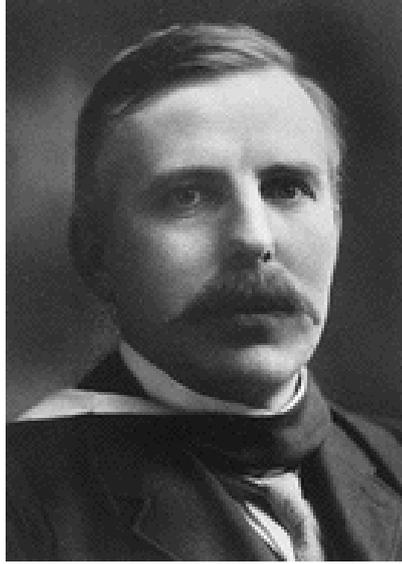


Figura 2.4: Ernest Rutherford (1871-1937)

ovvero

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{P} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{e^2}{R^2} \dot{R} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{R^2} \\
 &\Rightarrow \dot{R} = \frac{4}{3} \frac{v^4}{c^3} = -\frac{4}{3} \frac{1}{c^3} \left(\frac{e^2}{mR} \right)^2 = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{R^2} \\
 &\Rightarrow \dot{R} = -\frac{4}{3} r_e^2 c \frac{1}{R^2}
 \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

e dunque

$$R^2 dR = -\frac{4}{3} c r_e^2 dt \Rightarrow \frac{1}{3} R^3 + cost = -\frac{4}{3} c r_e^2 t \tag{2.2.57}$$

per cui, se assumiamo che per $t = 0$ il raggio dell'atomo sia quello di Bohr, cioè $R = R_B$, allora l'equazione precedente fornisce

$$R^3 - R_B^3 = -4c r_e^2 t \tag{2.2.58}$$

e dunque, se fosse così, l'atomo collasserebbe in un tempo

$$\begin{aligned}
 \tau &\approx \frac{R_B^3}{4c r_e^2} = \frac{r_e^3 \alpha^{-6}}{4c r_e^2} = \alpha^{-6} \frac{r_e}{4c} = \\
 &\approx (137.036)^6 \frac{2.818 \cdot 10^{-13}}{4 \cdot 2.998 \cdot 10^{10}} \approx 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ s}
 \end{aligned} \tag{2.2.59}$$

In realtà, quando R venisse ad avere dimensioni dell'ordine del raggio classico, dovremmo usare la meccanica relativistica ... se non fosse che si tratta ormai delle dimensioni stesse del protone!

Le conclusioni di cui sopra, pur non conducendo a un risultato esatto, consentono comunque di valutare l'ordine di grandezza del fenomeno ed inoltre ci hanno dato modo di richiamare alcune conclusioni generali sull'irraggiamento elettromagnetico da parte di una carica accelerata.

dell'atomo: per irraggiamento, gli elettroni dovevano cadere sul nucleo in tempi dell'ordine del centesimo di nanosecondo ...

Ma qui, la soluzione al problema venne dalla Meccanica Quantistica, ed è un'altra storia ...

Quanto al nucleo¹³, c'era comunque da spiegare¹⁴ come mai quello del secondo elemento della Tavola Periodica, l'elio, non avesse, per esempio, massa doppia di quello dell'idrogeno bensì quadrupla, visto che aveva carica doppia e quindi, ragionevolmente, poteva essere fatto semplicemente da due protoni. Analogamente, il successivo, il litio, era circa sette (e non tre) volte più massivo del protone, e così via¹⁵ ...

Il rompicapo fu risolto da Chadwick nel 1932, quando scoprì l'esistenza del neutrone¹⁶, una specie di gemello scarico del protone¹⁷.

¹³E. Rutherford: *Backerian lecture: nuclear constitution of atoms*
Proc. Roy. Soc. 97A, 374 (1920).

Rutherford insieme a Marsden, già dal 1914, stava cercando di capire come fosse fatto il nucleo stesso in generale e per questo avevano iniziato dall'elemento più leggero e bombardavano dell'idrogeno gassoso con particelle α . Osservarono che, ben oltre la massima distanza (*range*) raggiungibile dalla particella α , si osservavano ancora, sullo schermo fluorescente che serviva loro da rivelatore, delle scintillazioni prodotte da una particella che, attraverso la deflessione magnetica, verificarono essere positiva. Rutherford, correttamente, interpretò questa particella come il nucleo dell'idrogeno, che chiamò *H - particle*. Marsden aveva notato, però, che un fenomeno simile si osservava anche quando le α si propagavano in aria, dove l'idrogeno era quasi assente.

Era provocato dalla stessa particella? Ci fu un'interruzione del lavoro a causa della prima guerra mondiale, ma, successivamente, Rutherford riprese questi studi e, dopo aver verificato che questo fenomeno si realizzava anche quando, al posto dell'idrogeno, usava per esempio boro, fluoro, sodio, alluminio, fosforo, azoto, concluse che quella che lui aveva battezzato *H-particle*, aveva una valenza molto più generale di quanto lui pensasse all'inizio ed era il *mattone carico* con cui erano costituiti tutti i nuclei. Per questo motivo Rutherford lo ribattezzò *protone*, dal greco $\pi\rho\tilde{\omega}\tau\omicron\varsigma$ (*proto*) = *primo*, proprio per significare appunto che si tratta del mattone fondamentale con cui la Natura ha costruito poi tutti i nuclei atomici.

¹⁴E' giusto ricordare che Rutherford, nel 1920, nell'articolo citato prima, avanzò l'idea che, oltre ai protoni, nei nuclei ci fossero anche particelle neutre di massa simile, ma l'idea dominante era quella più "economica", cioè quella che faceva uso solo delle particelle già note, ovvero che il nucleo contenesse protoni ed elettroni detti *nucleari*, per distinguerli da quelli che orbitavano intorno al nucleo stesso.

¹⁵In ogni caso, anche se i nuclei fossero fatti solo da protoni, ci sarebbe rimasto sempre da spiegare come questo fosse possibile, visto che i protoni sono particelle cariche dello stesso segno e dunque si respingono elettricamente.

¹⁶J. Chadwick: *The existence of a neutron*, Proc. Roy. Soc. 136A, 692 (1932).

¹⁷Nel 1930, Bothe e Becker avevano osservato che, bombardando berillio con particelle α (queste erano ottenute dal decadimento del $RaF \equiv {}_{84}^{210}Po$, che dà luogo ad α da 5 MeV...), veniva emessa una radiazione neutra estremamente penetrante in grado di provocare addirittura la disintegrazione del nucleo. Nel 1932 Irene Curie con il marito Frédéric Joliot, riferirono a Parigi che, bombardando lamine di berillio con particelle α , la radiazione invisibile emessa era in grado, in paraffina e sostanze idrogenate in genere, di sbalzare via protoni. L'interpretazione che veniva data al momento era comunque che si

Figura 2.5: *James Chadwick (1891-1974)*

I nuclei, dunque, erano fatti da Z protoni (tanti quanti il numero atomico, ovvero quanti gli elettroni) e da $A - Z$ neutroni.

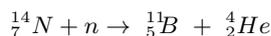
trattasse di radiazione γ : in realtà essi stavano osservando la reazione



Usando la camera a nebbia (di Wilson), fu possibile poi misurare l'energia dei protoni di rimbalzo e ci si rese ben presto conto che, se la radiazione primaria fosse stata fatta di γ , questi avrebbero dovuto possedere energie irrealisticamente elevate. Chadwick collegò il fatto sperimentale osservato dai Joliot alla previsione del 1920 di Rutherford circa l'esistenza di una specie di partner scarico del protone, necessario per risolvere l'enigma dei pesi atomici.

Rifece l'esperimento inviando la famosa radiazione su idrogeno e su altre sostanze fatte da atomi leggeri (litio, berillio, boro, carbonio e azoto) osservando, spesso, l'emissione di ioni della sostanza usata, variamente scatterati. Dalla misura e dal confronto delle velocità massima di questi ioni, Chadwick dedusse che la massa del proiettile doveva essere pari a circa 0.9 volte la massa del protone. Assunse infatti che la radiazione dal berillio fosse una particella di massa M : se V era la sua velocità massima, allora, da semplici considerazioni cinematiche, segue che la velocità massima U_p del protone sbalzato via in idrogeno dall'urto, vale, al massimo $U_p = \frac{2M}{M+M_p} V$, mentre, nel caso, per esempio, di un nucleo di azoto, vale, evidentemente $U_N = \frac{2M}{M+M_N} V$. Queste velocità potevano essere inferite dal range percorso in camera di Wilson, per cui, dal loro rapporto, Chadwick poté estrarre la massa incognita, che risultò essere, appunto, circa 0.9 volte la massa del protone (oggi sappiamo che la massa del neutrone è in realtà maggiore di quella del protone di circa l'1 per mille ...).

In camera a nebbia, sempre usando questa radiazione, furono altresì osservati esempi di disintegrazione nucleare indotta, del tipo



che chiusero definitivamente il problema sulla natura di questa radiazione.

La scoperta valse a Chadwick il Nobel nel 1935.

J. Chadwick: *Nobel Lecture 1935*

Grosso modo, risulta poi che i neutroni sono circa quanti i protoni (anche se tendono a essere via via di più, all'aumentare del numero atomico) e c'erano nuclei aventi lo stesso numero di protoni ma diverso numero di neutroni che erano appunto i vari *isotopi*¹⁸ di uno stesso elemento.

Ricordiamo in proposito che la chimica di un elemento dipende dalla sua struttura elettronica e quindi, in buona sostanza, solo dal numero di protoni nel nucleo (gli effetti dovuti alla struttura nucleare sono quasi impercettibili negli atomi), per cui gli isotopi sono pressochè equivalenti fra loro chimicamente e ciò che li differenzia sono tipicamente proprietà legate anche alla loro massa, come velocità di reazione, coefficiente di diffusione, etc ...

Dunque, nel 1932, conoscevamo solo tre particelle elementari: l'elettrone, il protone e il neutrone¹⁹ e tutta la materia nota a quel tempo poteva essere costruita con questi tre mattoni.

Mai, prima di allora (e purtroppo anche dopo di allora ...) nella Fisica, si era potuto offrire una risposta²⁰ più semplice alla domanda: *di che cosa è fatta la materia ?*

In realtà, nel 1932 era nota anche un'altra particella, il *fotone* , che aveva però caratteristiche decisamente diverse: non era un costituente della materia in senso stretto bensì il *quanto* della radiazione elettromagnetica, introdotto²¹ da Einstein nel 1905, per spiegare l'effetto fotoelettrico²², per

¹⁸Ricordiamo a questo proposito che, pur essendo gli isotopi noti da tempo, fu solo nel 1931 che Birge e Menzel nell'articolo R.T. Birge, D.H. Menzel: *The relative abundance of the oxygen isotopes and the basis of the atomic weight system*; Phys. Rev. 37, 1669 (1931) osservando alcune inconsistenze nelle misure di massa ottenute su campioni di idrogeno naturale, fatte usando la tecnica della spettroscopia di massa, ipotizzarono l'esistenza di un nuovo elemento, il Deuterio, con massa circa doppia rispetto a quella dell'idrogeno. L'elemento fu poi scoperto nel 1932, studiando gli spettri di campioni di idrogeno naturale in tubi a scarica.

H.C. Urey, F.G. Brickwedde e G.M. Murphy: *A hydrogen atom of mass 2*; Phys. Rev. 39, 164 (1932)

¹⁹Va detto che una scuola di pensiero tendeva ancora a considerare il neutrone piuttosto come uno stato legato $p - e$, anche allo scopo di spiegare il decadimento β di alcuni nuclei.

²⁰Lo stesso non era vero per quanto riguarda le forze elementari, mancando completamente una teoria sia del decadimento radioattivo che della stabilità del nucleo.

²¹A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuris-*

tischen Gesichtspunkt Annalen der Physik 17, 132 (1905)

²²Va sotto questo nome l'effetto per cui la luce è in grado di estrarre elettroni da certi metalli. La stranezza in questo effetto era rappresentata dal fatto che si tratta di un effetto a soglia, ovvero non c'è estrazione, indipendentemente dall'intensità, finché la luce non ha componenti di frequenza superiore a un certo valore ν_0 , e questo è inspiegabile in termini di elettromagnetismo classico. La spiegazione di Einstein era che la luce viaggiava in pacchetti di energia $h\nu$, per cui, visto che per estrarre un elettrone da un metallo occorre disporre almeno di una certa quantità di energia w , caratteristica del metallo, c'era estrazione solo quando $h\nu - w = \epsilon > 0$, ed ϵ rappresentava la massima energia

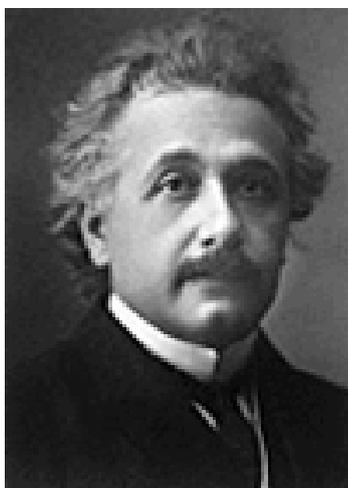


Figura 2.6: *Albert Einstein (1879-1955)*

cui ebbe il Nobel²³ nel 1921.

Va detto che l'idea del fotone, a differenza di quella del quanto d'azione²⁴ di Planck, ebbe per molto tempo vita grama.

La ragione era che Einstein postulava che l'energia elettromagnetica fosse, per sua natura, quantizzata in pacchetti, per cui il fotone possedeva una energia $h\nu$ e un impulso $h\nu/c$, e questo era una vera rottura con l'elettromagnetismo classico (a differenza di Planck, il quale postulava solo che fossero l'assorbimento e l'emissione della radiazione ad avvenire per quanti di energia $h\nu$).

Nonostante che, per esempio, nel 1916 Millikan avesse pubblicato risultati molto esaurienti sull'effetto fotoelettrico, riconoscendo che "*Einstein's photoelectric equation appears, in every case, to predict exactly the observed results*" fu solo dopo l'esperimento di Compton²⁵ del 1923 che l'idea del fo-

possibile per l'elettrone, *indipendentemente* dall'intensità della radiazione.

²³E' curioso il fatto che Einstein non abbia avuto il Nobel nel 1921 per i suoi due lavori sulla Relatività speciale e generale, ovvero

A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Physik 17, 891 (1905)

A. Einstein: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Physik 49, 769 (1916)

che, evidentemente, erano ancora maldigeriti, bensì per l'effetto fotoelettrico.

Comunque, in occasione del ritiro del premio Nobel, egli parlò di Relatività !

A. Einstein: *Nobel Lecture 1921*

²⁴M. Planck: *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*
Annalen der Physik 4, 553 (1901)

M. Planck: *Nobel Lecture 1918*

²⁵A.H. Compton: *A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements*
Phys. Rev. 21, 483 (1923)

A.H. Compton: *Nobel Lecture 1927*



Figura 2.7: *Max Planck (1858-1947)*

Un fotone che *urti* su un elettrone libero e in quiete cambia di lunghezza d'onda secondo la legge $\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ dove m è la massa dell'elettrone mentre θ è l'angolo di scattering che subisce il fotone: questo è quanto osservò Compton usando raggi X della riga K_α del Molibdeno ($\lambda = 0.711 \text{ \AA}$; $E \approx 17.4 \text{ KeV}$).

Il fenomeno può essere spiegato solo trattando il processo come uno scattering fra due particelle, di cui una, l'elettrone, è inizialmente a riposo e l'altra, il fotone, possiede appunto un'energia $h\nu$ e un impulso $h\nu/c$.

Infatti, se trattiamo il processo classicamente, cioè come la diffusione di un'onda elettromagnetica da parte di un elettrone libero ed inizialmente in quiete, *non* possiamo ottenere in alcun modo uno shift di frequenza dell'onda diffusa !

Si tratta dello *scattering Thomson*.

Se un'onda elettromagnetica, che supporremo piana, monocromatica e linearmente polarizzata, incide su un elettrone libero, questo si muove di moto armonico sotto l'azione del campo elettrico sinusoidale dell'onda. E' lecito trascurare l'effetto sull'elettrone del campo magnetico in quanto esso diviene confrontabile con quello del campo elettrico solo se l'elettrone assume velocità relativistiche.

Questo può accadere solo se la radiazione è tale che

$$\frac{eE_0}{m\omega} \approx c \Rightarrow \frac{eE_0\lambda}{m2\pi c} \approx c \Rightarrow eE_0 \lambda \approx mc^2 \quad (2.2.60)$$

dove λ è la lunghezza d'onda *ridotta* dell'onda elettromagnetica.

Questa condizione, come possiamo facilmente verificare, è impossibile da realizzarsi almeno nei casi di interesse (radiazione UV o X).

Trascurando dunque l'effetto magnetico, per l'elettrone si ha

$$m \vec{a}(t) = e \vec{E}(t) \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.2.61)$$

Il moto oscillatorio avviene nel piano trasverso alla direzione di propagazione dell'onda, quindi a $\vec{k} \cdot \vec{x}$ costante: in ogni caso la condizione (2.2.60) implica che il moto dell'elettrone

intorno alla sua posizione di equilibrio abbia comunque ampiezza $\frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \lambda$ e dunque possiamo certamente assumere che

$$\vec{a}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.2.62)$$

la quale mostra come il moto dell'elettrone avvenga *esattamente* alla stessa frequenza di quella dell'onda e quindi che anche la radiazione da esso irraggiata *non possa che essere a quella stessa frequenza*.

Quanto alla potenza istantanea irraggiata dall'elettrone a causa del suo moto accelerato, come sappiamo essa è pari a

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{a}(t)|^2 \cdot \sin^2\theta \quad (2.2.63)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di propagazione della radiazione irraggiata e quella dell'accelerazione istantanea dell'elettrone, ovvero quella della polarizzazione lineare dell'onda incidente.

Se assumiamo che lo spostamento che l'elettrone subisce dalla sua posizione di equilibrio sia comunque molto inferiore alla lunghezza d'onda ridotta dell'onda incidente, ovvero se assumiamo che

$$\frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \frac{eE_0\lambda^2}{m(2\pi)^2 c^2} \ll \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \frac{eE_0\lambda}{mc^2} \ll 1 \quad (2.2.64)$$

(si osservi che si tratta della stessa condizione che garantisce la possibilità di trascurare l'effetto del campo magnetico dell'onda sul moto dell'elettrone e questa è la ragione della sua stessa necessità, infatti, se l'effetto del campo magnetico sul moto dell'elettrone può essere trascurato, il moto in questione è trasversale alla direzione di propagazione dell'onda e la condizione (2.2.64) non ha quindi nemmeno ragione di essere) allora possiamo mediare facilmente nel tempo la potenza irraggiata, ottenendo

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2}{8\pi c^3} \left(\frac{eE_0}{m} \right)^2 \cdot \sin^2\theta = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \sin^2\theta \quad (2.2.65)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione della polarizzazione lineare e quella di osservazione.

Quanto poi a

$$I = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad (2.2.66)$$

essa misura l'intensità dell'onda stessa, ovvero il valor medio del flusso del vettore di Poynting nella sua direzione di propagazione, dunque

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \right\rangle = I \cdot \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \sin^2\theta \quad (2.2.67)$$

Definendo allora come *sezione d'urto differenziale* di scattering proprio il rapporto $\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \right\rangle / I$, si ha

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{pol} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \sin^2\theta = r_0^2 \sin^2\theta \quad (2.2.68)$$

dove abbiamo messo esplicitamente in evidenza il fatto che essa è riferita alla direzione di polarizzazione della radiazione e non a quella di propagazione dell'onda imperturbata, come vuole la definizione canonica. Se immaginiamo adesso che l'onda viaggi lungo l'asse z mentre il campo elettrico \vec{E} formi l'angolo ϕ_p con l'asse x , i.e.

$$\vec{E} = E_0 (\cos\phi_p, \sin\phi_p, 0) \equiv E_0 \vec{e}$$

tone (battezzato così dal chimico Gilbert Lewis nel 1926) fu definitivamente

allora, data una generica direzione di osservazione \vec{n} espressa in coordinate polari riferite a z

$$\vec{n} = (\sin\Theta \cos\phi, \sin\Theta \sin\phi, \cos\Theta)$$

evidentemente abbiamo che

$$\cos\theta \equiv \vec{e} \cdot \vec{n} = \sin\Theta \cos(\phi_p - \phi)$$

e dunque, in termini di queste variabili angolari risulta

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pol} = r_0^2 \sin^2\theta = r_0^2 [1 - \sin^2\Theta \cos^2(\phi_p - \phi)] \quad (2.2.69)$$

dove, adesso, Θ è proprio l'angolo di scattering.

Nel caso di luce non polarizzata che si propaga lungo l'asse z , occorrerà evidentemente mediare sull'angolo ϕ_p fra 0 e 2π , ottenendo così

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{unpol} = r_0^2 \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2\Theta\right] = \frac{r_0^2}{2} [1 + \cos^2\Theta] \quad (2.2.70)$$

Quanto alla sezione d'urto totale σ_{Th} , occorre integrare l'espressione precedente sull'intero angolo solido. Risulta

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\Theta d\Theta [1 + \cos^2\Theta] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

mentre l'integrazione nell'angolo azimutale contribuisce, ovviamente, per un fattore 2π , per cui abbiamo infine che

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.66524616(18) \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.66524616(18) \text{ barn} \quad (2.2.71)$$

Per questa strada, comunque, come abbiamo notato, non c'è modo di render conto dello shift in frequenza della radiazione scatterata, come Compton osservava.

Vediamo (cfr. anche Vol. II) invece come questo accada naturalmente, usando la cinematica relativistica, nel caso in cui il fotone venga trattato come una particella di massa nulla e quadrimpulso pari a

$$k^\mu = k(1, \vec{n}) \equiv \frac{E}{c}(1, \vec{n}) \quad (2.2.72)$$

essendo \vec{n} il versore che fornisce la sua direzione di propagazione ed E la sua energia, legata appunto alla frequenza dalla relazione di Planck $E = h\nu$.

Per ipotesi, l'elettrone, prima dell'urto, avrà quadrimpulso

$$p^\mu = (mc, \vec{0}) \quad (2.2.73)$$

dove m è la sua massa e, visto che il processo d'urto è isolato, la somma dei due quadripulsi $P^\mu = k^\mu + p^\mu = (k + mc, \vec{k})$ si conserverà, per cui il centro di massa del sistema delle due particelle continuerà a muoversi prima e dopo l'urto di moto rettilineo e uniforme con velocità, nel sistema del Laboratorio, pari a

$$\beta = \frac{k}{k + mc} \Rightarrow \gamma = \frac{k + mc}{\sqrt{(mc)^2 + 2kmc}} \equiv \frac{k + mc}{\sqrt{s}} \quad (2.2.74)$$

dove s è la massa invariante quadra del sistema, definita come

$$s \equiv P^\mu P_\mu = (k + mc)^2 - k^2 = (mc)^2 + 2kmc = mc(mc + 2k) \quad (2.2.75)$$

Applicando adesso il boost di Lorentz con velocità β lungo la direzione \vec{n} , possiamo determinare, per esempio, l'impulso del fotone nel sistema del CM , il quale, come accade nel CM per ogni urto elastico, resterà in modulo lo stesso anche dopo l'urto.

Un poco di cinematica relativistica fornisce

$$k_{CM} = \gamma k - \beta \gamma k = \gamma k(1 - \beta) = \frac{k + mc}{\sqrt{s}} k \left(1 - \frac{k}{k + mc}\right) = \frac{k mc}{\sqrt{s}} \quad (2.2.76)$$

Se assumiamo, senza perdita di generalità, che il fotone incidente si propaghi lungo l'asse z (sia nel sistema di riferimento del Laboratorio che in quello del CM ...) e indichiamo con Θ l'angolo di scattering del fotone nel CM , cioè l'angolo formato fra la nuova direzione di propagazione \vec{n}' con quella iniziale, ecco che il quadrimpulso del fotone dopo lo scattering sarà dato, con ovvio significato di simboli, da

$$k'_{CM} = k_{CM}(1, \vec{n}') = k_{CM}(1, \sin\Theta \cos\phi, \sin\Theta \sin\phi, \cos\Theta) \quad (2.2.77)$$

Per determinare l'energia (modulo dell'impulso) del fotone così scatterato nel sistema del Laboratorio, basta applicare adesso il boost inverso, definito dalla velocità $-\vec{\beta}$. Si ha

$$k' = \gamma k_{CM} + \beta \gamma k_{CM} \cos\Theta \quad (2.2.78)$$

ovvero

$$\begin{aligned} k' &= \gamma k_{CM} (1 + \beta \cos\Theta) = \gamma \frac{k mc}{\sqrt{s}} (1 + \beta - \beta + \beta \cos\Theta) = \\ &= \frac{k + mc}{\sqrt{s}} \frac{k mc}{\sqrt{s}} (1 + \beta) - \frac{k + mc}{\sqrt{s}} \frac{k mc}{\sqrt{s}} \beta (1 - \cos\Theta) = \\ &= \frac{k + mc}{s} k mc \frac{2k + mc}{k + mc} - \frac{k + mc}{s} k mc \frac{k}{k + mc} (1 - \cos\Theta) = \\ &= \frac{k mc(2k + mc)}{s} - \frac{k^2 mc}{s} (1 - \cos\Theta) = k - \frac{k^2 mc}{s} (1 - \cos\Theta) = \\ &= k - \frac{k^2 mc}{mc(2k + mc)} (1 - \cos\Theta) = k - \frac{k^2}{2k + mc} (1 - \cos\Theta) \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

da cui ricaviamo finalmente che

$$k - k' = \frac{k^2}{2k + mc} (1 - \cos\Theta) \quad (2.2.80)$$

la quale fornisce la variazione di impulso subita dal fotone nel sistema del Laboratorio, in funzione dell'angolo di scattering nel CM (nonché dell'impulso iniziale dello stesso, sempre nel sistema del Laboratorio e della massa dell'elettrone ...).

L'angolo di scattering Θ nel CM non è però la variabile cinematica più adatta per l'interpretazione dei risultati sperimentali, essendo a essa preferibile piuttosto l'angolo di scattering θ misurato nel sistema del Laboratorio.

Per definizione, con ovvio significato di simboli, risulta

$$\cos\theta \equiv \frac{k'_{\parallel}}{k'} \quad (2.2.81)$$

e, mentre per quanto riguarda la componente dell'impulso trasversa al boost sappiamo che essa coincide nei due riferimenti, ovvero

$$k'_{\perp} \equiv k' \sin\theta = k_{CM} \sin\Theta \quad (2.2.82)$$

per quanto riguarda, invece, la componente parallela alla direzione del boost, le trasformazioni di Lorentz, come ben sappiamo, forniscono

$$k'_{\parallel} \equiv k' \cos\theta = \beta \gamma k_{CM} + \gamma k_{CM} \cos\Theta \quad (2.2.83)$$

accettata.

e dunque, per la (2.2.78), risulta

$$\begin{aligned}
 k' - k' \cos\theta &\equiv k'(1 - \cos\theta) = \gamma k_{CM} + \beta\gamma k_{CM} \cos\Theta - \beta\gamma k_{CM} - \gamma k_{CM} \cos\Theta = \\
 &= \gamma k_{CM} (1 - \beta) - \gamma k_{CM} (1 - \beta) \cos\Theta = (1 - \beta) \gamma k_{CM} (1 - \cos\Theta) = \\
 &= \frac{mc}{k + mc} \frac{k + mc}{\sqrt{s}} \frac{k mc}{\sqrt{s}} (1 - \cos\Theta) = \frac{mc k mc}{s} (1 - \cos\Theta) = \\
 &= \frac{mc k mc}{mc(2k + mc)} (1 - \cos\Theta) = \frac{k mc}{2k + mc} (1 - \cos\Theta) \quad (2.2.84)
 \end{aligned}$$

Quindi, riprendendo la (2.2.80), si ha

$$k - k' = \frac{k^2}{2k + mc} (1 - \cos\Theta) = \frac{k}{mc} \frac{k mc}{2k + mc} (1 - \cos\Theta) = \frac{k k'}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (2.2.85)$$

la quale esprime ancora la variazione di impulso del fotone, ma adesso in funzione dell'angolo di scattering misurato nel sistema del Laboratorio.

In termini di frequenza, risulta dunque

$$\begin{aligned}
 k - k' &= \frac{h}{c} (\nu - \nu') = \left(\frac{h}{c}\right)^2 \frac{\nu \nu'}{mc} (1 - \cos\theta) \\
 \Rightarrow \Delta\nu &\equiv \nu - \nu' = \frac{h}{mc^2} \nu \nu' (1 - \cos\theta) \quad (2.2.86)
 \end{aligned}$$

e quindi, in funzione della lunghezza d'onda, finalmente otteniamo

$$\begin{aligned}
 \nu - \nu' &= \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h}{mc^2} \frac{c^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos\theta) = \\
 \Rightarrow \frac{c(\lambda' - \lambda)}{\lambda \lambda'} &= \frac{h}{m} \frac{1}{\lambda \lambda'} (1 - \cos\theta) \\
 \Rightarrow \Delta\lambda &\equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \equiv \lambda_c (1 - \cos\theta) \quad (2.2.87)
 \end{aligned}$$

dove $\lambda_c \equiv \frac{h}{mc}$ è detta appunto la *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone.

In generale, per ragioni che verranno più chiare nel seguito, a ogni particella carica di massa M si associa, oltre alla lunghezza d'onda Compton, anche la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton ridotta* nel modo seguente

$$\chi_c \equiv \frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{Mc} \quad (2.2.88)$$

Essa, per come è definita, rappresenta la scala naturale di lunghezza associata a una generica particella di massa M e, nel caso in cui, per esempio, questa sia il mediatore di una forza, χ_c ne individua il *range*.

Tornando infine al caso dell'elettrone, risulta

$$\chi_c \equiv \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{e^2}{mc^2} = \alpha^{-1} r_e = 3.861592642(28) \cdot 10^{-11} \text{ cm} \quad (2.2.89)$$

essendo, come ormai ben noto,

$$r_e = 2.817940285(31) \cdot 10^{-13} \text{ cm}; \quad \alpha^{-1} = 137.03599976(50) \quad (2.2.90)$$

rispettivamente il raggio classico dell'elettrone, $r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}$, ed $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$ la costante di struttura fina.

2.2. *L'ELETTRONE, IL PROTONE, IL NEUTRONE E IL FOTONE* 33

Occorrerà comunque arrivare alla quantizzazione formale del campo elettromagnetico per inquadrare in modo preciso questa particella nel contesto delle particelle elementari, come mediatore dell'interazione stessa, per cui è proprio attraverso lo scambio di fotoni che le cariche elettriche "sanno una dell'altra" e quindi si attraggono o si respingono a seconda dei loro segni rispettivi.

2.3 Il muone μ e il mesone π

La teoria di Rutherford di un nucleo atomico costituito da protoni e neutroni, suffragata dalla scoperta del neutrone di Chadwick, aveva comunque il problema di spiegare come protoni e neutroni potessero essere tenuti insieme nel nucleo atomico. Dopotutto i neutroni, essendo scarichi, perchè mai dovrebbero star confinati nel nucleo?

E i protoni poi, che per la loro carica elettrica si respingono fra loro, come possono essere costretti a stare nel nucleo?

Evidentemente deve esistere fra queste particelle una forza che li tiene insieme, che deve essere più forte di quella elettromagnetica (altrimenti la repulsione elettrostatica sfascerebbe il nucleo).

Ma come mai non ci accorgiamo della sua esistenza?

Dopotutto, nell'esperienza quotidiana, tolta la forza di gravità e quella elettromagnetica, non c'è esperienza di altro !

Questa forza, dunque, deve essere *di corto range*²⁶, ovvero deve agire solo sulla scala delle dimensioni nucleari e poi annullarsi molto più rapidamente di r^{-2} , come fanno invece sia la forza di Newton che quella di Coulomb.

La prima teoria²⁷ della *forza forte* fu pubblicata nel 1935 e si deve a Yukawa, per la quale ebbe il Nobel²⁸ nel 1949.



Figura 2.8: *Hideki Yukawa (1907-1981)*

²⁶Il *range* di una forza è il suo raggio d'azione.

²⁷H. Yukawa: *On the interaction of elementary particles*
Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17, 48 (1935)

²⁸H. Yukawa: *Nobel Lecture 1949*

Egli assunse che protoni e neutroni, alla stregua delle cariche elettriche (e delle masse), interagiscono attraverso un mediatore che, però, invece di avere massa nulla come il fotone (ed il gravitone), possiede una massa $m \neq 0$, caratteristica che conferisce un range finito all'interazione stessa.

In questo caso, il potenziale di interazione fra due particelle ferme (per un mediatore scalare) ha la forma seguente

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{mcr}{\hbar}} \quad (2.3.91)$$

dove A è una costante opportuna che caratterizza l'intensità della forza, mentre il suo range è dato, evidentemente, dalla lunghezza d'onda Compton ridotta associata al mediatore stesso $\lambda_c \equiv r_0 = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}$, per cui, essendo $\hbar c = 197.326960 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$, occorrono masse dell'ordine del centinaio di MeV affinché il range²⁹ della forza possa essere dell'ordine del fm ...

Yukawa calcolò questa massa intorno a 200 volte quella dell'elettrone, ovvero circa un nono di quella del protone e del neutrone.

Per questo motivo, essendo questa massa intermedia fra questi due estremi allora noti, l'ipotetica particella fu chiamata *mesone*³⁰.

²⁹Esiste un argomento intuitivo attraente ma sbagliato (cfr. D. Griffiths: *Introduction to elementary particles*, J. Wiley & Sons inc. 1987, pag.51) per arrivare alla stima del range in termini della massa del mediatore. L'argomento è il seguente.

Il protone e il neutrone, scambiandosi il mediatore di massa m , violano temporaneamente la conservazione dell'energia di $\Delta E = mc^2$. Il principio di indeterminazione permette la violazione purchè tutto rientri nell'ordine dopo un tempo Δt tale che $\Delta t \cdot \Delta E \approx \hbar$.

D'altronde il mediatore potrà viaggiare a velocità che sono, come ordine di grandezza, pari a c , quindi potrà percorrere solo tratti dell'ordine di $r \approx c\Delta t = c\hbar/mc^2 = \hbar/mc$: da qui, il valore del *range* !

L'argomento, pur conducendo al risultato giusto, se preso alla lettera è sostanzialmente sbagliato per vari motivi, non ultimo il fatto che il principio di indeterminazione non autorizza affatto la violazione della conservazione dell'energia che, insieme all'impulso spaziale è invece rigorosamente conservata nel processo di interazione. Nello stesso ambito di una teoria perturbativa (grafici di Feynman) di cui l'argomento sopra citato, per vari aspetti, è figlio, il quadrimpulso è conservato in ogni vertice e accade invece che il mediatore dell'interazione sia *virtuale*, ovvero *fuori* dall'iperboloide di massa, ovvero agisca appunto come propagatore dell'interazione !

L'argomento citato conduce al risultato giusto sostanzialmente per ragioni dimensionali, infatti, fissato il valore della massa m , la scala di lunghezze che questo valore di massa definisce attraverso le costanti fondamentali \hbar e c è proprio (e unicamente) appunto la lunghezza d'onda Compton ridotta $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ (vedi sopra).

³⁰Questo nome è dovuto a Werner Heisenberg: nello stesso spirito a quel tempo veniva usata la parola *leptone* (la parola deriva dal greco $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\nu$ e significa *piccolo, minuto, leggero*) per indicare l'elettrone e la parola *barione* (dal greco $\beta\alpha\rho\iota\acute{\nu}\varsigma$, che significa *grave, pesante*) per indicare sia il protone che il neutrone.

Oggi si preferisce piuttosto differenziare le particelle per il loro modo di interagire invece che per il valore della loro massa, per cui oggi chiamiamo *leptone* chi interagisce solo in modo elettrodebole (elettrone, muone, tau e corrispondenti neutrini), mentre vengono chiamati *adroni* (dal greco $\alpha\delta\rho\acute{o}\varsigma$ e significa *spesso, grosso*) tutte le particelle che subiscono anche l'interazione forte. Gli adroni possono quindi, a loro volta, essere dei *barioni* se, come il protone ed il neutrone, sono fermioni (in questo caso, come vedremo, sono fatti da

Può essere interessante, a questo punto, ripercorrere dall'inizio il ragionamento fatto da Yukawa e iniziamo, per questo, partendo da quanto sappiamo circa il campo elettromagnetico.

Così come ci è noto dalla fisica classica, nel sistema di unità di misura di Gauss, per i potenziali valgono le seguenti equazioni

$$\square V = 4\pi\rho \quad (2.3.92)$$

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2.3.93)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.3.94)$$

dove la terza equazione esprime la *gauge* di Lorentz e \square indica l'operatore di D'Alembert, definito nel modo consueto come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.3.95)$$

Come sappiamo, queste equazioni ci dicono, in buona sostanza, che

- il campo ha origine nelle cariche/correnti;
- il campo libero ha massa nulla, visto che soddisfa le equazioni

$$\square V = 0; \quad \square \vec{A} = 0$$

Limitandoci al caso dell'interazione statica fra cariche, sappiamo che essa risulta descritta attraverso il solo potenziale $V(r)$ il quale, nel caso indipendente dal tempo, data la (2.3.92), soddisfa evidentemente la ben nota equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho \quad (2.3.96)$$

la cui soluzione (a meno di soluzioni dell'equazione omogenea, cioè, in questo caso, a meno di costanti), come ben sappiamo, è espressa in termini della sorgente del campo, la densità ρ , dalla equazione

$$V(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.3.97)$$

essendo $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ la funzione di Green associata all'equazione di Laplace, cioè la funzione³¹ tale per cui

$$\nabla_x^2 \left[-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.3.104)$$

tre quarks), oppure essere dei *mesoni* se si tratta di bosoni (nel qual caso, come vedremo, sono fatti da coppie di quarks/antiquarks).

³¹Infatti, se consideriamo la funzione $g(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ e definiamo

$$\vec{f}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} g(r) = \vec{\nabla} \frac{-1}{4\pi r} = \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (2.3.98)$$

Da un punto di vista più fisico, si può vedere la funzione di Green come quella funzione che *propaga* nel punto \vec{x} il potenziale generato da una carica posta nel punto \vec{y} .

Fatta questa premessa, torniamo al caso della *forza forte* di Yukawa. Per evitare il range infinito che era escluso dall'osservazione sperimentale, egli pensò, come abbiamo già detto, di descrivere l'interazione fra nucleoni (protone e neutrone) attraverso un campo scalare di massa $m \neq 0$. Nel suo schema, protone e neutrone possedevano una carica simile a quella elettromagnetica, ed era appunto questa carica che costituiva la sorgente del campo mesonico, indicato qui e nel seguito con $\Phi(x)$. Yukawa usò l'analogia con il campo elettrostatico e riprese inoltre un'idea di

allora, data una superficie sferica qualsiasi Σ di raggio $R > 0$ e centrata nell'origine, risulta

$$\int_{\Sigma} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{\Sigma} = \int \frac{\vec{R}}{4\pi R^3} \cdot \frac{\vec{R}}{R} R^2 d\Omega = 1 \quad (2.3.99)$$

Dunque, per il teorema di Gauss, se indichiamo con V il volume racchiuso dalla superficie Σ , è

$$1 = \int_V d^3r \operatorname{div}(\vec{f}) \quad (2.3.100)$$

qualunque sia il raggio $R > 0$ della sfera. D'altronde

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \nabla^2 \frac{-1}{4\pi r} \quad (2.3.101)$$

e, ricordando che, per una qualsiasi funzione radiale $g(r)$ risulta

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right), \quad r > 0 \quad (2.3.102)$$

un calcolo diretto mostra che questa quantità risulta identicamente nulla quando $r \neq 0$. Ne segue allora che, per conciliare questo risultato con la (2.3.100), deve essere appunto

$$\nabla^2 \frac{-1}{4\pi r} \equiv \nabla^2 \frac{-1}{4\pi |\vec{x}|} = \delta^3(\vec{x}) \quad (2.3.103)$$

che, con la sostituzione $|\vec{x}| \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}|$, prova la (2.3.104).

Heisenberg, cioè quella dello *spin isotopico*^{32,33}, per cui definì il termine di sorgente del campo mesonico nel modo seguente:

$$\rho = g\bar{\mathcal{N}} \left(\frac{I_1 + iI_2}{2} \right) \mathcal{N} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^\dagger = g\bar{\mathcal{N}} \left(\frac{I_1 - iI_2}{2} \right) \mathcal{N} \quad (2.3.106)$$

³²Poco dopo la scoperta del neutrone a opera di Chadwick nel 1932, Heisenberg si rese conto che, a parte il fatto ovvio che il protone è carico mentre il neutrone non lo è, essi erano estremamente simili e in particolare avevano circa la stessa massa (oggi sappiamo che $m_p = 938.28 \text{ MeV}$; $m_n = 939.57 \text{ MeV}$).

Egli propose quindi di guardarli come due stati di una singola particella, il *nucleone* appunto: è la prima idea dello *spin isotopico* o *isospin*.

W. Heisenberg: *Über den bau der atomkern. I*, Zeit. für Physik 77, 1, 1932

In questo senso è però piuttosto un metodo per descrivere i due stati di carica del nucleone (nello stesso modo come vengono descritti i due stati di spin, per esempio, dell'elettrone) e quindi consentire di scrivere l'hamiltoniana di interazione fra nucleoni.

L'importanza del concetto di spin isotopico fu però afferrata solo successivamente quando, partendo dall'osservazione della cosiddetta *charge independence* delle forze nucleari, si giunse a postulare che esse fossero, appunto, invarianti per rotazioni nello spazio di spin isotopico. Quella dello spin isotopico era dunque una simmetria delle interazioni nucleari di tipo $SU(2)$ secondo la quale, appunto, gli autovettori della "terza componente" I_3 dello spin isotopico erano, rispettivamente, il protone ed il neutrone, per cui il generico stato di nucleone veniva individuato da un vettore a due componenti

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \alpha p + \beta n \quad (2.3.105)$$

In quanto simmetria, come abbiamo detto, essa si basava sul principio della *charge independence*, ovvero sul principio per cui la forza forte fra le coppie di nucleoni nn , np , pp dipendevano soltanto dal momento angolare totale e dalla parità dello stato, ma non dipendevano dallo stato di carica. Questa conclusione era stata ottenuta sia sulla base dei valori delle sezioni d'urto dei processi di scattering np e pp , come dai valori dei livelli energetici di certi nuclei leggeri *isobarici* come ^{12}B , ^{12}C , ^{12}N . Furono Cassen e Condon nel loro articolo

B. Cassen, E.U. Condon: *On nuclear forces*, Phys. Rev. 50, 846, 1936

i primi che mostrarono come il principio della *charge independence* poteva essere espresso elegantemente attraverso, appunto, la simmetria $SU(2)$ di isospin.

L'associazione di questa simmetria con i mesoni fu poi formalizzata da Kemmer nel suo articolo

N. Kemmer: *Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interactions*,

Proc. Roy. Soc. 166A, 127, 1938

e condusse appunto alla proposta circa l'esistenza di un mesone neutro, il π^0 , il quale, insieme al π^+ ed al π^- , doveva costituire il tripletto di isospin $I = 1$ delle particelle che, scambiate fra i nucleoni, erano poi alla base dell'interazione fra gli stessi.

³³Anche se dovrebbe essere del tutto evidente da quanto abbiamo già detto, vale forse la pena di osservare che la simmetria di isospin non ha nulla a che fare con lo spin propriamente detto, ovvero con le rotazioni ordinarie: si dà il caso soltanto che i due gruppi di simmetria siano isomorfi fra loro ... e questa è la ragione della prima parte del nome *spin isotopico*. Quanto poi all'aggettivo *isotopico*, anche esso è fuorviante poiché due isotopi di un dato elemento hanno diverso numero di nucleoni, mentre la simmetria di isospin preserva il loro numero. Meglio sarebbe fare come alcuni fisici nucleari fanno, cioè usare piuttosto la dizione *spin isobarico* che è senz'altro più appropriata ma, purtroppo, meno usata ...

dove g è una quantità reale che ha le stesse dimensioni della carica elettrica (pur essendo indipendente da essa), mentre

$$\mathcal{N} \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

descrive il campo del nucleone e $I_i \equiv \sigma_i$ sono (a meno di un fattore 2) gli operatori di spin isotopico.

A differenza però della corrente elettromagnetica

$$J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.3.107)$$

che è una corrente quadrivettoriale elettricamente neutra³⁴, il termine di sorgente di Yukawa (2.3.106) è evidentemente scalare³⁵ ma è elettricamente carico ($\rho \neq \rho^\dagger$), visto che gli operatori di spin isotopico che vi compaiono sono tali per cui³⁶

$$\frac{I_1 + iI_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{I_1 - iI_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.109)$$

e dunque né ρ né ρ^\dagger possono avere elementi di matrice fra stati pp o stati nn , ma solo fra stati pn o np , come segue dall'espressione esplicita già citata della "carica", per la quale risulta³⁷

$$\rho = g \bar{\psi}_p \psi_n; \quad \rho^\dagger = g \bar{\psi}_n \psi_p \quad (2.3.110)$$

³⁴L'affermazione che la corrente elettromagnetica J^μ è una corrente neutra è sinonimo del fatto che, come avremo modo di dimostrare, essa è autoaggiunta, ovvero che risulta tale per cui

$$J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (J^\mu)^\dagger$$

Dovendo l'hamiltoniana essere a sua volta autoaggiunta, ne segue che questa corrente potrà accoppiarsi (linearmente) solo con un campo che sia autoaggiunto e dunque elettricamente scarico, come, per esempio, quello elettromagnetico.

Ne segue che la conservazione della carica elettrica al vertice dell'interazione è assicurata dalla linea fermionica, descritta attraverso la corrente J^μ stessa.

³⁵In base alla definizione, avendo comunque assunto g reale, esplicitamente risulta infatti

$$\rho = g \bar{\psi}_p \psi_n; \quad \rho^\dagger = g \bar{\psi}_n \psi_p$$

e, come stabilisce la teoria dell'equazione di Dirac (vedi Vol. IV), la quantità $\bar{\psi}\psi$ è uno scalare sotto il gruppo di Lorentz.

³⁶Ricordiamo infatti che i tre operatori di isospin sono ancora le consuete matrici di Pauli, i.e.

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.108)$$

³⁷Il fatto che pp e nn potessero interagire solo al quarto ordine mentre pn ed np potessero farlo già al secondo, era una difficoltà della teoria perché conduceva a un rapporto fra le forze nei due casi che anch'esso andava come e^{-mr} , creando così un problema evidente quanto alla spiegazione della *charge - independence* che, però ... è dell'anno seguente, 1936.

Per conservare la carica elettrica e affinché il termine di interazione sia scalare sotto il gruppo di Lorentz (come si dimostra che deve comunque essere il qualunque *QFT* che sia coerente con la teoria della Relatività Ristretta), è necessario quindi che il campo mediatore, di cui ρ e ρ^\dagger sono sorgenti, sia carico (e dunque intrinsecamente complesso, cioè non autoaggiunto) ed esso stesso scalare. Inoltre, a questo campo veniva richiesto anche di essere massivo, in base alle considerazioni sul range svolte sopra.

Seguendo questo ragionamento, Yukawa scrisse dunque le equazioni per il campo mediatore nella forma³⁸ seguente

$$\left(\square + m^2\right) \Phi = 4\pi g \bar{\mathcal{N}} \left(\frac{I_1 + iI_2}{2}\right) \mathcal{N} \equiv 4\pi \rho \quad (2.3.111)$$

$$\left(\square + m^2\right) \Phi^\dagger = 4\pi g \bar{\mathcal{N}} \left(\frac{I_1 - iI_2}{2}\right) \mathcal{N} \equiv 4\pi \rho^\dagger \quad (2.3.112)$$

le quali, procedendo via il principio di minima azione, si ottengono a partire dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger - m^2 \Phi \Phi^\dagger + 4\pi(\Phi \rho^\dagger + \Phi^\dagger \rho) \quad (2.3.113)$$

Assumendo i nucleoni sostanzialmente fermi, data la loro massa comunque preponderante rispetto a quella del mediatore, Yukawa considerò l'approssimazione statica delle equazioni precedenti, ovvero l'equazione

$$\left(-\nabla^2 + m^2\right) \Phi = 4\pi \rho \Leftrightarrow \left(\nabla^2 - m^2\right) \Phi = -4\pi \rho \quad (2.3.114)$$

³⁸La teoria di Yukawa, quindi, prevedeva originariamente solo mediatori carichi, cioè quelli che noi oggi chiamiamo π^\pm , ma non il π^0 che fu previsto da Kemmer nel 1938 e fu scoperto al protosincrotrone di Berkeley solo nel 1950. In questa forma, la teoria non poteva essere in accordo con l'invarianza per trasformazioni di spin isotopico della forza forte perché le equazioni del campo (2.3.111) e (2.3.112) coinvolgono solo i due operatori vettoriali ($I=1$) I_\pm , ma non il terzo, cioè. $I_0 \equiv I_3$.

Affinché la teoria potesse essere invariante (scalare) anche per trasformazioni di spin isotopico occorre dunque che

- il campo mesonico avesse non due ma tre componenti indipendenti ($\Phi, \Phi_0, \Phi^\dagger$), le quali si trasformavano come un vettore per trasformazioni di isospin;
- l'interazione fosse descritta dal prodotto scalare delle tre componenti del campo di cui sopra, con le tre componenti (hermitiane coniugate) della densità di carica definita dagli operatori

$$I_+ \equiv \frac{I_1 + iI_2}{\sqrt{2}}, \quad I_0 \equiv I_3, \quad I_- \equiv \frac{I_1 - iI_2}{\sqrt{2}}$$

Perché ci potesse essere invarianza per trasformazioni di isospin, la (densità) hamiltoniana di interazione doveva avere quindi la struttura seguente

$$\mathcal{H}_I \equiv -\mathcal{L}_I = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\mathcal{N}} I_+ \mathcal{N}) \Phi^\dagger + (\bar{\mathcal{N}} I_0 \mathcal{N}) \Phi_0 + (\bar{\mathcal{N}} I_- \mathcal{N}) \Phi \right]$$

Poi, affinché \mathcal{H}_I potesse essere un operatore autoaggiunto, siccome I_0 è diagonale e quindi $(\bar{\mathcal{N}} I_0 \mathcal{N})$ è autoaggiunto, il campo Φ_0 doveva essere anch'esso, a sua volta, autoaggiunto, e quindi in grado di descrivere solo particelle neutre, il π^0 , appunto !

la cui soluzione può ancora essere ottenuta con il metodo della funzione di Green che, in questo caso³⁹, risulta però essere

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (2.3.129)$$

per cui, nel caso di una distribuzione di carica $\rho(\vec{y})$ il potenziale *nucleare* a cui essa dà luogo è evidentemente pari a

$$\Phi(\vec{x}) \equiv -4\pi \int d^3y G(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}) = \int d^3y \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rho(\vec{y}) \quad (2.3.130)$$

ovvero l'energia potenziale di interazione di $\rho(\vec{y})$ con la distribuzione di carica $\rho^\dagger(\vec{x})$ vale infine

$$\mathcal{E} = -4\pi \int d^3x d^3y \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rho(\vec{y}) \rho^\dagger(\vec{x}) \quad (2.3.131)$$

e quindi si annulla esponenzialmente con range $r_0 = \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}$ all'allontanarsi delle due distribuzioni una rispetto all'altra.

³⁹Iniziamo osservando che, per la (2.3.102), nel caso della (2.3.129), per $r > 0$ è

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\frac{-e^{-mr}}{r^2} - m \frac{e^{-mr}}{r} \right) \right] = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} [e^{-mr} (1 + mr)] = \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} [e^{-mr} (-m)(1 + mr) + e^{-mr} m] = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-mr} [-m^2 r] = \\ &= m^2 G \quad \Rightarrow \quad (\nabla^2 - m^2) G = 0 \quad \text{per } r > 0 \end{aligned} \quad (2.3.115)$$

Consideriamo ora il gradiente della funzione di Green (2.3.129): risulta evidentemente che

$$\vec{\nabla} G = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} e^{-mr} + \frac{1}{r} (-m) \frac{\vec{r}}{r} e^{-mr} \right) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} e^{-mr} (1 + mr) \quad (2.3.116)$$

per cui il suo flusso dalla superficie sferica Σ di raggio R , vale evidentemente

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} G \cdot d\vec{\Sigma} = e^{-mR} (1 + mR) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \nabla^2 G \quad (2.3.117)$$

dove la seconda eguaglianza è dovuta al teorema di Gauss. D'altronde si ha altresì

$$\begin{aligned} \int_V d^3r m^2 G &= 4\pi m^2 \int_0^R r^2 dr \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \right) = -m^2 \int_0^R r dr e^{-mr} = \\ &= -m^2 \int_0^R r dr \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-mr}}{-m} \right] = -m^2 \int_0^R \frac{d}{dr} \left[r \frac{e^{-mr}}{-m} \right] + m^2 \int_0^R \frac{e^{-mr}}{-m} dr = \\ &= -m^2 R \frac{e^{-mR}}{-m} - m \frac{e^{-mR} - 1}{-m} = e^{-mR} (1 + mR) - 1 \end{aligned} \quad (2.3.118)$$

per cui, dalla (2.3.117) e dalla (2.3.118), per qualunque raggio R della sfera di volume V , risulta

$$\int_V d^3r (\nabla^2 - m^2) G = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla^2 - m^2) G = \delta^3(\vec{x}) \quad (2.3.119)$$

A questo stesso risultato si poteva arrivare anche direttamente, facendo uso della trasformata di Fourier, ovvero passando attraverso la funzione di Green in rappresentazione dell'impulso.

Partiamo infatti dalla definizione

$$(\nabla^2 - m^2) G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \quad (2.3.120)$$

e assumiamo che

$$G(\vec{x}) = \int d^3 p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} g(\vec{p}) \quad (2.3.121)$$

Chiaramente, facendo uso della trasformata di Fourier della funzione *delta* di Dirac, l'equazione (2.3.120) implica che

$$\int d^3 p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} g(\vec{p})(-p^2 - m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (2.3.122)$$

e dunque che la trasformata di Fourier $g(\vec{p})$ della funzione di Green cercata, soddisfi l'equazione algebrica

$$g(\vec{p})(-p^2 - m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \Rightarrow g(\vec{p}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 + m^2)} \quad (2.3.123)$$

Sostituendo, si ha allora che

$$G(\vec{x}) = \int d^3 p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 + m^2)} = \int_0^\infty p^2 dp \int d\Omega \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{(p^2 + m^2)} \quad (2.3.124)$$

ovvero, integrando sulla coordinata azimutale, otteniamo

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{(p^2 + m^2)} = \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi d(-\cos\theta) \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{(p^2 + m^2)} = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{(p^2 + m^2)} \int_{-1}^1 d\xi e^{ipr \xi} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{(p^2 + m^2)} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = \\ &= -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p}{(p^2 + m^2)} (e^{ipr} - e^{-ipr}) \end{aligned} \quad (2.3.125)$$

D'altronde

$$\int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} e^{-ipr} = - \int_{-\infty}^0 dp \frac{p}{p^2 + m^2} e^{ipr} \quad (2.3.126)$$

e dunque dalla (2.3.125) si ricava che

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p}{(p^2 + m^2)} e^{ipr} = -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{ipr}}{(p + im)(p - im)} \quad (2.3.127)$$

L'integrale può essere valutato considerando il fatto che la funzione integranda è olomorfa nel piano complesso e ha due poli semplici in $p = \pm im$. Chiudendo allora il cammino di integrazione con una semicirconfenza di raggio $R \rightarrow \infty$ nel semipiano superiore, l'esponenziale garantisce che il contributo su questa semicirconfenza è nullo e la teoria delle funzioni olomorfe stabilisce che l'integrale sul cammino chiuso in questione, coincidente quindi con l'integrale cercato, è pari a $2\pi i$ il residuo all'unico polo $p = im$ racchiuso nel cammino stesso, cioè

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{ir(2\pi)^2} (2\pi i) \frac{im}{2im} e^{-mr} = -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr} \quad c.v.d. \quad (2.3.128)$$

Nel 1936 Anderson e Neddermeyer⁴⁰, con una camera a nebbia (di Wilson), insieme ma indipendentemente da Street e Stevenson, individuarono nei raggi cosmici una particella che ben si addiceva alla descrizione di Yukawa per quanto concerneva la massa. Oggi sappiamo che quella particella era, in realtà, il muone, che nulla ha a che fare con la particella di Yukawa⁴¹, se non, appunto, il valore molto simile della massa ($105MeV$)... . Occorse però del tempo, ben dieci anni, prima di rendersene conto e fu l'esperimento del 1946 di Conversi, Pancini e Piccioni che chiarì definitivamente

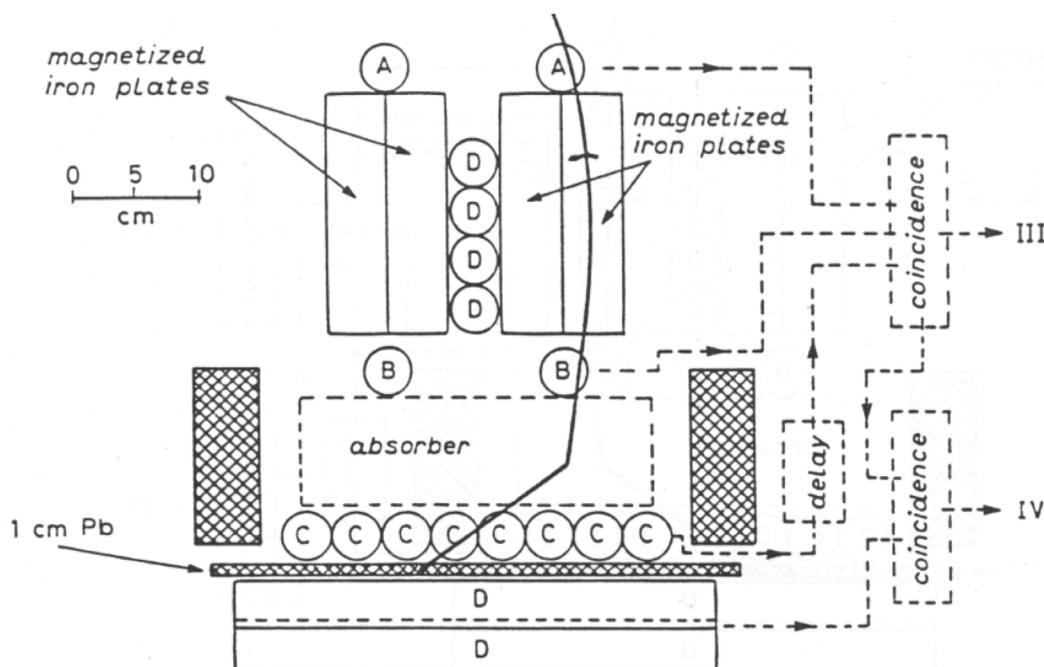


Figura 2.9: *Apparato sperimentale usato da Conversi, Pancini e Piccioni*

che la particella di Neddermeyer non poteva essere quella di Yukawa.

⁴⁰C.D. Anderson, S.H. Neddermeyer: *Cloud chamber observation of cosmic rays at 4300 meters elevation and near sea-level*, Phys. Rev. 50, 263 (1936)

C.D. Anderson, S.H. Neddermeyer: *Note on the nature of cosmic ray particles*, Phys. Rev. 51, 884 (1937)

⁴¹Nell'articolo del 1935 Yukawa cercò anche di fare un collegamento con la teoria del decadimento debole di Fermi, per cui provò a spiegare il decadimento β del neutrone come l'effetto dell'interazione del suo mediatore negativo con un neutrino di energia negativa con conseguente sua trasformazione in elettrone (per cui il processo, nel linguaggio di oggi, sarebbe quello secondo cui il neutrone emette un pione negativo virtuale che decade in elettrone e antineutrino).

Come sappiamo, il processo di emissione β non è mediato dal pione ma dal W , però l'idea di base c'era e andava nel verso giusto ...



L'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni

L'esperimento⁴² usava ferro magnetizzato (20cm, 15 Kgauss) per focalizzare nel materiale assorbente i mesoni di bassa energia aventi carica principalmente di un segno definito e rimuovendo quasi completamente quelli di carica opposta. Dalla differenza di conteggi fra le coincidenze ritardate III e IV ($\tau = 1 - 4.5\mu\text{sec}$) si determinava il numero di decadimenti con un elettrone (positivo o negativo).

Se l'assorbitore era grafite, si osservavano e^+ ed e^- quasi nella stessa percentuale, mentre gli e^- effettivamente sparivano se l'assorbitore era ferro. In questo modo veniva stabilito sperimentalmente che la probabilità di interazione nucleare dei mesoni negativi in carbonio risultava di molti ordini di grandezza inferiore a quella attesa per il mediatore della forza nucleare e calcolata, per esempio, da Tomonaga e Araki⁴³. Evidentemente le particelle in questione *non* erano la particella di Yukawa!



A sostegno dell'esistenza della particella di Yukawa c'era però il risultato ottenuto nel 1947 da Perkins⁴⁴ il quale aveva immortalato in emulsioni di piccola granularità (50 μm) esposte in alta atmosfera, usando per questo il mezzo aereo, un evento in cui una particella di carica negativa e massa intermedia fra quella dell'elettrone e quella del protone, si fermava in materia (emulsione), veniva catturata da un nucleo (verosimilmente O^{16} , N^{14} o C^{12}) che, quindi, si rompeva dando luogo a frammenti carichi, di cui due erano certamente protoni e uno, molto probabilmente, era un nucleo di He^3 .

La situazione, dunque, non era affatto chiara.

Fu sempre nel 1947 che il gruppo di Lattes, Occhialini, Powell e Muirhead, a Bristol, arrivò alla soluzione dell'enigma e scopri⁴⁵ appunto, sempre

⁴²M. Conversi, E. Pancini, O. Piccioni: *On the decay process of positive and negative mesons*,

Phys. Rev. 68, 232 (1945)

M. Conversi, E. Pancini, O. Piccioni: *On the disintegration of negative mesons*,

Phys. Rev. 71, 209 (1946)

⁴³S. Tomonaga, G. Araki: *Effect of the nuclear Coulomb field on the capture of slow mesons*,

Phys. Rev. 58, 90 (1940)

⁴⁴D.H. Perkins: *Nuclear disintegration by meson capture*, Nature 159, 126 (1947)

⁴⁵C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell: Nature 159, 694, (1947)

C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell: Nature 160, 453, (1947)

C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell: Nature 160, 486, (1947)

Sulla *Stampa* del 8/5/2002 Erasmo Recami scrive una curiosa nota di colore a proposito di Occhialini. Già negli articoli del 1933 sull'antielettrone, firmati con Blackett, Occhialini, che si chiamava Giuseppe ed era soprannominato Peppo, per non far brutta figura con la tradizione anglosassone dei doppi e tripli nomi, si firma G.P.S.: queste iniziali stanno per Giuseppe (il suo nome ...), Peppo (il suo soprannome...) e la S. sta addirittura per

in emulsione che nei raggi cosmici erano presenti, in realtà, due particelle di massa intermedia, e solo quella più pesante, battezzata *pione* π , aveva le caratteristiche richieste alla particella di Yukawa, mentre l'altra, il *muone* μ , era una sorta di elettrone più massivo, che non interagiva fortemente bensì solo elettromagneticamente (e debole) e quindi, secondo la nomenclatura attuale, un leptone (anche se talvolta si sente ancora usare il nome "mesone" per il muone, ma è scorretto!).

Così furono scoperti i mesoni carichi π^\pm .

Essi venivano prodotti, nell'alta atmosfera, da protoni di altissima energia (oggi sappiamo fino a 10^{19} eV e oltre), i quali, interagendo con i nuclei atomici, producono sciami di pioni carichi (esiste anche il pione neutro...) che, con vita media dell'ordine di 10^{-8} s decadono e producono un muone.

Questo, che non interagisce in modo forte e ha una vita media pari a $2.2 \mu\text{sec}$, è in grado facilmente⁴⁶ di raggiungere il suolo e persino penetrarlo⁴⁷.

Quanto al pione neutro, già previsto da Kemmer nel 1938 sulla base della simmetria $SU(2)$ di isospin, dobbiamo a Lewis⁴⁸ *et al.* la prima affermazione circa la sua esistenza, fatta allo scopo di spiegare sia la componente molle di radiazione gamma presente nei raggi cosmici, che lo sviluppo degli sciami elettromagnetici fin dall'inizio della cascata.

Occorrerà però aspettare il 1950 per avere la prima vera evidenza della sua esistenza, nell'esperimento⁴⁹ di Bjorklund fatto al protociclotrone da 340 MeV di Berkeley. In quell'esperimento fu osservata una produzione anomala di fotoni di alta energia (≈ 60 MeV), non spiegabile attraverso il meccanismo della bremsstrahlung, quando l'energia⁵⁰ dei protoni passava

"Schrödinger", che egli ammirava moltissimo! Recami inoltre racconta che, siccome Blackett, che era fellow della Royal Society, postponeva al proprio nome la sigla FRS, anche Occhialini, per non essere da meno, in una occasione postpose al proprio nome la sigla AUF, che sta per "Atleta dell'Università di Firenze"...

⁴⁶Questo accade grazie alla dilatazione relativistica del tempo proprio: si provi a fare il conto, assumendo un percorso, per esempio, di 5000 metri, ma senza l'effetto di dilatazione del tempo, per vedere a quali conclusioni si giunge ...

⁴⁷Per questo motivo, alcuni esperimenti richiedono di essere fatti in luoghi di *silenzio cosmico*, come i laboratori sotterranei tipo quello del Gran Sasso, dove il filtro di 2000 metri di roccia sovrastante attenua di circa un fattore 10^6 la componente muonica.

⁴⁸H.W. Lewis, J.R. Oppenheimer, S.A. Wouthuysen: *The multiple production of mesons*, Phys. Rev. 73, 127, 1948

⁴⁹R. Bjorklund, W.E. Crandall, B.J. Mayer, H.F. York: *High energy photons from proton-nucleon collisions*, Phys. Rev. 77, 213, 1950

⁵⁰La reazione che stavano studiando era

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$$

Valutiamone la soglia. Il quadripulso del sistema, dallo stato iniziale, è

$$(\gamma M, \gamma M \vec{\beta}) + (M, \vec{0})$$

a cui corrisponde una massa invariante quadra pari a

$$s = M^2 + M^2 + 2M^2\gamma$$

da 175 a 230 MeV.

L'esistenza del π^0 fu quindi definitivamente associata⁵¹, sempre a Berkeley, da Steinberger, Panofsky e Steller, bombardando il nucleo con gamma di energia fino a 330 MeV e analizzando in *coincidenza* i due gamma osservati, compatibili, data la loro correlazione angolare, con il decadimento di una particella neutra avente $\beta \approx 0.8$ e soglia di produzione⁵² intorno a 150 MeV. Essi osservarono altresì una sezione d'urto di produzione simile a quella re-

A soglia, detta m la massa del π^0 , deve essere

$$s = (M + M + m)^2$$

e dunque deve aversi

$$2M^2 + 2M^2\gamma = 4M^2 + 4Mm + m^2 \Rightarrow \gamma = 1 + 2\frac{m}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^2$$

Siccome $\frac{m}{M} \approx 0.144$, ne segue che l'energia del protone incidente corrispondente alla soglia della reazione di cui sopra corrisponde a un fattore γ per lo stesso protone pari a $\gamma \approx 1.30$.

Si osservi adesso che, in generale, nel caso del processo considerato (protone incidente su protone fermo), il sistema del CM si muove, rispetto al laboratorio, con una velocità pari a

$$\beta_{CM} = \frac{\gamma\beta M}{M(\gamma + 1)} = \frac{\gamma\beta}{\gamma + 1}$$

Ma essendo

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \Rightarrow \beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

risulta quindi che

$$\beta_{CM} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + 1} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \Rightarrow \gamma_{CM} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{CM}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}$$

e questo, in prossimità della soglia (cioè per $\gamma \approx 1.3$), stabilisce per il CM un gamma pari a $\gamma_{CM} \approx 1.07$. Questo implica che un pione prodotto attraverso la reazione di cui sopra quasi a soglia (cioè con velocità nel Laboratorio praticamente coincidente con quella del CM ...) sia ampiamente non relativistico e dunque l'energia dei due fotoni coincida in pratica con quella che avrebbero nel CM definito dal solo π^0 e quindi sia semplicemente pari a metà della sua stessa massa.

Ma riprendiamo ora il risultato per cui abbiamo visto che, affinché la reazione possa avvenire, il gamma del protone incidente deve soddisfare la condizione $\gamma \geq 1.3$.

Questo implica che la sua energia cinetica sia $T = M(\gamma - 1) = 281$ MeV.

Come poteva allora prodursi il π^0 già a 230 MeV ?

La risposta sta nel moto di Fermi dei nucleoni all'interno del nucleo, discusso qualche paragrafo più avanti in relazione alla scoperta dell'antiprotone.

⁵¹J. Steinberger, W.K.H. Panofsky, J. Steller: *Evidence for production of neutral mesons by photons*, Phys. Rev. 78, 802, 1950

⁵²Calcoliamo la soglia di fotoproduzione del π^0 su nucleone fermo.

La massa invariante quadra del sistema fotone-protone vale, evidentemente

$$s = M^2 + 2EM$$

dove M è la massa del nucleone e E l'energia del gamma nel riferimento del Laboratorio.

lativa ai pioni carichi, confermando così lo stretto legame che doveva esistere con questi.

Quanto infine alle masse ed alle vite medie, risulta⁵³

$$m_{\pi^\pm} = 139.57018 \pm 0.00035 \text{ MeV}; \quad \tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8} \text{ s} \quad (2.3.132)$$

$$m_{\pi^0} = 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}; \quad \tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17} \text{ s} \quad (2.3.133)$$

La misura più accurata⁵⁴ della massa del π^- si ottiene attraverso la determinazione dell'energia dei raggi X emessi in atomi esotici (mesici) in cui un elettrone sia stato sostituito dal π^- , essendo l'energia di Rydberg pari a $hc R_y = \frac{m c^2}{2} \alpha^2$, proporzionale alla massa ridotta del sistema e dunque, in pratica, a m_π .

Nel caso del π^+ questa strada, ovviamente, non è praticabile e il metodo⁵⁵ usato è quello della misura dell'impulso del muone dal decadimento del pione a riposo che si origina dalla reazione $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, assumendo di conoscere sia la massa del neutrino (nulla) che quella del muone.

In precedenza⁵⁶ sia la massa del π^- come la differenza di massa $\pi^- - \pi^0$ (e

A soglia, detta m la massa del π^0 , deve essere

$$s = (M + m)^2 \Rightarrow E = m \left(1 + \frac{m}{2M} \right) \approx 145 \text{ MeV}$$

Il mesone è prodotto in moto: il CM si muove rispetto al sistema del Laboratorio con una velocità pari a

$$\beta_{CM} = \frac{E}{E + M}$$

mentre la velocità β_0 della particella di massa m nel CM (univocamente definita in modulo) si calcola a partire dal modulo del suo impulso spaziale e dalla sua energia nel CM , che, come visto (cfr. Vol. II) trattando i processi quasi-elastici, valgono rispettivamente

$$p = \frac{\sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2 M^2}}{2\sqrt{s}}, \quad \mathcal{E} = \frac{s - M^2 + m^2}{2\sqrt{s}}$$

per cui abbiamo

$$\beta_0 = \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2 M^2}}{s - M^2 + m^2}$$

Nel caso presente, ricordando la legge di composizione delle velocità in Relatività Ristretta

$$\vec{v}' = \frac{1}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{v})} (\vec{v}_\perp + \gamma(\vec{v}_\parallel + \vec{\beta}))$$

assumendo $E = 330 \text{ MeV}$, $M = 940 \text{ MeV}$, $m = 135 \text{ MeV}$, risulta

$$\beta_{CM} \approx 0.26; \quad \beta_0 = 0.85 \Rightarrow \beta_{Lab} \leq \frac{\beta_{CM} + \beta_0}{1 + \beta_0 \cdot \beta_{CM}} \approx 0.91$$

⁵³Particle Data Group (PDG): Journal of Physics G33, 1 (2006)

⁵⁴B. Jeckelmann et al.: *The mass of the negative pion.* Phys. Lett. 335B, 326 (1994)

⁵⁵K. Assamagan et al.: *Measurement of the muon momentum in pion decay at rest, using a surface muon beam* Phys. Lett. 335B, 326 (1994)

⁵⁶J.B. Czirr: *determination of π -meson masses by neutron time of flight*

quindi la massa del π^0) erano state determinate a partire dalle reazioni

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \quad e \quad \pi^- + p \rightarrow \gamma + n \quad (2.3.134)$$

realizzate fermando pioni negativi in idrogeno e misurando quindi, con il metodo del tempo di volo, la velocità del neutrone nei due casi.

Venendo infine al muone, esso era, al tempo in cui fu scoperto, del tutto inatteso. Mentre il pione serviva per spiegare l'interazione forte, il muone non aveva alcun ruolo nel panorama delle particelle elementari e delle loro interazioni noto a quell'epoca.

Famosa, a questo proposito, è la domanda posta da I.I Rabi quando seppe della scoperta del muone: *Who ordered that ?*

Oggi sappiamo che esso è una specie di partner più massivo dell'elettrone ($m_\mu = 105.658389 \pm 0.000034 \text{ MeV}$), sappiamo che è instabile ($\tau = 2.19703 \pm 0.00004 \mu s$) e che, nel Modello Standard, esso è un membro della seconda famiglia⁵⁷ delle particelle elementari ... ma su questo avremo da ritornare.

Phys. Lett. 130, 341 (1963)

⁵⁷La prima famiglia è fatta dai costituenti della materia ordinaria, cioè i quarks *up* e *down*, l'elettrone e il suo neutrino; la seconda famiglia è fatta dai quarks *charm* e *strange*, dal muone (leptone μ) e dal suo neutrino; infine, la terza famiglia (al momento non ne sono note altre ...), a sua volta, è ancora una specie di copia ancora più massiva delle precedenti ed è fatta dai quarks *top* e *bottom* (detto anche *beauty*), dal tauone (leptone τ) e dal suo neutrino.

2.4 I raggi cosmici

Abbiamo avuto modo di vedere in precedenza che sia la scoperta del pione come quella del muone sono state possibili grazie alla presenza ubiqua dei *raggi cosmici*. Ma di che si tratta ?

La loro scoperta è in qualche modo figlia della radioattività.

Era ben noto che la radiazione emanata da sorgenti radioattive ionizzava l'aria e quindi la rendeva debolmente conduttrice, permettendo così, per esempio, a un elettroscopio di scaricarsi.

Però, quello che si osservava era che, comunque si schermasse l'elettroscopio, questo continuava a scaricarsi come se fossero in ogni caso presenti dei raggi ignoti, estremamente penetranti, capaci comunque di ionizzare l'aria.

Qual era la loro origine? Venivano dal terreno ?

Nel 1910, il gesuita padre Theodor Wulf salì sulla torre Eiffel, fino a 275 m di altezza, e osservò che l'elettroscopio, lassù, continuava allegramente a scaricarsi, nonostante che l'aria avrebbe dovuto avere ormai assorbito⁵⁸ gran parte se non tutta la radiazione proveniente dal terreno. Egli pensò dunque che l'origine di questa radiazione potesse essere di natura extraterrestre e propose di usare palloni aerostatici per verificarlo.

Le prime osservazioni con palloni furono fatte da Victor Hess (premio Nobel⁵⁹ nel 1936 per questa scoperta), il quale, negli anni 1911-12 fece una decina di ascensioni in pallone, fino a oltre 5000 metri. Egli constatò così che questa radiazione ignota, invece di scomparire, dopo essersi stabilizzata intorno ai 700 m, addirittura prendeva a crescere rapidamente sopra i 1000 metri, diventando, verso i 5000 metri, da tre a cinque volte maggiore di quanto non fosse al livello del mare.

La conclusione fu dunque che effettivamente, alla base, ci doveva essere una potente sorgente di radiazione extraterrestre⁶⁰.

Millikan, intanto, che non credeva ai risultati di Hess, trasformò l'elettroscopio in un elettrometro, in modo che la sua lettura potesse essere fatta su film fotografico e questo gli permise di fare esperimenti in pallone senza uomini a bordo, salendo fino ad altezze altrimenti impossibili. Queste campagne di misura lo convinsero finalmente che Hess aveva ragione, fino al punto che si

⁵⁸Egli misurò solo una riduzione del 64% rispetto al suolo, quando, anche nel caso della radiazione più penetrante nota a quel tempo, la radiazione gamma dal Radium, essa avrebbe dovuto ridursi di oltre un fattore 3 (la lunghezza di attenuazione in aria per questi gamma è infatti di circa 200 m).

⁵⁹V.F. Hess: *Nobel Lecture 1936*

⁶⁰Completamente dimenticato, purtroppo, è il contributo alla soluzione del problema portato da Domenico Pacini il quale, effettuando misure sia sul mare che sotto il mare come pure nel lago di Bracciano, osservò che la scarica dell'elettroscopio rallentava all'aumentare della profondità di immersione, concludendo correttamente che questa ipotetica radiazione doveva venire dall'alto e non dal terreno.



Figura 2.10: *Robert Millikan (1868-1953)*

convinse⁶¹ di essere stato lui stesso a fare la scoperta dei *raggi cosmici*, come lui stesso, nel frattempo (1926), li aveva battezzati ...!

Millikan, visto che questi raggi dovevano essere estremamente penetranti, pensava che essi fossero dei raggi gamma di altissima energia i quali si originavano nello spazio dalla sintesi di nuclei di elementi pesanti a partire da quelli di elementi più leggeri.

Un passo avanti nella comprensione dei raggi cosmici fu fatto nel 1928 da Geiger e Müller, con il loro contatore, il quale, essendo sensibile al singolo evento, permise, attraverso l'uso di due di questi rivelatori disposti a formare un *telescopio*, di iniziare a studiare la direzione di provenienza di questa radiazione. L'idea era che il gamma cosmico urtasse un elettrone e gli conferisse un impulso (effetto Compton) la cui direzione media rifletteva, evidentemente, quella del fotone incidente. Era poi l'elettrone scatterato che ionizzava il mezzo e determinava quindi la scarica dell'elettroscopio oppure faceva scattare il contatore Geiger.

Con un telescopio completamente schermato dall'esterno con quasi 10 *cm* fra piombo e ferro, costituito da due rivelatori Geiger fra i quali erano interposti 4 *cm* d'oro, nel 1929 Walther Bothe e Werner Kolhörster dimostrarono⁶² che

⁶¹Millikan aveva fama di fisico "rapace": a Caltech, dove lavorava, c'era il detto secondo cui "Jesus saves and Millikan takes the credit" ...

⁶²W. Bothe, W. Kolhörster: *Das Wesen der Höhenstrahlung/Nature of high altitude Radiation*, Z. Physik 56, 751 (1929)

L'idea ingegnosa fu quella di collegare l'anodo di ciascun geiger a un elettrometro: al passaggio del cosmico, la scarica della valanga degli elettroni prodotta caricava l'elettrometro e faceva divaricare le foglie d'oro. Nel caso dell'esperimento in coincidenza, essi osservarono appunto che, quasi sempre, i due elettrometri rispondevano insieme, come se un cosmico avesse attraversato entrambi i geiger, simultaneamente.

i cosmici dovevano essere carichi loro stessi, infatti nessun elettrone, sbalzato via dall'atomo nel modo anzidetto, avrebbe mai potuto attraversare il blocco d'oro e far scattare entrambi i Geiger, come invece essi osservavano che accadeva molto spesso.

Questo risultato, fra l'altro, ispirò Bruno Rossi, allora ad Arcetri, a svi-

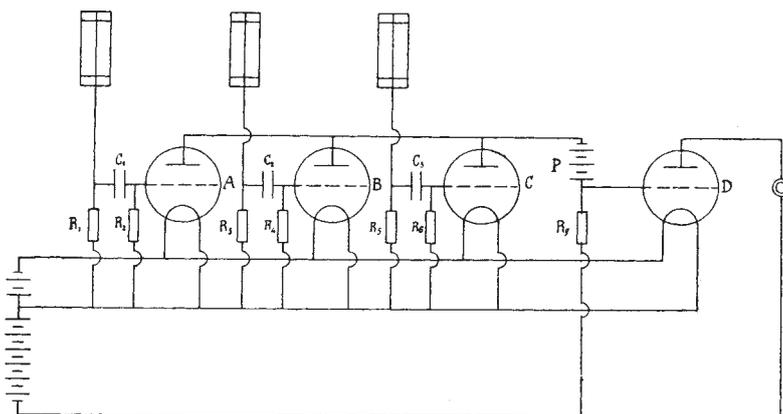


Figura 2.11: *Coincidenza alla Rossi fra tre contatori Geiger-Muller, realizzata con triodi*

luppare la coincidenza elettronica⁶³ a triodi con la quale dimostrò (usando tre contatori non allineati) che chi faceva scattare la coincidenza non poteva neppure essere una singola particella, bensì doveva trattarsi di molte, cioè di uno *sciame*.

Intanto Millikan⁶⁴ che ancora riteneva, all'inizio degli anni '30, che i cosmici fossero gamma di alta energia che si manifestavano espellendo elettroni dagli atomi, chiese a un suo studente, Carl Anderson, di costruire una camera a nebbia⁶⁵ da porre in un potente elettromagnete, per studiare l'impulso e quindi l'energia degli elettroni così espulsi, con il risultato di rivelare per la prima volta nella storia della Fisica l'esistenza di una antiparticella, l'antielettrone o positrone (1932), appunto !

Ma su questa scoperta ci torneremo fra breve.

⁶³B.Rossi: *Method of registering multiple simultaneous impulses of several Geiger counters* Nature 125, 636 (1930)

⁶⁴Bruno Rossi racconta che, in occasione del Congresso della Reale Accademia Italiana dei Lincei svoltosi nel 1931 a Roma, Fermi gli chiese di tenere un seminario avente i raggi cosmici come soggetto. Rossi, presente Millikan, mostrò come, in base ai più recenti risultati e basandosi su semplici considerazioni di natura energetica, la teoria di Millikan non poteva stare in piedi.

Millikan si offese così tanto che, con le parole di Rossi, "*from that moment on, he refused to recognize my existence*" ... (George W. Clark: *The scientific Legacy of B.Rossi*, Padova 16-16 settembre 2005).

⁶⁵La camera a nebbia era stata inventata da Wilson nel 1930.

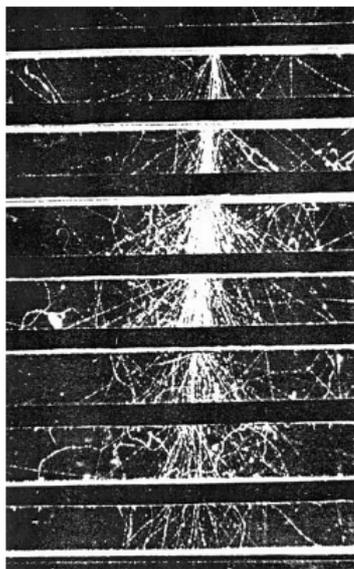


Figura 2.12: *Esempio di sciame elettromagnetico come osservato in emulsione*

I raggi cosmici primari⁶⁶ costituirono, agli inizi della fisica nucleare e subnucleare, la sola sorgente di particelle⁶⁷ di alta energia che poi, con il progredire della tecnica, per certi aspetti fu sostituita, anche se non completamente, con gli acceleratori. Come in parte abbiamo già visto e come vedremo comunque anche più oltre, è comunque alla radiazione cosmica secondaria che si devono le scoperte del positrone, del muone, del pione, e delle prime particelle *strane*, di cui avremo modo di parlare fra breve.

Tutt'oggi, nonostante l'avvento degli acceleratori di particelle, i raggi cosmici costituiscono un importante argomento di studio sia a terra che in orbita !

Uno dei motivi è certamente quello per cui, nonostante i progressi tecnologici raggiunti nella costruzione degli acceleratori, è sempre nei raggi cosmici primari che si trovano le particelle più energetiche !

Come mostrato nella fig.2.13, ci sono esperimenti che affermano di aver osservato, anche se in numero estremamente ridotto, particelle aventi energie fino a $10^{20} \text{ eV} \equiv 16J$!

⁶⁶Ciò che si osserva a terra e che furono visti da Hess, Millikan etc ... è, in realtà, radiazione cosmica secondaria, originatasi dall'interazione dei raggi cosmici primari con i nuclei degli atomi nell'alta atmosfera.

⁶⁷La loro composizione dipende dall'energia: nella zona bassa dello spettro domina il vento solare, mentre per esempio oltre il GeV , i raggi cosmici sono costituiti per oltre il 90% da protoni, per circa il 5% da particelle α e cioè da nuclei di elio, e, per il resto, da nuclei di elementi leggeri, fotoni, elettroni e tracce di antimateria (positroni e antiprotoni).

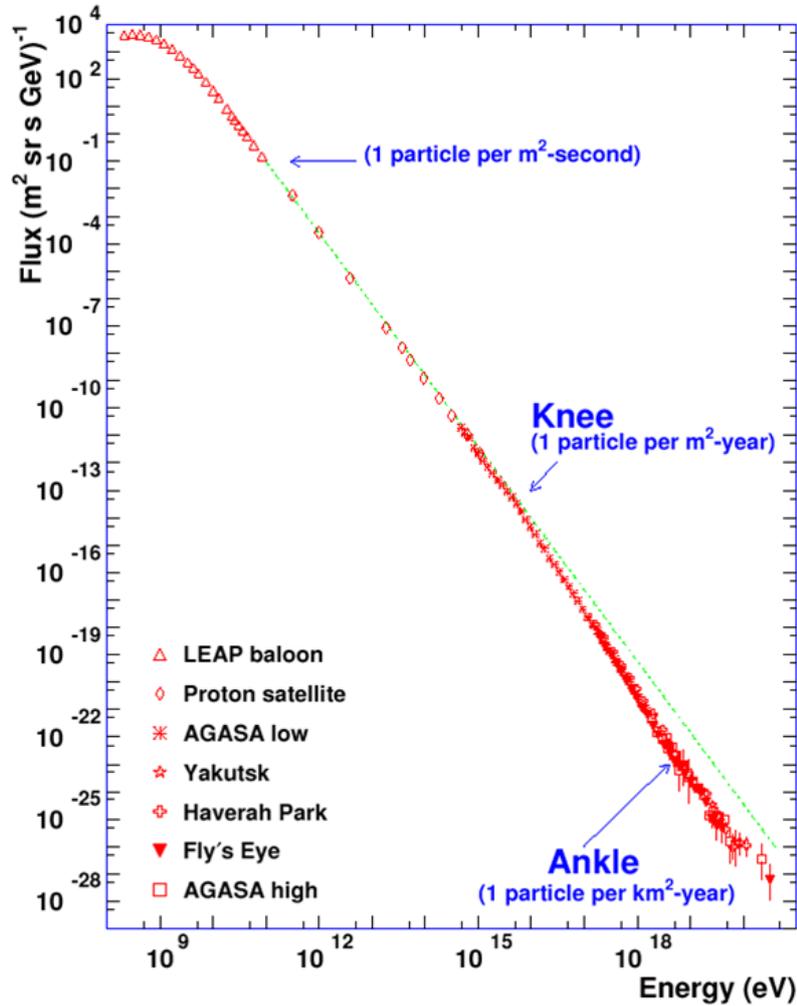


Figura 2.13: *Distribuzione in energia dei raggi cosmici*

Per una particella elementare, questa è una energia mostruosa: si tratta infatti dell'energia cinetica di una pallina da tennis ($m \approx 40 \text{ g}$) lanciata a 100 Km/h !

L'esistenza di protoni di così alta energia, tra l'altro, pone anche un problema interessante perché è stato dimostrato che, almeno nel caso di protoni extragalattici, dovrebbe esistere un cut-off sull'energia intorno a $5 \times 10^{19} \text{ eV}$ a causa dello scattering con la radiazione di fondo e la conseguente fotoproduzione di pioni: è il cosiddetto cut-off GZK⁶⁸.

⁶⁸K. Greisen: *End to the cosmic ray spectrum ?* Phys. Rev. Lett. 16, 748 (1966)
G.T. Zatsepin, V.A. Kuzmin: Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 4, 114 (1966)

Si consideri, infatti, un protone ultrarelativistico di energia E che interagisce con un fotone del fondo cosmico a 3^0K . L'energia media⁶⁹ di questo fotone è di circa $0.7 meV$. Assumendo che il fotone si muova nella direzione opposta a quella del protone, identificata come la direzione dell'asse z , abbiamo che il quadrimpulso totale del sistema vale

$$(E, 0, 0, P) + (p, 0, 0, -p) = (E + p, P - p) \quad (2.4.144)$$

⁶⁹Come è noto, la densità spettrale di energia elettromagnetica di corpo nero è data da

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)} \quad (2.4.135)$$

da cui segue che, integrando in $d\omega$, la densità di energia è pari a

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\left(e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \\ &= \frac{kT}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{kT}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2}{15} kT \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \end{aligned} \quad (2.4.136)$$

la quale, alla temperatura di 3^0K , essendo

$$k = 1.38 \times 10^{-23} J/0K = 8.62 \times 10^{-5} eV/0K \Rightarrow kT = 25.86 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (2.4.137)$$

$$\hbar c = 197 MeV \cdot fm = 1.97 \times 10^{-5} eV \cdot cm \Rightarrow \frac{kT}{\hbar c} = 13.13 cm^{-1} \quad (2.4.138)$$

vale quindi

$$\rho = \frac{\pi^2}{15} (25.86 \times 10^{-5})(13.13)^3 = 0.38 eV/cm^3 \quad (2.4.139)$$

Quanto al numero di fotoni per unità di volume, esso è pari a

$$\begin{aligned} n &= \int_0^\infty \frac{\rho(\omega)}{\hbar \omega} d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot 2 \zeta(3) \end{aligned} \quad (2.4.140)$$

dove $\zeta(s)$ è la funzione ζ di (Eulero)-Riemann, definita per $\Re(s) > 1$ da

$$\zeta(s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \equiv \prod_p \frac{p^s}{p^s - 1} \quad (2.4.141)$$

dove il prodotto, come dimostrato appunto da Eulero, è fatto su tutti i numeri primi ... Essendo $\zeta(3) \approx 1.20206$, abbiamo allora che

$$n = \frac{2 \cdot 1.20206}{\pi^2} (13.13)^3 \approx 551 cm^{-3} \quad (2.4.142)$$

per cui l'energia media per fotone cosmico è appunto pari a

$$\langle p \rangle = \frac{\rho}{n} = \frac{380}{551} \approx 0.690 meV \quad (2.4.143)$$

dove il primo addendo è il quadrimpulso del protone e il secondo quello del fotone di energia p , appartenente alla radiazione cosmica di fondo.

La massa invariante del sistema $p + \gamma$ è dunque pari a

$$s = M^2 + 0 + 2p(E + P) \approx M^2 + 4pE \quad (2.4.145)$$

dove abbiamo usato il fatto che il protone è ultrarelativistico, per cui $P \approx E$. Valutiamo adesso per quale valore di E si raggiunge la soglia di fotoproduzione del π^0 , cioè per quale energia si attiva la reazione⁷⁰

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0 \quad (2.4.146)$$

A soglia, deve essere evidentemente che

$$\begin{aligned} s &= M^2 + 4pE = (M + m)^2 \Rightarrow 2Mm + m^2 = 4kE \\ \Rightarrow E &= \frac{2Mm + m^2}{4p} \end{aligned} \quad (2.4.147)$$

dove abbiamo indicato con m la massa del π^0 .

Prendendo allora un fotone che abbia l'energia media corrispondente alla temperatura $T = 3^0K$, cioè circa 0.7 meV , abbiamo

$$E_{th} = \frac{2Mm + m^2}{4p} = \frac{2 \cdot 938 \cdot 135 + 135^2}{4 \cdot 0.7 \cdot 10^{-9}} \approx 1.0 \cdot 10^{14} \text{ MeV} \equiv 1.0 \cdot 10^{20} \text{ eV} \quad (2.4.148)$$

e, naturalmente, i fotoni nella parte alta dello spettro richiedono poi energie di soglia più basse ...

Venendo adesso alla sezione d'urto del processo di fotoproduzione, essa, mediata sullo spettro utile della distribuzione di Planck, è calcolata essere pari a circa $200 \mu\text{barn}$, mentre la densità di fotoni, (cfr.(2.4.142)), è pari, circa, a $n = 550 \text{ cm}^{-3}$, per cui il libero cammino medio⁷¹ del protone, fra

⁷⁰E' questa la stessa reazione che a Panofski e Steinberger consentì, a Berkeley nel 1950, di scoprire il π^0 . In quel caso, l'energia la portava il fotone, mentre il protone era a riposo.

⁷¹Nella teoria dell'urto si dimostra che, per una particella di impulso definito \vec{k} , descritta quindi da un'onda piana, l'effetto *in avanti* dello scattering multiplo da centri d'urto distribuiti casualmente e caratterizzati secondo una densità ρ , può essere descritto attraverso un *indice di rifrazione del mezzo* n tale che

$$k^2 + 4\pi\rho F(k) \equiv n^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad (n^2 - 1) = \frac{4\pi\rho F(k)}{k^2} \quad (2.4.149)$$

dove $F(k)$ è l'ampiezza di scattering in avanti del singolo processo d'urto.

E' immediato allora che la soluzione corrispondente alla soluzione imperturbata

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

risulta essere, quindi, la seguente

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.150)$$

uno scattering e l'altro nel vuoto a $T = 3^0K$, vale

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{550 \times 200 \cdot 10^{-30}} \approx 9. \times 10^{24} \text{ cm} \approx 3 \text{ Mpc} \quad (2.4.156)$$

Siccome la scala delle distanze intergalattiche è dell'ordine delle decine o centinaia di Mpc ⁷², protoni che arrivano da sorgenti così lontane dovrebbero aver perso parte della loro energia⁷³, fino ad andare, magari, sotto soglia di e se $n^2 - 1 \ll 1$, ne segue in particolare che

$$n^2 - 1 \approx 2(n - 1) = \frac{4\pi\rho F}{k^2} \quad \Rightarrow \quad n \approx 1 + 2\pi\rho \frac{F}{k^2} \quad (2.4.151)$$

D'altronde il teorema ottico lega direttamente la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti con la sezione d'urto totale ($\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im m(F(k))$) del processo d'urto, quindi la relazione precedente implica che anche n abbia *necessariamente* una parte immaginaria, legata alla sezione d'urto totale, che vale

$$\mathcal{I}m(n) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \mathcal{I}m(F) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \frac{k\sigma}{4\pi} = \frac{\rho\sigma}{2k} \quad (2.4.152)$$

ovvero, separando la parte reale e quella immaginaria dell'indice di rifrazione n , abbiamo

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathcal{R}e(n)\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\mathcal{I}m(n)\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.153)$$

la quale mostra come l'ampiezza dell'onda piana, detto $\vec{u} \equiv \frac{\vec{k}}{k}$ il suo versore di propagazione, a causa degli scattering multipli, si attenui mentre si propaga nel mezzo, secondo il fattore

$$e^{-\frac{\rho\sigma}{2}\vec{u}\cdot\vec{r}} \quad (2.4.154)$$

ovvero che l'intensità (modulo quadro dell'ampiezza ... !) decresca con una lunghezza di attenuazione λ pari a

$$\lambda = \frac{1}{\rho\sigma} \quad (2.4.155)$$

Queste conclusioni, per come sono state tratte, sono valide almeno fino a che la lunghezza di attenuazione λ definita dalla (2.4.155) rimane molto grande rispetto alla lunghezza d'onda di De Broglie dello stato imperturbato, cioè finché $\lambda \gg \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{\rho\sigma}{k} \ll 1$ ovvero fintantoché il processo di attenuazione avviene in modo adiabatico.

⁷²Ricordiamo che il *parsec* è definito come quella distanza da cui il raggio medio Terra-Sole ($AU = \text{Astronomic Unit}$) viene visto sotto un angolo di un secondo d'arco. Siccome l' AU corrisponde a $499.0048 \text{ s} - \text{luce}$ (poco più di 8 minuti-luce) ovvero a circa $1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$, essendo la tangente trigonometrica di un angolo di un secondo d'arco pari a $2\pi/(360 \cdot 60 \cdot 60) = 4.848 \times 10^{-6}$, abbiamo infine

$$1pc = \frac{1.496 \times 10^{13}}{4.848 \times 10^{-6}} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm} \approx 3.262 \text{ ly}$$

⁷³Si osservi che, a soglia, il protone e il π^0 si muovono entrambi con la velocità del CM , ovvero, nel sistema del Laboratorio, con un gamma pari a

$$\gamma_{out} = \frac{E+k}{\sqrt{s}} \approx \frac{E}{M+m}$$

dove abbiamo trascurato l'energia media del fotone $k \approx 0.7 \text{ meV}$ rispetto a quella del

protone $E \approx 10^{20} \text{ eV}$ e si è indicato con M ed m la massa del protone e del π^0 , rispettivamente.

Prima dell'interazione, il gamma del protone valeva, evidentemente

$$\gamma_{in} = \frac{E}{M}$$

e dunque, nel processo il protone perde una frazione f della sua energia che, a soglia, è pari a

$$f = 1 - \frac{\gamma_{out}}{\gamma_{in}} = \frac{m}{M+m} = 12.6\% \quad (2.4.157)$$

Sopra soglia, abbiamo comunque che

$$f = 1 - \frac{\gamma_{out}}{\gamma_{in}} \quad (2.4.158)$$

ma, quanto a γ_{out} , esso non è più univoco, risultando dalla composizione del moto del CM con quello del protone nel CM .

Dalla teoria dell'urto quasi-elastico sappiamo che l'energia del protone nel CM vale

$$\hat{E} = \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s}} \equiv \hat{\gamma} M \quad (2.4.159)$$

mentre il modulo del suo impulso vale

$$b = \frac{\sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}} = \sqrt{\hat{E}^2 - M^2} \quad (2.4.160)$$

per cui l'energia del protone nel Laboratorio, detto Θ l'angolo fra la velocità del protone nel CM e la velocità del CM nel sistema del Laboratorio, vale

$$E' = \gamma_{CM} \hat{E} + \beta_{CM} \gamma_{CM} b \cos\Theta \quad (2.4.161)$$

e dunque, nel Laboratorio, il valore minimo del gamma del protone presente nello stato finale, da inserire nella (2.4.158) per ottenere l'espressione della massima perdita di energia del protone incidente, vale

$$\begin{aligned} \gamma_{out} &= \frac{E'}{M} = \frac{\gamma_{CM}}{M} (\hat{E} - \beta_{CM} b) \approx \gamma_{CM} \frac{\hat{E} - b}{M} = \\ &= \gamma_{CM} \frac{\hat{E} - \sqrt{\hat{E}^2 - M^2}}{M} = \gamma_{CM} \left(\hat{\gamma} - \sqrt{\hat{\gamma}^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (2.4.162)$$

Questo per quanto riguarda la perdita di energia massima.

Volendo invece valutare la perdita media, per un processo di scattering isotropo o comunque pari in $\cos\Theta$, dalla (2.4.161) si ricava evidentemente che

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{out} \rangle &= \gamma_{CM} \cdot \hat{\gamma} \Rightarrow \langle f \rangle = 1 - \frac{\gamma_{CM} \cdot \hat{\gamma}}{\gamma_{in}} = 1 - \frac{E+k}{\sqrt{s}} \cdot \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s}M} \cdot \frac{M}{E} \\ &\Rightarrow \langle f \rangle \approx 1 - \frac{s + M^2 - m^2}{2s} = \frac{s + m^2 - M^2}{2s} \end{aligned} \quad (2.4.163)$$

il quale, mentre a soglia (cioè quando $s = (m+M)^2$) riproduce naturalmente la (2.4.157), nel limite in cui $s \gg M^2$, essa tende a $1/2$.

Si osservi infine che il risultato ottenuto può essere anche riscritto come

$$\langle f \rangle = \frac{s + m^2 - M^2}{2s} = \frac{\hat{E}_{\pi^0}}{\sqrt{s}} \quad (2.4.164)$$

dove \hat{E}_{π^0} è l'energia del π^0 nel CM . Ne segue dunque che, quanto a $\langle f \rangle$, essa coincide semplicemente con la frazione di massa invariante del sistema associata al π^0 .

fotoproduzione.

Calcoli più dettagliati mostrano che, per questa ragione, il flusso dei raggi cosmici costituito da protoni⁷⁴ dovrebbe quindi avere un taglio (o comunque un evidente cambiamento di pendenza in funzione dell'energia) a partire, appunto, da circa $5 \times 10^{19} eV$, taglio che è detto appunto *cut-off GZK*.

Questa conclusione è basata sulla assunzione secondo cui la componente dei raggi cosmici di energia superiore ai $10^{18} eV$ non dovrebbe essere di origine galattica in quanto l'unico meccanismo di accelerazione che conosciamo in ambito galattico, cioè il meccanismo proposto da Fermi e legato all'esplosione delle supernovae e a successive accelerazioni delle particelle costituenti

⁷⁴Può essere interessante paragonare il risultato ottenuto circa il cut-off *GZK* sui protoni, con il cut-off che la radiazione di fondo determina per gli stessi fotoni di altissima energia.

Il processo alla base del fenomeno è adesso la produzione di coppie, cioè

$$\gamma + \gamma_{th} \rightarrow e^+ e^- \quad (2.4.165)$$

il quale ha come soglia

$$s = (2m_e)^2 = 4Ep \quad (2.4.166)$$

dove E è l'energia del gamma cosmico γ mentre p è quella del fotone termico γ_{th} (per concretezza si è assunto che viaggino uno contro l'altro ...). Abbiamo dunque

$$E_{thr} = \frac{m_e^2}{p} = \frac{(0.511)^2}{0.7 \times 10^{-9}} = 0.37 \times 10^9 MeV = 0.37 \times 10^{15} eV \quad (2.4.167)$$

quindi ben cinque ordini di grandezza inferiore rispetto alla soglia trovata per i protoni. Quanto poi al libero cammino dei fotoni di alta energia, occorre conoscere la loro sezione d'urto. Come dimostrato originariamente da G. Breit, J.A. Wheeler in *Collision of two light quanta*, Phys. Rev. 46, 1087 (1934), la sezione d'urto $\gamma\gamma$ per produzione di coppie è data dalla relazione

$$\sigma_{pair} = \frac{\pi}{2} (r_0)^2 \left\{ (1 - \beta^2) \left[(3 - \beta^4) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta(2 - \beta^2) \right] \right\} \quad (2.4.168)$$

dove r_0 è il raggio classico dell'elettrone ($r_0 \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \times 10^{-13} cm$), mentre β è il modulo della velocità dell'elettrone nel sistema del CM , legato alla \sqrt{s} del processo (e quindi all'energia k dei fotoni nel CM) dalla relazione $\beta^2 \equiv \frac{2m_e^2}{s} = 1 - \frac{m_e^2}{k^2}$.

Questa sezione d'urto cresce a partire dalla soglia ($\beta = 0$, ovvero $k = m_e$) per raggiungere il massimo per $\beta \approx 0.701$, quando il termine entro parentesi graffa nella (2.4.168) raggiunge il valore di 1.36, e quindi torna a diminuire per azzerarsi nel limite in cui $\beta \rightarrow 1$.

Per elettroni non ultrarelativistici nel CM , essa risulta quindi dell'ordine di

$$\sigma_{pair} \approx \frac{\pi}{2} (r_0)^2 = 12.47 \times 10^{-26} cm^2 = 125 mbarn \quad (2.4.169)$$

per cui il libero cammino medio del fotone di altissima energia nel fondo cosmico, si riduce, rispetto a quanto trovato per il protone, del rapporto $125 mbarn/200 \mu barn = 625$ e dunque, da circa $3 Mpc$ diventa dell'ordine di soli $4.8 kpc$.

Una ulteriore differenza è che, mentre nella fotoproduzione di π^0 da parte di protoni di alta energia interagenti con il fondo cosmico, il protone è ancora presente nello stato finale, nel caso del fotone di alta energia che produce coppie interagendo con il fondo cosmico, esso, naturalmente, scompare ...

i raggi cosmici da parte dell'onda d'urto generata dall'esplosione stessa, non è in grado di spiegare energie maggiori del valore sopra citato.

Di recente è stata dimostrata una qualche correlazione con la direzione di un *AGN* (Active Galactic Nucleus), che farebbe pensare agli *AGN* come alle sorgenti di questi raggi cosmici estremamente energetici.

Va detto, comunque, che è piuttosto difficile legare la direzione di arrivo con la sorgente in quanto, essendo i raggi cosmici carichi, essi sono deviati dal campo magnetico intergalattico⁷⁵, per cui è comunque necessario, prima di trarre conclusioni, ancora una qualche cautela ...

Quando i raggi cosmici primari entrano nell'atmosfera, essi collidono con i nuclei degli atomi di cui essa è costituita. Data l'alta energia a disposizione (in un urto con un altro nucleone: $s = M^2 + 2EM$), vengono prodotte un gran numero di particelle che, a loro volta, interagiscono o decadono dando luogo, appunto, allo sciame caratteristico. Molte di esse, tipicamente muoni e neutrini arrivano sulla superficie della terra e sono queste particelle (con una certa contaminazione di elettroni e gamma) che costituiscono quelli che abbiamo chiamato *raggi cosmici secondari* e che furono visti da Wulf, Hess, Millikan, etc ...

L'interesse maggiore oggi è, evidentemente, per i raggi cosmici primari⁷⁶, e per studiarli nelle migliori condizioni l'ideale è quello di poter effettuare esperimenti in orbita o almeno su pallone stratosferico.

Siccome però al crescere dell'energia il flusso dei primari, come abbiamo visto, diminuisce drasticamente, ecco che, se vogliamo studiare primari di energie ultra-elevate, occorre tornare in qualche modo sulla Terra e cercare eventi che producono sciami molto estesi, realizzando esperimenti su grandi superfici.

Un esempio di esperimenti del primo tipo è l'esperimento PAMELA, partito il 15 giugno 2006.

⁷⁵Abbiamo visto (Vol. II) che il raggio di curvatura di una particella con carica unitaria in campo magnetico uniforme e costante è data da

$$R[m] = \frac{p_{\perp}[MeV/c]}{300 B[T]}$$

dove le unità sono in parentesi quadra.

Assumendo quindi un impulso (perpendicolare al campo) $p \approx 3 \times 10^{19} eV$ e un campo magnetico medio dell'ordine del nG , ne deduciamo un raggio dell'ordine di $10^{26} cm$, quindi ben confrontabile con la distanza da cui si presume che queste particelle arrivino.

Ovviamente, però, il campo non sarà uniforme e costante ... quindi il valore trovato va visto solo come un limite inferiore !

⁷⁶Questo non è completamente vero, infatti lo studio dei neutrini "atmosferici" richiede una buona conoscenza dei raggi cosmici secondari visto che questi neutrini sono prodotti nei decadimenti dei mesoni e leptoni che si originano dallo sciame. Ricordiamo che, da questo studio, è emerso che il numero dei ν_{μ} che vengono da sotto terra è inferiore al valore atteso, dato il numero di quelli che vengono da sopra.

Questo è oggi interpretato come una evidenza di segnale di oscillazione $\nu_{\mu} \leftrightarrow \nu_{\tau}$.

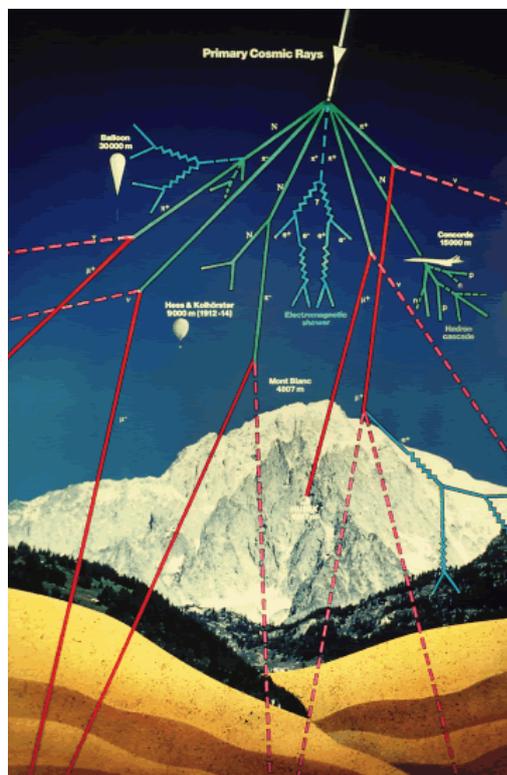


Figura 2.14: Sviluppo di uno sciame di raggi cosmici

Il rivelatore è costituito sostanzialmente da uno spettrometro magnetico unito a un calorimetro elettromagnetico entrambi molto accurati, ed è provvisto di un sistema di misura del tempo di volo, in grado di definire correttamente il verso di propagazione della particella rivelata nel detector e quindi di permetterne la definizione del segno della carica.

PAMELA è stato realizzato allo scopo di effettuare misure di alta precisione riguardo, in special modo, allo spettro ed ai flussi sia di antiprotoni che di positroni e antinuclei come l'antielio, fra 50 MeV e 200 GeV . Questo è un dato importante per capire, per esempio, se esistono o meno galassie di antimateria ...

Essa ha messo in evidenza, fra 10 e 100 GeV , un eccesso di positroni rispetto a quanto previsto, consentendo ai teorici di mostrare tutta la loro fantasia nel cercare di darne un'interpretazione che, al momento, ancora non c'è !

Un esperimento del secondo tipo è, invece, ARGO-YBJ, che usa un rivelatore di sciame estesi. Esso è installato in Tibet, a Yang Ba Jing, a 4300 m sul livello del mare, e copre una superficie di circa ben 5800 m^2 . In questo modo, dalla misura nel numero di secondari in coincidenza, l'esperimento è in grado di investigare il flusso in un ampio intervallo di energia dei raggi cosmici primari, dalle centinaia di GeV alle migliaia di TeV .

2.5 L'antimateria

Nel 1926 la Meccanica Quantistica non relativistica, basata sull'equazione di Schrödinger (dimostrata equivalente alla Meccanica delle matrici di Heisenberg, da Schrödinger e successivamente, in modo molto elegante da Dirac, con la Teoria delle trasformazioni) era già piuttosto ben assodata, ma non era compatibile con la Teoria della Relatività Ristretta.



Figura 2.15: *Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)*

Il primo tentativo⁷⁷ veramente fruttuoso di fare una meccanica quantistica che fosse compatibile anche con la teoria della Relatività Ristretta è certamente quello di P.A.M.Dirac, con la sua equazione⁷⁸ relativistica per la

⁷⁷L'equazione di Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ è del 1927 e dunque è precedente all'equazione di Dirac; però essa, se ha il requisito della compatibilità con la Relatività Ristretta, era considerata da Dirac insoddisfacente in quanto era un'equazione del secondo ordine nella derivata rispetto al tempo (a differenza dell'equazione di Schrödinger) e inoltre non consentiva una interpretazione probabilistica semplice della funzione d'onda, visto che la corrente conservata che da essa discende $J^\mu(x) = i[\phi^*(x)(\partial^\mu\phi)(x) - \phi(x)(\partial^\mu\phi^*)(x)]$ ha la componente temporale, che dovrebbe rappresentare la densità di probabilità, la quale non è definita positiva.

⁷⁸P.A.M. Dirac: *The quantum theory of the electron*

Proc. Roy. Soc. London 117A, 610 (1928)

P.A.M. Dirac: *The quantum theory of the electron. Part ii*

Proc. Roy. Soc. London 118A, 351 (1928)

Dirac, con la sua equazione, cercava di ottenere una descrizione della particella libera (egli pensava all'elettrone ...) che

- fosse lineare nella derivata temporale, ovvero del tipo $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$, con H operatore

hamiltoniano opportuno;

- fosse relativisticamente covariante (sotto il gruppo di Lorentz ortocrono proprio);
- fosse capace di fornire una densità di probabilità definita positiva.

La covarianza relativistica, unita al fatto che la derivata rispetto al tempo doveva entrare nell'equazione al primo ordine, richiedeva che anche le derivate spaziali dovessero entrare nello stesso modo, per cui l'equazione doveva, necessariamente, contenere il termine $\partial_\mu \psi$. Ma affinché la Lagrangiana da cui l'equazione era ricavata potesse essere scalare, occorre un altro operatore quadrivettoriale, diverso da ∂^μ (altrimenti saremmo subito ricaduti nell'equazione di Klein-Gordon ...), che Dirac trovò nel meccanismo della legge di trasformazione della funzione d'onda sotto il gruppo di Lorentz, abbandonando l'idea della funzione d'onda scalare per quella di una funzione d'onda spinoriale a quattro componenti. In questo caso, infatti, la rappresentazione del gruppo di Lorentz fornisce

$$\psi'(x) \equiv (U(\Lambda)\psi)(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.5.170)$$

con

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}; \quad \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (2.5.171)$$

dove le matrici γ^μ sono completamente individuate, a meno di una trasformazione di base, dalla condizione

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (2.5.172)$$

e risulta che le γ^μ sotto la $S(\Lambda)$ si trasformano come un quadrivettore, avendosi infatti

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (2.5.173)$$

per cui, come mostriamo sotto, l'operatore $\gamma^\mu \partial_\mu$ agisce sugli spinori di Dirac come un operatore scalare.

Se consideriamo poi il quadrato di questo operatore, si ha

$$\gamma^\mu \partial_\mu \cdot \gamma^\nu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu \equiv \square \quad (2.5.174)$$

ovvero il prodotto $\gamma^\mu \partial_\mu \cdot \gamma^\nu \partial_\nu$ rappresenta l'operatore $-P^\mu P_\mu$ che, nel caso della particella libera di massa m , dovrà essere quindi pari a $-m^2$. L'equazione cercata, quindi, oltre all'operatore scalare $\gamma^\mu \partial_\mu$ doveva contenere anche l'operatore scalare im ; e questo ci porta così, in modo naturale, all'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.5.175)$$

Mostriamo adesso quanto già anticipato, cioè che la legge di trasformazione sopra descritta garantisce effettivamente la covarianza relativistica dell'equazione di Dirac.

Abbiamo detto, a questo proposito, che una trasformazione del gruppo di Lorentz Λ agisce nello spazio degli spinori secondo la rappresentazione $S(\Lambda)$ tale per cui vale la (2.5.173), ovvero, più propriamente, risulta che

$$x \rightarrow x' = \Lambda x \Leftrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Leftrightarrow \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \quad (2.5.176)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (2.5.177)$$

Valutiamo allora la quantità $(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x')$.

Ricordando che la matrice $S(\Lambda)$ agisce sugli indici spinoriali e non su quelli "di Lorentz", per quanto detto sopra risulta

$$\begin{aligned} & (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = (i\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) = \\ & = [iS(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu S(\Lambda) - mS(\Lambda)]\psi(x) = \\ & = S(\Lambda)[iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m]\psi(x) = \\ & = S(\Lambda)[i\Lambda^\mu{}_\tau \gamma^\tau \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m]\psi(x) = S(\Lambda)[i\gamma^\nu \partial_\nu - m]\psi(x) \end{aligned} \quad (2.5.178)$$

Dunque risulta così dimostrato che

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = S(\Lambda) [i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \psi(x) \quad (2.5.179)$$

e questo implica che se la $\psi(x)$ risolve l'equazione di Dirac per la particella libera di massa m , allora anche la $\psi'(x')$ lo fa, e viceversa; che è appunto quanto richiesto affinché si possa concludere affermativamente circa la covarianza dell'equazione di Dirac.

Venendo adesso alla loro forma esplicita, nella consueta rappresentazione di Pauli-Dirac, le matrici γ sono così fatte

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.180)$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, cioè

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.181)$$

Tornando all'equazione di Dirac, come è noto, le sue soluzioni piane, corrispondenti al quadrimpulso $p^\mu \equiv (p^0, \vec{p})$, sono del tipo

$$\psi^{(+)}(x) = u(p) e^{-ipx} \quad (2.5.182)$$

$$\psi^{(-)}(x) = v(p) e^{ipx} \quad (2.5.183)$$

dove u e v sono spinori opportuni, ciascuno con due componenti indipendenti che sono legate direttamente agli stati di spin.

Le soluzioni (2.5.182) corrispondono evidentemente a stati che evolvono nel tempo secondo il fattore di fase $e^{-ip^0 t}$ dove $p^0 \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ e quindi, secondo la consueta regola per cui per gli autostati dell'energia risulta $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi$, essi descrivono stati con energia positiva $E = p^0$; mentre le soluzioni (2.5.183) descrivono un'evoluzione temporale corrispondente a un'energia $E = -p^0$ negativa e per questo motivo non hanno un'interpretazione fisica diretta.

Il problema delle soluzioni con energie negative non è peculiare dell'equazione di Dirac, infatti esso si presenta in quanto la relazione relativistica $E^2 = m^2 + p^2$ ha due soluzioni di segno opposto per ogni valore del modulo dell'impulso spaziale. Esso si presenta anche in fisica classica, laddove, però, possiamo semplicemente assumere che i soli stati fisici di particella corrispondano alle soluzioni a energia positiva e che gli altri, come capita spesso, rappresentino semplicemente soluzioni non fisiche. Siccome, in fisica classica, le variabili dinamiche variano in modo continuo, non c'è modo di passare da una soluzione di un tipo a quella del tipo opposto perché fra le due c'è sempre e comunque un gap energetico, cioè una discontinuità nel valore dell'energia, pari a $\Delta E \geq 2m$. Dunque l'interpretazione di cui sopra, che elimina tout-court le soluzioni a energia negativa, *non* conduce classicamente a problemi o contraddizioni.

La stessa cosa, in realtà, vale anche per le soluzioni dell'equazione di Dirac, ma solo finché si resta nell'ambito della teoria libera. Infatti, come osservò Dirac stesso in

P.A.M. Dirac: *The proton*, Nature 126, 605 (1930)

P.A.M. Dirac: *A theory of electrons and protons*, Proc. Roy. Soc. London 126A, 360 (1930)

nel momento in cui si introduce nella sua equazione l'interazione elettromagnetica nel modo canonico, ovvero ponendo

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad \Rightarrow \quad i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad (2.5.184)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \gamma^\mu - m \right) \psi = 0 \quad (2.5.185)$$

ecco che si rendono possibili transizioni fra stati a energia positiva e stati a energia negativa, con emissione di fotoni, per cui non è più possibile ignorare la presenza stessa delle soluzioni a energia negativa e diventa imperativo cercare di dare loro un significato fisico. Ma quale è questo significato ?

A questo riguardo, tratteremo soltanto quello che, storicamente, fu senz'altro il più interessante tentativo di "reinterpretazione" delle soluzioni a energia negativa svolto nell'ambito dello schema della prima quantizzazione. Esso si basa sul fatto che il passaggio da una soluzione piana a energia negativa a una a energia positiva e viceversa può essere effettuato attraverso una opportuna trasformazione che fa uso della coniugazione complessa della soluzione stessa.

Se prendiamo semplicemente la complessa coniugata dell'equazione di Dirac, sempre in presenza di interazione elettromagnetica, siccome senza perdita di generalità, possiamo assumere che il quadripotenziale A^μ sia reale, otteniamo

$$\left(-i\gamma^{\mu*} \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \gamma^{\mu*} - m\right) \psi^* = 0 \quad (2.5.186)$$

che però non è più l'equazione di Dirac, visto che contiene le γ^* e non le γ e le γ^* , in generale, sono diverse dalle γ e non riconducibili a esse attraverso una trasformazione canonica (cioè una trasformazione legata ad un cambiamento di base) !

Osserviamo a questo proposito che, nella rappresentazione di Pauli-Dirac, le matrici γ^μ sono tutte reali eccetto la γ^2 che è immaginaria pura; quindi, per la proprietà di anticommutazione delle γ con indice diverso, ne segue che, posto

$$M \equiv i\gamma^2 \quad (2.5.187)$$

la matrice M risulta reale e si ha

$$M \gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu M \quad (2.5.188)$$

Moltiplicando allora a sinistra l'equazione (2.5.186) per M e usando la (2.5.188), otteniamo

$$\begin{aligned} M \left(-i\gamma^{\mu*} \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \gamma^{\mu*} - m\right) \psi^* &= 0 \\ \Rightarrow \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \gamma^\mu - m\right) M \psi^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.189)$$

la quale, di nuovo, è l'equazione di Dirac nel campo elettromagnetico assegnata A^μ per una particella della stessa massa m di quella da cui siamo partiti, ma avente carica opposta.

Questo significa che se ψ è una soluzione dell'equazione di Dirac a energia negativa corrispondente all'impulso \vec{p} , allora $M\psi^*$ è anch'essa soluzione dell'equazione di Dirac per la stessa massa m , ma corrisponde all'impulso $-\vec{p}$, ha energia positiva e si riferisce a una particella di carica opposta a quella di partenza. La soluzione

$$M \psi^*(x) = i\gamma^2 \psi^*(x) \equiv \psi_C(x) = C^{-1} \bar{\psi}^t(x), \quad \text{con } C \equiv i\gamma^0 \gamma^2 = -C^{-1} \quad (2.5.190)$$

è detta, per ovvie ragioni, la soluzione coniugata di carica della $\psi(x)$.

Nel suo articolo del 1930 citato sopra, relativo alla teoria dell'elettrone e del protone, Dirac infatti scrisse: *Thus an electron with negative energy moves in an external field as though it carries a positive charge.*

Va detto, però, che la reinterpretazione presentata sopra, pur aprendo un nuovo orizzonte importantissimo nella struttura di simmetria dell'equazione di Dirac, non risolve, in realtà, il problema delle soluzioni a energia negativa. Essa tende anche a suggerire che queste soluzioni, altrimenti non fisiche, possano essere reinterpretate come legate agli stati di una particella avente stessa massa e spin ma carica opposta a quella della particella data e questo, a rigore, non è nemmeno corretto; inoltre la reinterpretazione descritta sopra è

particella libera.

L'equazione di Dirac nasce in effetti per descrivere proprio gli elettroni relativistici, e quindi di energia $E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$, ma possiede la caratteristica ineludibile di avere sia soluzioni con energia positiva che negativa.

Dato che la Natura predilige stati con energia la più bassa possibile, non si capiva, allora, come mai uno stato ad energia positiva non potesse transire verso uno a energia negativa, emettendo la differenza, per esempio, con uno o più fotoni⁷⁹.

Dirac propose che gli stati a energia negativa fossero tutti pieni da un "mare" di elettroni, per cui, per il principio di Pauli, nessuna transizione fosse possibile verso quegli stati⁸⁰. Era possibile invece una transizione dal "mare" verso stati a energia positiva e, per esempio, un fotone di energia $2mc^2$ avrebbe potuto portare, in linea di principio, un elettrone del mare dall'energia $-mc^2$, la più alta possibile nel mare, all'energia mc^2 , la più bassa possibile di segno positivo. Questo, apparentemente, si sarebbe tradotto nella materializzazione di un fotone in un elettrone e un "mare con una lacuna" che, a tutti gli effetti, si sarebbe comportato come un *elettrone positivo*. Però, a quel tempo, non era nota alcuna particella siffatta, per questo Dirac propose che la sua "lacuna nel mare di elettroni negativi" fosse il protone⁸¹. Ricordiamo che nel 1928, le uniche particelle note erano ancora l'elettrone e il protone. Fu quindi naturale per Dirac interpretare le *lacune* nel mare degli elettroni con energia negativa come protoni.

Dietro a questa interpretazione, c'era più un pregiudizio filosofico che una ragione di natura fisica, cioè il desiderio aprioristico di poter descrivere gli atomi, in definitiva, in termini di una sola particella e della sua simmetrica! Nell'articolo prima citato del 1929 a pag. 363, Dirac infatti scrive "*We require to postulate only one fundamental kind of particle, instead of two, electron and proton, that were previously necessary.*"

insoddisfacente per la dissimmetria di trattamento dei due segni della carica, dissimmetria che non trova alcun fondamento nella struttura stessa dell'equazione di Dirac.

La soluzione del problema relativo al significato fisico delle soluzioni a energia negativa dell'equazione di Dirac, in realtà, era ancora lontana ... e sarebbe venuta solo con l'avvento della Teoria Quantistica dei Campi!

⁷⁹La cosa era ancora più grave perché, siccome lo spettro dell'hamiltoniana non era limitato verso il basso, questo processo di emissione e transizioni verso stati di energia sempre più negativa non avrebbe dovuto aver termine...

⁸⁰La teoria del *mare* risultava comunque molto insoddisfacente, sia perché richiedeva una densità di carica infinita (gli elettroni del mare), sia perché rompeva la simmetria elettrone-positrone (non esisteva un mare pieno di positroni ...).

Oltre a questo, c'è un altro motivo che l'avrebbe comunque vanificata, motivo però, che al momento, non era noto. Esistono infatti anche le antiparticelle dei bosoni: per esempio il π^+ e il π^- sono antiparticella uno dell'altro. Però a loro si applica la statistica di Bose, quindi la teoria del mare per questi bosoni non avrebbe alcun senso!

⁸¹P.A.M. Dirac: *A theory of the electrons and protons*,

Proc. Roy. Soc. London 126A, 360 (1929)

P.A.M. Dirac: *The proton*, Nature, 126, 605 (1930)

Questa ragione di eleganza, almeno all'inizio, fece premio anche sui problemi che l'interpretazione nascondeva e che furono ben messi in evidenza, per esempio, da Oppenheimer⁸². In essi si considera il problema della annichilazione elettrone-protone e si mostra come questa dovrebbe comunque procedere a *rates* elevatissimi (almeno 10^{-9} s), per cui la materia non avrebbe potuto esistere ...

Oltre a questo, c'era da spiegare il problema delle diverse masse dell'elettrone e del protone, problema che era stato sottovalutato all'inizio ma che diveniva via via un macigno sempre più grande. Come mostrato da Tamm⁸³, se le particelle di carica positiva descritte dall'equazione di Dirac fossero stati i protoni, poiché l'interazione con il campo elettromagnetico sarebbe stata la stessa per protoni ed elettroni, allora lo scattering Thomson avrebbe dovuto avere la stessa sezione d'urto per entrambi, e questo contraddiceva l'evidenza sperimentale, che, in accordo con il risultato classico⁸⁴

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \equiv \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (2.5.191)$$

forniva un valore che è estremamente più piccolo per i protoni !

Fu infine Hermann Weyl⁸⁵ che, sulla base dei principi di simmetria dell'equazione, dimostrò alla fine del 1930 che le particelle positive associate ai "buchi" dovevano necessariamente avere la stessa massa degli elettroni e dunque non potevano essere i protoni.

⁸²J.R. Oppenheimer: *On the theory of electrons and protons*, Phys. Rev. 35, 562 (1930)
 J.R. Oppenheimer: *Two notes on the probability of Radiative Transitions*,
 Phys. Rev. 35, 939 (1930)

⁸³Ig. Tamm: *Über die Wechselwirkung der freien elektronen mit der strahlung nach der Diracschen theorie des Elektrons und nach der Quantenelektrodynamik*.
 Zeith. für Physik 62, 545 (1930)

⁸⁴Ricordiamo che questa sezione d'urto, per l'elettrone, vale $\sigma_T = 0.665$ barn

⁸⁵H. Weyl: *The theory of groups and quantum mechanics*, Tradotta dalla seconda edizione tedesca del 1931 da H.P. Robertson, Dover Publications Inc. New York, Cap. IV, sez. 12.

Cfr. anche P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133, 61 (1931)



Figura 2.16: *Carl Anderson (1905-1991)*

Dal punto di vista sperimentale, un chiarimento fondamentale giunse nel 1932, quando Carl Anderson, uno studente di Millikan, dimostrò, usando una camera di Wilson (camera a nebbia) in campo magnetico, che, sempre nei raggi cosmici, erano presenti anche particelle di carica positiva e di massa confrontabile con quella dell'elettrone.

▽

L'esperimento di Anderson

Il programma di ricerca di Robert A. Millikan, al Caltech, come abbiamo visto, era, dalla prima metà degli anni '20, quello di raccogliere tutte le possibili informazioni sulla radiazione che giunge sulla Terra dal cosmo, per studiarne la natura, confermando, se possibile, l'idea che questi "raggi cosmici" (come li aveva lui stesso battezzati) fossero una radiazione elettromagnetica di altissima energia emessa in reazioni nucleari di sintesi di nuclei pesanti, a partire dall'idrogeno.

Per determinare lo spettro in energia degli elettroni sbalzati via in seguito agli urti di questi gamma con gli atomi presenti nell'aria, Millikan affidò a un suo dottorando, Carl Anderson, il compito di costruire un rivelatore costituito da una camera di Wilson (camera a nebbia), posta in un potente elettromagnete da 15 kGauss , in modo da poter risalire, dalla curvatura della traccia, all'impulso della particella stessa.

I primi risultati furono però completamente inattesi: c'erano circa tante tracce con una curvatura, quante con curvatura opposta, mentre si attendevano, sostanzialmente, solo tracce di elettroni emessi dall'assorbimento da parte dell'atomo di fotoni di alta energia.

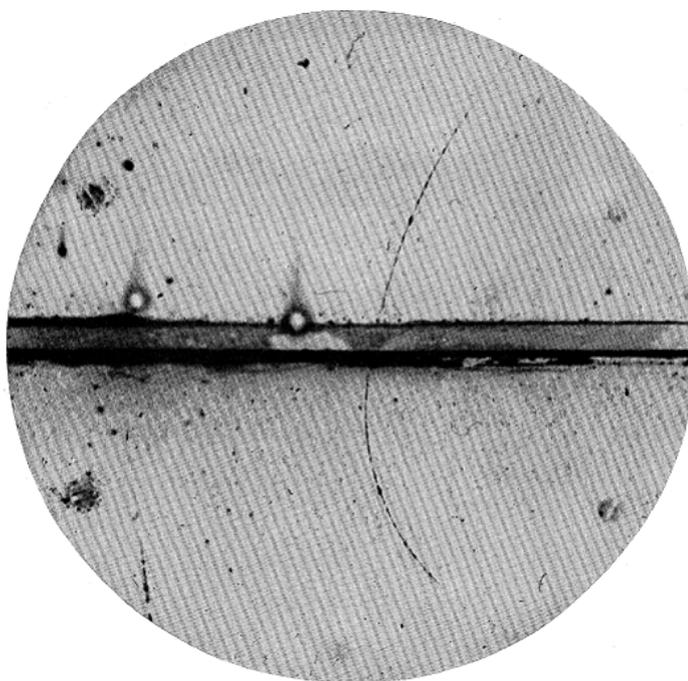


Figura 2.17: *Prima evidenza del positrone. Alla traccia superiore corrisponde un impulso di 63 MeV/c, mentre a quella inferiore un impulso di 23 MeV/c.*

In realtà, alcune tracce positive erano dovute a protoni, ma la stragrande maggioranza riguardavano particelle troppo leggere per poterlo essere.

Le spiegazioni alternative erano che si trattasse o di elettroni che si muovevano verso l'alto o di qualche particella positiva ignota che andava verso il basso. Il puzzle fu brillantemente risolto da Anderson, che inserì un foglio di 6 mm di piombo nella camera, in modo da far perdere energia alle particelle che lo attraversavano e quindi stabilire il verso del moto e dunque il segno della carica. La risposta sperimentale, dunque, fu che si trattava di particelle leggere (facilmente deviabili) positive provenienti dall'alto e Anderson conìò per loro il nome di "positrone" (per simmetria, battezzò successivamente anche l'elettrone con il nome di "negatrone", ma nessuno lo seguì su questa strada ...).

Esse non furono, però, riconosciute subito come antiparticelle dell'elettrone, ma solo successivamente anzi Anderson⁸⁶ propose una teoria

⁸⁶C.D. Anderson: *The positive electron*, Phys. Rev. 43, 491 (1933)

In questo articolo, Anderson propone che tanto gli elettroni quanto i positroni osservati negli sciami prodotti dai raggi cosmici possano nascere dalla disintegrazione del neutrone, operata dai raggi cosmici primari (fotoni). Ricordiamo che nel 1932 il neutrone da poco

complicata per cui essi traevano origine nei nuclei.

L'interpretazione corretta venne dal Cavendish Laboratory di Cambridge, dove Patrick Blackett e Giuseppe Occhialini⁸⁷ stavano compiendo ricerche simili, ma con un apparato "più intelligente".

Utilizzando contatori Geiger e il circuito di coincidenza sviluppato da Bruno Rossi a Firenze nel 1930, essi "triggeravano" la camera a nebbia, per cui la resa *foto/segnali utili* era ben più elevata che nell'operare a caso. Poterono verificare così, con centinaia di foto, un aspetto straordinario legato ai raggi cosmici, ovvero, appunto, il loro arrivare in "sciame". Le particelle viste da Anderson comparivano negli sciami nello stesso modo in cui vi comparivano gli elettroni. Essi conclusero che, visto che gli "elettroni positivi" non fanno parte della materia ordinaria, sia quelli positivi che quelli negativi dovevano essere generati insieme, attraverso lo stesso meccanismo (è la prima ipotesi circa l'esistenza del processo di creazione di coppie...), nelle collisioni iniziate da raggi cosmici di alta energia. Essi ipotizzarono dunque, per la prima volta, la trasformazione di radiazione in materia, come era previsto dalla relazione di Einstein. Nel loro lavoro del 1933, essi si posero poi il problema della sorte dei positroni e conclusero correttamente che "essi scomparivano in seguito alla loro annichilazione con elettroni negativi, formando quanti di luce, come previsto dalla teoria dell'elettrone di Dirac".

△

Nonostante questo risultato sperimentale fosse un evidente successo della teoria di Dirac, la questione del "mare" di elettroni di energia negativa restava comunque alquanto indigesta.

scoperto veniva ancora considerato da taluni come una particella composta da un protone e da un elettrone (questo consentiva di tentare una spiegazione del decadimento β^- , anche se, come è noto, per questa strada restavano aperti molti problemi). Anderson fa però un passo ulteriore e ritiene che il neutrone possa equivalentemente essere formato anche da un protone negativo e un positrone. Riconosce però che, al momento, non c'è alcuna evidenza sperimentale dell'esistenza dei protoni negativi nei nuclei (la disintegrazione β^+ , che avrebbe suffragato questa ipotesi, comunque errata, non era stata ancora osservata), dove resterebbero allorché viene emesso il positrone, e conclude dicendo: *The greater symmetry, however, between the positive and negative charges revealed by the discovery of the positron, should prove a stimulus to search for evidence of the existence of negative protons.*

⁸⁷P.M.S. Blackett, G.P.S. Occhialini: *Some photographs of the tracks of penetrating radiation*

Proc. Roy. Soc. A139, 699 (1933)

P.M.S. Blackett, G.P.S. Occhialini: *Nature*, 130,363 (1932)

Una spiegazione del significato fisico delle soluzioni con $E < 0$ diventò poi ancora più necessaria quando si dimostrò che la faccenda delle energie negative non era affatto un "accidente" isolato, legato all'equazione di Dirac, bensì era una conseguenza profonda ed universale che si presentava sistematicamente in qualunque teoria quantistica relativistica⁸⁸.

La spiegazione⁸⁹ corretta del loro significato sarebbe venuta, però, solo

⁸⁸Per esempio, è del tutto evidente che il problema si pone identico anche per l'equazione di Klein-Gordon, le cui soluzioni con impulso spaziale definito possono essere infatti sia del tipo e^{-ipx} che del tipo e^{ipx} , con $p^0 \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$ e dunque le prime con energia positiva e le seconde con energia negativa.

⁸⁹Vediamo, senza entrare in troppi dettagli, che cosa prevede a questo proposito la *QFT*.

Prendiamo, come primo esempio, quello del campo scalare autoaggiunto (che potrebbe essere quello da usare per descrivere il π^0 , se fosse elementare): in questo caso particella e antiparticella coincidono e la struttura del campo è la seguente

$$\phi(x) = \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (2.5.192)$$

dove $E_p \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$, mentre $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ sono, rispettivamente, gli operatori di distruzione e creazione dello stato di singola particella di impulso spaziale \vec{p} .

Come si vede, nella definizione del campo (2.5.192), le soluzioni ad energia positiva e negativa entrano in modo perfettamente simmetrico.

Venendo adesso, però, alla funzione d'onda della particella/antiparticella di impulso spaziale definito \vec{q} , essa è la seguente [$|\Omega\rangle$ rappresenta lo stato di minima energia, ovvero lo stato di vuoto, mentre il quadrivettore q , per definizione, è pari a $q \equiv (E_q, \vec{q})$]

$$\psi_{\vec{q}}(x) \equiv \langle \Omega | \phi(x) | q \rangle = \langle \Omega | \phi(x) a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = e^{-iqx} \quad (2.5.193)$$

e corrisponde, evidentemente, a una soluzione a energia positiva.

Quanto alla funzione d'onda, l'asimmetria fra i segni dei due tipi di soluzione è semplicemente prodotta dal fatto che mentre l'operatore di distruzione, una volta applicato allo stato di vuoto, produce il vettore nullo, non esiste alcuna condizione analoga per quello di creazione.

In particolare, la questione delle soluzioni a energia negativa non è, evidentemente, minimamente legata all'esistenza di una antiparticella, visto che, in questo caso, come abbiamo detto, particella e antiparticella sono la stessa cosa eppure le soluzioni a energia negativa entrano nella rappresentazione del campo esattamente come quelle a energia positiva.

A riprova di quanto stiamo dicendo, consideriamo adesso il caso del campo scalare carico (quello che descriverebbe il sistema π^\pm), in cui particella e antiparticella sono, invece, *distinte*.

In perfetta analogia con il caso precedente, abbiamo

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (2.5.194)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ b(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (2.5.195)$$

dove l'associazione fra soluzioni a energia positiva/negativa con gli operatori di creazione e distruzione è restata la stessa di prima, ma adesso il campo, non essendo più autoaggiunto, contiene operatori di distruzione della particella e di creazione dell'antiparticella, mentre nell'espressione del campo aggiunto entrano gli operatori di distruzione dell'antiparticella e di creazione della particella.

dalla *QFT*, dove le soluzioni a energia positiva sono associate agli operatori di distruzione, mentre quelle a energia negativa a operatori di creazione e questo sia per quanto riguarda la particella che l'antiparticella.

Non è, infatti, lo stato di particella/antiparticella che discrimina⁹⁰ fra i due segni dell'energia, bensì la possibilità (che non esiste nello schema della prima quantizzazione) di far salire o scendere il numero delle particelle presenti in un sistema fisico assegnato.

Ma tornando alla questione delle antiparticelle, il punto è che qualunque Teoria di Campo relativistica libera risulta simmetrica (invariante) per coniugazione di carica, ed è proprio questa simmetria che implica *sempre* la presenza, accanto alla particella, dell'antiparticella, eventualmente coincidenti.

Quanto alle funzioni d'onda degli stati di particella/antiparticella di impulso spaziale \vec{q} , risulta

$$\pi^+ : \psi_{\vec{q}}(x) \equiv \langle \Omega | \phi(x) | \pi^+(\vec{q}) \rangle = \langle \Omega | \phi(x) a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = e^{-iqx} \quad (2.5.196)$$

$$\pi^- : \psi_{\vec{q}}(x) \equiv \langle \Omega | \phi^\dagger(x) | \pi^-(\vec{q}) \rangle = \langle \Omega | \phi(x) b^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = e^{-iqx} \quad (2.5.197)$$

ovvero, sia per la particella che per l'antiparticella, la funzione d'onda è comunque sempre una soluzione corrispondente a un valore positivo dell'energia.

⁹⁰Come abbiamo visto, esistono soluzioni a energia negativa anche per i campi che descrivono particelle che sono antiparticelle di se stesse ...

A questo proposito ci si può chiedere come questo possa accadere.

Affinché una particella possa coincidere con la propria antiparticella è senz'altro necessario che essa sia neutra; però questo non è sufficiente !

Prendiamo, per esempio, il caso del neutrone e dell'antineutrone, che sono diversi.

Essi si distinguono, intanto perché non esiste solo la carica elettrica che si inverte di segno nel passaggio particella \leftrightarrow antiparticella, ma questo accade per *qualunque* carica la particella possieda e il neutrone/antineutrone hanno carica barionica ± 1 .

Ma anche volendoci limitare al solo elettromagnetismo, è vero che il neutrone ha carica elettrica totale nulla, ma possiede una struttura di carica per cui è positivo al centro e all'esterno, ed è negativo in mezzo. Questa distribuzione si inverte di segno per l'antineutrone, così come accade per il momento magnetico (in relazione allo spin).

La *QFT*, come si è già anticipato, stabilisce che particella e antiparticella coincidono se e solo se il campo a esse associato è autoaggiunto.

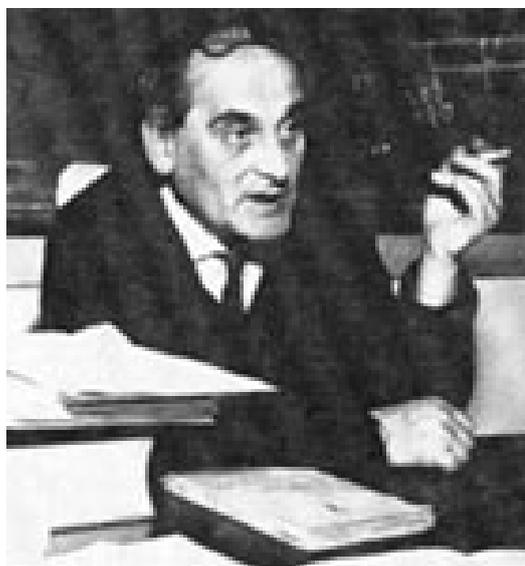


Figura 2.18: *Giuseppe (Beppo) Occhialini (1907-1993)*

A conferma della validità di questa previsione della *QFT* riguardo alla descrizione delle particelle elementari, nel 1955 fu chiaramente osservato (esistevano già alcuni indizi in foto di eventi di raggi cosmici ...) dal gruppo di Chamberlain al Bevatrone da 6 *GeV* di Berkeley l'antiprotone⁹¹.

Esso fu prodotto attraverso la reazione

$$p + p = p + p + \bar{p} + p \quad (2.5.198)$$

⁹¹O. Chamberlain, E. Segré, C. Wiegand, T. Ypsilantis: *Observation of antiprotons*, Phys. Rev. 100, 947 (1955)

la cui soglia⁹², su protone fermo, è appunto di circa 6.57 GeV , corrispondente a una energia cinetica di circa 5.63 GeV : essi, in realtà, usarono del Rame come bersaglio.

Le particelle prodotte dopo l'urto erano selezionate in carica ed impulso, accettando, attraverso uno spettrometro magnetico, solo cariche negative con impulso $p = 1.19 \text{ GeV}/c$. Per la maggior parte, si trattava di pioni, che occorreva dunque discriminare correttamente: questo era fatto sia usando il tempo di volo fra due contatori posti a 12 m di distanza (40 ns per il pione, 51 ns per il \bar{p}) che attraverso due rivelatori Cerenkov⁹³, di cui il secondo,

⁹²Ricordiamo che la soglia della reazione, in questo caso, è determinata dalla condizione $\sqrt{s} = 4M$, dove M è la massa del protone/antiprotone e \sqrt{s} è l'energia del sistema nel CM , ovvero

$$s = (E + M, \vec{P}) \cdot (E + M, \vec{P}) = 2M^2 + 2EM \equiv 2M^2(1 + \gamma) \quad (2.5.199)$$

dove abbiamo indicato con γ il consueto fattore relativistico $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{M}$.

Nel caso considerato, risulta quindi

$$2M^2 + 2EM = 16M^2 \Rightarrow E = 7M = 6.57 \text{ GeV} \Rightarrow \gamma = 7 \quad (2.5.200)$$

Questa conclusione è valida, però, soltanto se il protone bersaglio è immobile. Nel caso, per esempio, in cui esso sia in un nucleo, soggetto quindi al moto di Fermi, la soglia della reazione si abbassa. Valutiamo infatti l'energia nel CM nel caso in cui il protone bersaglio si muova contro il protone proiettile: risulta

$$\begin{aligned} s &= ((E, \vec{P}) + (\mathcal{E}, \vec{p})) \cdot ((E, \vec{P}) + (\mathcal{E}, \vec{p})) = (E + \mathcal{E})^2 - (P + p)^2 = \\ &= E^2 + 2E\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 - P^2 - p^2 + 2Pp = 2M^2 + 2E\mathcal{E} + 2Pp \end{aligned} \quad (2.5.201)$$

dove $(E, \vec{P}) = M\gamma(1, \vec{\beta})$ è il quadrimpulso del protone incidente, mentre $(\mathcal{E}, \vec{p}) = M\hat{\gamma}(1, \vec{\hat{v}})$ è quello del protone bersaglio ed abbiamo assunto che $\vec{\hat{v}}$ e $\vec{\beta}$ siano opposti l'uno all'altro. In altri termini, risulta

$$s = 2M^2 + 2M\gamma M\hat{\gamma} + 2M\beta\gamma M\hat{v}\hat{\gamma} = 2M^2 + 2M^2\gamma\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v}) \quad (2.5.202)$$

da confrontare con l'espressione $s = 2M^2 + 2M^2\gamma$, valida nel caso di bersaglio fermo.

Se definiamo, allora $E_{th} \equiv M\gamma_0$ come l'energia di soglia su bersaglio fermo (abbiamo già visto che risulta $\gamma_0 = 7$), nel caso di bersaglio in movimento (nel verso opposto a quello del protone incidente ...), ne segue che la nuova l'energia di soglia E'_{th} del protone incidente deve essere tale per cui

$$\gamma_0 = \gamma\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v}) \Rightarrow E'_{th} = M\gamma = M\frac{\gamma_0}{\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v})} \quad (2.5.203)$$

ovvero essa risulta ridotta, rispetto al caso di bersaglio fisso, del fattore $\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v})$ che, nel nostro caso (nucleo di Rame), assumendo come essi fecero una energia di Fermi di 25 MeV e quindi $\hat{\gamma} = 1.0266 \Rightarrow \hat{v} = \sqrt{1 - \frac{1}{\hat{\gamma}^2}} = 0.226$ vale 1.26 (nel fare questo calcolo abbiamo approssimato comunque β con l'unità, essendo il protone incidente comunque ampiamente relativistico, come mostra il risultato finale per cui $\gamma = \frac{7}{1.26} = 5.56$ e dunque $\beta \approx 0.98\dots$), per cui abbiamo infine che, tenendo conto del moto di Fermi, risulta $E'_{th} = M\gamma = 5.56 M = 5.22 \text{ GeV}$ e dunque è sufficiente un'energia cinetica del protone proiettile di $E'_{kin} = E'_{th} - M = 4.28 \text{ GeV}$, invece di 5.63 GeV , affinché la reazione possa aver luogo...

⁹³Per la scoperta di questo effetto, Cerenkov insieme ai teorici Frank e Tamm che ne

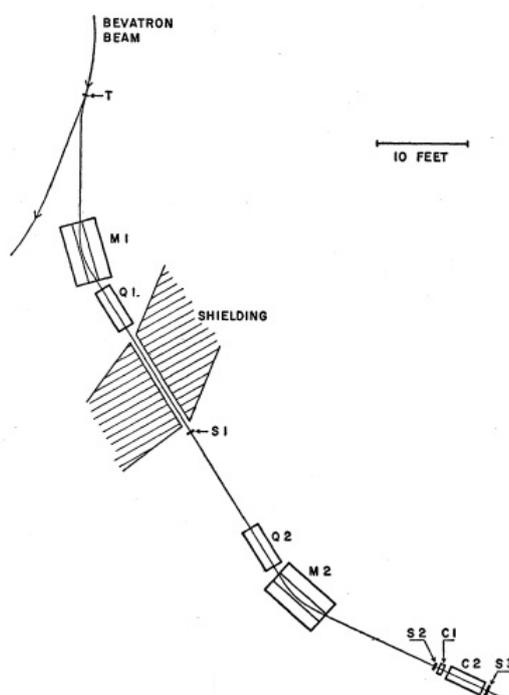


Figura 2.19: Layout dell'esperimento di Chamberlain et al., relativo alla prima rivelazione dell'antiprotono

differenziale.

spiegarono l'origine, ebbero il Nobel nel 1958.

Pavel A. Cerenkov: *Sichtbares leuchten von reinen flüssigkeiten unter der einwirkung von γ strahlen*. C.R. Acad. Sci. URSS 8, 451 (1934).

Pavel A. Cerenkov: *Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light*. Phys. Rev. 52, 378 (1937).

I. Frank, Ig. Tamm: *Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter*. C.R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)

L'effetto Cerenkov consiste nell'emissione di radiazione elettromagnetica quando una particella carica attraversa un mezzo materiale trasparente, avente indice di rifrazione n tale che $\beta > 1/n$. La radiazione viene emessa a un preciso angolo θ_C rispetto alla direzione di volo della particella carica, tale che

$$\cos\theta_C = \frac{1}{n\beta} \quad (2.5.204)$$

In un tratto dL di traiettoria, nell'intervallo di energia dei fotoni compreso fra E ed $E+dE$, il numero di fotoni emessi è tale per cui

$$\frac{d^2N}{dL dE} = \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2\theta_C = \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{(\beta n)^2}\right) \quad (2.5.205)$$

Il primo⁹⁴, detto *C1*, era in grado di rispondere solo se $\beta > 0.79$ e quindi, dato l'impulso, identificava il passaggio di un pione, mentre il secondo, detto *C2*, era differenziale e capace di selezionare la velocità della particella carica fra $\beta = 0.75$ e $\beta = 0.78$, rispondendo quindi al passaggio dell'antiprotone.

Infine, a ulteriore conferma dell'esistenza dell'antimateria, nel 1956, dal gruppo di Lamberston e Piccioni, fu osservato anche l'antineutrone⁹⁵.

Il metodo usato fu quello di partire da antiprotoni, prodotti sempre al Bevatrone di Berkeley nel modo che abbiamo già visto, stavolta su targhetta di berillio. Veniva usato un fascio piuttosto intenso di protoni da 6.2 GeV ed il fascio negativo secondario veniva selezionato con impulso di $1.4 \text{ GeV}/c$.

Il "tagging" degli antiprotoni era realizzato attraverso il metodo del tempo

L'effetto Cerenkov è un effetto a soglia nella velocità della particella, per cui, fissato l'impulso, si può scegliere n in modo che il rivelatore risponda solo alle particelle più veloci e quindi di minor massa, per le quali $\beta > 1/n$, e non risponda affatto a quelle di più alta massa, perché, appunto, *sotto soglia*, i.e. tali che $\beta < 1/n$.

Il rivelatore *C1* era di questo tipo.

Ma non è questo l'unico modo di usare il rivelatore: poiché i fotoni, fissato β , sono emessi tutti allo stesso angolo rispetto alla direzione di volo della particella carica, ammesso che questa direzione sia nota e definita, si può inserire sulla linea di fascio un rivelatore che possiede, nella sua parte terminale, uno specchio sferico di focale F . In questo modo, i fotoni riflessi osservati nel piano focale dello specchio, sono distribuiti su un anello di raggio $R = F \theta_C$ centrato sul fascio (si noti che i fotoni, ovunque siano stati emessi lungo la traiettoria della particella carica, arrivano tutti simultaneamente nel piano focale!). Selezionando allora sul valore del raggio dell'anello, si può selezionare in θ e dunque, fissato n , cioè il tipo di gas e la sua densità, si può selezionare in β . Questo uso è detto *differenziale* e consente una più fine selezione del tipo di particella.

C'è infine un terzo modo (RICH) di usare il rivelatore, quando la direzione di volo della particella è nota solo entro certi limiti. In questo caso, usando ancora uno specchio sferico, l'anello Cerenkov nel piano focale non ha più il centro fisso, bensì esso è dato dall'intercetta della traiettoria della particella carica con lo specchio stesso. Non è più possibile il suo uso in modo *differenziale*, selezionando, per esempio attraverso un diaframma, la zona angolare utile, come solitamente si fa nel Cerenkov differenziale, bensì, fermo restando il fatto che esso non risponde se non siamo sopra soglia, la misura di β è fatta disponendo nel piano focale dello specchio dei rivelatori con sufficiente granularità spaziale, in modo da poter ricostruire l'anello e misurare quindi direttamente il suo raggio. Mentre nei primi due casi, il rivelatore può essere usato direttamente nel trigger hardware, nel terzo caso, richiedendosi la ricostruzione, viene usato tipicamente in software, per procedere all'identificazione delle particelle.

⁹⁴Per un pione di impulso $1.19 \text{ GeV}/c$ abbiamo che $\gamma\beta = P/M = 1.19/0.140 = 8.56$ e quindi $\gamma = \sqrt{1 + (\gamma\beta)^2} = 8.62$ da cui $\beta = 1 - 0.0067$; mentre per un antiprotone dello stesso impulso risulta $\gamma\beta = P/M = 1.19/0.938 = 1.268$ e quindi $\gamma = \sqrt{1 + (\gamma\beta)^2} = 1.615$ da cui $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.785$.

Potrebbe allora sembrare strano che Chamberlain abbia selezionato la velocità nel range $0.75 < \beta < 0.78$, ma occorre tener conto che, nel momento in cui gli antiprotoni arrivavano nel contatore Cerenkov, essi avevano perso una parte della loro energia per ionizzazione per cui avevano, in media, $\beta = 0.765$.

⁹⁵B. Cork, G.R. Lamberston, O. Piccioni, W.A.Wenzel: *Antineutrons produced from antiprotons in charge-exchange collisions*, Phys. Rev. 104, 1193 (1956)

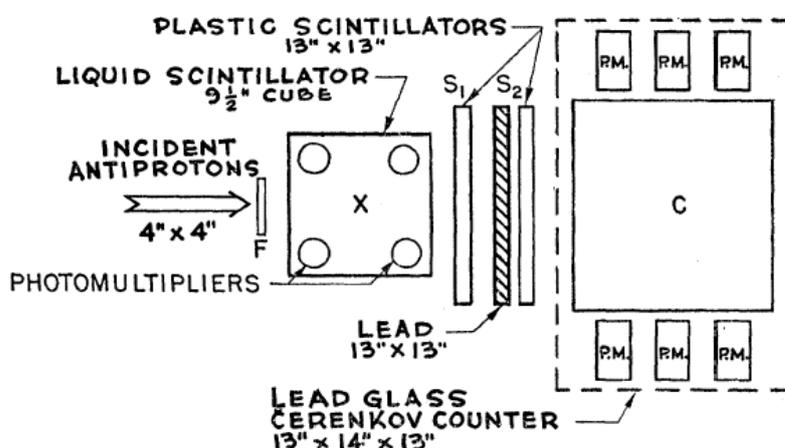


Figura 2.20: *Layout dell'esperimento di Piccioni e Lamberston, relativo alla rivelazione dell'antineutrone*

di volo, usando ben sei contatori disposti sulla traiettoria del fascio estratto. In questo modo venivano identificati nel fascio dell'ordine di 300 – 600 antiprotoni/ora.

Il fascio veniva inviato contro un convertitore spesso, indicato con X nella figura, dove, gli antiprotoni davano luogo, talvolta, alla reazione di scambio carica



originando così un antineutrone.

La reazione di annichilazione dell'antineutrone veniva osservata nel Cerenkov C a vetro al piombo, posto in anticoincidenza sia con i fototubi che guardavano il convertitore X (per evitare il fondo accidentale originato da reazioni di annichilazione in X con produzione di neutroni o qualche mesone neutro massivo) che con gli scintillatori $S1$ ed $S2$, i quali assicuravano così che il segnale in C non fosse dovuto a nessuna particella carica giunta nel rivelatore C stesso.

Infine, la possibilità che il segnale in C fosse legato a gamma di alta energia era esclusa dalla presenza di un convertitore a piombo da un pollice di spessore, posto prima di $S2$ in cui gli elettroni/positroni di conversione si sarebbero manifestati.

2.6 Le particelle strane

Dopo la scoperta del mesone di Yukawa e dell'antielettrone di Dirac, sembrava che lo zoo delle particelle elementari fosse più o meno in ordine.

Era pur vero che la presenza del muone, guastava un po' il quadro, perchè non si capiva a che servisse (famosa la domanda di I. Rabi in proposito: "Who ordered that ?"), ma la crisi venne quando, nel dicembre del 1947, Rochester e Butler pubblicarono⁹⁶ una foto⁹⁷ di camera a nebbia, che mostrava come, sempre nei raggi cosmici, fosse presente una componente neutra che decadeva in due pioni carichi.

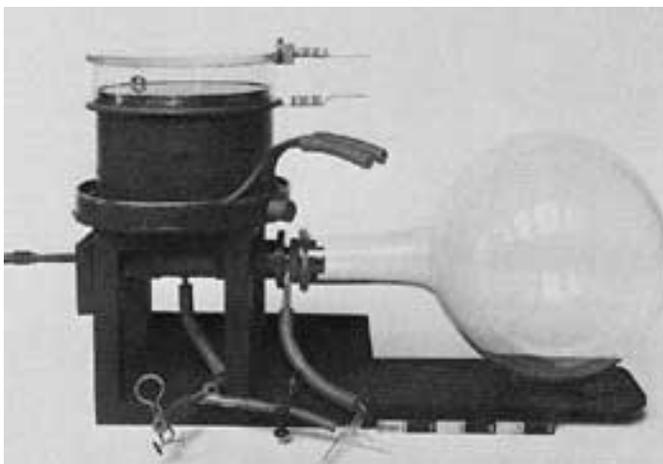


Figura 2.21: Camera di Wilson (a nebbia)

Meno di due anni dopo, Brown e collaboratori pubblicarono⁹⁸ la foto di una emulsione esposta ai raggi cosmici in cui era una particella carica a decadere in tre pioni: si trattava della prima evidenza dei decadimenti dei

⁹⁶G.D. Rochester, C.C. Butler: *Evidence for the existence of a new unstable elementary particle*, Nature, 160, 855 (1947)

⁹⁷Va ricordato che già nel 1944, quindi tre anni prima di Rochester e Butler, il gruppo di Leprince-Ringuet aveva fotografato in camera di Wilson una traccia di una particella carica altrimenti ignota, di massa circa 990 volte quella dell'elettrone
L. Leprince-Ringuet, M. Lheritier: *Existence probable d'une particule de masse 900 m_e dans le rayonnement cosmique*, Compt. Ren. 219, 618 (1944)
ma ... una rondine non fa primavera !

⁹⁸R. Brown, U. Camerini, P.H. Fowler, H. Muirhead, C.F. Powell: *Observation with electron-sensitive plates exposed to cosmic radiation*, Nature 163, 47 (1948)

mesoni⁹⁹ K o kaoni¹⁰⁰, i.e., rispettivamente, di

$$\begin{aligned}\theta^0 &\equiv K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \\ \tau^+ &\equiv K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-\end{aligned}$$

In quello stesso periodo, sia il gruppo di Blackett che lavorava con uno spettrometro magnetico nel Laboratorio per Raggi cosmici del Pic du Midi de Bigorre sui Pirenei francesi, che Anderson e Cowan sulla White Mountain in California, poterono accumulare un gran numero di eventi di tipo V^0 . L'interpretazione dei risultati, però, era tutt'altro che univoca finché, alla Rochester Conference del 1952, Thompson¹⁰¹ mostrò chiaramente che i decadimenti osservati di tipo V^0 erano originati da due particelle neutre differenti: una era quella di Rochester e Butler (che Thompson, in onore al suo proprio nome, chiamò appunto θ^0) mentre l'altra era molto più massiva e decadeva in un protone e un pione negativo¹⁰²

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$$

⁹⁹I kaoni si comportano per diversi aspetti come pioni più pesanti e fanno parte della famiglia dei mesoni.

¹⁰⁰Il K^0 fu prima indicato con il nome di V^0 , in quanto, al momento del decadimento, produceva un segnale in camera a nebbia che era appunto una V , fatta dalle tracce dei due pioni che originavano al vertice del decadimento. Successivamente fu indicato con θ^0 mentre il K^+ fu, originariamente, indicato con τ^+ .

Bisognò aspettare fino al 1956 prima di stabilire che si trattava delle versioni neutre e cariche della stessa particella, il mesone K , appunto, sui cui modi di decadimento avremo modo di ritornare essendo essi all'origine sia della prima evidenza sperimentale della violazione della simmetria di parità P nelle interazioni deboli che di CP .

¹⁰¹R.W. Thompson et al.: *The disintegration of V^0 particles*, Phys. Rev. 90, 329 (1953)

¹⁰²R.W. Thompson, per trarre la sua conclusione, utilizzò il plot di Armenteros-Podolanski: vediamo di che si tratta. Consideriamo per questo il generico decadimento di una particella neutra in due particelle cariche

$$V^0 \rightarrow A^+ + B^-$$

dove A^+ è la particella positiva di massa m_A che origina dal decadimento della particella neutra V^0 di massa M , mentre B^- è quella di carica negativa, di massa m_B : tutte e tre le masse sono, a priori, ignote. Potendo misurare nel sistema del Laboratorio gli impulsi spaziali \vec{p}_A e \vec{p}_B , ecco che possiamo definire l'impulso $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ della V^0 e, rispetto alla direzione da questo individuata, studiare la cinematica del processo. Nel sistema del CM avremo

$$p_A^* = (E_A, b \sin\Theta, b \cos\Theta); \quad p_B^* = (E_B, -b \sin\Theta, -b \cos\Theta)$$

dove Θ è definito nel CM rispetto alla direzione di \vec{P} , mentre E_A , E_B e b sono le grandezze che abbiamo già definito trattando la cinematica dell'urto anelastico (Vol. II).

A partire da queste grandezze, se indichiamo con β la velocità della V^0 nel sistema del Laboratorio e con γ il suo fattore relativistico, abbiamo che, in questo sistema di riferimento dovrà aversi

$$p_{\perp}^{\pm} = b \sin\Theta; \quad p_{\parallel}^+ = \gamma b \cos\Theta + \beta\gamma E_A; \quad p_{\parallel}^- = -\gamma b \cos\Theta + \beta\gamma E_B$$

Questo decadimento, però, creava un nuovo "caso" che ci richiede di fare un passo indietro al 1938, quando ci si era posti il problema della stabilità del protone.

Perchè il protone non decade, per esempio, in positrone e gamma ?

Stückelberg¹⁰³ aveva proposto l'idea, ripresa successivamente da Wigner¹⁰⁴, che alla base della stabilità del protone ci fosse la conservazione¹⁰⁵ di un numero quantico additivo ad hoc, il *numero barionico*. Questo valeva +1 per i barioni appunto, cioè per protone e neutrone (e quindi valeva -1 per le rispettive antiparticelle) ma era nullo per elettrone e gamma (così come per tutti i mesoni ...), per cui, per esempio, i decadimenti

$$p \rightarrow e^+ + \gamma; \quad p \rightarrow e^+ + \pi^0$$

erano vietati¹⁰⁶.

Costruiamo allora il parametro α che misura l'asimmetria longitudinale dei due impulsi, definito nel modo seguente

$$\alpha = \frac{p_{\parallel}^+ - p_{\parallel}^-}{p_{\parallel}^+ + p_{\parallel}^-} = \frac{2\gamma b \cos\Theta + \gamma\beta(E_A - E_B)}{\beta\gamma(E_A + E_B)}$$

ma $E_A + E_B = M$ mentre $E_A - E_B = \frac{E_A^2 - E_B^2}{E_A + E_B} = \frac{m_A^2 - m_B^2}{M}$ e quindi

$$\alpha = \frac{2b \cos\Theta}{\beta M} + \frac{m_A^2 - m_B^2}{M^2}$$

Se usiamo adesso come altra variabile per descrivere l'evento quella dell'impulso trasverso di A e B , $p_{\perp} = b \sin\Theta$ ecco che, nel caso di particelle V^0 ultrarelativistiche ($\beta \approx 1$) un plot degli eventi in assi (α, p_{\perp}) assume la forma di una semiellisse con semiassi $\frac{2b}{M}$ e b , traslata sull'asse delle ascisse di $\alpha_0 = \frac{m_A^2 - m_B^2}{M^2}$ (nel caso non relativistico, per tener conto dell'effetto di β , occorrerà introdurre un terzo asse riguardante appunto la velocità della V^0 ...). Nel caso del decadimento del K^0 in due pioni il plot era centrato per $\alpha = 0$, mentre quando era la Λ a decadere, i punti si disponevano su una semiellisse spostata per valori di α positivi. Questo studio cinematico dimostrò che le V^0 erano due, una (il K^0) che decadeva in particelle di uguale massa (pioni) e una, la Λ , che decadeva in una particella positiva (protone) di massa sensibilmente maggiore della massa di quella negativa (pione).

¹⁰³E.C.G. Stückelberg, *Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der feldtheorie der kernkräfte*, Helv. Phys. Acta 11, 225 (1938)

¹⁰⁴E.P. Wigner, *Invariance in physical theory*, Proc. Am. Phil. Soc. 93, 521 (1949)

Purtroppo Stückelberg aveva pubblicato su un giornale non particolarmente diffuso, per cui la sua idea del numero barionico, che lui chiamava *carica pesante*, dovette venire, in un certo senso, riscoperta ...

¹⁰⁵Il numero barionico è strettamente conservato da ogni interazione fino ad oggi nota, compresa quella debole. Per esempio, nel caso del decadimento beta del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

il numero barionico resta invariato e pari ad 1

¹⁰⁶Nelle teorie di Grande Unificazione, dove sono presenti mediatori con carica $\pm 4/3$ e $\pm 1/3$, la seconda reazione è possibile e la vita media del protone che ne risulta è di circa 10^{32} anni.

Adesso, se la Λ decadeva in pioni e protone, anche alla Λ doveva venir assegnato il numero barionico $+1$, che, fino allora, aveva caratterizzato soltanto il protone e il neutrone, cioè i costituenti fondamentali del nucleo e quindi della materia allora conosciuta.

Purtroppo poi questo non fu nemmeno un caso isolato, infatti, non appena, all'inizio degli anni '50, si cominciò a far uso degli acceleratori di particelle, questo strano barione¹⁰⁷ fu ben presto accompagnato da tanti altri simili.

Queste nuove particelle, inoltre, erano piuttosto "strane": esse erano prodotte in coppia, con grande frequenza, in processi di interazione forte (per esempio protone-pione), ma decadevano con una vita media ($\approx 10^{-10}$ s) che era molto più lunga di quanto ci si poteva attendere da particelle che interagivano forte (il valore atteso era infatti dell'ordine di $\approx 10^{-23}$ s).

Questo fatto suggerì a Pais¹⁰⁸ l'idea della cosiddetta *produzione associata* che Nakano, Nishijima e Gell-Mann¹⁰⁹ formalizzarono assegnando un

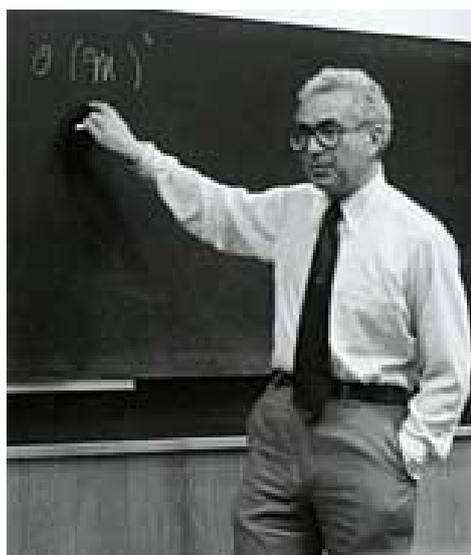


Figura 2.22: Murray Gell-Mann (1929)

nuovo numero quantico additivo a queste particelle, la *stranezza* S appunto, e assunsero che l'interazione forte conservasse la stranezza, per cui queste particelle dovevano essere prodotte in coppie di stranezza opposta, mentre ipotizzarono che l'interazione debole potesse violarla, consentendo così il loro

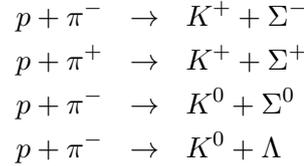
¹⁰⁷I barioni diversi da quelli originali, cioè diversi da neutrone e protone, e quindi instabili e di massa più alta, sono chiamati *iperoni*.

¹⁰⁸A. Pais: *Some remarks on the V-particles*, Phys. Rev. 86, 663 (1952)

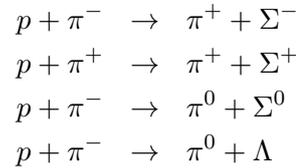
¹⁰⁹T. Nakano, K. Nishijima: *Charge independence for V-particles*, Prog. Theor. Phys. 10, 581, (1953)

M. Gell-Mann: *Isotopic spin and new unstable particles*, Phys. Rev. 92, 833, (1953)

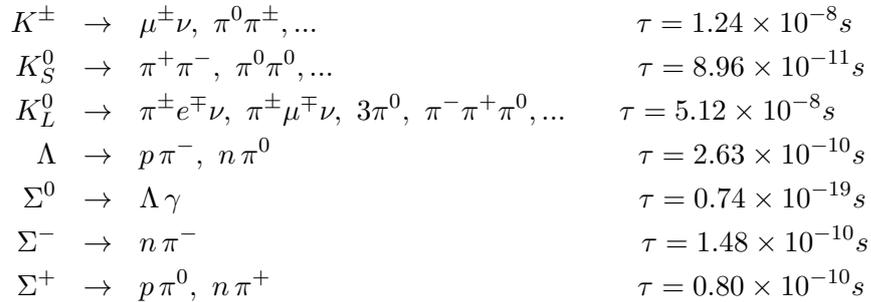
decadimento, ma con una vita media, quindi, tipica di queste interazioni. Secondo questo schema, allora, per esempio le reazioni



erano possibili via interazione forte ($S = 0$ al primo membro ed $S = 0$ al secondo membro se assegniamo a K^+ e K^0 stranezza $S = 1$ e stranezza $S = -1$ a Σ^\pm , Σ^0 e Λ) ed erano effettivamente osservate avvenire piuttosto copiosamente, mentre, per esempio, le reazioni



non avrebbero dovuto aver luogo, e in effetti non erano mai state osservate. Quanto poi ai decadimenti di queste nuove particelle, essi sono del tipo



e questi decadimenti, a eccezione di quello della Σ^0 , in effetti violano tutti la conservazione della stranezza e dunque non possono avvenire via l'interazione forte, ma solo attraverso l'interazione debole, da cui, appunto, la ragione della loro relativa stabilità¹¹⁰.

Fa eccezione la Σ^0 che si comporta, in un certo senso, come il π^0 : essa può decadere per via elettromagnetica conservando la stranezza, ed è per questo che ha una vita media circa dieci ordini di grandezza inferiore alle altre particelle a lei simili !

¹¹⁰Si osservi che le due Σ^\pm hanno vita media differente e sono entrambe barioni; infatti *non* sono una antiparticella dell'altra, come pure la Σ^0 in quanto barione non è antiparticella di se stessa ! A questo proposito, ricordiamo che anche il K^0 non può essere antiparticella di se stesso, avendo stranezza $S = 1$, per cui la sua antiparticella deve avere $S = -1$ e quindi è diversa dalla particella.

Un'altra coppia di particelle (iperoni) ancora più interessante che furono osservate erano poi la Ξ^0 e la Ξ^- . Esse furono chiamate anche *cascade* perchè davano appunto luogo a decadimenti in cascata, cioè

$$\begin{aligned}\Xi^0 &\rightarrow \Lambda \pi^0 & \tau &= 2.90 \times 10^{-10} s \\ \Xi^- &\rightarrow \Lambda \pi^- & \tau &= 1.64 \times 10^{-10} s\end{aligned}$$

seguiti poi dal decadimento della Λ .

Viste le vite medie delle Ξ , incompatibili con un decadimento via interazione forte, e date le assegnazioni di stranezza già fatte per la Λ e i pioni, queste particelle dovevano avere stranezza $S = -2$ e l'inesistenza di decadimenti diretti in nucleone-pione diceva anche che l'interazione alla base del decadimento poteva verosimilmente consentire solo processi con $\Delta S = 1$...

Comunque, al di là della spiegazione qualitativa dei decadimenti di cui sopra, il punto è che a causa della proliferazione di particelle nuove e strane, all'inizio degli anni '60, ci trovavamo, di nuovo, in presenza di uno zoo incredibile e disordinato di mesoni e barioni, tutti apparentemente elementari e aventi masse tutto sommato abbastanza simili ...

Quanto ai mesoni allora noti, infatti, risulta

$$\begin{aligned}m(\pi^0) &= 134.98 \text{ MeV}, & m(\pi^\pm) &= 139.57 \text{ MeV} \\ m(K^\pm) &= 493.68 \text{ MeV}, & m(K^0) &= 497.61 \text{ MeV}\end{aligned}$$

mentre circa i barioni abbiamo

$$\begin{aligned}m(p) &= 938.27 \text{ MeV}, & m(n) &= 939.56 \text{ MeV} \\ m(\Lambda) &= 1115.68 \text{ MeV} \\ m(\Sigma^+) &= 1189.37 \text{ MeV}, & m(\Sigma^0) &= 1192.64 \text{ MeV}, & m(\Sigma^-) &= 1197.45 \text{ MeV} \\ m(\Xi^0) &= 1314.86 \text{ MeV}, & m(\Xi^-) &= 1321.71 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Era abbastanza evidente che, anche limitandosi solo ai valori delle masse, c'erano alcune somiglianze che non potevano essere casuali: l'operazione di sistematizzazione del quadro, analoga per certi aspetti a quella fatta da Mendeleev per gli atomi, fu compiuta principalmente da Murray Gell-Mann, riprendendo un'idea di Sakata di alcuni anni prima.

Egli introdusse uno schema di classificazione detto *the eightfold way*, che era basato appunto sull'idea che esistesse una simmetria¹¹¹ nelle interazioni forti, capace di portare ordine in tutta questa proliferazione di particelle.

Questa fu ipotizzata essere una simmetria di tipo $SU(3)$, estensione naturale di $SU(2)$ di spin isotopico e la generalizzazione fu dettata, naturalmente, dalla necessità di tener conto anche della stranezza.

In questo schema i barioni e i mesoni, ordinati per masse crescenti e stesso J^P , venivano arrangiati, come vedremo nel prossimo paragrafo, in base al loro isospin e stranezza, all'interno di rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$.

¹¹¹M. Gell-Mann: *Symmetries of barions and mesons*, Phys. Rev. 125, 1067 (1962)

2.7 I quarks

Il primo tentativo di portare ordine nel panorama degli adroni era avvenuto attraverso l'introduzione delle simmetria di isospin. Questo, però, non poteva più bastare perché non prevedeva la stranezza. Fu dunque naturale generalizzare la simmetria $SU(2)_I$ aggiungendo al doppietto di isospin (p, n) il barione strano più leggero, singoletto di isospin, e cioè la Λ , cercando così una simmetria per la quale queste tre particelle fossero quelle "di base".

Siccome il gruppo di simmetria $SU(3)$ ha, evidentemente, come rappresentazione fondamentale¹¹² quella di dimensione tre, fu abbastanza naturale concepire l'idea che i barioni e i mesoni potessero essere descritti a partire

¹¹²In realtà, per $SU(3)$ non esiste una rappresentazione fondamentale, bensì ne esistono due (vedi Vol. I, Parte II), non equivalenti tra loro, entrambe di dimensione tre, cioè la $\mathbf{3}$ e la $\bar{\mathbf{3}}$, dove una è la complessa coniugata dell'altra.

Questo, però, non è affatto una difficoltà: vediamo perché.

Consideriamo infatti il caso di una generica simmetria unitaria $SU(n)$ la quale combini fra loro stati di quarks di *flavour* differente. La sua azione sugli operatori di creazione dei quarks sarà dunque del tipo

$$\mathcal{S}^{-1}(\alpha) a^\dagger(q_i) \mathcal{S}(\alpha) = U(\alpha)_{ij} a^\dagger(q_j) \quad (2.7.207)$$

dove $\mathcal{S}(\alpha)$ è l'operatore unitario che rappresenta nello spazio di Hilbert di multiparticella la simmetria unitaria data, mentre abbiamo indicato con α il set dei parametri reali che individuano il generico elemento del gruppo di simmetria in questione.

Evidentemente, prendendo l'aggiunta della (2.7.207), abbiamo

$$\mathcal{S}^{-1}(\alpha) a(q_i) \mathcal{S}(\alpha) = U^*(\alpha)_{ij} a(q_j) \quad (2.7.208)$$

Ma se vogliamo dare una definizione coerente con la struttura di campo, il fatto che ψ contenga gli operatori a e b^\dagger implica che b^\dagger debba trasformarsi come a , ovvero secondo la rappresentazione U^* . Questo dimostra quanto asserito sopra, ovvero che nel caso di $SU(3)$, se identifichiamo U con la rappresentazione $\mathbf{3}$ che opera sugli operatori di creazione dei quarks, ecco che dovrà essere la $\bar{\mathbf{3}}$ ad agire su quelle di creazione degli antiquarks.

A differenza di quanto accade in $SU(3)$, nel caso di $SU(2)$ la rappresentazione fondamentale è una sola. In questo caso, infatti, partendo dalla parametrizzazione canonica degli elementi del gruppo, per cui

$$V = e^{\frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \quad (2.7.209)$$

con $\vec{\alpha}$ il vettore reale che individua il particolare elemento del gruppo e $\vec{\sigma}$ la terna delle matrici di Pauli, evidentemente accade che

$$V^* = e^{-\frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^*} \quad (2.7.210)$$

D'altronde le due matrici σ_1 e σ_3 sono reali mentre σ_2 è immaginaria pura: siccome σ_2 anticommute con σ_1 e σ_3 ed ha quadrato pari all'identità, ecco che ponendo $A = i\sigma_2 \Leftrightarrow A^{-1} = -i\sigma_2$ abbiamo che

$$AV^*A^{-1} = e^{-\frac{i}{2} A(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^*)A^{-1}} = e^{-\frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot (\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2)} = e^{\frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} = V \quad (2.7.211)$$

da una tripletta di particelle costituenti¹¹³ (e dunque *elementari*).

Si giunse così al modello di Sakata¹¹⁴, il primo¹¹⁵ che postula, appunto, di costruire mesoni e barioni a partire dai tre barioni elementari p , n , e Λ , insieme alle loro antiparticelle.

Questo significa che per l'isospin, partendo per esempio dal doppietto delle particelle (u, d) , possiamo concludere che questa simmetria agisce esattamente nello stesso modo anche sulle loro antiparticelle, pur di usare la base $(\bar{d}, -\bar{u})$, ottenuta da (\bar{u}, \bar{d}) mediante la matrice A .

Da questo segue per esempio, che il tripletto pionico ha la seguente struttura

$$(\pi^+, \pi^0, \pi^-) = \left(u\bar{d}, \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u}), -d\bar{u} \right)$$

¹¹³Nel caso di $SU(2)$, i vettori di un multipletto sono individuati, come è ben noto, dal modulo dello spin J e dagli autovalori della sua terza componente J_3 .

Nel caso di $SU(3)$, al modulo dello spin isotopico I e alla sua terza componente I_3 viene aggiunto un altro operatore che con essi commuta, legato in un modo che vedremo alla stranezza S e al numero barionico B , che è l'ipercarica Y , i cui autovalori, pur potendo non essere interi, distano comunque tra loro, in una stessa rappresentazione irriducibile, di ± 1 .

La rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ è caratterizzata da un doppietto di isospin con $Y = +1/3$ e da un singoletto di isospin con $Y = -2/3$ mentre la $\bar{\mathbf{3}}$, ottenuta dalla precedente attraverso la coniugazione complessa, ha gli autovalori di ipercarica e di I_3 cambiati di segno, dunque consiste in un singoletto di isospin con $Y = +2/3$ ed un doppietto con $Y = -1/3$.

Quanto alla struttura generale delle rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$ (vedi Vol.I, Parte II), ricordiamo brevemente che ogni vettore della base canonica è individuato (in generale non univocamente) da un punto nel piano (I_3, Y) e si dimostra che la figura che si origina ha le seguenti caratteristiche

- è una figura convessa, a tre o sei lati;
- è simmetrica per rotazioni di 120° (dopo aver riscalato l'asse Y , moltiplicandolo per $\sqrt{3}/2$);
- è invariante per riflessione rispetto all'asse Y , cioè gode della simmetria $I_3 \leftrightarrow -I_3$;
- esiste un solo stato per ogni punto sul layer più esterno, due sul layer seguente, tre sul successivo ... finchè non si giunge eventualmente a una forma triangolare, a partire dalla quale la molteplicità cessa di crescere.

Infine, circa la riduzione del prodotto di due rappresentazioni irriducibili in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, si usa il fatto che I_3 e Y sono numeri quantici additivi per determinare la molteplicità di ciascun punto del piano. Quindi, usando le regole di cui sopra, si determinano le molteplicità relative alla rappresentazione irriducibile di dimensione più grande, cioè la più esterna. Queste si sottraggono da quelle di partenza e si procede così fino a esaurimento.

¹¹⁴S. Sakata: *On a composite model for the new particles*,
 Progr. Theoret. Phys. 16, 686 (1956)

¹¹⁵In realtà, già nel 1949, Fermi e Yang, nel loro articolo
 E. Fermi, C.N. Yang: *Are mesons elementary particles?*, Phys. Rev. 76, 1739 (1949)
 avevano considerato l'ipotesi che il pione non fosse elementare, come la teoria di Yukawa postulava, ma uno stato di nucleone-antinucleone.

Il modello, però, non funzionava bene perché non riusciva a spiegare convenientemente, per esempio, la struttura¹¹⁶ dei barioni Σ e Ξ .

Zweig, Ne'eman, Nishijima, in modo particolare, Gell-Mann¹¹⁷ proposero quindi un modello, sempre basato su $SU(3)$, in cui, però, i tre costituenti fondamentali erano delle entità nuove, di spin $\frac{1}{2}$, chiamati *quarks* da Gell-Mann, secondo la corrispondenza con la teoria di Sakata che è illustrata nella tabella che segue

			I	I_3	S	Y	Q	
$p - like$	\rightarrow	$quark\ up$	$u :$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$n - like$	\rightarrow	$quark\ down$	$d :$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\Lambda - like$	\rightarrow	$quark\ strange$	$s :$	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

¹¹⁶Cfr. S. Gasiorowicz: *Elementary particle physics*, J. Wiley 1967, Ch.16-18

Nel modello di Sakata il pione era un sistema nucleone-antinucleone mentre i mesoni strani θ/τ , cioè i K , erano un sistema nucleone e antiLambda o antinucleone e Lambda.

Per quanto riguarda i barioni, le Σ erano costituite da un sistema nucleone-antinucleone-Lambda, mentre le Ξ erano fatte da un antinucleone e due Lambda: la necessità di avere un antinucleone costituente sia nella Σ che nelle Ξ era dovuta al fatto che occorre che, comunque, il loro numero barionico fosse pari a 1. Però la necessità di un antinucleone come costituente degli iperoni era proprio il punto debole della teoria di Sakata.

Vediamo perché.

Le rappresentazioni fondamentali e inequivalenti di $SU(3)$, entrambe tridimensionali, come si è già detto, sono due, e cioè quella relativa alle particelle, indicata solitamente con il simbolo $\mathbf{3}$, e quella relativa alle antiparticelle, indicata solitamente con il simbolo $\bar{\mathbf{3}}$.

Un sistema nucleone/antinucleone si trasforma quindi sotto $SU(3)$ secondo la rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$.

Questa rappresentazione è riducibile e si decompone nella somma diretta di un singoletto e una rappresentazione otto-dimensionale, essendo appunto $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$. In ogni sottospazio invariante, se la simmetria fosse esatta (e quindi i generatori della rappresentazione di $SU(3)$ commutassero con l'hamiltoniana), ci aspetteremmo un unico valore della massa e nel caso dei mesoni questo concordava abbastanza bene con i fatti sperimentali se si assumeva che i sette mesoni allora noti (π^\pm , π^0 , K^\pm , K^0 , \bar{K}^0) (l'ottavo mesone è la η , di massa $m(\eta) = 547.85\ MeV$, e fu scoperto solo in seguito) appartenessero appunto allo stesso ottetto mesonico.

I problemi sorgevano con i barioni dove, nello schema di Sakata, si aveva $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{15} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}$, che non si accordava, per esempio, con il fatto sperimentale che i barioni quasi degeneri in massa erano, di nuovo, otto, cioè (p , n , Λ , Σ^\pm , Σ^0 , Ξ^- , Ξ^0) e comprendevano anche il gruppo p , n , Λ che, invece, avrebbe dovuto apparire naturalmente separato dagli altri, essendo essi i barioni "fondamentali".

¹¹⁷M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, Phys. Lett. 8, 214, (1964)

Y. Ne'eman: *Derivation of strong invariance from a gauge invariance*,

Nucl. Phys. 26, 222, (1961);

G. Zweig: *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking*,

CERN report TH-401

G. Zweig: *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking II*,

CERN report TH-412

K. Nishijima: *Charge independence theory of V particles*,

Prog. Theor. Phys. 13, 285, (1955)

dove l'iper carica Y è definita in termini della stranezza S e del numero barionico N_B dalla relazione^{118,119} dove $N_B = 1/3$ per tutti i quarks (e $-1/3$ per gli antiquarks ...)

$$Y \equiv N_B + S \quad (2.7.213)$$

In questo modello, seguendo in qualche senso Sakata, i mesoni allora noti, cioè π , K ed η , erano fatti da una coppia di un quark e un antiquark, mentre i barioni erano costituiti invece da *tre* quarks e gli antibarioni da *tre* antiquarks.

Riguardo quindi al legame fra mesoni ed $SU(3)$, poiché $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, ci aspettiamo, se i mesoni sono davvero un sistema $(q\bar{q})$ e se $SU(3)$ è una simmetria significativa per la forza forte, che essi si "decompongano" naturalmente in un ottetto e un singoletto.

Come si è già osservato, questo è proprio ciò che accade (il singoletto è fatto dalla η' , la cui massa vale $m(\eta') = 957.66 \text{ MeV}$) !

Per il sistema dei barioni, cioè per un sistema (qqq) , essendo che $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, risulta che effettivamente è presente un ottetto (anzi due !...) fra le rappresentazioni irriducibili a cui il sistema dà luogo, come la realtà sperimentale evidenzia e come il modello di Sakata non era in grado di riprodurre.

Nella decomposizione di cui sopra è presente anche un decupletto, che, in un certo senso, decretò il successo del modello stesso perchè consentì di prevedere la massa di un barione non ancora osservato, poi effettivamente scoperto¹²⁰ a Brookhaven, in camera a bolle, dal gruppo diretto da N.P. Samios, la Ω^- .

La struttura di questa rappresentazione¹²¹ è triangolare ed è fatta da quattro stati con $Y = 1$ e $I = 3/2$, identificati con $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$, tre

¹¹⁸Con questa definizione, il legame fra l'iper carica e la carica elettrica è il seguente (legge di Gell-Mann/Nishijima):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (2.7.212)$$

¹¹⁹Con la definizione (2.7.213) di iper carica, risulta altresì evidente un parallelo molto stringente, quanto alla simmetria $SU(3)$, fra i mesoni e i barioni più leggeri, essendo

$Y = S + B$	I	Barioni	Mesoni
+1	$\frac{1}{2}$	p, n	K^+, K^0
0	1	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	π^+, π^0, π^-
0	0	Λ	η
-1	$\frac{1}{2}$	Ξ^0, Ξ^-	\bar{K}^0, K^-

e infatti i membri di entrambe le famiglie costituiscono un ottetto di $SU(3)$.

¹²⁰V.E. Barnes et al: *Observation of a hyperon with strangeness minus three* Phys. Lett. 12, 204 (1964)

¹²¹Certamente la scoperta, fatta nel 1964 dal gruppo di N.P. Samios in camera a bolle a BNL (V.E. Barnes et al., "Observation of a hyperon with strangeness three"; P.R.L. 12, 204, 1964) dell'esistenza della Ω^- fu un grande successo del modello. La previsione teorica

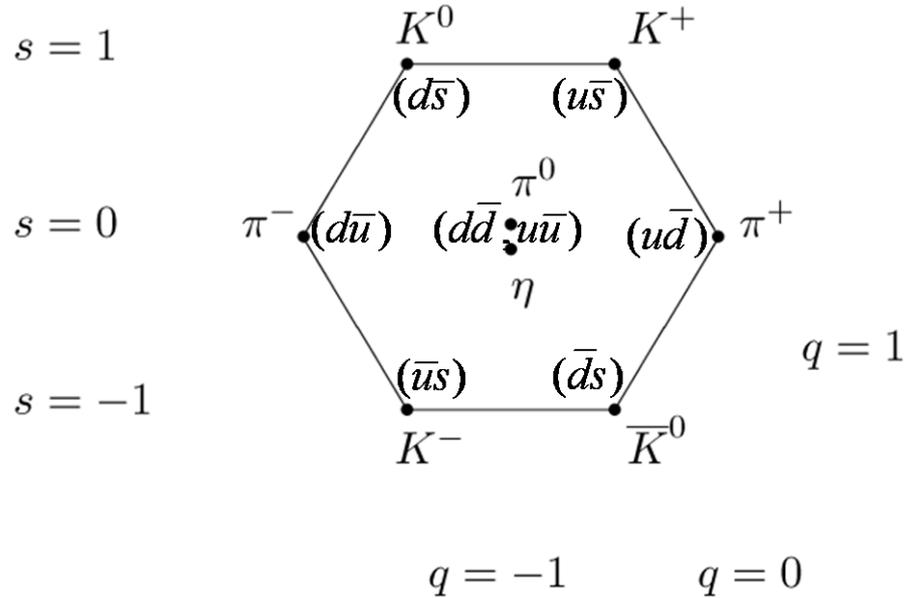


Figura 2.23: Ottetto dei mesoni pseudoscalari

stati con $Y = 0$ e $I = 1$, due con $Y = -1$ ed $I = 1/2$ ed infine uno con $Y = -2$ e $I = 0$, appunto la Ω^- .

Il modello funzionava piuttosto bene, a parte una difficoltà e cioè che nessuno aveva mai visto un quark che, tra l'altro, doveva avere carica elettrica frazionaria. Lo stesso Gell-Mann non volle spingere oltre il modello, fino a fargli predire l'esistenza dei quarks come effettive particelle elementari e si limitò a considerare il modello come un modo efficiente di catalogazione di mesoni e barioni.

riguardo alla sua massa era basata sull'idea che la rottura della simmetria fosse prodotta da un termine nell'hamiltoniana che, sotto $SU(3)$ appartenesse a un ottetto e commutasse con Y e T^2 . In questa ipotesi Gell-Mann e Okubo avevano concluso che, nell'ambito di una rappresentazione irriducibile, dovesse essere

$$M = M_0 + mY + \mu \left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right]$$

dove m e μ sono parametri liberi (piccoli rispetto a M_0) e $\mu = 0$ nel caso di rappresentazioni triangolari. Da questo consegue che, nel caso del decupletto, i multipletti di isospin dovessero essere equispaziati ed infatti $M(\Delta) \approx 1232 \text{ MeV}$, $M(\Sigma^*) \approx 1383 \text{ MeV}$, $M(\Xi^*) \approx 1530 \text{ MeV}$. Questo portava a concludere che dovesse esistere un singoletto di isospin, la Ω^- appunto, con massa intorno a 1670 MeV e fu trovata a 1672 MeV . Tra l'altro, poiché questa massa era inferiore a $M(\Xi^-) + M(\bar{K}^0) = 1322 + 498 = 1820 \text{ MeV}$, questo barione con stranezza $S = -3$ non poteva decadere conservandola e quindi poteva dar luogo solo a un decadimento debole e dunque a vita media relativamente lunga. Infatti $\tau_{\Omega^-} \approx 82 \text{ ps}$ e i canali dominanti sono ΛK^- e $\Xi^0 \pi^-$, ovvero stati con $S = -2$.

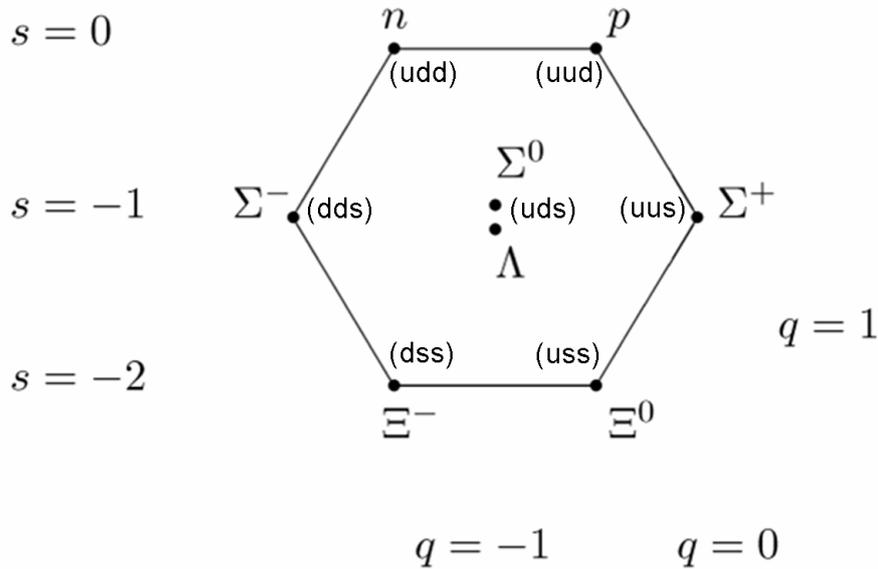


Figura 2.24: Ottetto barionico

Un fatto che, invece, accreditò senz'altro l'idea, furono i risultati¹²² degli esperimenti, cosiddetti, di *deep-inelastic scattering*, effettuati a *SLAC* verso la fine degli anni '60 dal gruppo di R.E. Taylor. Si trattava di processi di scattering di elettroni di alta energia (25 *GeV*) su protoni, in cui si misurava la sezione d'urto in funzione del momento trasferito: essi costituirono, per lo studio della struttura interna del protone, l'analogo di quello che era stato l'esperimento di Geiger e Marsden per la struttura dell'atomo.

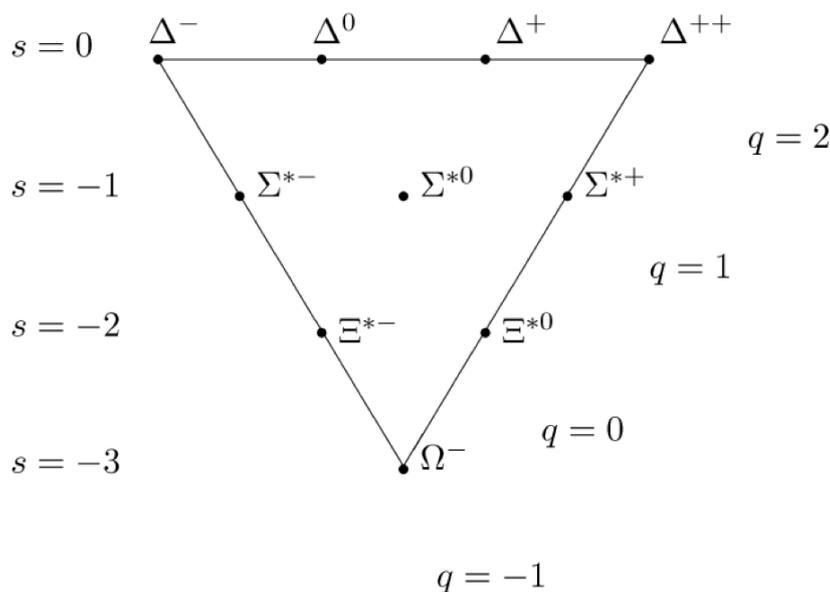
Questi esperimenti mostravano infatti che il protone non poteva essere descritto come una distribuzione continua di carica, bensì, per riprodurre i dati, occorreva assumere¹²³ che al suo interno ci fossero dei costituenti puntiformi (battezzati *partoni* da Feynman, tanto era grande ancora il pregiudizio contro i quarks) su cui avveniva effettivamente lo scattering.

I risultati del DIS erano certamente un punto a favore del modello a quarks di Gell-Mann, ma restava almeno un'altra seria obiezione (oltre a quella che non si trovavano liberi) da superare: esisteva per esempio (che non era nemmeno¹²⁴ l'unico!) un barione nel decupletto, la Δ^{++} , che, nel modello di Gell-Mann era fatto da tre quarks up, aveva spin $\frac{3}{2}$ e momento orbitale $L=0$. Si trattava di uno stato uuu completamente simmetrico per scambio. Questa conclusione violava quanto si conosceva circa la connessione

¹²²R.E. Taylor et al: *Observed behaviour of highly inelastic electron-proton scattering*, Phys. Rev. Lett. 23, 935 (1969)

¹²³J.D. Bjorken: *Asymptotic sum rules at infinite momentum*, Phys. Rev. 179, 1547 (1969)

¹²⁴Un altro esempio, sempre nel decupletto, è la Δ^- che è un sistema (ddd), per concludere con la stessa Ω^- , sistema (sss).

Figura 2.25: *Decupletto barionico*

spin-statistica, secondo cui lo stato di fermioni identici è completamente antisimmetrico per scambio.

Fu ancora nel 1964 che fu posta la prima pietra verso la soluzione del problema, con Greenberg¹²⁵ il quale sollevò il problema della "violazione" della statistica di Fermi-Dirac nei barioni, osservando che sembrava piuttosto che lo stato dei quarks dovesse essere simmetrico per scambio, come se ci fosse un altro grado di libertà per il quale lo stato era antisimmetrico, cosa che condusse M.Y Han e Y. Nambu a suggerire l'idea¹²⁶ che il tripletto dei quarks fosse in realtà il risultato della sovrapposizione di tre tripletti e si fosse in presenza di due simmetrie $SU(3)$, una nel tripletto e una fra i tripletti.

Nel '72, infine, Bardeen, Fritsch e Gell-Mann formalizzarono¹²⁷ l'idea che i quarks potessero esistere, ognuno, in *tre colori* diversi (convenzionalmente, blu, verde, rosso), che la simmetria di colore fosse una simmetria $SU(3)$ esatta e che le particelle costituite di quarks potessero esistere solo in combinazioni globalmente *incolori*, ovvero, più precisamente, in *singoletto* di $SU(3)$ di colore.

Era questo¹²⁸ che, in ultima analisi, implicava che le particelle che inte-

¹²⁵O.W. Greenberg, *Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of baryons and mesons*, Phys. Rev. Lett. 13, 598 (1964)

¹²⁶M.Y. Han, Y. Nambu: *Three-triplet model with double $SU(3)$ symmetry*, Phys. Rev. 139, B1006 (1965)

¹²⁷W. Bardeen, M. Gell-Mann, H. Fritzsch: CERN report n. TH1538 (1972)

¹²⁸Le sole combinazioni incolore possibili si dimostra infatti che sono solamente i sistemi come $(q\bar{q})$ (i mesoni) oppure i sistemi (qqq) (i barioni) e $(\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ (gli antibarioni). Inoltre il singoletto di colore di tre quarks è antisimmetrico per scambio e questo risolve il problema

2.7. I QUARKS

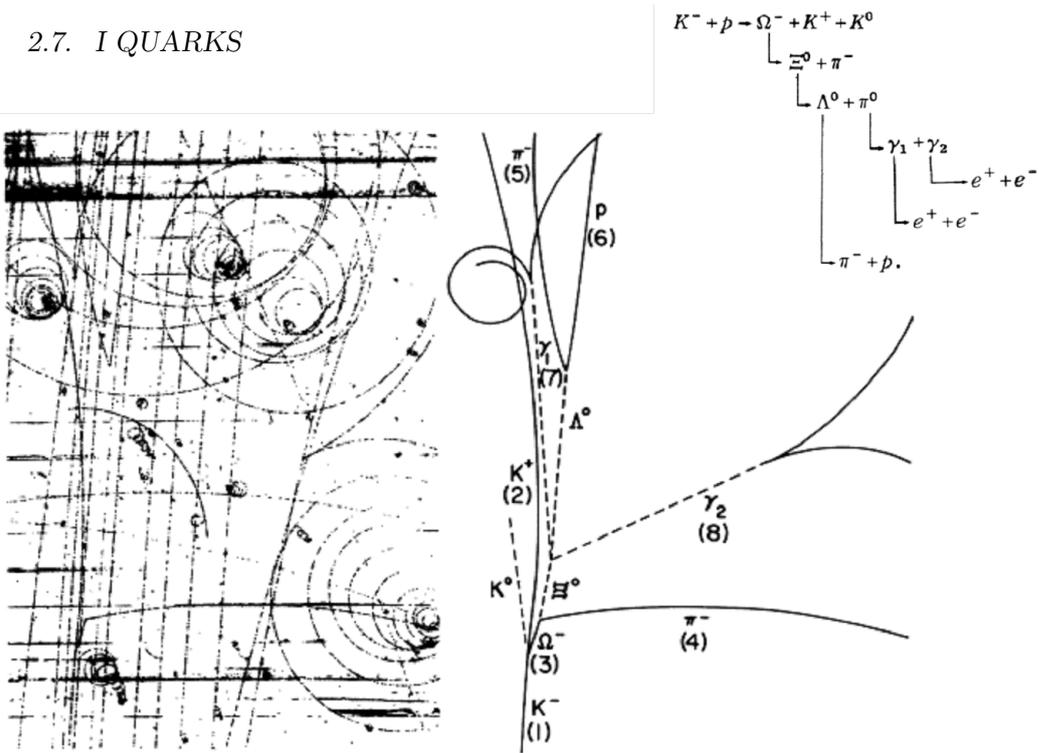


Figura 2.26: Produzione e decadimento in camera a bolle di una Ω^-

ragivano forte potessero essere costituite¹²⁹ solo da mesoni¹³⁰, cioè da coppie di quark/antiquark, oppure da barioni¹³¹, (antibarioni), cioè da tripletti di

della apparente violazione della statistica di Fermi, per esempio, nella Δ^{++} .

¹²⁹Per maggiori dettagli, cfr. "Introduction to elementary particles" di D. Griffiths.

¹³⁰In questo caso, ogni stato di quark/antiquark, doveva essere sostituito con la combinazione incolore per $SU3_c$ (singoletto)

$$|q\bar{q}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |q\bar{q}\rangle (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) \quad (2.7.214)$$

avendo posto R=rosso, G=verde, B=blu e avendo indicato con la barra i rispettivi anticolori. Ricordiamo che i colori si trasformano secondo la rappresentazione $\mathbf{3}$ mentre gli anticolori secondo la rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$.

¹³¹Abbiamo visto che nella decomposizione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ ci sono un decupletto, due ottetti e un singoletto. Se introduciamo anche $SU3_c$ di colore e imponiamo appunto che lo stato di colore sia completamente antisimmetrico per scambio, allora, visto che lo stato fondamentale del sistema qqq ha $L = 0$ e dunque è simmetrico per scambio, ecco che lo stato di *flavour* e di spin $SU3_f \otimes S$ deve essere simmetrico e questo lascia possibili per $SU3$ di sapore, solo il decupletto e un ottetto.

Se prendiamo, per esempio, il caso del protone, possiamo costruire la sua funzione d'onda iniziando con il combinare un quark u con un d nello stato $I = 0$ e spin nullo, ovvero

$$|ud - du\rangle \equiv |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle \equiv |u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow\rangle \quad (2.7.215)$$

e quindi combinando lo stato precedendo con un u^\uparrow per formare uno stato con $I = 1/2$, $S_z = +1/2$, cioè

$$|u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad (2.7.216)$$

quarks (antiquarks). In questo modo cadeva così sia il problema legato alla apparente violazione della statistica di Pauli che quello relativo al fatto che non esistessero, per esempio, né quarks liberi, né particelle fatte di due o quattro quarks ...

La simmetria esatta $SU(3)_C$ di colore si dimostrò presto molto feconda, conducendo, in ultima analisi, alla teoria che descrive le interazioni forti nel Modello Standard, cioè alla QCD (Quantum Chromo Dynamics), la cui trattazione, però, va oltre gli scopi di queste Note.

Intanto, con la scoperta¹³² delle correnti neutre al *CERN* nel 1973 in interazioni di neutrino/antineutrino in Gargamelle, si era aperta la strada alla unificazione fra l'elettromagnetismo e la teoria di Fermi delle interazioni deboli, prevista dalla teoria^{133,134} di Glashow, Weinberg e Salam già negli anni '60 e confermata sperimentalmente nel 1983 con la scoperta dei bosoni intermedi W^\pm e Z^0 da parte degli esperimenti *UA1* e *UA2* del *CERN*, scoperta che valse a Carlo Rubbia e Simon Van Der Meer il Nobel nel 1984.

Si tratta di una teoria basata sulla simmetria di gauge $SU(2)_{weak} \times U(1)_Y$ la quale, in virtù della interazione dei campi di gauge con un doppietto di bosoni di Higgs (ϕ^+ , ϕ^0) e del meccanismo della rottura spontanea della simmetria, conduce a una sola restante simmetria di gauge, cioè $U(1)_{em}$, avente per generatore il campo elettromagnetico A_μ , e a tre campi massivi¹³⁵, mediatori dell'interazione debole propriamente detta, W_μ^\pm e Z_μ^0 .

La conferma sperimentale della Teoria elettrodebole fu un po' l'atto di nascita del Modello Standard (di cui è parte integrante anche la *QCD*) le cui conferme sperimentali sarebbero giunte di lì a poco !

per poi rendere il vettore di stato completamente simmetrico per scambio, aggiungendo due permutazioni cicliche, ovvero

$$\begin{aligned} \sqrt{12} |prot\rangle &= |u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle + \\ &+ |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + \\ &+ |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle \end{aligned} \quad (2.7.217)$$

Per tenere conto, infine, del colore, ogni tripletto di quarks va sostituito con la combinazione completamente antisimmetrica di $SU(3)_c$ (singoletto), ovvero, ogni tripletto di quark compare nello stato del protone solo nella combinazione

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (|RGB\rangle + |GBR\rangle + |BRG\rangle - |RBG\rangle - |GBR\rangle - |BGR\rangle) \quad (2.7.218)$$

In modo del tutto simile si procede per gli altri barioni e per gli antibarioni, con la sola avvertenza che per questi ultimi, al posto dei colori ci saranno gli anticolori.

¹³²F.J. Hasert et al.: *Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in*

the Gargamelle neutrino experiment, Phys. Lett. 46B, 138 (1973)

¹³³S.L. Glashow: *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. 22, 579 (1961)

¹³⁴J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg: *Broken symmetries*, Phys. Rev. 127, 965 (1962)

¹³⁵Il meccanismo con il quale W^\pm e Z^0 acquistano massa attraverso il meccanismo della rottura spontanea va oltre gli scopi di queste Note.

2.8 Il Modello Standard: una introduzione

Che cosa prevede, allora, il Modello Standard ?

Iniziamo dalle interazioni.

Il MS assume che esse siano *locali*, descritte, nell'ambito di una teoria di campo relativistica, da una densità lagrangiana \mathcal{L} scalare sotto il gruppo di Lorentz ed hermitiana¹³⁶, costruita con i campi (e le loro derivate prime rispetto alle coordinate spazio-temporali) delle particelle coinvolte nell'interazione e con il campo del mediatore dell'interazione (per maggiori dettagli, cfr. Vol. IV). Le equazioni di moto per i campi si ottengono poi dal principio di minima azione che, a partire dalla densità lagrangiana data $\mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x)$, afferma che risulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} = 0 \quad (2.8.219)$$

Alla lagrangiana \mathcal{L} del MS è richiesto di essere invariante di gauge locale sotto il gruppo $SU(3)_C \otimes SU(2)_{weak} \otimes U(1)_Y$, cosa che permette alla teoria di essere *rinormalizzabile* ovvero di essere matematicamente coerente.

La simmetria è poi rotta spontaneamente secondo il meccanismo di Higgs, in modo da conferire massa alle particelle che la possiedono¹³⁷.

Veniamo ora alle particelle, soggetto e sorgenti delle interazioni.

Tratteremo quelle che oggi riteniamo siano elementari, insieme a quelle composite più importanti.

Esse si dividono in due grandi famiglie: quella dei *leptoni*¹³⁸ e quella degli *adroni*¹³⁹, distinte non più dal valore delle masse, come il nome lascerebbe

¹³⁶La richiesta che la teoria sia relativisticamente covariante implica in modo naturale che, data la struttura stessa delle equazioni di Lagrange, la densità lagrangiana \mathcal{L} debba essere scalare sotto il gruppo di Lorentz.

Quanto al fatto che essa debba essere anche hermitiana, questo discende dall'analogo classico in cui la lagrangiana è una funzione reale di coordinate lagrangiane anch'esse reali. Niente vieta di rappresentare una coppia omogenea di queste variabili lagrangiane (q_1, q_2) attraverso una singola variabile complessa $q \equiv q_1 + iq_2$, ma rispettando comunque il fatto che \mathcal{L} resti reale. Questo impone che q e q^* entrino in \mathcal{L} in modo simmetrico.

In QFT, questo significa che, nel caso di campi complessi, Φ e Φ^\dagger , essi devono essere presenti nella lagrangiana allo stesso titolo ed \mathcal{L} deve essere hermitiana, in modo che le equazioni di moto per Φ e Φ^\dagger , ottenute dal principio di minima azione a partire da \mathcal{L} , risultino automaticamente hermitiane coniugate.

¹³⁷I dettagli di come questo avvenga vanno oltre lo scopo di queste Note.

¹³⁸Il nome *leptone* deriva dal greco $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\nu$ e significa *piccolo, minuto, leggero*.

Capostipite della famiglia dei leptoni è infatti l'elettrone, che è la particella carica di massa più piccola esistente in natura.

¹³⁹Il nome *adrone* deriva dal greco $\alpha\delta\rho\omicron\varsigma$ e significa *spesso, grosso*. Con questo nome si indicano tutte le particelle che subiscono l'interazione forte, capostipite delle quali è certamente il protone, il quale, però, oggi, non lo annoveriamo più fra le particelle elementari propriamente dette !

intendere e come era effettivamente in principio, bensì, come abbiamo già detto, dal tipo di interazione che le particelle stesse subiscono.

Infine ci sono i mediatori stessi delle interazioni, che nascono dalla quantizzazione dei campi i quali trasmettono l'interazione stessa, come il fotone, i già citati bosoni W^\pm e Z^0 , mediatori dell'interazione debole, e infine i gluoni, mediatori dell'interazione forte¹⁴⁰.

• I leptoni

I leptoni sono, per definizione, le particelle che interagiscono unicamente in modo elettrodebole¹⁴¹. La famiglia dei leptoni elementari è organizzata in tre generazioni di massa crescente, cioè

$$\begin{array}{llll} \nu_e(\bar{\nu}_e) & \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) & \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau) & \text{carica } 0 \\ e^-(e^+) & \mu^-(\mu^+) & \tau^-(\tau^+) & \text{carica } -1(+1) \end{array}$$

Come si vede, ogni leptone elementare¹⁴² ha il proprio antileptone che differisce, nel caso di quelli carichi, per il segno della carica elettrica.

Nel caso dei neutrini, è ancora dibattuto il fatto se il neutrino e l'antineutrino siano diversi oppure si tratti della stessa particella, differenziata nell'interazione solo dalla sua elicità.

Occorre anche ricordare, sempre a proposito dei neutrini, che anche della loro massa si sa poco ... Nel MS , date le conoscenze all'epoca in cui la teoria fu originariamente formulata, essa fu assunta essere nulla¹⁴³ mentre oggi è considerato ormai certo che essa non lo sia, anche se è certamente piccolissima

¹⁴⁰La gravitazione è fuori dal Modello Standard.

¹⁴¹Abbiamo accennato già al fatto che la teoria elettrodebole è una teoria di gauge basata sul gruppo $SU(2)_{weak} \times U(1)_Y$: in ciascuna generazione, la coppia neutrino-leptone carico costituisce, per la parte con chiralità negativa (left), un doppietto di isospin debole, contribuendo sia all'interazione debole propriamente detta che, per la parte carica, anche a quella elettromagnetica. Quanto alla componente con chiralità positiva (right) del leptone carico, essa forma un singoletto di isospin debole e contribuisce solo all'interazione elettromagnetica (il neutrino, nel MS , entra solo nel doppietto di isospin e quindi per la sua componente a chiralità negativa).

Si ricorda, infine, che i due proiettori chirali, positivo (right) e negativo (left), che operano sulle soluzioni ψ dell'equazione di Dirac sono gli operatori $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ dove $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. In particolare, il proiettore di chiralità negativa che seleziona la componente left definita come $\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$ seleziona, almeno nel caso ultrarelativistico, la componente di elicità negativa per le particelle e quella a elicità positiva per le antiparticelle.

¹⁴²Riguardo a elettrone e muone, abbiamo già detto come e quando sono stati scoperti. L'ultimo leptone carico, il τ^\pm , è stato scoperto in tempi relativamente più recenti dal gruppo di Perl a SLAC, in interazioni e^+e^- .

M.L. Perl et al.: *Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation*, Phys. Rev. Lett. 35, 1489 (1975)

¹⁴³E' questo che consente di non occuparci della componente con chiralità positiva (right) del campo del neutrino; infatti il termine di massa presente nella Lagrangiana del campo di Dirac, i.e. $m\bar{\psi}\psi$, coinvolge necessariamente entrambe le proiezioni left e right, essendo

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

sulla scala delle masse delle particelle elementari, cioè dell'ordine dell' eV o inferiore.

Quanto invece alla massa dei leptoni carichi, abbiamo

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}; \quad m_\mu = 105.6 \text{ MeV} \quad m_\tau = 1777 \text{ MeV}$$

Vale infine la pena ricordare che i leptoni carichi più pesanti sono instabili¹⁴⁴ (ancorchè elementari, cioè senza struttura interna). Per esempio

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \tau = 2.197 \mu s$$

mentre il τ^- , che, data la sua maggior massa, ha molti più canali di decadimento a disposizione, ha una vita media $\tau = 0.29 \text{ ps}$, con un BR del 17.8% in elettrone, neutrino e antineutrino; del 17.4% in muone, neutrino e antineutrino mentre il resto va in neutrino e adroni.

Riguardo infine ai leptoni composti, non ne esistono.

Per ragioni storiche, infatti, non consideriamo tali il *positronio* e neppure il *muonio*, cioè il sistema $\mu^+ e^-$, o l'antimuonio, i quali, essendo tenuti insieme dalla forza elettromagnetica, sono piuttosto considerati degli *atomi*, ancorché *esotici* !

Dal punto di vista delle interazioni, come abbiamo già detto, i leptoni, a parte quella gravitazionale, sentono solo l'interazione elettrodebole.

Quanto all'interazione elettromagnetica, la subiscono, ovviamente, solo i leptoni carichi (e, μ, τ) ed essa è descritta dalla densità lagrangiana¹⁴⁵

$$\mathcal{L}(x) = -e J_{em}^\mu(x) A_\mu(x) \quad (2.8.225)$$

dove $e \equiv \sqrt{\alpha}$ rappresenta la carica del positrone mentre $A_\mu(x)$ è il campo elettromagnetico, cioè il campo del fotone.

¹⁴⁴L'interazione che è responsabile della loro instabilità e quindi dei loro decadimenti è, ovviamente, l'interazione debole stessa !

¹⁴⁵Ricordiamo per completezza che la teoria di campo dell'elettrodinamica, cioè la *QED*, costituisce la teoria di gauge "prototipo".

Vediamo brevemente il significato di questa affermazione.

Partiamo per questo dalla sua lagrangiana: essa è ($c = 1$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - eq \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (2.8.220)$$

I primi due termini si riferiscono ai campi liberi (di Dirac ed elettromagnetico) mentre il terzo termine concerne l'interazione, descritta attraverso la sostituzione canonica nella lagrangiana libera di Dirac di $i\partial_\mu$ con $i\partial_\mu - qe A_\mu$, dove q sta per la carica della particella descritta dal campo di Dirac, in unità di $e \equiv |e|$.

Ricordiamo che la gauge di prima specie (gruppo $U(1)$)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\theta} \bar{\psi}(x) \quad (2.8.221)$$

è una invarianza in forma della lagrangiana e conduce, via il teorema di Noëther, alla conservazione della quadricorrente $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$.

Quanto poi alla corrente elettromagnetica $J_{em}^\mu(x)$ associata ai leptoni carichi, essa è data dall'espressione¹⁴⁶

$$J_{em}^\mu(x) \equiv q \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \psi_l(x) = - \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \psi_l(x) \quad \text{con } l = e^-, \mu^-, \tau^- \quad (2.8.226)$$

Venendo adesso all'interazione debole propriamente detta, come sappiamo, i mediatori che la caratterizzano sono i bosoni vettori W^\pm e Z^0 ($M_W = 80.399 \pm 0.023 \text{ GeV}$, $M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$).

I W^\pm sono i mediatori dell'interazione, cosiddetta *di corrente carica*, descritta, limitatamente al settore puramente leptonic, dalla densità lagrangiana¹⁴⁷

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin\theta_W} \left[J_\mu(x) W^\mu(x) + J_\mu^\dagger(x) W^{\dagger\mu}(x) \right] \quad (2.8.227)$$

dove θ_W è l'angolo di Weinberg, legato alle masse dei bosoni vettori dalla relazione $\cos\theta_W \equiv M_W/M_Z$, da cui segue che $\sin^2\theta_W = 0.23117 \pm 0.00016$, mentre risulta¹⁴⁸

$$J_\mu(x) = \sum \left[\bar{\nu}(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) l(x) \right]; \quad J_\mu^\dagger(x) = \sum \left[\bar{l}(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \nu(x) \right] \quad (2.8.228)$$

dove la somma è estesa alle tre generazioni.

Questa interazione si chiama *di corrente carica* perché la carica elettrica del sistema leptonic cambia al vertice dell'interazione e, dunque, la conservazione della carica elettrica impone che il mediatore sia esso stesso carico, esattamente come accade nel modello¹⁴⁹ di Yukawa.

Invece, l'analoga trasformazione di fase locale

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) = e^{i\theta(x)} \bar{\psi}(x) \quad (2.8.222)$$

non è una simmetria se ci limitiamo al solo campo di Dirac, in quanto

$$\bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + (\partial_\mu \theta) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.8.223)$$

Essa però lo ridiventa se, approfittando del fatto che il potenziale A_μ è indeterminato a meno di una trasformazione di gauge di seconda specie, si pone anche

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{qe} \partial_\mu \theta(x) \quad (2.8.224)$$

La (2.8.224) insieme alla (2.8.222) definiscono la simmetria di gauge locale abeliana $U(1)$, caratteristica della *QED* !

¹⁴⁶Il campo ψ_l è, per definizione, il campo che contiene l'operatore di distruzione della particella e quindi, come tale annichila particelle di carica negativa, da cui $q = -1$.

¹⁴⁷Il campo che descrive i bosoni W^\pm è il campo vettoriale carico $W_\mu(x)$ insieme al suo hermitiano coniugato $W_\mu^\dagger(x)$: per definizione $W_\mu(x)$ annichila il W^+ e crea il W^- .

¹⁴⁸Non si confonda la corrente elettromagnetica con la corrente debole carica: la prima è data dall'espressione (2.8.226) mentre la seconda dalla (2.8.228).

¹⁴⁹Il paragone con la teoria di Yukawa è più profondo di quanto non possa apparire ... Ciascun doppietto leptonic costituisce, come si è detto, un doppietto di isospin debole \vec{T} .

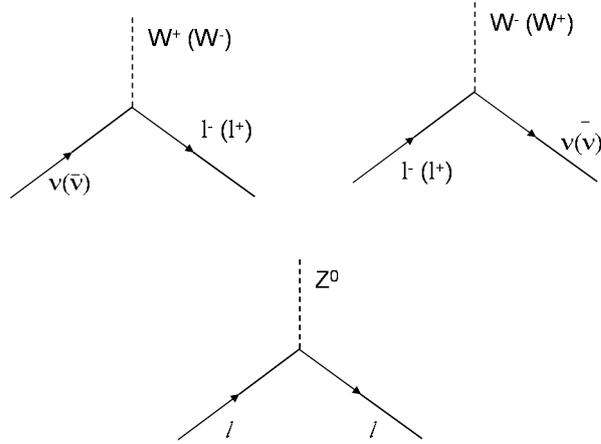


Figura 2.27: Vertici deboli leptonic

La trasformazione di un neutrino in un leptone negativo oppure quella di un antileptone positivo in un antineutrino si accompagna, infatti, all'emissione di un W^+ oppure all'assorbimento di un W^- virtuali¹⁵⁰; mentre

Esattamente come la lagrangiana di interazione di Yukawa del campo dei nucleoni con il campo scalare mesonico era

$$\mathcal{L} = (\bar{\mathcal{N}} I_+ \mathcal{N}) \Phi + (\bar{\mathcal{N}} I_- \mathcal{N}) \Phi^\dagger$$

dove

$$\mathcal{N} \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

adesso, definendo in modo analogo, per ogni generazione leptonica $i = 1, 2, 3 = e, \mu, \tau$, il doppietto debole (nella parte "right" il campo del neutrino è assente, ed esso è fatto solo dalla parte "right" del campo del leptone carico il quale è un singoletto di SU_{2weak})

$$\Psi_i \equiv \begin{pmatrix} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_{\nu_i} \\ \psi_{l_i} \end{pmatrix}$$

dopo la rottura spontanea della simmetria $SU(2)_{weak} \times U(1)_Y$, risulta appunto che

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \left[\left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T_+ \Psi_i \right) W_\mu + \left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T_- \Psi_i \right) W_\mu^\dagger \right] \quad (2.8.229)$$

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g}{\cos\theta_W} \sum_i \left[\left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T_3 \Psi_i \right) - \sin^2\theta_W \left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu Q \Psi_i \right) \right] Z_\mu \quad (2.8.230)$$

dove la teoria elettrodebole identifica poi $g \sin\theta_W$ con la carica elettrica del positrone e , mentre Q rappresenta l'operatore di carica elettrica.

¹⁵⁰Ricordiamo quanto già abbiamo avuto modo di osservare riguardo al concetto di particella virtuale. L'affermazione "il processo $\nu \rightarrow e^-$ si accompagna all'emissione di un W^+ virtuale" vuole dire solo che la corrente responsabile del processo indicato, cioè la corrente $\bar{e}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu$ è accoppiata al campo W^\dagger mentre la corrente $\bar{\nu}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} e$ è accoppiata al

la trasformazione di un leptone negativo in un neutrino oppure quella di un antineutrino in un leptone positivo, prevede la simultanea emissione di un W^- oppure l'assorbimento di un W^+ virtuali.

Si osservi infine che al vertice dell'interazione di CC il sistema leptonic cambia¹⁵¹ *ma sempre restando nell'ambito della stessa generazione !*

Vedremo come, per il sistema dei quarks, questo non resti vero ...

Il bosone Z^0 , invece, è il mediatore delle interazioni deboli *di corrente neutra*. In questo tipo di interazioni, l'identità stessa (e non solo la generazione ...) del sistema leptonic, nel vertice dell'interazione, non cambia, rassomigliando in questo molto strettamente al caso elettromagnetico.

Questo tipo di interazione è descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e}{\sin(2\theta_W)} J_\mu^0(x) Z^\mu(x) \quad (2.8.231)$$

dove $Z^\mu(x)$ è il campo autoaggiunto (come quello elettromagnetico) del bosone vettore Z mentre $J_\mu^0(x)$ è la corrente debole neutra, definita come

$$J_\mu^0(x) = \sum \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (C_V - \gamma_5 C_A) \psi(x) \quad (2.8.232)$$

e la somma è estesa a tutti i campi leptonic (carichi o neutri), mentre

$$C_V \equiv t_3 - 2q \sin^2 \theta_W; \quad C_A \equiv t_3 \quad (2.8.233)$$

essendo q la carica elettrica del leptone in questione in unità di cariche positroniche (nulla per i neutrini e pari a -1 per i leptoni carichi), mentre t_3 è l'autovalore della terza componente dell'*isospin debole*, i.e.

$$t_3 = +1/2 \quad \text{per } \nu \quad (2.8.234)$$

$$t_3 = -1/2 \quad \text{per } l \quad (2.8.235)$$

campo W !

¹⁵¹Come è, allora, che l'interazione debole di CC è responsabile del decadimento del muone (seconda generazione) in cui si produce un elettrone (prima generazione) ?

Ricordiamo che la reazione in questione è $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$: essa avviene in quanto il muone si trasforma in neutrino muonico emettendo un W^- virtuale (quindi con una reazione interna alla seconda generazione leptonic) il quale, a sua volta, decade in elettrone e antineutrino elettronico (quindi con una reazione interna alla prima generazione). Altri canali in cui il W^- potrebbe teoricamente decadere risultano in questo caso vietati dalla conservazione dell'energia, mentre sono aperti, per esempio, nel caso del decadimento ben più ricco del τ^- (e del τ^+ !).

• **Gli adroni**

Venendo ora agli adroni, i loro costituenti elementari sono anch'essi organizzati in una famiglia fatta da tre generazioni di quarks (e relative anti-particelle) di massa crescente, e cioè

$$\begin{array}{llll} u(\bar{u}) & c(\bar{c}) & t(\bar{t}) & q = +2/3 \ (-2/3) \\ d(\bar{d}) & s(\bar{s}) & b(\bar{b}) & q = -1/3 \ (+1/3) \end{array}$$

Essi interagiscono sia in modo elettrodebole che in modo forte, ed è quest'ultima interazione, appunto, quella che li caratterizza, descritta come si è già detto, dalla *QCD*.

Quanto all'interazione debole, però, c'è un'importante novità da segnalare, rispetto al caso leptonic prima considerato.

I campi dei quarks che entrano nella definizione della corrente carica debole non hanno *sapore* forte definito, cioè nel caso dei quarks non è rispettata, come accade in modo stretto per i leptoni, la gerarchia definita dalle diverse generazioni.

Questa novità è la generalizzazione del fatto già notato fin dal 1963 da Cabibbo¹⁵² e quindi un anno prima della formulazione della teoria dei quarks, per cui si potevano descrivere con la stessa interazione (universalità delle interazioni deboli) processi simili come, per esempio

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (2.8.236)$$

$$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (2.8.237)$$

pur di ridefinire la parte adronica della corrente debole carica nel modo seguente

$$J^\mu = \cos\theta_C J_{\Delta S=0}^\mu + \sin\theta_C J_{\Delta S=1}^\mu \quad (2.8.238)$$

che, nell'odierno linguaggio dei quarks, equivale a sostituire al doppietto $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ il doppietto $\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}$ dove $d_C \equiv d \cos\theta_C + s \sin\theta_C$, con $\sin\theta_C = 0.2196 \pm 0.0023$.

In questo modo trovava una sua naturale spiegazione anche l'apparente stonatura secondo cui risultavano leggermente differenti le costanti di accoppiamento (di Fermi) che descrivevano, rispettivamente, il decadimento debole del muone (G_F) e quello del pione ($G_F \cos\theta_C$).

Va comunque ricordato che questa idea creò un problema con le correnti neutre. Queste infatti, come abbiamo avuto modo già di vedere nel settore leptonic, sono, similmente all'interazione elettromagnetica, della forma¹⁵³

¹⁵²N. Cabibbo: *Unitary symmetry and leptonic decays*

Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963)

¹⁵³Più esplicitamente ricordiamo che risulta $O^\mu = \gamma^\mu(C_V - \gamma_5 C_A)$.

$J^\mu = \bar{\psi} O^\mu \psi$ dove $\bar{\psi}$ e ψ si riferiscono allo stesso sistema fisico e O^μ è una opportuna combinazione di matrici gamma. La conseguenza è che, poiché il campo d_C risulta essere una combinazione lineare di quelli dei quarks d ed s , le correnti deboli neutre dovevano allora consentire processi con $\Delta S = \pm 1$ come, per esempio, il decadimento del K^0 in μ^+ e μ^- . Questa reazione, però,

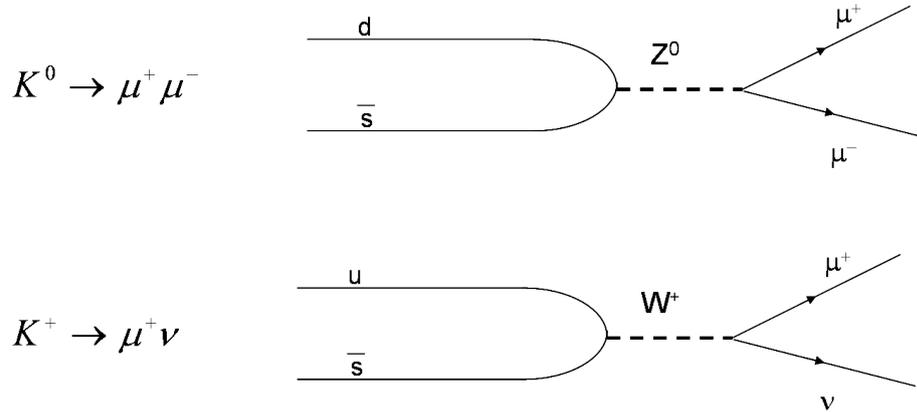


Figura 2.28: Decadimenti di corrente carica e neutra del K

ha un BR estremamente piccolo ($BR(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (7.15 \pm 0.16) \cdot 10^{-9}$) specialmente se confrontato con l'analogo processo carico $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$, che, invece, ha un BR addirittura pari al 63.5% !

Come possono essere conciliati fra loro questi due fatti sperimentali, apparentemente contraddittori nell'ambito della teoria elettrodebole ?

Furono Glashow, Iliopoulos e Maiani che, nel 1970, formularono l'ipotesi dell'esistenza di un quarto quark, il *charm*, fratello più massivo del quark *up*, attraverso il quale si poteva giungere a definire un meccanismo di soppressione dei processi di corrente neutra con $\Delta S = \pm 1$ (ovvero, dei processi *FCNC* cioè mediati da *flavour changing neutral currents*): era il cosiddetto *GIM*¹⁵⁴ *mechanism*.

Questo meccanismo, nella sua sostanza, è molto semplice.

Con il quarto quark c , al posto di un singolo doppietto si potevano costruire due doppietti di quarks i quali, per quanto riguarda le interazioni deboli, erano mescolati attraverso una matrice ortogonale (rotazione di Cabibbo)

$$\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u & c \\ d_C & s_C \end{pmatrix} \quad (2.8.239)$$

dove

$$d_C \equiv d \cos\theta_C + s \sin\theta_C; \quad s_C \equiv s \cos\theta_C - d \sin\theta_C \quad (2.8.240)$$

¹⁵⁴S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani: *Weak Interactions with lepton-hadron symmetry*,

Phys. Rev. 2D, 1285 (1970)

In questo modo, la corrente neutra, per la parte relativa ai quarks di carica $-1/3$, era fatta oltre che dal termine $\bar{d}_C O^\mu d_C$ anche dal termine $\bar{s}_C O^\mu s_C$. E' allora facile convincersi che la somma $\bar{d}_C O^\mu d_C + \bar{s}_C O^\mu s_C$ risulta indipendente dall'angolo di Cabibbo θ_C , ed è semplicemente pari a $\bar{d} O^\mu d + \bar{s} O^\mu s$ per cui risulta¹⁵⁵ in questo modo che, effettivamente, *non* possono esistere transizioni di corrente neutra fra quarks di tipo differente (almeno all'ordine perturbativo più basso).

Allo scopo di comprendere meglio quanto aspettarsi nel caso di tre generazioni, osserviamo che la rotazione descritta dall'angolo di Cabibbo rappresenta, in realtà, la più generale trasformazione ortonormale di base nello spazio (d, s) .

Se ci limitiamo, infatti, alle prime due generazioni di quarks, evidentemente la più generale trasformazione di base che mescola i quarks d ed s è così fatta

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} \equiv V \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}; \quad \text{dove } V \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.8.241)$$

Il fatto che V sia unitaria implica che valgano le condizioni seguenti

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.8.242)$$

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (2.8.243)$$

$$ac^* + bd^* = 0 \quad (2.8.244)$$

Per vedere a che cosa queste condizioni conducano, iniziamo ponendo, in tutta generalità,

$$a = |a| e^{i\alpha}, \quad b = |b| e^{i\beta}, \quad c = |c| e^{i\gamma}, \quad d = |d| e^{i\delta},$$

Evidentemente le due equazioni (2.8.242) e (2.8.243) implicano che

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 = |c|^2 + |d|^2$$

ovvero che

$$|a| = \cos\theta, \quad |b| = \sin\theta \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

¹⁵⁵Naturalmente il quarto quark c'era da trovarlo ! E questo accadde nel 1974 con la scoperta del mesone J/ψ , sistema legato $c\bar{c}$, da parte delle due collaborazioni dirette, rispettivamente, da *S.Ting* e *B.Richter*. L'esistenza del mesone fu immediatamente confermata anche da *Adone* a Frascati che non la scoprì solo perché era previsto che il collider e^+e^- arrivasse al massimo a 3 GeV nel *CM*, mentre la massa della J/ψ è pari a $3096.87 \pm 0.04\text{ MeV}$...

Proprio il caso di dire che *Mancò la fortuna, non il valore !*

J.J. Aubert et al.: *Experimental observation of a heavy particle J*,
Phys. Rev. Lett. 33, 1404 (1974)

J.E. Augustin et al.: *Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation*,
Phys. Rev. Lett. 33, 1406 (1974)

C. Bacci et al.: *Preliminary result of Frascati (ADONE) on the nature of a new 3.1 GeV particle produced in e^+e^- annihilation*,
Phys. Rev. Lett. 33, 1408 (1974)

$$|c| = \sin\phi, \quad |d| = \cos\phi \quad \text{con } 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

Sostituendo allora nella terza equazione, abbiamo

$$\cos\theta \sin\phi e^{i(\alpha-\gamma)} + \sin\theta \cos\phi e^{i(\beta-\delta)} = 0$$

ovvero

$$\cos\theta \sin\phi e^{i(\alpha-\gamma)} e^{-i(\beta-\delta)} + \sin\theta \cos\phi = 0$$

Affinché questa equazione possa essere soddisfatta, il fattore di fase deve essere reale e inoltre, essendo per ipotesi sia $\cos\theta \sin\phi$ che $\sin\theta \cos\phi$ entrambi non negativi, occorre che

$$\begin{aligned} e^{i[(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)]} = -1 &\Rightarrow (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) = \pi \\ \Rightarrow \delta - \beta = -\alpha + \gamma + \pi &\quad (2.8.245) \end{aligned}$$

L'equazione diviene allora

$$\cos\theta \sin\phi - \sin\theta \cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\phi - \theta) = 0$$

e dunque ne segue che $\phi = \theta$, essendo entrambi gli angoli, per ipotesi, nel primo quadrante. Quanto alle fasi, introducendo l'angolo ξ con la definizione

$$\delta - \beta = \gamma - \alpha + \pi \equiv \xi \quad \Rightarrow \quad \delta = \xi + \beta; \quad \gamma = \alpha + \xi - \pi$$

ecco che, riguardo alla matrice V , si ha infine

$$V \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\beta} \\ -\sin\theta e^{i\alpha} e^{i\xi} & \cos\theta e^{i\beta} e^{i\xi} \end{pmatrix} \quad (2.8.246)$$

E' evidente, però, che le condizioni (2.8.242) - (2.8.244) sono invarianti rispetto al fatto che si moltiplichino una riga o una colonna per un qualunque fattore di fase.

Questa invarianza corrisponde, dal punto di vista fisico, alla possibilità di scegliere arbitrariamente la fase di ciascun campo dei quarks.

Usando questa arbitrarietà, le tre fasi che compaiono nella matrice possono essere riassorbite¹⁵⁶ e possiamo arrivare così alla soluzione

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.8.247)$$

ovvero all'originale soluzione di Cabibbo in cui la matrice di mixing è una matrice ortogonale con determinante +1.

¹⁵⁶Ci si potrebbe chiedere, visto che le fasi libere sui campi dei quarks sono quattro e noi abbiamo usato solo tre gradi di libertà a esse collegate, dove questo quarto grado di libertà sia finito! Esso è rimasto libero ma, purtroppo, è anche del tutto inutile... Ricordiamo infatti che un grado di libertà legato alle fasi è irrilevante dal punto di vista fisico perché è quello per cui la matrice viene semplicemente moltiplicata per un fattore di fase globale.

Con tre famiglie di quarks, la generalizzazione della rotazione di Cabibbo è la matrice unitaria di Cabibbo, Kobayashi e Maskawa^{157,158}

$$V_{CKM} \equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.8.257)$$

¹⁵⁷M. Kobayashi, T. Maskawa: *CP violation in renormalizable theory of weak interactions*,

Progr. Theor. Phys. 49, 652 (1973).

¹⁵⁸Il carattere unitario della matrice V_{CKM} è legato alla universalità delle interazioni deboli unitamente al fatto che, nel settore dei quarks, non ci sono altri soggetti, oltre ai quarks noti, con cui questi, quanto alle interazioni deboli, si "mescolano" (sulla base dell'unitarietà, comunque, niente vieterebbe l'esistenza di una quarta generazione, purché indipendente dalle prime tre ...).

Vediamo quali sono le conseguenze che discendono dal carattere unitario di V_{CKM} .

Per ipotesi abbiamo

$$V V^\dagger = I \quad \Rightarrow \quad V_{ij} V_{kj}^* = \delta_{ik} \quad (2.8.248)$$

Immaginiamo ora di porre, in tutta generalità

$$V_{ij} \equiv |V_{ij}| e^{i\phi_{ij}}$$

allora la condizione (2.8.248) per $i = k$ si limita a dire che la somma dei moduli quadri degli elementi della matrice V_{CKM} presenti in ogni riga deve essere uguale all'unità.

Si tratta dunque di tre equazioni (reali) per i moduli $|V_{ij}|$.

Veniamo ora al caso in cui $i \neq k$: osserviamo che

$$V_{ij} V_{kj}^* = (V_{kj} V_{ij}^*)^*$$

e dunque possiamo limitarci alle equazioni che possiamo scrivere a partire dalla (2.8.248) quando, per esempio, $k > i$ (le altre sono le loro complesse coniugate).

Si tratta di tre equazioni complesse che si traducono in tre condizioni su $|V_{ij}|$ e tre condizioni sulle fasi ϕ_{ij} .

A causa delle condizioni legate all'unitarietà di V_{CKM} , dunque, rimaniamo con

$9 - 3 - 3 = 3$ gradi di libertà per i moduli $|V_{ij}|$;

$9 - 3 = 6$ gradi di libertà per le fasi ϕ_{ij} .

Osserviamo adesso che, attraverso la scelta arbitraria delle fasi dei campi dei quarks, possiamo alterare le fasi ϕ_{ij} in modo che risulti

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij} + \theta_i - \xi_j$$

e questo corrisponde alla disponibilità di $6 - 1 = 5$ gradi di libertà per modificare arbitrariamente le fasi ϕ_{ij} (un grado di libertà è assorbito da quello "inutile" che si traduce nella moltiplicazione dell'intera matrice per uno stesso fattore di fase ...).

Usando questa arbitrarietà, finiamo quindi per restare con

3 gradi di libertà per i moduli $|V_{ij}|$,

1 grado di libertà effettivo per le fasi.

Se invece che tre famiglie di quarks ne avessimo n allora, ripetendo quanto detto in precedenza, partiremmo, per quanto riguarda i moduli $|V_{ij}|$, da n^2 gradi di libertà, ridotti di n per le equazioni reali ottenute dalla condizione di unitarietà per $i = k$, cioè riguardo alla diagonale della matrice $V V^\dagger$, e ancora ridotti di $\frac{n(n-1)}{2}$ a causa delle equazioni complesse per i termini fuori diagonale di $V V^\dagger$.

Resteremmo quindi con

$$n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

gradi di libertà per i moduli $|V_{ij}|$.

Quanto poi alle fasi, partiremmo sempre da n^2 gradi di libertà, da cui dovremmo sottrarre $\frac{n(n-1)}{2}$ (equazioni fuori diagonale, di cui sopra), rimanendo così, sulla base delle sole condizioni legate all'unitarietà, con

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

gradi di libertà per le fasi. Usando poi i $(2n-1)$ gradi di libertà legati alla scelta arbitraria delle fasi dei campi degli stessi quarks, finiremmo infine con

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

gradi di libertà residui sulle fasi (a parte, beninteso, la fase "globale").

Tornando adesso al caso della matrice V_{CKM} , esistono vari modo di parametrizzarla, fermo restando il fatto che i gradi di libertà sono tre per i moduli degli elementi della matrice e uno per una fase (non banale).

Uno è quello di mescolare fra loro generazioni di quarks differenti attraverso varie "rotazioni".

Quella più comunemente usata (*PDG*) si ottiene a partire dalla seguente matrice unitaria

$$U = R_{23} \cdot R_{13}(\delta) \cdot R_{12} \quad (2.8.249)$$

dove

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8.250)$$

$$R_{13}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \quad (2.8.251)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \quad (2.8.252)$$

moltiplicando l'ultima colonna della matrice U per $e^{-i\delta}$ e la seconda e la terza riga della stessa matrice per $e^{i\delta}$. Si ottiene così l'espressione seguente

$$V_{CKM} \equiv \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.8.253)$$

dove, per semplicità, abbiamo definito $\cos\theta_{ij} \equiv c_{ij}$; $\sin\theta_{ij} \equiv s_{ij}$ e $\delta \equiv \delta_{ij}$.

Si osservi che la matrice U sopra definita ha determinante

$$\det(U) = e^{-i\delta}$$

mentre la matrice V_{CKM} , ottenuta dalla matrice U nel modo sopra specificato, ha determinante

$$\det(V_{CKM}) = \det(U) \cdot e^{-i\delta} \cdot e^{i\delta} \cdot e^{i\delta} = 1 \quad (2.8.254)$$

Posto¹⁵⁹ allora

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \equiv V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (2.8.262)$$

ecco che, esattamente come nel caso leptonic (universalità delle interazioni deboli), l'interazione di corrente carica a livello dei quarks è descritta nel *MS* dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CC}(x) = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin\theta_W} \left[J_\mu(x) W^\mu(x) + J_\mu^\dagger(x) W^{\dagger\mu}(x) \right] \quad (2.8.263)$$

con

$$J_\mu = \bar{u} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) d' + \bar{c} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) s' + \bar{t} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) b' \quad (2.8.264)$$

$$J_\mu^\dagger = \bar{d}' \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u + \bar{s}' \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) c + \bar{b}' \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) t \quad (2.8.265)$$

Siccome sperimentalmente, posto $\lambda \equiv s_{12} = \sin\theta_C$, risulta

$$s_{23} = A \lambda^2, \quad s_{13} e^{-i\delta} = A \lambda^3 (\rho - i\eta) \quad \text{con } A, \rho, \eta \text{ di } \mathcal{O}(1) \quad (2.8.255)$$

ne segue che, a meno di termini $\mathcal{O}(\lambda^4)$, possiamo scrivere

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A \lambda^3 (\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A \lambda^2 \\ A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta) & -A \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8.256)$$

che è la parametrizzazione di Wolfenstein di cui alla referenza

L. Wolfenstein: *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix*, Phys. Rev. Lett. 51, 1945 (1983)

¹⁵⁹Ci si potrebbe chiedere come mai il mixing debba avvenire sui quarks con carica $-1/3$ e non, per esempio, su quelli di carica $+2/3$... In realtà si tratta solo di una scelta convenzionale, nata con l'idea di Cabibbo di mescolare fra loro, con una rotazione, i quarks d ed s (visto che il quark c ancora non era noto)

Per rendercene conto, può essere utile provare a riscrivere le correnti J_μ e J_μ^\dagger dopo aver rinominato i campi dei quarks nel modo seguente:

$$u_1 \equiv u; \quad u_2 \equiv c; \quad u_3 = t \quad (2.8.258)$$

$$d_1 \equiv d; \quad d_2 \equiv s; \quad d_3 = b \quad (2.8.259)$$

Risulta

$$J_\mu = \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) V_{ik} d_k = V_{ik} \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) d_k \quad (2.8.260)$$

$$J_\mu^\dagger = V_{ik}^* \bar{d}_k \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i = \bar{d}_k \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i V_{ik}^* \quad (2.8.261)$$

ovvero nulla cambia nelle correnti adroniche se il mixing viene descritto sui quarks con carica $+2/3$, pur di usare la matrice hermitiana coniugata della V_{ik} precedentemente introdotta e definita dalla (2.8.262).

In realtà, volendo essere ancora più "democratici" fra i due tipi di quarks (ma complicandoci un po' la vita), si potrebbero addirittura usare due matrici unitarie, la matrice U che agisce sui quarks di carica $2/3$ e la matrice D che agisce su quelli di carica $-1/3$: l'unico vincolo da rispettare sarebbe quello per cui $U^+ D = V_{CKM}$.

e così pure l'interazione di corrente neutra mantiene anch'essa la stessa struttura¹⁶⁰ che nel caso leptonic, cioè risulta

$$\mathcal{L}_{NC}(x) = -\frac{e}{\sin(2\theta_W)} J_\mu^0(x) Z^\mu(x) \quad (2.8.267)$$

con

$$J_\mu^0(x) \equiv \sum_i \bar{q}_i(x) \gamma^\mu (C_V - \gamma_5 C_A) q_i(x) \quad (2.8.268)$$

dove q_i indica uno qualsiasi dei sei campi dei quark, e C_V e C_A sono ancora definiti dalla (2.8.233) per cui, come nel caso leptonic, risulta

$$T_3 = +1/2 \quad \text{per } u, c, t \quad (2.8.269)$$

$$T_3 = -1/2 \quad \text{per } d, s, b \quad (2.8.270)$$

E' interessante, a questo punto, vedere che cosa succede sotto le simmetrie discrete di parità P e coniugazione di carica C alle correnti deboli: ci limiteremo per semplicità a considerare quelle di corrente carica.

Inizieremo studiando il caso che si avrebbe in assenza di flavour mixing¹⁶¹.

In termini dei simboli u_i e d_i definiti in una nota precedente, risulta

$$J_\mu = \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d_i \quad (2.8.271)$$

$$J_\mu^\dagger = \bar{d}_i \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u_i \quad (2.8.272)$$

Ma l'azione delle simmetrie P e C sui campi di Dirac, affinché esse siano separatamente conservate nell'interazione elettromagnetica, è definita nel modo seguente¹⁶²

$$P : \quad \psi(x) \rightarrow \gamma^0 \psi(Px) e^{-i\eta_P} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(Px) \gamma^0 e^{i\eta_P} \quad (2.8.280)$$

$$C : \quad \psi(x) \rightarrow \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) e^{-i\eta_C} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow -\psi^t(x) \mathcal{C} e^{i\eta_C} \quad (2.8.281)$$

¹⁶⁰Si osservi che il *GIM mechanism*, che impedisce all'ordine più basso l'esistenza di processi deboli di corrente neutra che si accompagnano a cambiamenti di sapore, si estende in modo automatico al caso di tre generazioni a causa proprio dell'unitarietà di V_{CKM} , infatti per i quarks di carica $-1/3$, abbiamo

$$\bar{q}'_i O^\mu q'_i = V_{ij}^* \bar{q}_j O^\mu V_{ik} q_k = (V_{ji}^\dagger V_{ik}) \bar{q}_j O^\mu q_k = \bar{q}_j O^\mu q_j \quad (2.8.266)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto, appunto, che la matrice V_{CKM} è unitaria.

¹⁶¹Per questo motivo, le conclusioni a cui giungeremo nell'ipotesi di assenza di mixing saranno allo stesso modo valide e applicabili anche nel settore leptonic.

¹⁶²In tutta generalità, per il campo di Dirac risulta

$$C a^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} b^{(r)}(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C a^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} b^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (2.8.273)$$

$$C b^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} a^{(r)}(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C b^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (2.8.274)$$

$$C \psi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \quad \longleftrightarrow \quad C \bar{\psi}(x) C^{-1} = e^{i\eta_c} \psi^t(x) \mathcal{C}^{-1} \quad (2.8.275)$$

$$P a^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_p} a^{(r)}(-\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad P a^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_p} a^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (2.8.276)$$

$$P b^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_p} b^{(r)}(-\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad P b^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_p} b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (2.8.277)$$

dove $\mathcal{C} \equiv i\gamma^0 \gamma^2 = -\mathcal{C}^{-1}$ gode della proprietà per cui

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^t$$

mentre, quanto alle fasi η_P ed η_C , risulta $e^{i\eta_P} = \pm 1$ e $e^{i\eta_C}$ è a priori arbitraria.

Occupiamoci dunque, per esempio, della corrente J_μ (i risultati ottenuti saranno poi facilmente estendibili a $J_\mu^\dagger \dots$).

Sulla base di quanto sopra, per quanto riguarda la parità, nell'ipotesi che la parità intrinseca $e^{i\eta_P}$ sia uguale per tutti i quarks, risulta

$$\begin{aligned} P : J_\mu(x) &\rightarrow \bar{u}_i(Px) \gamma^0 \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \gamma^0 d_i(Px) = \bar{u}_i(Px) \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) d_i(Px) = \\ &= \bar{u}_i(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) d_i(Px) \end{aligned} \quad (2.8.282)$$

dove abbiamo usato il fatto che, per le proprietà delle matrici γ , risulta

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0; \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \Rightarrow \gamma^0 \gamma_\mu = \gamma^\mu \gamma^0$$

La corrente J_μ mostra in modo evidente il fatto che essa è costituita da due parti distinte, le quali si trasformano sotto parità in modo opposto, ovvero

- $\frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu d \rightarrow \frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu d$
in cui le componenti spaziali della corrente cambiano segno mentre quella temporale resta invariata: si tratta della parte vettoriale di J_μ ;
- $\frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 d \rightarrow -\frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 d$
in cui le componenti spaziali della corrente *non* cambiano segno mentre a farlo è la componente temporale: si tratta della parte assiale di J_μ .

Quanto al campo del bosone vettore $W_\mu(x)$, esso, essendo appunto un campo vettoriale, risulta tale per cui

$$P : W_\mu(x) \rightarrow W^\mu(Px)$$

e dunque la simmetria di parità P *non* può essere conservata dall'interazione debole descritta dall'interazione (2.8.263), bensì, data la presenza dei due termini assiale e vettoriale con lo stesso peso, essa sarà violata in modo massimale.

$$P \psi(x) P^{-1} = e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(Px) \longleftrightarrow P \bar{\psi}(x) P^{-1} = e^{i\eta_P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \quad (2.8.278)$$

$$e^{i\eta_P} = \pm 1 \quad (2.8.279)$$

Per le particelle di Dirac si dimostra che la scelta della parità intrinseca $e^{i\eta_P}$ è in realtà un fatto puramente convenzionale. La scelta canonica è che $e^{i\eta_P} = +1$ e quindi ne segue che la parità intrinseca delle particelle è $+1$ mentre quella delle antiparticelle è, di conseguenza, -1 .

Veniamo adesso all'altra simmetria che vogliamo studiare, cioè alla coniugazione di carica C : abbiamo (di nuovo nell'ipotesi che η_C sia lo stesso per tutti i quarks)

$$C : J_\mu(x) \rightarrow -u_i^t(x) C \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) C^{-1} \bar{d}_i^t(x) \quad (2.8.283)$$

ma essendo C il prodotto di due matrici γ , esso commuta con la matrice γ_5 , e dunque

$$\begin{aligned} C : J_\mu(x) &\rightarrow -u_i^t(x) C \gamma_\mu C^{-1} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \bar{d}_i^t(x) = \\ &= u_i^t(x) (\gamma_\mu)^t \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \bar{d}_i^t(x) \end{aligned} \quad (2.8.284)$$

d'altronde la matrice γ_5 è simmetrica, dunque

$$\begin{aligned} C : J_\mu(x) &\rightarrow u_i^t(x) \left[\frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_\mu \right]^t \bar{d}_i^t(x) = \left[\bar{d}_i(x) \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_\mu u_i(x) \right]^t = \\ &= \bar{d}_i(x) \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_\mu u_i(x) = \bar{d}_i(x) \gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2} u_i(x) \end{aligned} \quad (2.8.285)$$

dove abbiamo usato il fatto che $(AB)^t = B^t A^t$ e che la combinazione $\bar{d}(1-\gamma_5)\gamma_\mu u$ è una matrice 1×1 e dunque coincide con la sua trasposta. Come si vede, per coniugazione di carica J_μ "rassomiglia" a J_μ^\dagger (e viceversa) nel senso che, se separiamo la parte vettoriale da quella assiale, allora risulta (omettendo per semplicità l'indice di quadrivettore covariante)

$$C : J(x) \equiv J_V(x) - J_A(x) \rightarrow J_V^\dagger(x) + J_A^\dagger(x) \quad (2.8.286)$$

Poiché, per coniugazione di carica, il campo del W è tale per cui

$$C : W(x) \rightarrow W^\dagger(x) \quad (2.8.287)$$

risulta evidente, di nuovo che anche la simmetria di coniugazione di carica C è violata in modo massimale nelle interazioni deboli.

La combinazione CP , invece, è conservata. Infatti

$$\begin{aligned} CP : J_\mu(x) &\equiv J_{(V)\mu}(x) - J_{(A)\mu}(x) \rightarrow C \rightarrow J_{(V)\mu}^\dagger(x) + J_{(A)\mu}^\dagger(x) \rightarrow \\ &\rightarrow P \rightarrow J_{(V)}^{\dagger\mu}(Px) - J_{(A)}^{\dagger\mu}(Px) \equiv J^{\dagger\mu}(Px) \end{aligned} \quad (2.8.288)$$

e per il campo del bosone vettore (assumendo $\eta_C = \eta_P = 0$) si ha

$$CP : W_\mu(x) \rightarrow W^{\dagger\mu}(Px) \quad (2.8.289)$$

per cui, sotto CP , semplicemente i due addendi di cui alla (2.8.263) si scambiano fra loro (e vanno valutati nel punto $Px \equiv (x^0, -\vec{x})$).

Questo è corretto in assenza di mescolamento¹⁶³ dei flavours dei quarks. Che succede però se, come avviene in Natura, c'è mescolamento? In base alle (2.8.264) e (2.8.265), risulta che

$$J_\mu(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d'_i(x) \quad (2.8.290)$$

$$J_\mu^\dagger(x) = \bar{d}'_i \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u_i(x) \quad (2.8.291)$$

dove $d'_i \equiv V_{ij} d_j$, essendo V , appunto, la matrice unitaria V_{CKM} : dunque

$$J_\mu(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d_j(x) V_{ij} \quad (2.8.292)$$

$$J_\mu^\dagger(x) = \bar{d}_j(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u_i(x) V_{ij}^* \quad (2.8.293)$$

Per quanto abbiamo già visto, essendo i coefficienti V_{ij} semplicemente dei numeri e non degli operatori soggetti a CP , per quanto riguarda, per esempio, $J_\mu(x)$, ponendo per comodità di notazione $\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right)$, risulta

$$CP : \bar{u}_i(x) \Gamma_\mu d_j(x) \leftrightarrow \bar{d}_j(Px) \Gamma^\mu u_i(Px) \quad (2.8.294)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_\mu(x) = \bar{u}_i(x) \Gamma_\mu d_j(x) V_{ij} \rightarrow \bar{d}_j(Px) \Gamma^\mu u_i(Px) V_{ij} \\ J_\mu^\dagger(x) = \bar{d}_j(x) \Gamma_\mu u_i(x) V_{ij}^* \rightarrow \bar{u}_i(Px) \Gamma^\mu d_j(Px) V_{ij}^* \end{cases} \quad (2.8.295)$$

per cui, chiaramente, si vede che affinché possa esserci invarianza dell'interazione sotto la simmetria combinata CP occorre che la matrice di mixing V sia reale¹⁶⁴.

¹⁶³Quindi questo è quello che accade nel settore leptonic, dove CP è conservata nel MS .

¹⁶⁴Prima di concludere l'argomento, comunque, facciamoci la domanda seguente. Abbiamo detto che CP è conservata se e solo se la matrice V_{CKM} è reale. Però sappiamo anche che una scelta differente delle fasi dei campi dei quarks conduce a una nuova matrice V'_{CKM} che, anche in presenza di una V_{CKM} inizialmente reale, può benissimo non risultarlo più, essendo

$$V_{ij} \rightarrow V'_{ij} = V_{ij} e^{i(\phi_i - \eta_j)} \quad (2.8.296)$$

dove le fasi ϕ_i e η_j riguardano appunto la ridefinizione dei campi u_i e d_j , rispettivamente. Le due matrici, però, descrivono equivalentemente lo stesso sistema fisico: come la mettiamo, allora, con la conservazione/violazione di CP ?

Il punto è che la simmetria di coniugazione di carica C è definita per ogni campo a meno di un fattore di fase $e^{-i\eta_C}$ a priori arbitrario. Siamo noi a dover fissare la convenzione di fase in modo da definire univocamente l'azione di C stessa. Nel caso trattato sopra, che ha condotto alla conclusione che CP può essere conservata se e solo se V è reale, abbiamo imposto che questa fase fosse la stessa per tutti i quarks, ovvero che

$$u_i(x) \rightarrow C^{-1} \bar{u}_i^t(x) e^{i\alpha} \quad \bar{u}_i(x) \rightarrow u_i^t(x) C^{-1} e^{-i\alpha} \quad (2.8.297)$$

$$d_i(x) \rightarrow C^{-1} \bar{d}_i^t(x) e^{i\alpha} \quad \bar{d}_i(x) \rightarrow d_i^t(x) C^{-1} e^{-i\alpha} \quad (2.8.298)$$

Con due generazioni di quarks, siccome V_{CKM} può essere sempre scelta in modo che sia reale, *non* c'è quindi modo di rendere conto della violazione¹⁶⁵ di CP nell'interazione debole, mentre, con tre generazioni, effettivamente questo è possibile perché, come si è visto, nella matrice V_{CKM} resta "libero" un grado di libertà di fase.

Venendo adesso ai sistemi composti di quarks, a differenza del caso dei leptoni, per gli adroni esiste, come abbiamo già in parte visto, una quantità sterminata, un vero e proprio zoo, di particelle "composite".

I primi adroni composti a essere scoperti, come è noto, erano stati il protone e il neutrone, senza che allora, ovviamente, si sapesse che erano così fatti.

Essi, come sappiamo, sono quasi degeneri in massa e, a parità di condizioni cinematiche, interagiscono forte nello stesso modo: è la simmetria di *spin isotopico*, o *isospin* di cui abbiamo già avuto modo di parlare in varie occasioni.

Con l'avvento del modello a quarks, si capì alla fine che questa simmetria era accidentale ed era dovuta, in buona sostanza, sia alla *quasi* degenerazione in massa dei quarks u e d , come al fatto che, comunque, la loro massa è molto piccola (MeV) rispetto alla scala di energia tipica delle interazioni forti ($m_\pi \approx 100 MeV$), unitamente al fatto che i loro modi di interazione,

Ma se al posto della matrice reale V vogliamo invece usare la matrice complessa V' , definita in termini della V dalla (2.8.296), la simmetria di coniugazione di carica che è opportuno definire è adesso la seguente

$$u_i(x) \rightarrow C^{-1} \bar{u}_i^t(x) e^{2i\phi_i} \quad \bar{u}_i(x) \rightarrow u_i^t(x) C^{-1} e^{-2i\phi_i} \quad (2.8.299)$$

$$d_i(x) \rightarrow C^{-1} \bar{d}_i^t(x) e^{2i\eta_j} \quad \bar{d}_i(x) \rightarrow d_i^t(x) C^{-1} e^{-2i\eta_j} \quad (2.8.300)$$

e in questo caso la simmetria CP torna a essere esatta perché, per esempio, si ha

$$\begin{aligned} CP : J_\mu(x) &= \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) d_j(x) V'_{ij} \rightarrow \\ &\rightarrow e^{-2i\phi_i} e^{2i\eta_j} \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V'_{ij} = \\ &= e^{-2i\phi_i} e^{2i\eta_j} \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V_{ij} e^{i(\phi_i-\eta_j)} = \\ &= \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V_{ij} e^{-i(\phi_i-\eta_j)} = \\ &= \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V'_{ij*} = J^{\dagger\mu}(Px) \end{aligned} \quad (2.8.301)$$

E' però del tutto evidente da quanto precede che quello che non è possibile fare è rendere CP esatta se non è possibile fare in modo che la matrice di mixing V sia reale con un opportuna scelta delle fasi dei campi che descrivono i quarks !

L'affermazione corretta, quindi, è che si può definire CP in modo che essa sia conservata nei processi deboli di CC che coinvolgono i quarks se e solo se si può rendere V_{CKM} reale (nel modo sopradetto).

¹⁶⁵La violazione di CP fu osservata per la prima volta nel 1964 da Cronin et al. nel sistema dei mesoni K neutri.

come del resto fra tutti i quarks, sono identici.

Pur essendo una simmetria accidentale e non esatta, resta il fatto che essa è molto ben rispettata dalle interazioni forti, per cui, tutte le volte che è possibile, si continua a parlarne anche oggi, e la nozione stessa di spin isotopico è stata "ereditata" in modo naturale dal doppietto (u, d) , per cui il quark u ha $I = 1/2$, $I_3 = +1/2$ mentre il quark d ha $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$. Per quanto riguarda, poi, gli antiquarks \bar{u} e \bar{d} , analogamente¹⁶⁶ risulta che \bar{u} ha $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$, mentre \bar{d} ha $I = 1/2$, $I_3 = +1/2$.

Occorre però, a questo proposito, fare attenzione alle convenzioni di fase. Esse, infatti, sono definite in modo tale per cui, se $I_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(I_1 \pm iI_2)$ sono gli operatori che fanno crescere/diminuire dell'unità l'autovalore di I_3 , allora risulta¹⁶⁷

$$I_-|u\rangle = +|d\rangle; \quad I_+|d\rangle = +|u\rangle \quad (2.8.305)$$

$$I_+|\bar{u}\rangle = -|\bar{d}\rangle; \quad I_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle \quad (2.8.306)$$

Una conclusione analoga vale per la simmetria $SU(3)$ di sapore, dell'*eightfold way* di Gell-Mann. In quel caso la simmetria appare "meno" esatta di quella di spin isotopico perchè il quark s è "meno" degenere in massa con i quarks u e d .

Ma torniamo adesso al MS .

Come abbiamo detto, la teoria che descrive le interazioni fra i quarks è la QCD , la quale prevede che le particelle composite da quarks debbano essere *incolori* (cioè in uno stato di singoletto di $SU(3)_C$) e quindi possano essere fatte solamente o da una coppia $(q\bar{q})$ (i mesoni), oppure da un tripletto di quarks/antiquarks (i barioni/antibarioni).

I mesoni, evidentemente, in quanto composti da due entità di spin $1/2$, hanno spin intero¹⁶⁸, tipicamente pari a $J = 0$ (scalari o pseudoscalari) oppure $J = 1$ (vettoriali o pseudovettoriali).

¹⁶⁶La regola è che il segno di I_3 è quello della carica elettrica.

¹⁶⁷E' per questa convenzione di fase che, per esempio, partendo dallo stato $|u\bar{d}\rangle$ il quale individua il mesone π^+ , la simmetria di spin isotopico garantisce l'esistenza dei mesoni π^0 e π^- , così fatti in termini di quarks e antiquarks

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad (2.8.302)$$

$$|\pi^0\rangle \equiv \frac{I_-}{\sqrt{2}}|\pi^+\rangle = \frac{I_-}{\sqrt{2}}|u\bar{d}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \quad (2.8.303)$$

$$|\pi^-\rangle \equiv \frac{I_-}{\sqrt{2}}|\pi^0\rangle = \frac{I_-}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) = \frac{1}{2}(-|d\bar{u}\rangle - |d\bar{u}\rangle) = -|\bar{u}d\rangle \quad (2.8.304)$$

¹⁶⁸Il fatto che i fermioni costituenti il mesone siano due implica solo che lo spin di quest'ultimo debba essere intero. Quanto al suo valore, per via del contributo del momento orbitale del sistema dei due quarks, esso può essere, a priori, qualsiasi, anche se momenti orbitali alti sono sfavoriti per ragioni energetiche.

Vediamo di seguito qualche esempio di mesoni¹⁶⁹ pseudoscalari, che in parte abbiamo già avuto modo di conoscere, e che adesso siamo in grado di inquadrare correttamente nel Modello Standard.

- i mesoni π ($m \approx 140 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1$)

$$\begin{aligned} \pi^+(u\bar{d}); \quad \pi^-(-d\bar{u}); \quad \pi^0\left(\frac{-u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}\right) \\ \tau^\pm = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8} s; \quad \tau^0 = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17} s \end{aligned}$$

- i mesoni K ($m \approx 495 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1/2$)

$$\begin{aligned} K^+(u\bar{s}); \quad K^-(-s\bar{u}); \quad K^0(d\bar{s}); \quad \bar{K}^0(s\bar{d}) \\ \tau^\pm = (1.2386 \pm 0.0024) \times 10^{-8} s; \\ \tau_S^0 = (0.8935 \pm 0.0008) \times 10^{-10} s; \quad \tau_L^0 = (5.17 \pm 0.04) \times 10^{-8} s; \end{aligned}$$

- il mesone η ($m \approx 548 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 0, C = 1$)

$$\begin{aligned} \eta\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(-2s\bar{s} + d\bar{d} + u\bar{u})\right); \\ \Gamma = (1.3 \pm 0.07) \text{ keV} \end{aligned}$$

- il mesone η' ($m \approx 957 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 0, C = 1$)

$$\begin{aligned} \eta'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(s\bar{s} + d\bar{d} + u\bar{u})\right); \\ \Gamma = (205 \pm 15) \text{ keV} \end{aligned}$$

- i mesoni D ($m \approx 1870 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1/2$)

$$\begin{aligned} D^+(c\bar{d}); \quad D^-(\bar{c}d); \quad D^0(-c\bar{u}); \quad \bar{D}^0(\bar{c}u) \\ \tau^\pm = (1.051 \pm 0.013) \times 10^{-12} s; \quad \tau^0 = (0.4126 \pm 0.0028) \times 10^{-12} s \end{aligned}$$

$$D_s^\pm (: d \rightarrow s; m \approx 1970 \text{ MeV}, \tau_s^\pm = 0.496 \pm 0.01 \text{ ps})$$

¹⁶⁹Usiamo qui la convenzione di fase di Grinstein e Lebed, per cui la rappresentazione $\mathbf{3}$ di $SU(3)$ è fatta dalla base (u, d, s) , mentre la $\bar{\mathbf{3}}$ è fatta da $(\bar{d}, -\bar{u}, \bar{s})$, in modo che le fasi associate agli operatori I_\pm siano le medesime nelle due rappresentazioni.

B. Grinstein, R.F. Lebed: *SU(3) decomposition of two-body B decay amplitudes* Phys. Rev. 53D, 6344 (1996)

- i mesoni B ($m \approx 5280 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1/2$)

$$B^+(\bar{b}u); \quad B^-(-\bar{u}b); \quad B^0(\bar{b}d); \quad \bar{B}^0(\bar{d}b)$$

$$\tau^\pm = (1.653 \pm 0.028) \times 10^{-12} \text{ s}; \quad \tau^0 = (1.548 \pm 0.032) \times 10^{-12} \text{ s}$$

$$B_c^\pm (: u \rightarrow c; m \approx 6280 \text{ MeV}; \tau_c^\pm = 0.46 \pm 0.17 \text{ ps})$$

$$B_s^0 (: d \rightarrow s; m \approx 5370 \text{ MeV}; \tau_s^0 = 1.49 \pm 0.06 \text{ ps})$$

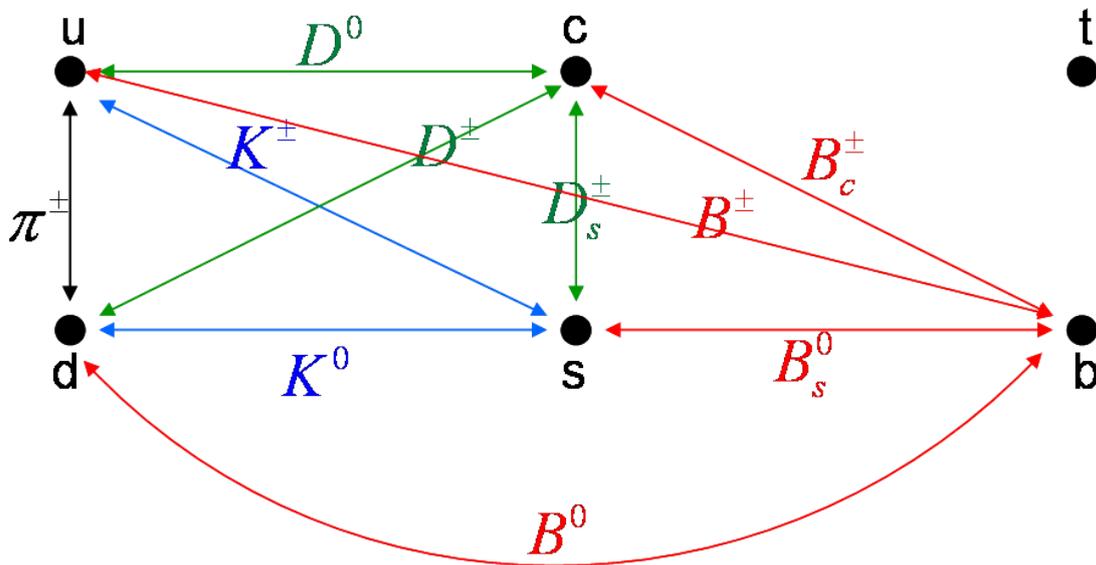


Figura 2.29: I mesoni

Ma non tutti i mesoni, come abbiamo detto prima, hanno necessariamente spin $J = 0$. Per esempio, tra i mesoni pseudovettoriali ($J = 1$) abbiamo i mesoni ρ ($m \approx 770 \text{ MeV}$), simili ai pioni; i mesoni K^* ($m \approx 890 \text{ MeV}$), etc..., fino alla J/ψ , che è un sistema ($c\bar{c}$) con massa circa 3100 MeV e la Υ che è invece un sistema ($b\bar{b}$) con massa circa 9460 MeV : lo zoo dei mesoni è veramente molto popolato !

La differenza più importante fra questi mesoni e quelli pseudoscalari riportati sopra è che i mesoni pseudovettoriali, per la loro più alta massa, possono decadere, in genere, in mesoni di massa inferiore attraverso l'interazione forte, per cui hanno vita media incomparabilmente più breve dei primi che, essendo i più leggeri della loro serie, non possono decadere in modo

forte ma solo in modo debole o, nel migliore dei casi, secondo l'interazione elettromagnetica (come nel caso del π^0).

Per esempio, la $\rho(770)$ decade pressochè sempre in due pioni e ha una larghezza¹⁷⁰ $\Gamma \approx 150.2 \pm 0.8 \text{ MeV}$, mentre il $K^*(890)$ decade pressochè sempre in $K\pi$, con una larghezza $\Gamma \approx 50 \text{ MeV}$ leggermente inferiore a causa del ridotto spazio delle fasi. Può meravigliare, dunque, quanto accade nel caso della $J/\psi(3100)$, che, come abbiamo detto, è un mesone pseudovettoriale costituito dalla coppia ($c\bar{c}$). Esso ha infatti una larghezza di soli 87 keV , simile a quella della $\Upsilon(9460)$, sistema ($b\bar{b}$), avente larghezza 52 keV , estremamente più piccola di quella della ϕ , sistema ($s\bar{s}$), che ha massa solo di 1020 MeV ma una larghezza pari a $\Gamma \approx 4 \text{ MeV}$ ovvero $\tau \approx 1.6 \times 10^{-22} \text{ s}$.

La ragione è che, mentre la $\phi(1020)$ può decadere forte in due mesoni K^+K^- oppure ($K^0\bar{K}^0$), via l'emissione di un gluone da parte di uno dei due quarks costituenti e la sua successiva materializzazione in una coppia ($u\bar{u}$) oppure ($d\bar{d}$), come mostrato nel grafico di Fig.2.30,

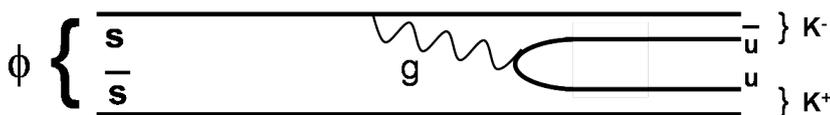


Figura 2.30: Decadimento (forte) della ϕ

nel caso della J/ψ e della Υ , i decadimenti analoghi, cioè $J/\psi \rightarrow D^+D^-$, $J/\psi \rightarrow D^0\bar{D}^0$ e $\Upsilon \rightarrow B^+B^-$, $\Upsilon \rightarrow B^0\bar{B}^0$ non possono avere luogo per pure ragioni di conservazione dell'energia, essendo la massa della J/ψ circa 3100 MeV e la massa dei mesoni D circa 1870 MeV , come pure la massa della Υ circa 9460 MeV e la massa dei B circa 5280 MeV .

Entrambi questi mesoni decadono quindi, necessariamente, via annichilazione quark/antiquark in gluone (o fotone) e, in questo caso, l'ampiezza del decadimento è soppressa per la regola di Zweig¹⁷¹, diventando confrontabile

¹⁷⁰Ricordiamo che il legame fra la larghezza Γ di una particella instabile e la sua vita media τ è il seguente:

$$\Gamma \tau = \hbar$$

Quindi, essendo $\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$, abbiamo, nel caso dei mesoni ρ , una vita media $\tau \approx 4 \times 10^{-24} \text{ s}$.

¹⁷¹Cfr. D.H. Perkins: *Introduction to High Energy Physics*

Il fatto che la J/ψ sia prodotta copiosamente in reazioni di annichilazione e^+e^- è dovuto al fatto che essa si accoppia elettromagneticamente con il fotone e dunque è autostato della coniugazione di carica per l'autovalore $C = -1$.

Nel caso del suo decadimento forte, poiché il sistema $c\bar{c}$ che costituisce la J/ψ è sconnesso dal sistema adronico finale (a differenza, per esempio, di quanto accade nel decadimento

con quella elettromagnetica, come dimostrato, per esempio, dal fatto che la somma dei BR dei due decadimenti elettromagnetici puramente leptonici¹⁷² della J/ψ , cioè $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $J/\psi \rightarrow e^+ e^-$, ammonta a ben il 12%.

Lasciando i mesoni e venendo adesso ai barioni, essi essendo costituiti da un sistema di tre quarks e dunque da tre particelle di spin semintero, possono avere solo spin semidispari, tipicamente $S = 1/2, 3/2$ (pur essendo possibili, grazie al contributo orbitale, spin semidispari anche più elevati). Usando soltanto i quarks della prima generazione possiamo descrivere il protone e il neutrone (nell'ottetto barionico ...)

$$\begin{aligned} p(uud) & \quad m = 938.27 \text{ MeV} \\ n(udd) & \quad m = 939.56 \text{ MeV} \end{aligned}$$

insieme alle risonanze (nel decupletto barionico ...)

$$\Delta^{++}(uuu); \quad \Delta^+(uud); \quad \Delta^0(udd); \quad \Delta^-(ddd)$$

con massa di circa 1230 MeV e spin $J = 3/2$.

Stati eccitati di questi barioni, sono poi gli appartenenti alle famiglie delle Δ con

$$\begin{aligned} J & = 5/2 & m & \approx 1905 \text{ MeV} \\ J & = 7/2 & m & \approx 1950 \text{ MeV} \\ J & = 11/2 & m & \approx 2420 \text{ MeV} \end{aligned}$$

tutti con spin isotopico $I = 3/2$.

Trattandosi, nel caso delle Δ , di barioni costituiti da quarks della prima generazione, cioè da quarks u e d , esse decadono secondo l'interazione forte, attraverso l'emissione di un gluone che si materializza come coppia q, \bar{q} di prima generazione, la quale, combinandosi con gli stessi quarks della Δ , dà luogo a un sistema nucleone+pione, come mostrato, nel caso della Δ^{++} , in Fig.2.31.

delle ϕ , dove i due quarks s ed \bar{s} sono ancora presenti nello stato finale), il sistema gluonico che media il decadimento deve essere in un singoletto di colore e quindi costituito da almeno una coppia di gluoni.

Il fatto che debba essere anche C -dispari implica che questo numero debba essere dispari e dunque il processo richiede, al minimo, l'emissione (e l'assorbimento) di tre gluoni virtuali. Questo significa che il decadimento avviene solo al terzo ordine della QCD -perturbativa e dunque $\propto \alpha_s^3$ e non $\propto \alpha_s$ che, a queste energie, è dell'ordine di 0.2.

Questo fatto (regola di Zweig) spiega appunto la relativa lunghezza della vita media della J/ψ ($\Gamma \approx 87 \text{ keV}$) che, al momento della scoperta di questo mesone, ne complicò non poco l'interpretazione.

¹⁷²Chiaramente, il decadimento $J/\psi \rightarrow \tau^+ \tau^-$, di nuovo, è proibito dalla conservazione dell'energia, essendo la massa del leptone τ pari a 1777 MeV , superiore quindi alla metà della massa della J/ψ che è pari a $3096.87 \pm 0.04 \text{ MeV}$.

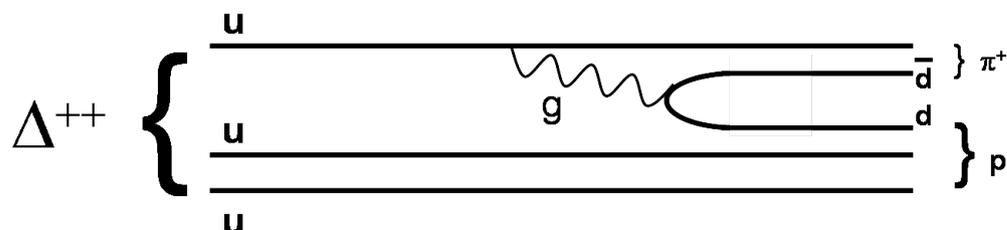


Figura 2.31: *Decadimento (forte) della Δ^{++}*

Dunque, per il fatto che le Δ decadono in modo forte, dobbiamo aspettarci che esse abbiano una vita media molto corta. Infatti, per esempio, nel caso delle Δ con $J = 3/2$, la larghezza misurata è $\Gamma \approx 120 \text{ MeV}$.

Usando poi nel tripletto dei quarks che formano il barione anche il quark più leggero della seconda generazione, cioè il quark s , abbiamo gli iperoni, ovvero

- la Λ : ($m \approx 1115 \text{ MeV}$; $S = -1, I = 0, J = 1/2$)

Essa è una specie di neutrone, in cui però un quark d è sostituito, appunto, da un quark s : $\Lambda = (uds)$.

Essa decade prevalentemente in pione + nucleone, con vita media di circa $2.6 \times 10^{-10} \text{ s}$, quindi, per quanto già detto, incompatibile con le interazioni forti. Il decadimento in questione, infatti, può procedere solo via interazione debole di CC , poiché viola la conservazione della stranezza.

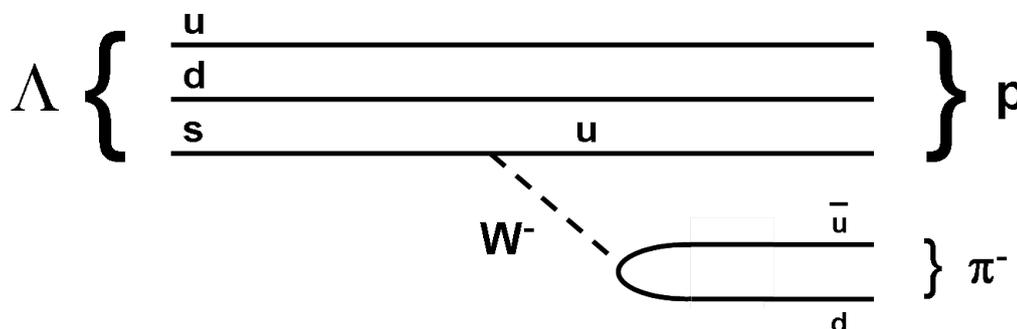
Il grafico relativo al decadimento in $p\pi^-$ è mostrato in Fig.2.32.

- la famiglia delle Σ : ($m \approx 1190 \text{ MeV}$; $S = -1, I = 1, J = 1/2$)

$$\Sigma^+(uus); \quad \Sigma^0(uds); \quad \Sigma^-(dds)$$

Le Sigma cariche¹⁷³ Σ^\pm decadono anch'esse, prevalentemente, in pione + nucleone, mentre la Sigma neutra Σ^0 decade elettromagneticamente, presoché sempre, in $\Lambda^0 + \text{fotone}$. Il primo, presentando una variazione di una unità di stranezza ($|\Delta S| = 1$), è necessariamente un decadimento debole, il quale procede, come nel caso della Λ , attraverso l'emissione virtuale di

¹⁷³Si ricordi che Σ^+ e Σ^- non sono antiparticelle una dell'altra !

Figura 2.32: Il decadimento della Λ

un W . Da questo, segue che le Σ^\pm hanno vita media piuttosto lunga¹⁷⁴, intorno ai 10^{-10} s. Il decadimento della Σ^0 , invece, procede attraverso l'emissione di un fotone da parte di uno dei tre quarks e, come nel caso del π^0 , essendo il decadimento dovuto alla forza elettromagnetica, ne consegue una vita media della Σ^0 ben più breve di quella delle Sigma cariche, di circa $(7.4 \pm 0.7) \times 10^{-20}$ s.

- la famiglia delle Ξ : ($m \approx 1320$ MeV; $S = -2, I = 1/2, J = 1/2$)

$$\Xi^0(uss); \quad \Xi^-(dss)$$

Le Ξ hanno stranezza $S = -2$ (le loro antiparticelle, ovviamente, hanno quindi stranezza $S = +2$) e decadono prevalentemente in $\Lambda^0 +$ pioni, secondo lo schema di decadimento riportato in Fig.2.34. Di nuovo, poiché c'è variazione di stranezza di una unità, il decadimento è debole e la loro vita media è infatti quella tipica dei decadimenti deboli, i.e. di circa $2. \times 10^{-10}$ s. Poiché lo stato finale contiene, a sua volta, la Λ^0 che è instabile, il decadimento della Ξ dà luogo ad una *cascata* fatta dal susseguirsi di due decadimenti in successione, con vite medie simili.

Questo fatto è all'origine del nome iniziale della Ξ , che era, appunto *Cascade!*

¹⁷⁴La Σ^+ decade pressoché unicamente in $p\pi^0$ e $n\pi^+$ ed ha una vita media pari a $\tau = (0.8018 \pm 0.0026) \times 10^{-10}$ s.

Invece la Σ^- , che ha come quasi unico canale di decadimento quello in $n\pi^-$, ha una vita media quasi doppia, pari a $\tau = (1.479 \pm 0.011) \times 10^{-10}$ s.

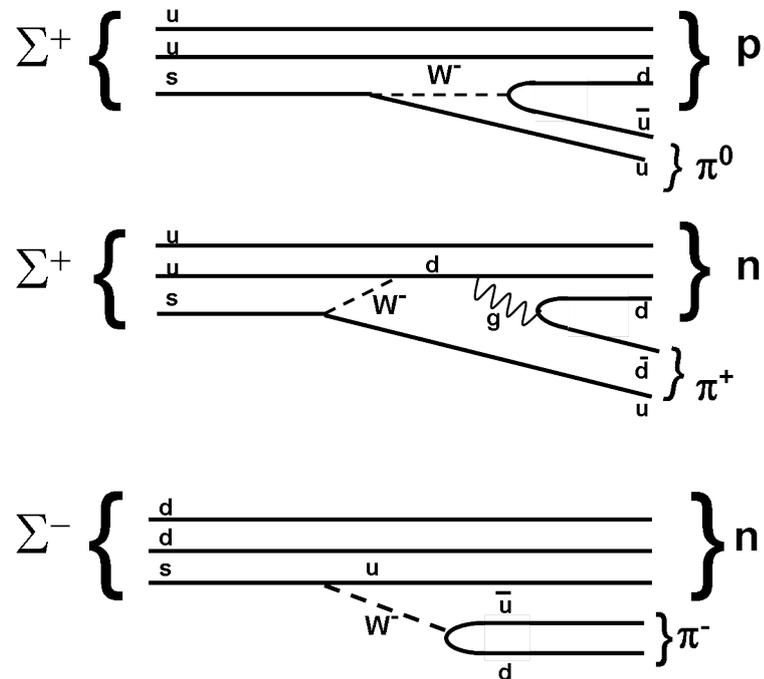


Figura 2.33: I modi di decadimento delle Σ^\pm

Gli iperoni considerati fin'ora appartengono tutti all'ottetto barionico a cui appartengono anche neutrone e protone.

Vogliamo infine terminare ricordando le proprietà di un altro iperone che contribuì non poco al successo del modello a quark, appartenente al decupletto e quindi con spin $J = 3/2$, cioè

- la Ω^- : ($m \approx 1672 \text{ MeV}$; $S = -3, I = 0, J = 3/2$)

Essa è uno stato fatto dai soli tre quarks s e decade via interazione debole prevalentemente o in $\Lambda^0 K^-$, oppure in $\Xi +$ pione, con vita media di circa $0.8 \times 10^{-10} \text{ s}$.

Lo schema dei suoi decadimenti più frequenti è rappresentato in Fig.2.35.

La storia dei barioni poi, ovviamente, continua se al posto di un quark u si mette un quark c oppure se al posto di un d si mette un b , etc ...

Comunque, capito il gioco, non merita adesso di entrare in ulteriori dettagli.

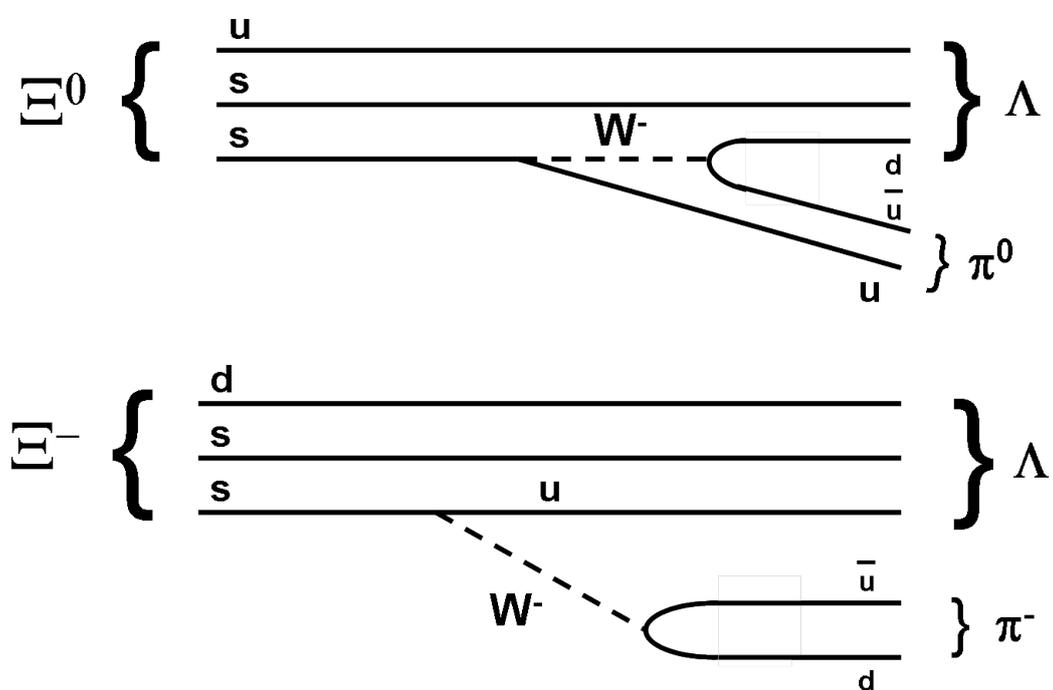
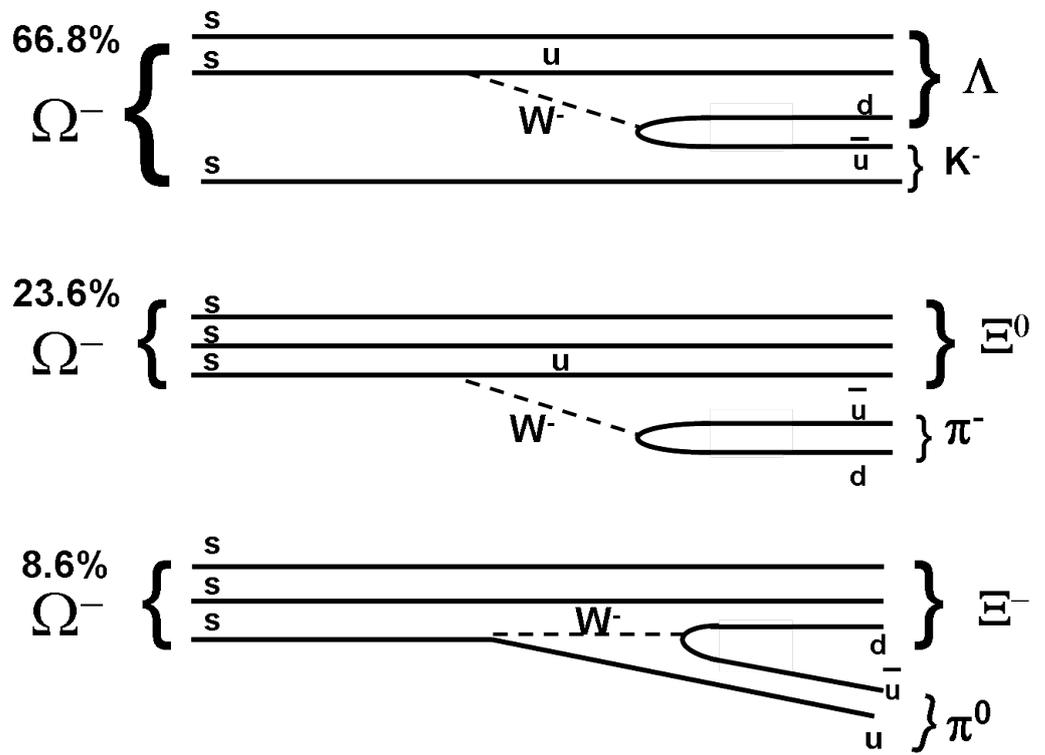


Figura 2.34: I modi di decadimento delle Ξ

Figura 2.35: Decadimenti più frequenti della Ω^-

Capitolo 3

Una particella fantasma: il neutrino

3.1 Il neutrino

Il neutrino entrò nella storia della Fisica verso la fine del 1930, quando Pauli ne propose l'esistenza (in verità sotto il nome di "neutrone", come risulta dalla lettera riportata sotto) per spiegare l'apparente paradosso della

Lettera aperta al gruppo dei Radioattivi in occasione della riunione della sezione di Tubinga della Società Tedesca di Fisica

Istituto di Fisica
Politecnico Federale
Zurigo

4 dicembre 1930

Cari colleghi Radioattivi,

Come vi spiegherò più dettagliatamente il portatore di questa missiva, che vi prego di ascoltare attentamente, a causa dell'enigma del momento angolare dei nuclei ^{14}N e ^6Li e dello spettro continuo nel decadimento β ho escogitato un estremo rimedio per salvare la regola di composizione dei momenti angolari e la legge di conservazione dell'energia. È possibile che esistano nei nuclei particelle elettricamente neutre, che desidero chiamare neutroni, che hanno spin $1/2$ e obbediscono al principio di esclusione e che inoltre differiscono dai quanti di luce nel fatto che non viaggiano con la velocità della luce. La massa dei neutroni dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza della massa degli elettroni e in ogni caso non superiore a 1% della massa del protone. Lo spettro continuo nel decadimento β sarebbe allora comprensibile assumendo che nel decadimento β vengano simultaneamente emessi un neutrone e un elettrone in modo tale che la somma delle energie del neutrone e dell'elettrone è costante.

..... (omissis)

Sfortunatamente non posso venire a Tubinga in persona, in quanto sono indispensabile qui a Zurigo per una festa da ballo la sera del 6 dicembre.

Con i miei migliori saluti,

il vostro umile servitore

Wolfgang PAULI

(traduzione dal tedesco)

Figura 3.1: *Wolfgang Pauli (1900-1958)*

non conservazione dell'energia e del momento angolare nei decadimenti β dei nuclei atomici.

Va detto che Pauli stesso considerava questa idea piuttosto disperata, tanto è che essa fu da lui pubblicata solo nel 1933, in occasione della *VII Solvay Conference*¹: Fermi, che era presente al Congresso, afferrò subito l'idea e pubblicò² la sua prima nota sulla teoria della radioattività β giusto due mesi dopo !

Il problema della conservazione dell'energia nel decadimento β si era posto fin dal 1914, con la scoperta da parte di Chadwick dello spettro continuo³ dell'energia dei raggi β (cioè degli elettroni di decadimento), per esempio⁴ nel Radium E (si tratta del decadimento β del ${}_{83}^{210}\text{Bi}^{127}$) come riportato in fig.3.2.

Questo contrastava con l'idea che si aveva al momento circa la struttura interna del nucleo atomico, secondo cui esso era costituito da A protoni ed

¹W. Pauli: *Discussion du rapport de M. Heisenberg VII Congrès de Physique Solvay 1933* (Gauthier-Villars, Paris 1934, pag. 324)

²E. Fermi: *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta* Ric. Sci. 4(2), 491 (1933)

³Questo stesso risultato non si realizzava nel caso dei decadimenti α e γ .

⁴Per la nomenclatura dei radionuclidi allora in uso, cfr. la tabella (3.3).

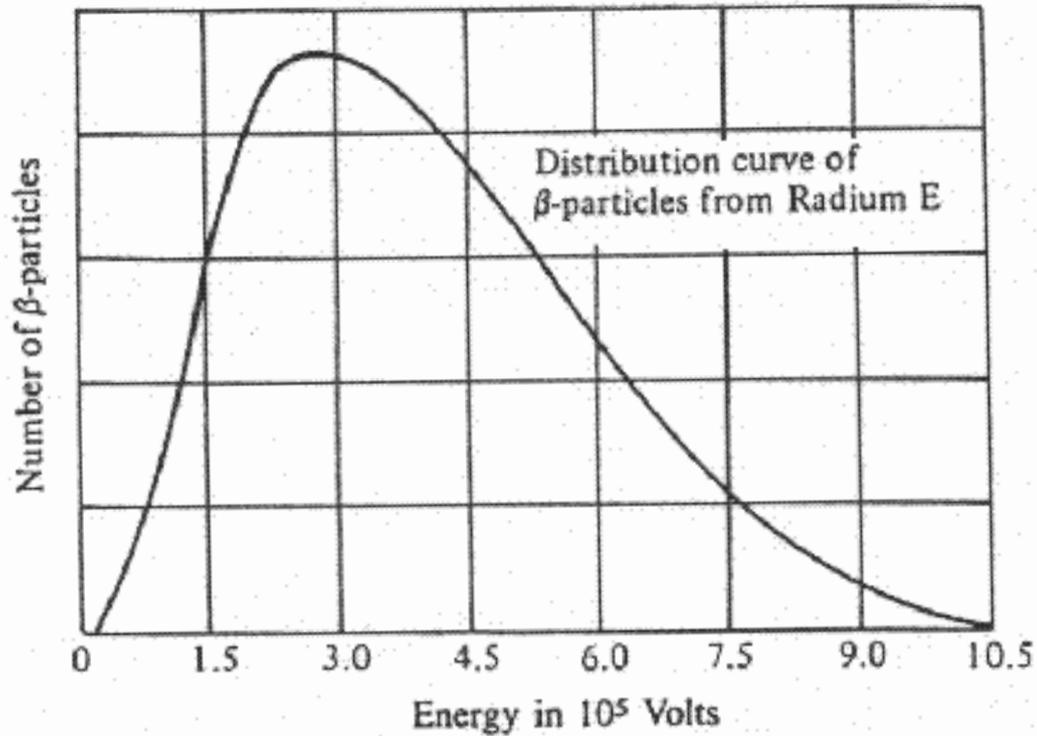
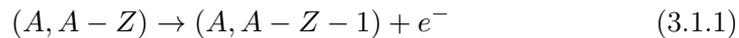


Figura 3.2: *Energia degli elettroni dal decadimento del Radium E*

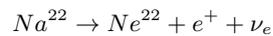
$A - Z$ elettroni⁵ "nucleari". Il decadimento β era dunque, semplicemente, l'espulsione di un elettrone dall'interno del nucleo, per cui⁶



Però, in questo caso, trattandosi di un decadimento a due corpi in cui il nucleo instabile, di massa M_0 , può essere considerato sostanzialmente fermo, l'elettrone avrebbe dovuto essere, comunque, monoenergetico e con una

⁵Fortuitamente, visto che $M_n \approx M_p \gg m_e$, le cose tornavano abbastanza bene per quanto riguarda le masse.

⁶Si ricordi che nel 1930 ancora non si conoscevano né il positrone né, quindi, i decadimenti β^+ , come, per esempio



che non sarebbe stato facile da descrivere dalla teoria prima esposta ...

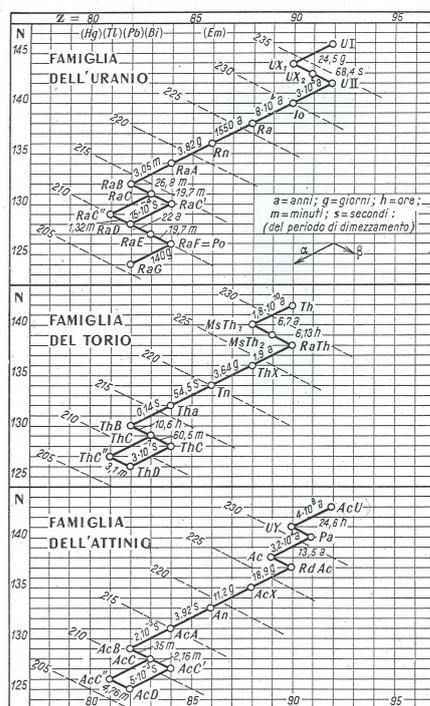


Figura 3.3: Tabella dei decadimenti delle catene dell'Uranio, Torio e Attinio

energia circa pari al Q – valore della reazione⁷

$$Q = M_0 - M_f$$

dove M_f è la massa del nucleo finale. Ma questo non succedeva !

⁷Nel sistema del CM, dove il nucleo instabile è fermo, si ha

$$(M_0, \vec{0}) = (E_f, -\vec{p}) + (E_e, \vec{p})$$

dove \vec{p} è l'impulso dell'elettrone uscente, E_e la sua energia ed E_f quella del nucleo finale. Dunque

$$(M_0, \vec{0}) - (E_e, \vec{p}) = (E_f, -\vec{p})$$

ovvero, prendendo la massa invariante dei due membri, detta m la massa dell'elettrone, risulta

$$M_0^2 + m^2 - 2M_0 E_e = M_f^2 \quad \Rightarrow \quad E_e = \frac{M_0^2 - M_f^2 + m^2}{2M_0}$$

che, se trascuriamo m^2 al numeratore e poniamo $M_0 + M_f \approx 2M_0$, fornisce appunto

$$E_e \approx M_0 - M_f \equiv Q$$

Lize Meitner⁸ aveva proposto una spiegazione, condivisa anche da Rutherford⁹, secondo cui l'elettrone, essendo del nucleo, perdeva energia durante la fase di espulsione, eccitando il nucleo stesso, per cui il raggio β non risultava monocromatico in quanto era accompagnato da fotoni di diseccitazione nucleare.

C.D. Ellis e W.A. Wooster misurarono¹⁰ allora, con un calorimetro, l'energia media associata al decadimento β del *Radium E*, trovando

$$\langle E \rangle = 344 \pm 35 \text{ keV}$$

in ottimo accordo con lo spettro di Chadwick ma in completo disaccordo con la spiegazione della Meitner¹¹. La Meitner stessa ripeté la misura, ottenendo

$$\langle E \rangle = 337 \pm 20 \text{ keV}$$

Il fatto sperimentale che lo spettro beta non fosse monoenergetico ricevette varie spiegazioni totalmente sbagliate¹², prima dell'ipotesi di Pauli (anch'essa, del resto, parzialmente errata ...), che ipotizzò che nel nucleo ci fossero anche particelle neutre ("neutroni"), di spin 1/2 e massa circa pari a quella dell'elettrone, le quali, nel decadimento β vengono espulse insieme all'elettrone, dividendosi l'energia disponibile nel decadimento.

In effetti, nel decadimento β , non era solo l'energia che apparentemente non si conservava, bensì anche lo spin¹³.

⁸L. Meitner: *Über die Entstehung der β -strahl-spectren radioaktiver substanzen*
Z. Physik, 9, 101, (1922)

⁹E. Rutherford: *The connection between the β and γ ray spectra*
Phil. Mag., 28, 305, (1914)

¹⁰C.D.Ellis, W.A. Wooster: *The average energy of disintegration of Radium E*
Proc. Roy. Soc. 117A, 109 (1927)

¹¹Se la Meitner avesse avuto ragione, essi avrebbero dovuto misurare una energia media di circa 1.05 MeV, pari al valore dell'end-point dello spettro di Chadwick.

¹²Una di queste spiegazioni errate, sostenuta da Bohr, era che semplicemente l'energia non si conservasse nel decadimento radioattivo dei nuclei ... se non in media.

Tanta doveva essere la disperazione dei fisici di fronte al problema dello spettro continuo dei raggi β ! D'altronde, questo fatto sperimentale effettivamente ammetteva solo due possibili spiegazioni, e cioè

- o la conservazione dell'energia non valeva nei processi subatomici come appunto il decadimento β (se non in media),
- o l'energia mancante era portata via da un'altra radiazione neutra che apparentemente sfuggiva a ogni detezione.

¹³Ricordiamo a questo proposito che l'esistenza dello spin fu ipotizzata per la prima volta per l'elettrone e questo accadde nel 1925, da parte di S.A. Goudsmit e G.E. Uhlenbeck, quando erano ancora laureandi di Ehrenfest a Leida.

S.A. Goudsmit, G.E. Uhlenbeck: *Over het roteerende electron en de structuurder spectra*;
Physica 8, 273 (1926)

S.A. Goudsmit, G.E. Uhlenbeck: *Spinning electrons and the structure of Spectra*;
Nature, 117, 264 (1926)

Questo accadeva, per esempio, nella (apparente) reazione



dove, da un lato, attraverso misure di struttura iperfina (la teoria di Fermi della struttura iperfina in un atomo con un solo elettrone periferico in uno stato S è del 1929) si sapeva che sia i nuclei di partenza che quelli di arrivo avevano spin intero, e dall'altro lato ci si attendeva una variazione dello spin nucleare di $1/2\hbar$, visto che questo era appunto lo spin dell'elettrone.

Ma non era questo il solo problema che c'era a quel tempo riguardo allo spin del nucleo e alla sua struttura. Per esempio, dalle misure di struttura iperfina dei livelli atomici, si era arrivati alla conclusione che i nuclei di ${}^6\text{Li}$ e di ${}^{14}\text{N}$ avessero spin totale $S = 1$, mentre se fossero stati costituiti rispettivamente da $6 + (6 - 3) = 9$ e da $14 + (14 - 7) = 21$ particelle di spin $1/2$, ci si sarebbe aspettati che avessero spin semidispari...

Intanto la struttura stessa del nucleo entrava sempre più in crisi: gli elettroni nel nucleo proprio non ci potevano stare !

Infatti, per il principio di indeterminazione¹⁴ di Heisenberg (1927), dato che un nucleo come quello del *Radium E* ha dimensioni radiali¹⁵ dell'ordine di $10\text{fm} = 10^{-12}\text{cm}$ un elettrone che fosse intrappolato nel nucleo avrebbe

$$\begin{aligned} \Delta x \approx r \quad \Rightarrow \quad \Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} &= \frac{6.58 \cdot 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s}}{10^{-12} \text{cm}} = 6.6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{MeV}}{\text{cm/s}} \\ &= 6.6 \cdot 10^{-10} \times 3 \cdot 10^{10} \approx 20 \text{MeV}/c \end{aligned}$$

per cui la scala dell'energia dei raggi β emessi dal *radium E*, se gli elettroni fossero stati preesistenti e intrappolati nel nucleo, ci saremmo attesi che fosse dell'ordine delle decine di MeV e non di alcune centinaia di keV .

D'altra parte, come sappiamo, Chadwick, con la sua scoperta nel neutrone, dimostrò nel 1932 che il modello di nucleo fatto da A protoni e $A - Z$ elettroni era certamente errato e che nel nucleo atomico c'era effettivamente anche una particella neutra, il neutrone appunto; ma questo aveva, però, circa la stessa massa del protone ! Per la sua grande massa, questa particella, dunque, non poteva essere la particella postulata da Pauli (l'elettrone

Per spiegare i risultati sperimentali ottenuti per mezzo dell'effetto Zeeman e per mezzo dell'esperimento di Stern-Gerlach, essi formularono infatti la teoria dell'elettrone rotante con momento angolare intrinseco $1/2\hbar$. Va detto che l'idea, subito molto apprezzata da Bohr, fu inizialmente osteggiata sia da Lorentz che da Fermi, per il fatto che il valore semidispari dello spin era classicamente impossibile.

¹⁴W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik*, *Z. Physik* 43, 172 (1927)

¹⁵Il raggio del nucleo, scala, grosso modo, come $A^{1/3}$, risultando, con buona approssimazione, dato dalla relazione

$$r_{\text{nucleo}} \approx 1.20 \cdot A^{1/3} \text{fm}$$

per cui il nucleo in questione, che aveva $A = 210$, ha $r_{\text{nucleo}} \approx 7.1 \text{fm}$.

avrebbe finito per essere ancora circa monoenergetico ...), che doveva avere, infatti, una massa molto più piccola affinché si potesse spiegare così lo spettro di emissione β^- .

Con la scoperta di Chadwick e l'ipotesi che il neutrone fosse una particella di spin $1/2$, si risolse comunque il problema del momento angolare dei nuclei di ${}^6_3\text{Li}$ e di ${}^{14}_7\text{N}$. Si capì infatti che tali nuclei erano fatti rispettivamente da 3 protoni e 3 neutroni e da 7 protoni e 7 neutroni, ovvero, rispettivamente da 6 e da 14 "fermioni"; per cui il loro spin totale poteva (doveva!) ben essere intero ($= 1$) !

Questa scoperta sancì anche la definitiva "cacciata" degli elettroni dall'interno del nucleo ... però il decadimento debole li produceva ... e se non preesistevano nel nucleo, da dove venivano ?

La prima teoria sensata del decadimento beta, come abbiamo già detto, fu abbozzata da Fermi¹⁶ subito dopo il 7^o Convegno Solvay, alla fine del 1933.

Un successivo lavoro più articolato venne prima inviato a *Nature*, che non lo pubblicò perché "troppo remoto dalla realtà fisica ..." e fu pubblicato prima in italiano su *Il Nuovo Cimento* e poi in tedesco, la lingua ufficiale della fisica europea del tempo, su *Zeitschrift für Physik*.

In questi articoli veniva assunto per la prima volta che la particella originariamente postulata da Pauli, infine battezzata "neutrino", fosse creata insieme all'elettrone al momento del decadimento !

¹⁶E. Fermi: *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta* Ric. Sci. 4(2), 491 (1933)

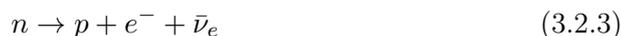
3.2 La teoria di Fermi

Secondo la teoria di Fermi¹⁷, i raggi β si originano dal decadimento del



Figura 3.4: *Enrico Fermi (1901-1954)*

neutrone, che avviene secondo la reazione seguente¹⁸:



L'idea del tutto nuova e originale che è presente in questa teoria è che la coppia leptonica ($e^- \nu$) *non* preesiste nel nucleo, bensì essa è creata al momento del processo di disintegrazione, esattamente come nel caso in cui un atomo eccitato si diseccita emettendo un fotone, il gamma non è presente nell'atomo prima della sua diseccitazione, ma viene creato al momento.

A differenza dell'elettrodinamica, però, dove l'accoppiamento avviene fra la corrente elettromagnetica J^μ e il campo mediatore dell'interazione, cioè il campo del fotone A_μ , nella teoria di Fermi della disintegrazione β non esiste un campo mediatore dell'interazione.

Essa prevede, infatti, l'esistenza di un'interazione di contatto fra i quattro fermioni che partecipano all'interazione (interazione corrente-corrente).

¹⁷E. Fermi: *Tentativo di una teoria dei raggi β* , Il Nuovo Cimento 11,1, (1934)

E. Fermi: *Versuch einer Theorie der β -Strahlen*, Zeitschrift für Physik 88, 161 (1934)

¹⁸Va detto che, nella teoria originale, Fermi chiama neutrino quello che oggi viene chiamato antineutrino.

La teoria postula infatti una interazione diretta fra la corrente debole (carica) "adronica"

$$j_{adr}^\mu(x) \equiv \bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu \psi_n(x) \equiv \bar{p}(x) \gamma^\mu n(x) \quad (3.2.4)$$

costruita con i campi del neutrone $\psi_n(x) \equiv n(x)$ e del protone $\psi_p(x) \equiv p(x)$, con la corrente debole (carica) "leptonica"

$$l_\mu(x) = \bar{\psi}_\nu(x) \gamma_\mu \psi_e(x) \equiv \bar{\nu}(x) \gamma_\mu e(x) \quad (3.2.5)$$

costruita con i campi dell'elettrone $\psi_e(x) \equiv e(x)$ e del neutrino $\psi_\nu(x) \equiv \nu(x)$. La lagrangiana che descrive l'interazione debole nella teoria di Fermi ha, infatti, la forma seguente

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -G_F \left(j_{adr}^\mu(x) l_\mu^\dagger(x) + h.c. \right) \\ &\Rightarrow \mathcal{H} = G_F \left[(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p)(\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \psi_e) \right] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

dove si è usato il fatto che, non contenendo l'interazione accoppiamenti derivativi, risulta $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$.

La costante G_F è chiamata, appunto, *costante di Fermi*, ed è la grandezza che misura la "forza" dell'interazione debole: essa ha le dimensioni¹⁹ dell'inverso del quadrato di una energia e vale²⁰

$$G_F = (1.16637 \pm 0.00001) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (3.2.7)$$

mentre ψ e $\bar{\psi}$ sono i campi di Dirac²¹ delle particelle indicate.

¹⁹Dal punto di vista dimensionale, essendo $\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ una densità lagrangiana con dimensioni, quindi $[E/L^3]$, ne segue evidentemente che

$$[m \bar{\psi}\psi] = [E/L^3] \Rightarrow [\bar{\psi}\psi] = [L^{-3}] \Rightarrow [\psi] = [L^{-3/2}]$$

Ma in unità naturali $[L] = [E^{-1}]$ (si ricordi che $\hbar c$ è una energia per una lunghezza ...), dunque $[\psi] = [E^{3/2}]$.

Dovendo allora essere $[\mathcal{H}] = [G_F][\psi]^4 = [G_F][E^6] = [E/L^3] = [E^4]$, ne segue che G_F deve avere appunto le dimensioni dell'inverso del quadrato di una energia.

²⁰Il valore della costante di Fermi qui citata è ricavata dalla vita media del leptone μ^- , che decade secondo la reazione $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

Oggi sappiamo che l'espressione corretta della lagrangiana di Fermi, alla base del decadimento, è così fatta

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{(\nu)} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{(\mu)}) (\bar{\psi}_{(e)} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{(\nu)})$$

Trascurando le correzioni radiative, nell'ambito della teoria di Fermi, risulta che la larghezza del decadimento ($\hbar = c = 1$) è espressa dalla relazione $\Gamma \equiv \tau^{-1} = (G_F^2 m_\mu^5)/(192\pi^3) \Rightarrow \tau = (2.19703 \pm 0.00004)10^{-6} \text{ s}$ (cfr. Vol.IV).

²¹Può essere utile ricordare che il campo ψ_a crea la particella a e annichila la sua antiparticella \bar{a} (vedi Vol.IV), mentre il campo $\bar{\psi}_a$ crea la antiparticella \bar{a} e annichila la particella a . Inoltre, poiché $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, ne segue, come sappiamo, che

$$(\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p)^\dagger = \psi_p^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\bar{\psi}_n)^\dagger = \psi_p^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\psi_n^\dagger \gamma^0)^\dagger = \bar{\psi}_p \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \psi_n = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \quad (3.2.8)$$

Anche alla luce di quanto già detto per le interazioni deboli di corrente carica nel MS , è istruttivo adesso considerare la struttura dell'interazione di contatto corrente-corrente proposta da Fermi, ripartendo proprio dal caso ben noto dell'interazione elettromagnetica.

Supponiamo quindi di trattare l'interazione elettromagnetica, per esempio fra due elettroni assunti, per comodità, distinguibili.

La densità di corrente associata al primo elettrone, come già detto, è

$$J_1^\mu(x) = -\bar{\psi}_1(x)\gamma^\mu\psi_1(x) \quad (3.2.9)$$

e la sua interazione con il campo elettromagnetico $A_\mu(x)$ prodotto da un'altra qualsiasi distribuzione di carica è descritta, in generale, dalla densità lagrangiana²²

$$\mathcal{L}(x) = -e J_1^\mu(x) A_\mu(x) \quad \text{con } e \equiv |e| \quad (3.2.10)$$

Nel caso considerato $A_\mu(x)$ sarà il campo prodotto dall'altro elettrone, ovvero tale per cui (sistema di unità di misura di Lorentz-Heaviside)

$$\square A^\mu(x) = e J_2^\mu(x) \equiv -e \bar{\psi}_2(x) \gamma^\mu \psi_2(x) \quad (3.2.11)$$

che ci ricorda fra l'altro sia che la sorgente del campo elettromagnetico è la densità di corrente elettromagnetica come che il campo mediatore libero $A_\mu(x)$ ha massa nulla.

Introducendo allora la funzione di Green (propagatore) $D_G(z)$ tale che

$$\square D_G(z) = \delta^4(z) \quad \Rightarrow \quad A^\mu(x) = \int d^4y D_G(x-y) e J_2^\mu(y) \quad (3.2.12)$$

e ponendo $D_{\mu\nu}(x-y) \equiv \delta_{\mu\nu} D_G(x-y)$, risulta infine che

$$\mathcal{L}(x) = -e^2 J_1^\mu(x) \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) J_2^\nu(y) \quad (3.2.13)$$

da cui si può adesso procedere direttamente, per esempio, al calcolo della sezione d'urto del processo di scattering, senza che compaia più esplicitamente in $\mathcal{L}(x)$ il campo A_μ ma solo il suo propagatore e le correnti coinvolte (similmente dunque, almeno per certi aspetti, all'interazione alla Fermi). Questo è possibile in questo caso solo perché nel sistema fisico considerato non sono presenti fotoni *reali* e dunque il campo A_μ entra solo come mediatore della

²²La quantità $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ è una densità lagrangiana, dunque, dal punto di vista dimensionale, risulta che $[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = [E/L^3]$ e quindi $[L^{-1}A] = [EL^{-3}] \Rightarrow A^2 = EL^{-1} = E^2$ ovvero il campo del fotone A_μ ha le dimensioni di un'energia.

Data la forma (3.2.10) dell'interazione, poiché si è già visto che $[J] = [L^{-3}]$, ne segue dunque che

$$[e][J][A] \equiv [E/L^3] \Rightarrow [e][L^{-3}][E] = E/L^3$$

cioè che la costante di accoppiamento dell'interazione elettromagnetica (sistema di unità di misura di Lorentz-Heaviside con $\hbar = c = 1$) $e = \sqrt{4\pi\alpha\hbar c}$ è una quantità adimensionale.

forza elettromagnetica fra le due cariche, dunque attraverso fotoni *virtuali*. Quello che ci interessa al momento, però, non è effettuare qualche calcolo esplicito, bensì approfondire piuttosto gli aspetti relativi alla forma stessa del propagatore, cioè della funzione $D_G(z)$.

Ammettiamo dunque che $D_G(z)$ abbia trasformata di Fourier (ancorché in senso generalizzato), ovvero che si possa scrivere

$$D_G(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \hat{D}_G(q) \quad (3.2.14)$$

L'equazione $\square D_G(z) = \delta(z)$ implica allora che

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} (-q^2) \hat{D}_G(q) &= \delta^4(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \\ \Rightarrow \hat{D}_G(q) &= -\frac{1}{q^2} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Possiamo dunque concludere che, per il campo elettromagnetico, risulta²³

$$D_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \frac{1}{-q^2} \delta_{\mu\nu} \quad (3.2.16)$$

Ma supponiamo ora che il campo mediatore dell'interazione, che chiameremo $W^\mu(x)$ per distinguerlo da quello del fotone, non abbia massa nulla, bensì abbia massa $M_W = M$.

In questo caso l'equazione del campo mediatore, in tutta analogia, è

$$(\square + M^2) W^\mu(x) = e J^\mu(x) \quad (3.2.17)$$

e il propagatore ha dunque la forma seguente²⁴

$$D_G(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \frac{1}{-q^2 + M^2} \quad (3.2.19)$$

il quale, per grandi masse del mediatore ($M^2 \gg q^2$), ovvero per bassi valori di q^2 (q rappresenta il momento trasferito dal campo mediatore fra le due particelle cariche in interazione ...), si può evidentemente approssimare con

$$D_G(z) \approx \frac{1}{M^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} = \frac{1}{M^2} \delta^4(z) \Rightarrow D_{\mu\nu}(z) = \frac{\delta^4(z)}{M^2} \delta_{\mu\nu} \quad (3.2.20)$$

²³In realtà la singolarità al denominatore richiede di sostituire q^2 con $q^2 + i\epsilon$ e poi di fare l'integrazione secondo un cammino opportuno nel campo complesso prima di passare al limite per $\epsilon \rightarrow 0$...

²⁴Più correttamente, per un campo vettoriale come quello del W^μ , si dimostra che il propagatore è in realtà un tensore della forma

$$D_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{-q^2 + M^2} \quad (3.2.18)$$

che comunque, nel limite di bassi impulsi trasferiti, conduce agli stessi risultati della forma semplificata $D_{\mu\nu}(z) \approx \frac{\delta_{\mu\nu}}{M^2}$

che, sostituita nella (3.2.13), dà luogo ad una lagrangiana di interazione che, con ovvio significato dei simboli, risulta pari a

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e^2}{M^2} J_{(a)}^\mu(x) J_{(b)}^\nu(x) \delta_{\mu\nu} = -\frac{4\pi\alpha}{M^2} J_{(a)}^\mu(x) J_{(b)}^\nu(x) \delta_{\mu\nu} \quad (3.2.21)$$

e quindi, appunto, a una interazione *di contatto* di tipo corrente-corrente, esattamente del tipo della teoria di Fermi, in cui $G_F = \frac{e^2}{M^2} \equiv \frac{4\pi\alpha}{M^2}$, essendo α la costante²⁵ di struttura fina: l'accordo con il valore sperimentalmente determinato di G_F si ottiene²⁶ per $M = 88.68 \text{ GeV}$.

Va detto, comunque, che questa deduzione *non* è rigorosa perché, per esempio, non tiene in nessun conto della struttura di gauge della teoria elettrodebole; ciò non di meno, la conclusione è sostanzialmente giusta.

La teoria delle interazioni elettrodeboli di Glashow Weinberg e Salam, che, come oggi sappiamo, sostituisce nel Modello Standard la teoria di Fermi (che non è rinormalizzabile ...), fornisce infatti, all'ordine perturbativo più basso

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 M_W^2 \sin^2 \theta_W} \quad (3.2.22)$$

dove θ_W è l'angolo²⁷ di Weinberg e risulta

$$\frac{8 \sin^2 \theta_W}{\sqrt{2}} \approx 1.308 \quad (3.2.23)$$

Concludendo, possiamo quindi aspettarci che almeno finché i processi non raggiungono momenti trasferiti confrontabili con M_W , la teoria di Fermi debba funzionare perfettamente !

Nonostante quindi essa sia una teoria fenomenologica, non deve esserci alcuna meraviglia nel constatare come la teoria delle interazioni deboli di Fermi risultasse in completo accordo con i dati sperimentali noti all'epoca in cui essa fu formulata e sia tuttora usata per descrivere una grande varietà di fenomeni di "bassa" energia.

Essa prediceva, tra l'altro, vari fenomeni ancora sconosciuti e che furono, in seguito, puntualmente osservati. Per esempio, la lagrangiana di Fermi descrive anche il processo di scattering quasi-elastico (anti)neutrino-protone^{28,29}

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (3.2.25)$$

²⁵Ricordiamo che il valore misurato di questa costante è $\alpha^{-1} = 137.03599976(50)$.

²⁶In particolare, dalla deduzione fatta, risulta chiaro il motivo per cui la costante di Fermi G_F deve avere le dimensioni dell'inverso del quadrato di una massa (energia) ...

²⁷Il valore sperimentalmente oggi noto di questa costante, come già detto parlando del *MS*, è il seguente $\sin^2 \theta_W = 0.23122(15)$.

²⁸Questo processo è legato a quello del decadimento del neutrone dalla simmetria di crossing e dalla time-reversal che, nella teoria di Fermi, è una simmetria esatta.

²⁹Questa reazione beta-inversa, assumendo il protone fermo nel sistema del laboratorio, avviene solo se l'antineutrino ha una energia E superiore a quella di soglia che è data dalla

Questo processo poteva essere un modo per verificare l'esistenza del neutrino, per cui Bethe e Peierls, già nel 1934, ne stimarono³⁰ la sezione d'urto, ottenendo il valore³¹ sfortunatamente piccolo di

$$\sigma \approx 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.2.34)$$

per (anti)neutrini di energia dell'ordine del MeV .

Questo valore era effettivamente troppo esiguo per le sorgenti dell'epoca (sorgenti radioattive β^-) e bisognò così aspettare una ventina d'anni per avere una conferma diretta del processo in questione...

relazione

$$2EM_p + M_p^2 = (M_n + m)^2 \quad (3.2.24)$$

dove abbiamo indicato rispettivamente con M_n ed M_p le masse del neutrone e del protone, con m quella dell'elettrone e abbiamo assunto che il neutrino abbia massa nulla. Risulta

$$E = \frac{M_n^2 - M_p^2 + m^2 + 2mM_n}{2M_p} \approx \frac{M_n + M_p}{2M_p}(M_n - M_p) + m \frac{M_n}{M_p} \approx 1.294 + 0.512 = 1.806 \text{ MeV}$$

³⁰H. Bethe, R. Peierls: *The neutrino*, Nature, 133, 532 (1934)

Gli stessi autori stimarono così basso il valore della sezione d'urto trovata che essi stessi commentarono "*If, therefore, the neutrino has no interaction with other particles besides the process of creation and annihilation mentioned, ..., one can conclude that there is no practically possible way of observing the neutrino.*"

³¹L'argomento usato è euristico e parte dal legame fra la sezione d'urto σ del processo

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$$

e la vita media τ del decadimento del (anti)neutrone, a esso coniugato per crossing.

La stima di σ , infatti, è fatta osservando che la *forza* dell'interazione (la costante d'accoppiamento ...) entrerà in σ e in $\Gamma \equiv \hbar/\tau$ nella stessa maniera, cioè attraverso il modulo quadro dell'elemento di matrice; dunque dobbiamo aspettarci che sia

$$\sigma = A/\tau$$

dove la quantità A deve avere le dimensioni di $cm^2 \cdot s$ e deve dipendere solo da costanti fondamentali e dalla scala di energia E dei due processi che abbiamo assunto avvenire alla stessa scala di energia. D'altronde, con \hbar , c ed E , possiamo solo costruire la lunghezza $\frac{\hbar c}{E}$ e il tempo $\frac{\hbar}{E}$, dunque $A = (\frac{\hbar c}{E})^2 (\frac{\hbar}{E})$, ovvero

$$\sigma \tau = A = (\hbar c)^2 \hbar E^{-3} \quad (3.2.26)$$

e dunque, in particolare, se $\hbar = c = 1$

$$\sigma \tau = E^{-3} \quad (3.2.27)$$

3.3 Verifica dell'esistenza del neutrino

Dal valore della sezione d'urto (3.2.30) si ricava, per esempio, che il libero cammino λ in acqua di un antineutrino da 1 MeV , essendo il numero N di protoni per centimetro cubo pari a (densità dell'acqua $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, 2 protoni³² per molecola, peso molecolare della grammomolecola: $18 \text{ g} \dots$)

$$N = \frac{2}{18} \times 6.022 \cdot 10^{23} \approx 0.67 \cdot 10^{23}$$

Ricordando ora che

$$\hbar c = 197.32696 \text{ MeV} \cdot \text{fm}; \quad \hbar = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$$

ne segue che, sulla scala delle energie del MeV , tipica dei decadimenti nucleari deboli, prendendo τ dell'ordine del minuto (in realtà $\tau_n = 886.7 \pm 1.9 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$), ne risulta appunto per σ il valore (3.2.34).

E' chiaro, comunque, per il modo come è stato ottenuto, che questo valore è solo una stima: il valore corretto (trascurando la differenza di massa fra protone e neutrone, nonché la massa dell'elettrone) risulta, in realtà, maggiore del valore previsto, risultando (cfr., per esempio, L.B. Okun: *Leptons and quarks*, North-Holland 1984, pag. 144)

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+) &= G_F^2 \left(\frac{g_V^2 + 3g_A^2}{\pi} \right) E_\nu^2 = (1.166 \cdot 10^{-5})^2 \frac{1 + 3.75}{\pi} (E_\nu(\text{MeV})10^{-3})^2 \text{ GeV}^{-2} = \\ &= 2.056 \cdot 10^{-16} (E_\nu(\text{MeV})^2 \text{ GeV}^{-2}) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Per avere la sezione d'urto in cm^2 occorre moltiplicare per $(\hbar c)^2$, che vale

$$\hbar c = 197.327 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm} \quad (3.2.29)$$

per cui risulta infine, per $E_\nu = 1 \text{ MeV}$, che

$$\begin{aligned} \sigma &= 2.056 \cdot 10^{-16} \times (0.197)^2 = 8.0 \cdot 10^{-18} \text{ fm}^2 = 8.0 \cdot 10^{-20} \text{ barn} = \\ &= 8.0 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \approx 10^{-43} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Va osservato che è proprio vero che "la fortuna aiuta gli audaci" ... infatti, usando la teoria di Fermi, per quanto riguarda la vita media del neutrone, si ottiene

$$\frac{1}{\tau} = G_F^2 \frac{0.47}{60\pi^3} \Delta^5 \quad (3.2.31)$$

dove $\Delta \equiv M_n - M_p \approx 1.29 \text{ MeV}$ e il termine 0.47 viene dallo spazio delle fasi.

Per quanto riguarda invece lo scattering quasi-elastico

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

essa fornisce, per (anti)-neutrini di energia $M_p \gg E_\nu \gg m_e$

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} E_\nu^2 \quad (3.2.32)$$

e quindi, per neutrini da $E_\nu = 1.29 \text{ MeV} \equiv \Delta$, risulta

$$\sigma \tau = \frac{G_F^2}{\pi} \Delta^2 \frac{60\pi^3}{G_F^2 0.47 \Delta^5} = \Delta^{-3} \frac{60\pi^2}{0.47} \quad (3.2.33)$$

e il fattore adimensionale $\frac{60\pi^2}{0.47}$, ignorato da Bethe e Peierls, vale comunque circa 1260 !

³²Contiamo solo i protoni non legati nel nucleo, quindi i nuclei di idrogeno.

risulta³³ pari a (ricordiamo che 1 anno luce = $0.946 \cdot 10^{18} \text{ cm}$)

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} = \frac{1}{0.67 \cdot 10^{23} \times 10^{-43}} \approx 1.5 \times 10^{20} \text{ cm} \approx 160 \text{ ly} \quad (3.3.35)$$

Questo valore dà un'idea della difficoltà sperimentale che si incontra quando si vogliono rivelare queste particelle !

Con l'esperimento³⁴ di Rodeback e Allen del 1952, si ebbe comunque una prima evidenza, seppure indiretta, dell'esistenza del neutrino.

Essi studiarono il seguente processo di cattura nucleare³⁵ in ^{37}Ar di un elettrone K (Q-valore della reazione: $Q = 0.814 \text{ MeV}$, tempo di dimezzamento $\approx 35 \text{ giorni}$)



Essendo lo stato iniziale sostanzialmente a riposo ($\vec{P} = 0$), i nuclei di ^{37}Cl devono essere monoenergetici se il processo è davvero a due corpi nello stato finale. Questo non è completamente vero perchè l'atomo di Cloro che si forma risulta eccitato (è improvvisamente cambiata la carica del nucleo ...) e si diseccita emettendo uno o più elettroni Auger di energia comunque non superiore a 3 keV .

Sperimentalmente Rodeback e Allen osservarono, dalla distribuzione dei tempi di volo, che la velocità di rinculo degli atomi di Cloro valeva

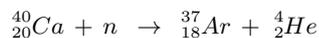
$$v = (0.71 \pm 0.06) \times 10^6 \text{ cm/sec} \quad (3.3.37)$$

ovvero, la loro energia cinetica³⁶ era $1/2 Mv^2 = (9.7 \pm 1.0) \text{ eV}$.

³³Parlando dell'effetto *GZK* abbiamo già derivato la relazione per cui $\lambda = 1/(N\sigma)$. Possiamo anche intuitivamente giungere a questa conclusione se osserviamo che il libero cammino rappresenta la distanza percorsa dalla particella che le garantisce, in media, un urto. D'altronde, detto L un percorso qualsiasi, se σ è la sezione d'urto del processo, nel volume σL si trovano σLN centri scatteratori; dunque il libero cammino medio deve essere tale che $\sigma \lambda N = 1 \dots$

³⁴G.W Rodeback, J.S. Allen: *Neutrino recoils following the capture of orbital electrons in A^{37*}* , Phys. Rev. 86, 446 (1952)

³⁵La sorgente fu preparata al reattore nucleare di Oak Ridge, irraggiando Calcio con neutroni e sfruttando quindi la seguente reazione di trasmutazione



³⁶Se la massa del neutrino è molto minore di quella del protone e quindi della massa M del nucleo di ^{37}Cl , allora l'energia della reazione è portata via praticamente in modo completo dal neutrino, quindi se indichiamo con p il suo impulso (uguale, naturalmente, a quello di rinculo del nucleo di cloro ...) è

$$Q = pc$$

Ma, per il nucleo di cloro, del tutto non relativistico, $p = Mv$, dove v è la velocità di

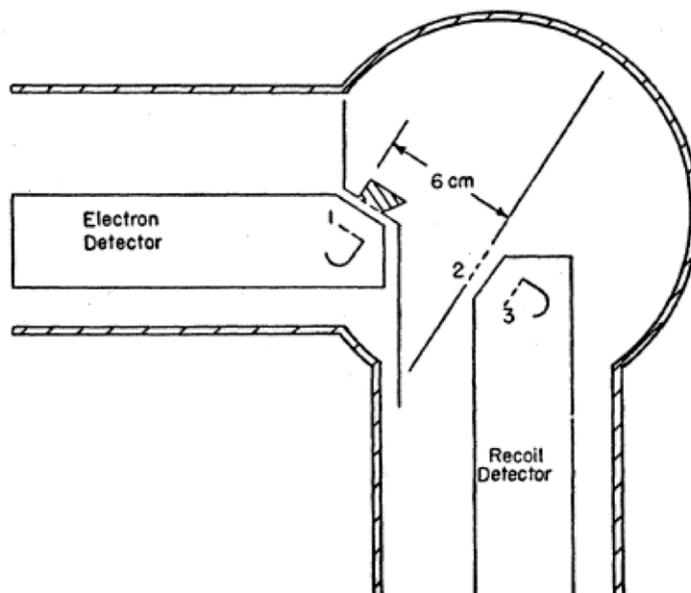


Figura 3.5: Camera di misura usata da Rodeback e Allen nel loro esperimento

Questo risultato³⁷ implicava l'emissione di una particella neutra al momento della cattura e dunque confermava l'ipotesi dei neutrini di Pauli, inoltre consentiva di fornire una prima valutazione, seppur grossolana, della massa del neutrino³⁸ che risultava, in accordo con l'ipotesi di Pauli, molto minore di quella del protone, dell'ordine di quella dell'elettrone e , addirittura, compatibile con zero.

Una sezione della camera che fu usata nell'esperimento di Rodeback e Allen è mostrata in fig. 3.5.

La sezione ombreggiata, definita da diversi diaframmi, indica il volume fiduciale per l'Argon. I diaframmi, gli schermi e le griglie erano tutti a potenziale nullo, con la sola eccezione della griglia 3, posta davanti al rivelatore di ioni, la quale si trovava a circa $-4500 V$ per consentire l'accelerazione degli ioni

rinculo, dunque l'energia di rinculo vale

$$E_r = \frac{p^2}{2M} = \frac{1}{2M} \left(\frac{Q}{c} \right)^2 = \frac{Q^2}{2Mc^2}$$

ovvero, essendo $Q = (816 \pm 4) keV$, mentre $M \approx 35 GeV$, si ha

$$E_r \approx \frac{(0.816 \times 10^{-3})^2}{2 \times 35} = 0.95 \times 10^{-8} GeV = 9.5 eV$$

in accordo con il risultato sperimentale di Rodeback ed Allen.

³⁷In realtà, evidenze analoghe erano già state osservate, per esempio, da Crane e Halpern usando la reazione ${}^{38}_{17}Cl \rightarrow {}^{38}_{18}Ar + e^- + \bar{\nu}_e$
H.R. Crane, Z. Halpern: Phys. Rev. 53, 789 (1938); Phys. Rev. 56, 232 (1939)
ma non erano altrettanto conclusive riguardo alla apparente non conservazione dell'impulso.

³⁸Classicamente infatti, in un decadimento a due corpi, il rapporto fra le energie cinetiche dei prodotti è pari all'inverso del rapporto fra le loro masse.

cloro, una volta che avevano passato la griglia 2, e quindi permettere la loro rivelazione.

Il segnale era rappresentato da una coincidenza ritardata fra l'elettrone Auger, eventualmente emesso durante il processo di riassetto della nuvola elettronica del Cloro susseguente alla cattura K , seguito dalla rivelazione dello ione stesso. La distanza temporale di circa $7 \mu s$ fra i due segnali, tenendo conto che il cammino inerziale mediamente compiuto dal Cloro era di circa 5 cm e che il tempo che esso impiegava per accelerare verso il rivelatore era trascurabile, consentiva di determinare la velocità di rinculo del Cloro stesso.

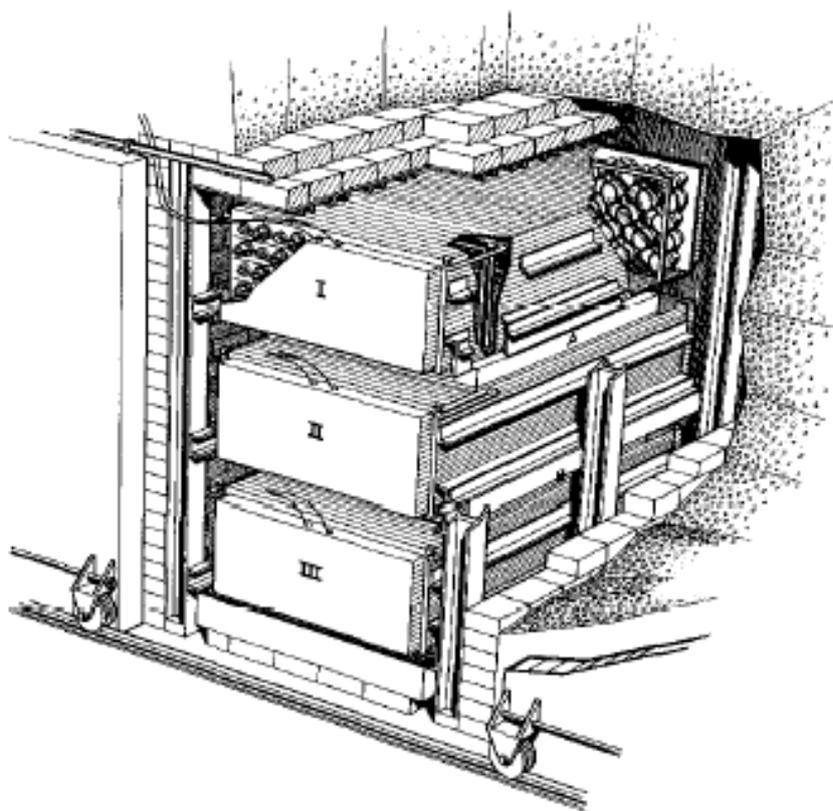


Figura 3.6: *Apparato sperimentale usato da Cowan e Reines*

Il primo progetto di rivelazione³⁹ diretta degli anti-neutrini è nel 1953, ma furono necessari 7 anni per arrivare a un risultato, quando finalmente

³⁹F. Reines, C.L. Cowan jr: *A proposed experiment to detect the free neutrino*, Phys. Rev. 90, 492 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr: *Detection of free neutrino*, Phys. Rev. 92, 830 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr, F.B. Harrison, A.D. McGuire, H.W. Kruse:

Detection of free antineutrino, Phys. Rev. 117, 159 (1960)

D. O. Caldwell: *Current aspects of neutrino physics* Springer-Verlag Berlin 2001

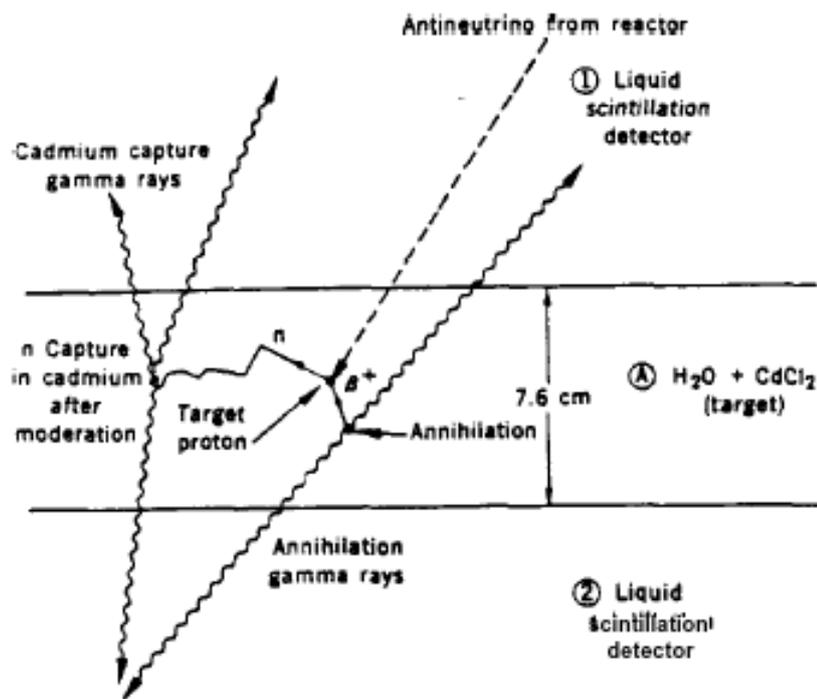


Figura 3.7: Principio di funzionamento dell'esperimento di Cowan e Reines

Cowan e Reines osservarono la reazione beta-inversa



presso la centrale nucleare di Savannah River, negli USA, in grado di fornire un flusso⁴⁰ di ben $10^{13} \bar{\nu}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$.

Il bersaglio⁴¹ era costituito, in totale, da 200 litri di acqua in cui erano

⁴⁰In un processo di fissione neutronica del nucleo ^{235}U , si ottengono tipicamente due nuclei ricchi di neutroni e un paio di neutroni che consentono la prosecuzione della reazione a catena (per es. $^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{140}\text{Xe} + ^{94}\text{Sr} + 2n$). I prodotti di fissione danno luogo a decadimenti β di corta vita media (ms), a cascata. In media si hanno circa $6 \bar{\nu}_e$ di varia energia per ogni fissione, e un totale di circa 200 MeV di energia prodotta. Dunque, il numero di antineutrini emessi dal reattore, per secondo, vale

$$N_{\bar{\nu}} \approx 6 N_{fis} = \frac{6 P_{th}}{2 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}$$

dove P_{th} è la sua potenza termica. Assumendo $P_{th} \approx 1 \text{ GW}$, ne segue che, nell'intero angolo solido, vengono emessi dell'ordine di $\frac{6 \times 1 \cdot 10^9}{3.2 \cdot 10^{-11}} = 1.9 \cdot 10^{20}$ antineutrini per secondo. A una distanza di 11 m dal reattore, il loro flusso $F_{\bar{\nu}}$ vale quindi

$$F_{\bar{\nu}} = \frac{1.9 \cdot 10^{20}}{4\pi(1100)^2} \approx 1.2 \cdot 10^{13} \bar{\nu}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$$

⁴¹Il rivelatore (vedi fig.3.6) era fatto da tre contenitori di scintillatore liquido, per un totale di 5400 litri. Ciascun contenitore era visto da 55 fotomoltiplicatori per parte. Fra i contenitori *I* e *II* e fra *II* e *III* si trovavano, rispettivamente, i contenitori *A* e *B*, ognuno riempito di 100 l di acqua e 20 Kg di cloruro di cadmio, disciolto in essa, che costituivano

disciolti 40 Kg di cloruro di cadmio ($CdCl_2$).

Il segnale era costituito dall'osservazione dei due gamma da 0.511 MeV di annichilazione del positrone, osservati in coincidenza ritardata ($\approx 30 \mu sec$) con i gamma emessi dal nucleo di Cadmio che cattura il neutrone.

Cowan e Reines osservarono che la differenza di conteggi "reattore on" - "reattore off" era di 3 ± 0.2 conteggi all'ora, in sostanziale accordo con la previsione.

Da questa differenza di conteggi essi estrassero⁴² una sezione d'urto pari a

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12^{+7}_{-4} \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.3.40)$$

contro un valore atteso⁴³ (prima della scoperta della violazione di parità) di

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{th} = (6.3 \pm 1.5) \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.3.41)$$

il bersaglio per gli antineutrini. Il rivelatore era posto a circa 11 m dal core della centrale e si trovava a 12 m di profondità, per schermare al meglio i raggi cosmici.

⁴²Il modo per estrarre il valore della sezione d'urto totale del processo si basa sul fatto che il rate di eventi di scattering che si producono è dato, in generale, dall'espressione

$$n = I \sigma N$$

dove I misura il flusso delle particelle incidenti (gli antineutrini, nel nostro caso) ed N rappresenta il numero di particelle bersaglio (protoni, nel caso studiato).

Abbiamo detto che venivano osservati sperimentalmente $n \approx 3 \text{ eventi/ora} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ ev/s}$ mentre abbiamo prima valutato che il flusso degli antineutrini valeva $I \approx 10^{13} \bar{\nu}/(\text{cm}^2 \text{ s})$. Quanto al numero di protoni bersaglio, essendo esso costituito da 200 l di acqua, esso valeva

$$N = 200 \times 1000 \times \frac{2}{18} \times 6.0 \cdot 10^{23} \approx 1.3 \cdot 10^{28}$$

per cui ne segue che

$$\sigma = \frac{n}{I \times N} = \frac{0.83 \cdot 10^{-3}}{1.2 \cdot 10^{13} \times 1.3 \cdot 10^{28}} \approx 0.53 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.3.39)$$

Questo risultato non coincide con il valore di sezione d'urto a cui giunsero Cowan e Reines perchè non abbiamo tenuto conto né dell'accettanza effettiva dell'esperimento né dell'efficienza di rivelare l'evento stesso. Queste due quantità hanno entrambe l'effetto di aumentare il valore della sezione d'urto calcolato in quanto l'accettanza A diminuisce il numero di centri bersaglio mentre l'efficienza ϵ stabilisce che il numero di eventi che si sono effettivamente realizzati è maggiore di quello osservato, e dunque

$$\sigma = \frac{n/\epsilon}{I \times N \cdot A}$$

L'effetto combinato delle due quantità conduce dalla (3.3.39) alla (3.3.40).

⁴³Esso era valutato a partire dalla valutazione della costante di Fermi fatta attraverso la misura della vita media del neutrone, come pubblicato in J.M. Robson: *The radioactive decay of the neutron*; Phys. Rev 83, 349, 1951 ed in base allo spettro beta dei frammenti di fissione misurato.

3.4 Modifiche alla Teoria di Fermi

Al di là del problema della sua non rinormalizzabilità, con l'accumularsi dei dati sperimentali, ben presto ci si rese conto che la teoria di Fermi necessitava comunque di qualche modifica. Ripartiamo dalla teoria così come era stata formulata.

Osserviamo che, a causa del piccolo valore della velocità ($\beta \leq 3 \cdot 10^{-2}$) dei nucleoni nel nucleo, le piccole componenti⁴⁴ degli spinori che compaiono nella corrente adronica sono trascurabili, per cui, in questa approssimazione, data la forma delle matrici γ^μ , è facile convincersi che risulta

$$J_{adr}^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \rightarrow (J^0, \vec{0}) \quad \text{con } J^0 = \bar{\psi}_p \gamma^0 \psi_n \equiv \hat{\psi}_p^\dagger \hat{\psi}_n \quad (3.4.43)$$

dove $\hat{\psi}_{n,p}$ stanno a indicare le grandi componenti degli spinori di Dirac del neutrone e del protone, rispettivamente.

Questo operatore, come componente temporale di un operatore quadri-vettoriale, è evidentemente scalare per rotazioni e quindi non ha elementi di matrice fra stati nucleari aventi diverso valore di momento angolare complessivo J , per cui può descrivere solo le cosiddette *transizioni di Fermi*, cioè quelle caratterizzate dall'aver $\Delta J_{nucl} = 0$ (fra nuclei aventi la stessa parità, poiché l'operatore $\hat{\psi}_p^\dagger \hat{\psi}_n$ è pari visto che, sotto parità la corrente sopra definita è tale che $J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Px)$ e dunque la componente temporale della corrente non cambia ...).

Però ben presto ci si rese conto che esistevano anche dei decadimenti che avvenivano con intensità comparabile con quelle di Fermi, dette *transizioni di Gamow-Teller*⁴⁵, per le quali era $\Delta J_{nucl} = 1$ e questo richiedeva necessariamente di modificare la struttura della corrente inizialmente proposta da Fermi. D'altronde, questa corrente

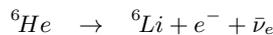
$$J_{adr}^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \quad (3.4.44)$$

⁴⁴Ricordiamo che le soluzioni a energia positiva dell'equazione di Dirac hanno la seguente struttura generale

$$\psi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E}} \begin{pmatrix} (m+E) \hat{\psi}_0 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \hat{\psi}_0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \hat{\psi}_0 \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.4.42)$$

Le prime due componenti dello spinore, ovvero $\sqrt{m+E} \hat{\psi}_0 \equiv \hat{\psi}(\vec{p})$, sono dette *grandi componenti* mentre le seconde due, cioè $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{m+E}} \hat{\psi}_0 \equiv \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m+E} \hat{\psi}(\vec{p})$ sono chiamate *piccole componenti*. Nel limite non relativistico, evidentemente le prime dominano sulle seconde (da cui il nome), essendo quest'ultime proporzionali alle prime sostanzialmente attraverso la velocità.

⁴⁵G.Gamow, E.Teller: *Selection rules for the β -disintegration* Phys. Rev. 49, 895 (1936) Un esempio di transizione di questo genere è quella relativa al decadimento



dove si passa, appunto, da uno stato nucleare 0^+ a uno stato nucleare 1^+ .

era stata scritta in questo modo solo per analogia con la corrente elettromagnetica. Però, dopotutto, l'interazione debole era molto differente da quella elettromagnetica (interazione di contatto fra correnti cariche) per cui ci si poteva ben aspettare anche qualcosa di differente.

Volendo mantenere la forma bilineare⁴⁶ nei campi (senza derivate), sulla base delle proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz, e quindi in vista di una interazione che poi risultasse relativisticamente invariante, per la "sorgente" dell'interazione debole carica esistevano, tenendo conto anche della parità, ben *cinque* possibilità indipendenti per combinare⁴⁷ tra loro i $4 \times 4 = 16$ gradi di libertà associati a $\bar{\psi}$ e ψ , e cioè

$$S : \bar{\psi} \psi; \quad P : \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (3.4.51)$$

$$V : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi; \quad A : \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \quad (3.4.52)$$

$$T : \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \quad (3.4.53)$$

dove S e P assorbono entrambi un grado di libertà, V e A ne assorbono quattro ciascuna mentre T assorbe i sei restanti⁴⁸.

⁴⁶Questa forma, infatti, garantisce la continuità al vertice tanto delle linee adroniche che di quelle leptoniche, ovvero la conservazione sia del numero barionico che del numero leptonic.

⁴⁷Ricordiamo che la rappresentazione che stiamo usando per le matrici γ è quella di Pauli-Dirac, per cui abbiamo

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.45)$$

dove le σ_i sono le usuali matrici di Pauli, cioè

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.46)$$

In questa rappresentazione, la matrice γ_5 è data da

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.47)$$

per cui ne segue che

$$\gamma^0 \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^j \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} \quad (3.4.48)$$

mentre, poiché per definizione è

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.4.49)$$

risulta che

$$\sigma^{0j} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^{jk} = -\epsilon_{jkl} \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix} \quad (3.4.50)$$

⁴⁸Si osservi che $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi$ non è indipendente dal termine $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$, bensì le componenti

Il termine pseudoscalare (3.4.51), nel limite non relativistico, dava comunque contributo nullo, per cui non poteva rendere conto in alcun modo dell'esistenza delle transizioni di Gamow-Teller.

Rimasero così in lizza i termini di tipo A, S, T oltre a quello originale, V . Di questi, S e V potevano spiegare le transizioni di Fermi, mentre A e T potevano farlo per quelle di Gamow-Teller, riducendosi questi ultimi, nel limite non relativistico, infatti a⁴⁹

$$\bar{\psi}_p \gamma^\mu \gamma_5 \psi_n \rightarrow \left(0, \hat{\psi}_p^\dagger \sigma_i \hat{\psi}_n\right) \quad (3.4.54)$$

$$\bar{\psi}_p \sigma^{0i} \psi_n \rightarrow 0; \quad \bar{\psi}_p \sigma^{ij} \psi_n \rightarrow -\epsilon_{ijk} \hat{\psi}_p^\dagger \sigma_k \hat{\psi}_n \quad (3.4.55)$$

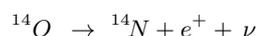
dove le σ_i al secondo membro sono le consuete matrici di Pauli.

Occorsero circa vent'anni di sperimentazione per arrivare a fissare definitivamente la struttura delle correnti deboli nella teoria di Fermi.

In particolare, nel 1956, avvenne un fatto importantissimo per la loro comprensione. Lee e Yang⁵⁰, mossi dalla strana eguaglianza di massa e vita media delle due particelle allora chiamate τ^+ e θ^+ , che decadevano⁵¹ in

$(0, j)$ ed $\epsilon_{jmn}(mn)$ si scambiano semplicemente tra loro, come è evidente dalla (3.4.50) e dalla (3.4.47).

⁴⁹Si osservi che, essendo $\vec{\sigma}$ un operatore vettoriale per rotazioni, sia l'operatore (3.4.54) come l'operatore (3.4.55), per il teorema di Wigner-Eckart, possono descrivere sia transizioni $\Delta J = 0$ che transizioni $\Delta J = 1$, ma non possono descrivere transizioni fra $J_i = J_f = 0$, che, dunque, possono avere origine solo da transizioni di Fermi, come per esempio il decadimento $(0^+ \rightarrow 0^+)$



Questo significa che le transizioni di Fermi e di Gamow-Teller non possono essere descritte da un unico termine di corrente.

Si osservi infine che nei nuclei, anche le transizioni permesse che sono indotte dall'operatore $\vec{\sigma}$, poiché sotto parità risulta $P : A^\mu \rightarrow -A_\mu; T^{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu}$, devono comunque avvenire fra stati con la stessa parità sia nel caso di corrente assiale A che tensoriale T .

⁵⁰T.D. Lee, C.N. Yang: *Question of parity conservation in weak interactions*

Phys. Rev. 104, 254 (1956)

⁵¹Nell'articolo pubblicato su Nature 163, 47 (1949), Brown et al. riportarono di aver osservato, in emulsioni esposte in alta montagna (Jungfrauoch, in Svizzera), il seguente processo

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (3.4.56)$$

Dall'analisi del decadimento, ottennero per il mesone τ^+ un valore di massa pari a $m \approx (1080 \pm 160)m_e$. Successivamente, O'Ceallaigh e Menon, nel 1954, osservarono il decadimento

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \quad (3.4.57)$$

concludendo che il θ^+ era anch'esso un mesone con massa $(1125 \pm 140)m_e$ e dunque molto prossima a quella del τ^+ .

Erano per caso la stessa particella ?

Il problema erano i numeri quantici del θ^+ e del τ^+ . Iniziamo dalla θ^+ . Siccome lo stato finale è fatto di particelle senza spin, evidentemente lo spin S della θ^+ coincide con il

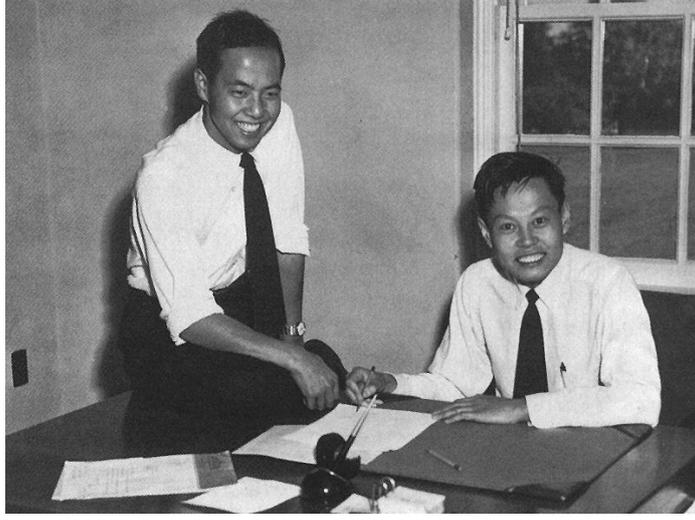


Figura 3.8: T.D. Lee (1926), C.N. Yang (1922)

stati di parità opposta (era il cosiddetto $\theta - \tau$ puzzle), effettuarono uno studio approfondito dei risultati sperimentali sulle interazioni deboli, dal quale emerse che da nessun esperimento fino ad allora eseguito sarebbe stato momento angolare relativo $J = L$ dei due pioni prodotti (poiché assumiamo, ovviamente, che il momento angolare sia conservato nel decadimento ...). Dunque, a priori

$$S = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.58)$$

Se la parità è conservata nel decadimento, allora essendo quella dello stato finale pari a $(-1)^2 (-1)^L$ (i pioni sono pseudoscalari, dunque hanno parità intrinseca -1), i casi possibili sono

$$S^P = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots \quad (3.4.59)$$

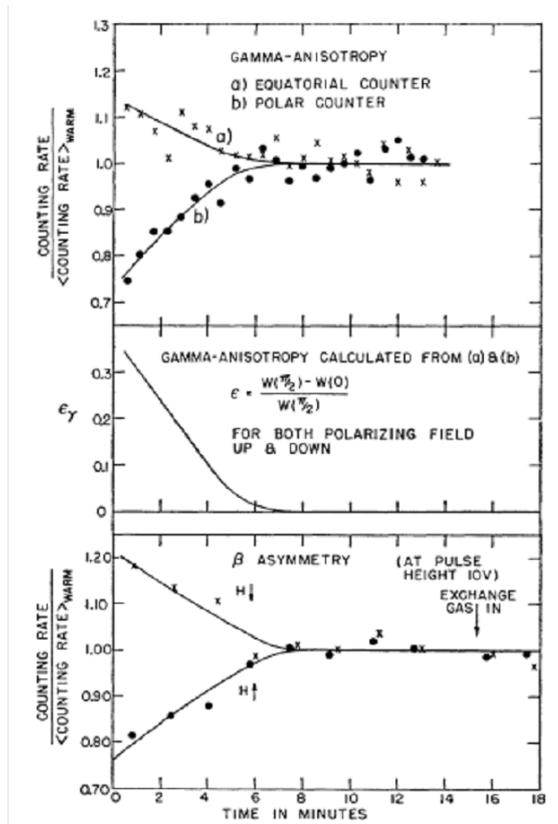
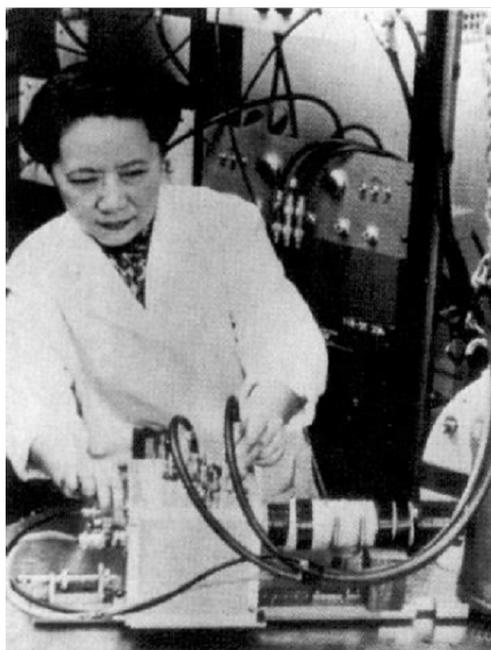
Nel caso del τ^+ , l'assegnazione è meno semplice, a causa dello stato finale a tre corpi. Possiamo però studiarlo come composto da due sistemi: il primo fatto dai due pioni π^+ e il secondo fatto dal primo sistema e dal terzo pione di segno opposto. Se indichiamo rispettivamente con \vec{l} ed \vec{l}' il momento angolare del sistema dei due π^+ e quello del π^- rispetto al sistema precedente, lo spin del τ^+ deve essere la somma dei due, cioè

$$\vec{S} = \vec{l} + \vec{l}' \quad \Rightarrow \quad |l - l'| \leq S \leq l + l' \quad (3.4.60)$$

mentre l'eguaglianza dei due pioni del primo sistema implica che l sia pari, essendo bosoni. Quanto poi alla parità, quella dello stato finale essa è data da

$$P = (-1)^3 (-1)^l (-1)^{l'} \quad (3.4.61)$$

dove, di nuovo, il primo fattore nasce dal fatto che i pioni sono particelle pseudoscalari. La relazione (3.4.60) suggerisce una descrizione dello stato finale come sovrapposizione di onde uscenti caratterizzate dai valori di l ed l' , tali da soddisfare appunto la (3.4.60). L'analisi della distribuzione dei tre pioni nello spazio delle fasi accessibile al decadimento (Dalitz-Fabri plot) mostrò una densità di punti uniforme e permise così di concludere che doveva essere $l = l' = 0$ per cui, al contrario della θ^+ , il τ^+ doveva essere 0^- .


 Figura 3.9: *M.me Wu e i risultati del suo esperimento con il ^{60}Co*

possibile evincere la conservazione della parità nelle interazioni deboli.

Pochi mesi dopo il sasso nello stagno di Lee e Yang, che valse loro il Nobel⁵² nel 1957, arrivarono i primi risultati sperimentali che mostrarono come, effettivamente, la parità fosse violata nelle interazioni deboli, addirittura in modo massimale.

Ciò condusse alla struttura, cosiddetta, $V - A$ della hamiltoniana debole, che ancor oggi è perfettamente valida e, come si è visto, risulta ormai assorbita nel MS nella forma seguente

$$H_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_n] [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu] + h.c. \quad (3.4.62)$$

Gli esperimenti cruciali che provarono la correttezza dell'ipotesi di Lee e Yang furono quello di M.me Wu e quello di Garwin e Lederman.

E' interessante notare come entrambi siano stati ricevuti dall'editore il 15/1/1957: una coincidenza che mostra un evidente accordo fra i due gruppi sperimentali, entrambi della Columbia University.

⁵²T.D. Lee, C.N. Yang: Nobel lecture 1957

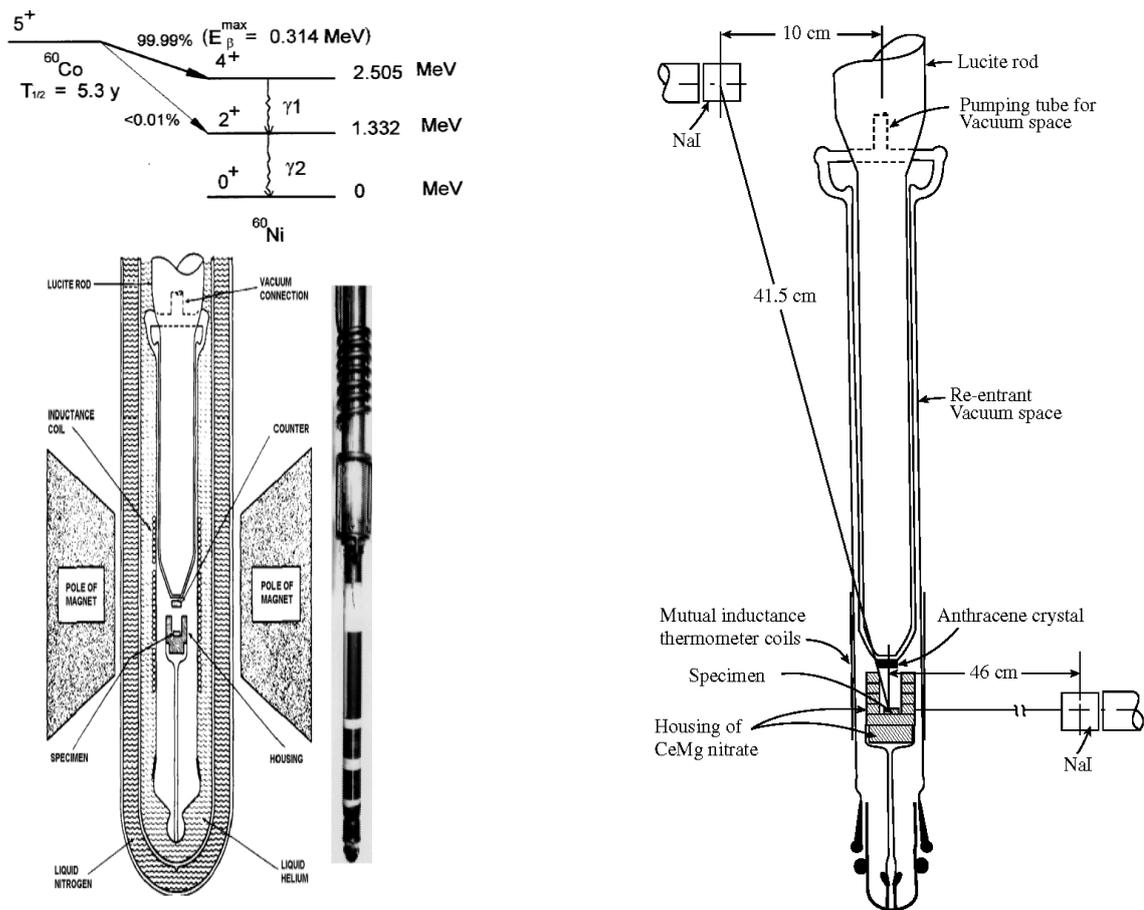


Figura 3.10: *Esperimento di M.me Wu*

L'esperimento fu fatto allo scopo di mettere in evidenza e quindi misurare possibili asimmetrie nella distribuzione degli elettroni emessi nel processo di decadimento β relativamente al piano normale allo spin del ^{60}Co polarizzato. L'orientamento dei nuclei di Cobalto era ottenuto attraverso un campo magnetico relativamente poco intenso ($B \approx 500 \text{ gauss}$) agente su questi atomi, raffreddati fino a $\approx 0.01^0\text{K}$ mediante la tecnica del raffreddamento tramite demagnetizzazione adiabatica, di Rose e Gorter⁵⁴. Il processo di decadimento

⁵³C.S. Wu et al.: *Experimental test of parity conservation in beta decay*
Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

⁵⁴M.E. Rose: "On the production of nuclear polarization", Phys. Rev. 75, 213 (1949)
C.J. Gorter: "A new suggestion for aligning certain atomic nuclei", Physica 14, 504 (1949)

Iniziamo osservando che una temperatura molto bassa risulterà senz'altro necessaria in quanto il magnetone nucleare $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ vale $\mu_N = 3.152 \times 10^{-8} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1}$ e dunque, anche immaginando di disporre di campi magnetici molto intensi, per esempio di 10T , e tenendo conto che il nucleo di Cobalto ha un momento magnetico pari a circa tre magnetoni nucleari, risulta $\mu_{\text{Co}} B \approx 10^{-6} \text{ eV}$, da confrontare con un $kT = 82 \cdot 10^{-6} \text{ eV} @ 1^0\text{K}$. Il problema di riuscire a produrre una temperatura così bassa fu risolto attraverso il metodo messo a punto da Rose e Gorter, citati sopra. Nel caso specifico, esso fu realizzato ponendo

del ^{60}Co inizia con un decadimento β con $\Delta J = 1$ (transizione di Gamow-Teller permessa, tempo di dimezzamento $5.3 a$) $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}$ da un livello 5^+ a un livello 4^+ ($E_\beta^{max} = 314 \text{ KeV}$), seguito da una cascata elettromagnetica $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ con emissione di due fotoni via transizioni $E2$ da 1.173 MeV e 1.332 MeV , rispettivamente. I due fotoni sono emessi preferibilmente in una direzione ortogonale alla polarizzazione nucleare del ^{60}Co e dunque, la loro asimmetria poteva essere usata come controllo dell'allineamento nucleare.

Un sottile cristallo di antracene nel criostato rivelava gli elettroni: la luce emessa dal cristallo raggiungeva un fotomoltiplicatore posto in cima al criostato, attraverso una guida di luce. Due contatori a scintillazione di ioduro di sodio esterni al criostato, posti in una configurazione che permetteva il controllo dell'asimmetria di emissione dei gamma, verificavano lo stato di polarizzazione del ^{60}Co in funzione del tempo.

in un bagno termico di He liquido a pressione di vapore inferiore alla pressione atmosferica ($T_{\text{He}} \approx 1^0 \text{ K}$) un cristallo di Nitrato di Cerio e Magnesio ($2\text{Ce}(\text{NO}_3)_3 \cdot 3\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 24\text{H}_2\text{O}$), realizzato in modo che, al suo interno, potesse essere poi depositato un layer molto sottile ($\approx 50 \mu\text{m}$) di ^{60}Co . Questo sale è una sostanza fortemente paramagnetica e anisotropa, che presenta due assi di magnetizzazione con costante di polarizzabilità molto differente: l'asse di maggiore polarizzabilità era disposto nel piano orizzontale mentre quello di minore polarizzabilità era allineato con la direzione verticale.

Come illustrato nella parte destra (in basso) della Fig.3.10, veniva prodotto un forte campo magnetico orizzontale. Questo allineava gli spin elettronici (ricordiamo che μ_e è circa 2000 volte maggiore di μ_N) del sale paramagnetico: i livelli che prima dell'imposizione del campo magnetico erano equipopolati, si popolavano favorendo, secondo la statistica di Boltzmann, i livelli di energia più bassa. Questo processo libera energia che viene però assorbita dal bagno di Elio e dunque la temperatura resta costante. Una volta raggiunto l'equilibrio spin-reticolo, veniva tolto il bagno di Elio, isolando così termicamente il cristallo di nitrato di Cerio e Magnesio e quindi la sorgente radioattiva di ^{60}Co . Diminuendo il campo magnetico in modo adiabatico (ovvero su tempi più brevi di quelli di rilassamento spin-reticolo, dell'ordine della decina di minuti), poiché la popolazione dei vari livelli non varia (transizione adiabatica), ecco che il sistema, restando con la stessa distribuzione di popolazione, calava la temperatura del cristallo e della sorgente su di esso, restando, almeno in prima approssimazione, $\mu B/kT = \text{cost}$. Partendo allora da campi $B \approx 2T$, si potevano raggiungere, in questo modo, temperature di pochi milliKelvin, partendo da quella dell'Elio liquido. Una volta effettuato il raffreddamento, il magnete veniva tolto e veniva invece inserito un solenoide che serviva per polarizzare il Cobalto. Esso generava un campo dell'ordine di 500 gauss . Questo non riscaldava apprezzabilmente il sistema sia perché era molto meno intenso del campo usato in precedenza, sia perché era applicato secondo l'asse di minor magnetizzazione del sale. Questo campo B , comunque, era in grado di polarizzare gli spin *elettronici* del Cobalto, essendo, infatti, alla temperatura di $10 \text{ m}^0 \text{ K}$

$$\frac{\mu_e B}{kT} \approx \frac{5.788 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-2}}{8.617 \cdot 10^{-5} \times 10^{-2}} \approx 3.3$$

La polarizzazione nucleare era determinata dal campo magnetico che i momenti magnetici associati agli elettroni, allineati dal campo esterno, generavano sul nucleo, campi che sono dell'ordine dei Tesla.

Al passare del tempo, in circa sei minuti, la temperatura risaliva distruggendo così la polarizzazione nucleare.

Per invertire lo spin nucleare bastava procedere di nuovo a un raffreddamento dell'intero sistema e quindi invertire il senso di circolazione della corrente nel solenoide: la dipendenza angolare osservata doveva mostrare un'intensità che cambiava di segno, e questo sarebbe stata la firma conclusiva dell'esistenza della violazione della parità nel decadimento (correlazione spin/impulso).

L'esperimento mostrò una notevole asimmetria⁵⁵ nell'emissione β , la quale seguiva strettamente l'evoluzione nel tempo della polarizzazione nucleare $\mathcal{P}(t)$, come misurata dall'anisotropia di emissione dei fotoni

$$Y(\theta) = 1 - \mathcal{P}(t) \left\langle \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E} \right\rangle = 1 - \mathcal{P}(t) \frac{\langle v \rangle}{c} \cos\theta \quad (3.4.63)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di volo dell'elettrone e la direzione della polarizzazione nucleare e, per il decadimento considerato, risulta $\langle v/c \rangle \approx 0.6$.

Veniamo adesso all'esperimento⁵⁶ di Garwin e Lederman, condotto presso il ciclotrone di Nevis.

Essi misero in evidenza la violazione di parità nel decadimento debole del pione, studiando le caratteristiche del decadimento del μ^+ generato dalla disintegrazione del π^+ , ovvero studiando la catena

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ (+\nu_\mu); \quad \mu^+ \rightarrow e^+ (+\nu_e + \bar{\nu}_\mu) \quad (3.4.64)$$

Come era stato osservato da Lee e Yang, il muone doveva nascere polarizzato longitudinalmente e questo stato di polarizzazione doveva poi essere correlato con la direzione di emissione del positrone (cfr. Vol.IV) .

Il fascio, che conteneva circa il 10% di μ^+ dal decadimento di π^+ in volo, veniva filtrato dai pioni stessi fermanone e assorbendone quanti più possibile in 8" di carbone ($\lambda_I = 5''$).

In questo modo veniva massimizzato il numero di *mu-stop* nel bersaglio, posto davanti al telescopio che osservava i positroni di decadimento, realizzato con due scintillatori e un moderatore posto fra loro in modo da dare un segnale di coincidenza solo quando l'energia dei positroni era superiore a 25 MeV (35 MeV in una seconda fase dell'esperimento).

⁵⁵La presenza del campo solenoidale durante la misura si limita a canalizzare il moto degli elettroni lungo le linee di forza dello stesso, intorno a cui, data la relativamente bassa energia degli stessi, descrivono spirali piuttosto strette.

⁵⁶R.L. Garwin, L.M. Lederman, M. Weinrich: *Observation of the failure of Conservation of parity and Charge Conjugation in meson decays: the magnetic moment of the free muon* Phys. Rev. 105, 1415 (1957)

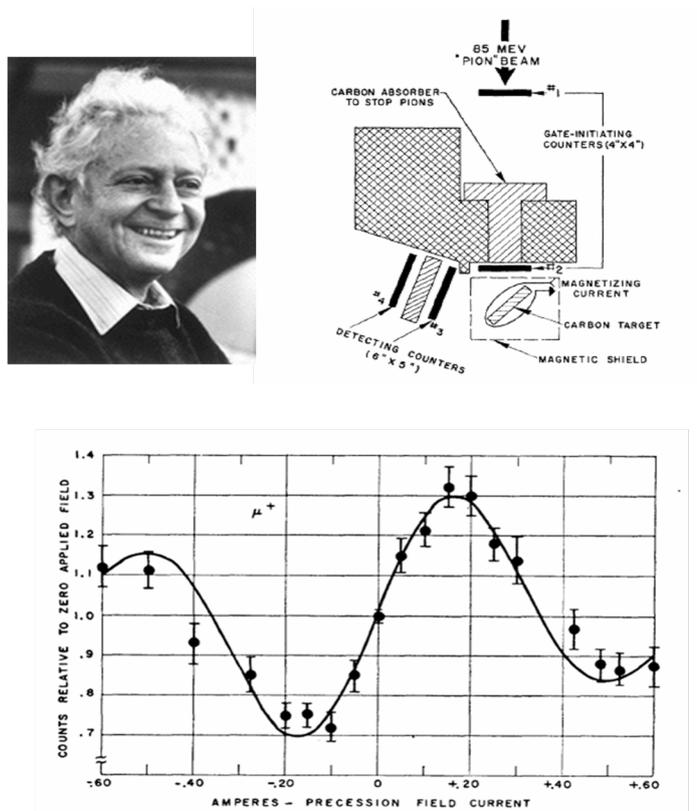


Figura 3.11: *L'apparato sperimentale usato da Garwin e Lederman per osservare la violazione di parità nel decadimento del muone e i risultati ottenuti.*

Un campo magnetico $B(I) = 80 \text{ gauss}/A$ nella regione del bersaglio induceva una precessione⁵⁷ nota (ma variabile in funzione di I) dello spin del muone.

⁵⁷Ricordiamo che in campo magnetico uniforme e costante B , uno spin s che non sia allineato con il campo stesso, precece con una frequenza angolare pari a (SI)

$$2\pi \nu \equiv \omega = \frac{\mu B}{s\hbar} \quad \text{dove} \quad \mu = \frac{e\hbar}{2m} \quad (3.4.65)$$

e dunque, nel caso del muone ($s = 1/2$), assumendo nessun momento anomalo, abbiamo

$$\omega = \frac{eB}{2sm} \Rightarrow \frac{\omega}{B} = \frac{e}{m} = \frac{ec^2}{mc^2} \quad (3.4.66)$$

D'altronde

$$mc^2 = 105.66 \cdot 10^6 eV = 1.06 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19} J \quad (3.4.67)$$

e dunque

$$\frac{\omega}{B} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} (3 \cdot 10^8)^2}{1.06 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.06 \cdot 10^8} \approx 8.5 \cdot 10^8 s^{-1} T^{-1} \quad (3.4.68)$$

Sperimentalmente si osservava una modulazione del numero dei positroni emessi fra $0.75 \mu s$ e $2.0 \mu s$ dopo il trigger di μ -stop in funzione della corrente di induzione magnetica I , compatibile con una correlazione di tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ fra lo spin del muone al momento del decadimento e la direzione di volo del positrone, indice di violazione di parità sia nel decadimento del pione (se il muone non fosse stato polarizzato, anche se nel suo decadimento si fosse poi violata la parità, non avremmo potuto osservare alcuna modulazione poichè lo stato di spin del muone sarebbe stato distribuito isotropicamente) che nel decadimento del muone.

da cui, per un campo di $50 \text{ gauss} = 50 \cdot 10^{-4} T$ (massimo valore raggiunto sul bersaglio ...) ne risulta una frequenza di precessione pari a

$$\omega = 8.5 \cdot 10^8 \times 50 \cdot 10^{-4} = 4.25 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,48 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (3.4.69)$$

3.5 L'elicità del neutrino

La presenza del proiettore $(1 - \gamma_5)$ nella corrente debole ha come conseguenza che solo la corrispondente proiezione chirale può contribuire all'interazione. D'altronde, quando l'energia E è molto maggiore della massa, chiralità diviene sinonimo di elicità ovvero di proiezione dello spin nella direzione dell'impulso, per cui, nel caso del neutrino, dove $E \gg m$ praticamente sempre, si ha che solo lo stato di elicità -1 (spin opposto al momento) è coinvolto nell'interazione, mentre l'opposto accade per l'antineutrino.

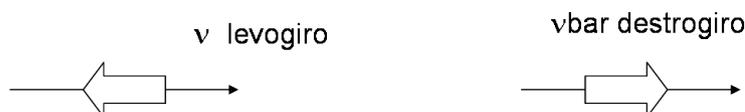


Figura 3.12: *Elicità del neutrino e dell'antineutrino*

Determinare il valore negativo dell'elicità del neutrino, evidente indice della correttezza della teoria $V - A$, poteva sembrare una impresa pressoché disperata, ma invece questo fu possibile nel 1958 a Goldhaber, Grodzins e Sunyar in un esperimento⁵⁸ che, per la sua profondità di concezione e la sua semplicità di arrangiamento, va considerato senz'altro come una pietra miliare nella fisica delle particelle elementari. Vediamone qualche dettaglio.

L'Europio è un lantanide (terra rara) che ha un isotopo isomerico, ${}_{63}^{152m}\text{Eu}$ il quale è radioattivo⁵⁹ con un tempo di dimezzamento di circa 9.3 ore.

Il suo nucleo ha $J^P = 0^-$ e decade per cattura K (ovvero per cattura di un elettrone orbitale in onda S), attraverso una transizione di Gamow-Teller pura, in Samario eccitato Sm^* , in uno stato nucleare avente $J = 1^-$.

Il Samario eccitato Sm^* decade a sua volta nel suo stato fondamentale 0^+ emettendo un fotone di energia pari a circa 960 keV .

La vita media del Sm^* è di circa 30 fs , un tempo così breve per cui l'effetto del rinculo ricevuto nell'emissione del neutrino, avvenuta in seguito alla cattura K , non fa in tempo a disperdersi termicamente, neppure in un solido.

Indichiamo allora con z la direzione in cui è emesso, nel suo verso positivo, il neutrino, e sia questo il nostro asse di quantizzazione del momento angolare. Se il neutrino ν_e ha elicità positiva ($s_z = +1/2$), allora, poiché

⁵⁸M. Goldhaber, L. Grodzins, A.W. Sunyar: *Helicity of neutrinos*
Phys. Rev. 109, 1015 (1958)

⁵⁹Un isomero nucleare è uno stato metastabile del nucleo per la cui diseccitazione occorre che un neutrone o un protone inverta il proprio spin con emissione, per esempio, di un fotone.

Nel caso considerato questo non avviene perché il nucleo trasmuta per cattura K .

Data la breve vita media di questo radionuclide, esso fu preparato per bombardamento neutronico di sesquiossido d'Europio (Eu_2O_3), presso il reattore di Brookhaven.

In natura l'Europio possiede solo due isotopi stabili, cioè ${}^{151}\text{Eu}$ e ${}^{153}\text{Eu}$, pressoché in eguali quantità. L' ${}^{151}\text{Eu}$ è l'isotopo che viene trasformato nel radionuclide ${}^{152m}\text{Eu}$.

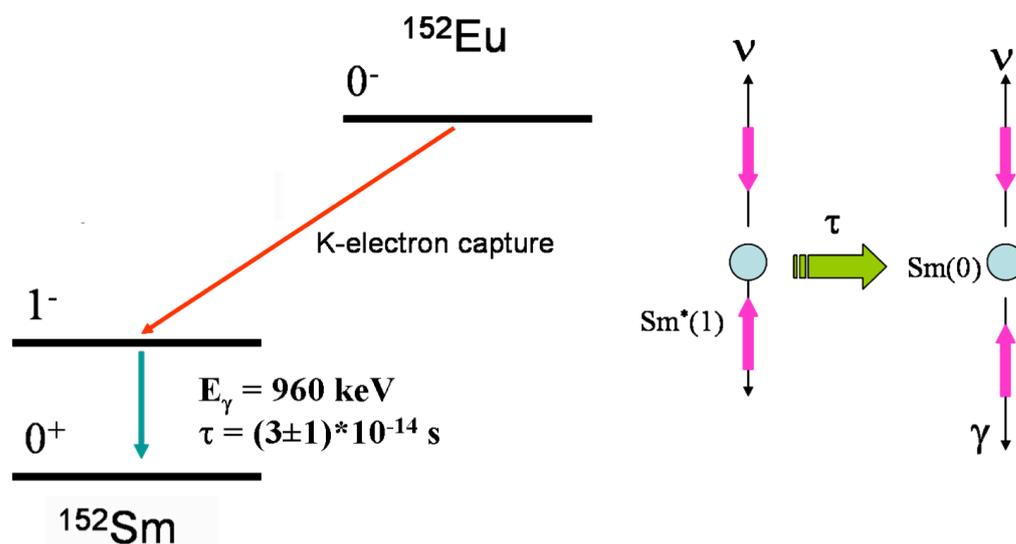


Figura 3.13: Schema dei livelli interessati nella misura dell'elicità del neutrino

l'elettrone ha spin $1/2$ ed è in una shell K (momento orbitale nullo) per cui può contribuire al momento angolare solo per $\pm 1/2$, ecco che la componente z del momento angolare del Sm^* potrà essere solo $J_z = -1, 0$.

Analogamente, se il neutrino ha elicità negativa, allora potremo realizzare solo stati di Samario eccitato con $J_z = +1, 0$.

Ci occupiamo adesso, per ragioni che saranno chiare fra breve, dei fotoni di diseccitazione verso il livello fondamentale 0^+ , emessi nella stessa direzione di moto del Samario. Se lo stato eccitato aveva $J_z = 0$, la transizione ha $\Delta J_z = 0$ e dunque avviene per emissione di un fotone linearmente polarizzato mentre se lo stato di partenza aveva $J_z = \pm 1$ il fotone emesso è circolarmente polarizzato ed è facile convincersi che questo ha la stessa elicità del neutrino. Misurare la polarizzazione del fotone di diseccitazione emesso nella direzione di volo del Samario eccitato equivale quindi a misurare l'elicità del neutrino. Ma come distinguere i fotoni emessi in avanti dagli altri?

Occorre a questo punto ricordare che i fotoni non trasportano la totalità della differenza di energia fra i due stati del Samario di 960 keV : il nucleo di Samario, nella diseccitazione elettromagnetica, riceverà a sua volta un piccolo rinculo, dell'ordine di 3.2 eV , che risulta fortuitamente essere quasi identico a quello ricevuto nella precedente cattura K , dato che il neutrino viene emesso con circa 840 keV .

Ne segue allora che quando i fotoni sono emessi "in avanti", cioè nella direzione di volo del Samario eccitato essi recuperano, per spostamento Doppler, praticamente tutta l'energia persa nell'emissione (e il nucleo di Samario diseccitato va a riposo) in modo che essi sono in grado di effettuare scattering

risonante con altri nuclei di Samario a riposo

$$\gamma + {}^{152}\text{Sm} \rightarrow {}^{152}\text{Sm}^* \rightarrow \gamma + {}^{152}\text{Sm} \quad (3.5.70)$$

Questi fotoni li si potrà così distinguere da quelli emessi in direzioni diverse, proprio usando questa loro caratteristica. Quindi, per determinare l'elicità dei neutrini emessi nella transizione, basta misurare la polarizzazione dei fotoni che contribuiscono maggiormente allo scattering risonante su Samario. Questa misura viene realizzata facendo attraversare ai fotoni, prima di giungere sul Samario, del ferro magnetizzato lungo l'asse di quantizzazione. Nel ferro magnetizzato, due elettroni hanno lo spin preferibilmente allineato in verso opposto a quello del campo magnetico.

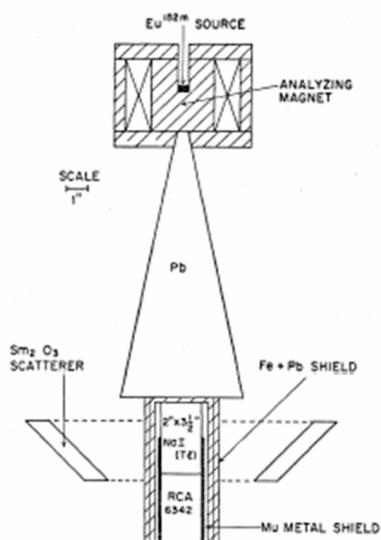


FIG. 1. Experimental arrangement for analyzing circular polarization of resonant scattered γ -rays. Weight of Sm_2O_3 scatterer: 1850 grams.

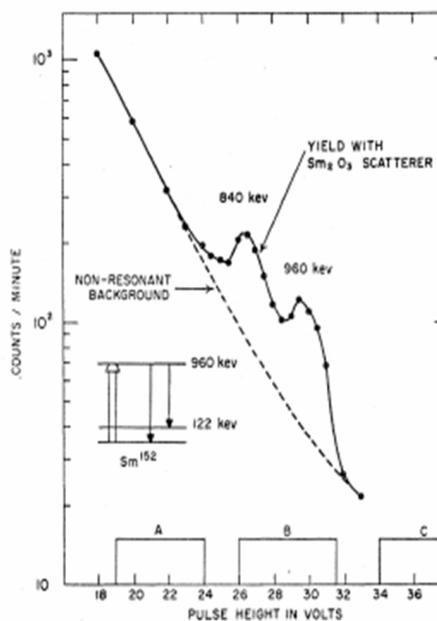


FIG. 2. Resonant-scattered γ rays of Eu^{152m} . Upper curve is taken with arrangement shown in Fig. 1 with unmagnetized iron. Lower curve shows nonresonant background (including natural background).

Figura 3.14: *Arrangiamento sperimentale e risultati dell'esperimento di Goldhaber, Grodzins e Sunyar*

In generale, d'altronde, in uno scattering Compton elettrone-fotone come quello che accade nel ferro magnetizzato, lo spin dell'elettrone potrà essere invertito solo se quest'ultimo è antiparallelo allo spin del fotone.

Questo significa che, per una data elicità dei fotoni, solo per una particolare polarizzazione⁶⁰ del ferro la sezione d'urto Compton conterà *anche* il termi-

⁶⁰ Affinché ci possa essere spin-flip nel processo di scattering Compton occorre che lo spin dell'elettrone sia antiparallelo a quello del fotone.

ne di spin-flip e quindi sarà maggiore che nel caso di polarizzazione opposta, conducendo a una maggiore attenuazione del fascio stesso.

Basta allora misurare la frequenza con cui avviene lo scattering risonante in Samario nelle due configurazioni di campo magnetico allineato nel verso del moto dei fotoni e poi in verso opposto, per determinare infine l'elicità del fotone e quindi, per quanto visto sopra, quella del neutrino !

In questo modo, Goldhaber, Grodzins e Sunyar determinarono l'elicità del neutrino, che risultò essere pari a -1 .

3.6 Il fenomeno delle oscillazioni di neutrino

Nel Modello Standard i neutrini sono di tre *sapori* diversi: ν_e , ν_μ e ν_τ . I fatti sperimentali indicano però oggi che il *sapore* dei neutrini non è una costante del moto, ovvero che essi possono *oscillare*⁶¹ uno nell'altro.

Il meccanismo di oscillazione, suggerito⁶² fin dal 1958 da B. Pontecorvo (anche se in un diverso contesto), prevede che gli autostati di *sapore* debole dei neutrini non siano autostati della loro matrice di massa, bensì loro opportune combinazioni lineari, essendo $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$, $|\nu_3\rangle$ gli autostati in

⁶¹Citeremo solo il fatto sperimentale che costituisce il punto di partenza del problema. Nell'esperimento di Davies e Bachall, iniziato nel 1969 e conclusosi nel 1993, situato nella miniera di Homestake nel South Dakota, si cercava evidenza per la reazione (l'inversa di quella studiata da Rodeback ed Allen)

$$\nu_e + {}^3\text{Cl} \rightarrow {}^3\text{A} + e^- \quad (3.6.71)$$

dove i neutrini, adesso, erano quelli prodotti nel Sole. Nel nucleo della stella, infatti, attraverso varie reazioni, si realizza il risultato netto della fusione

$$4p + 2e \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu_e + 26.14 \text{ MeV} \quad (3.6.72)$$

con i 26.14 MeV emessi sotto forma radiativa e i due neutrini che si dividono un'energia restante di circa 0.59 MeV.

(Cfr. K. Winter: *Neutrino physics*: Cambridge Univ. Press, 1990, Ch.6)

Il flusso di neutrini di origine solare che giungono sulla superficie della Terra, vista la relazione precedente, può essere allora stimato a partire dal flusso di radiazione elettromagnetica: si ha

$$\mathcal{N}_\nu = \frac{2 \times S}{26.14 \times 1.6 \cdot 10^{-13}} \quad (3.6.73)$$

dove S è la costante solare, $S = 1370 \text{ W/m}^2$, mentre $1.6 \cdot 10^{-13}$ è il fattore di conversione fra MeV e Joule. Risulta così

$$\mathcal{N}_\nu \approx 6.5 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} = 6.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (3.6.74)$$

Non tutto questo flusso di neutrini, però, è utile per la reazione (3.6.71) che ha come soglia ben 814 keV e il fatto che siano neutrini molto "marginali" quelli che determinano la reazione, ha costituito per molto tempo un argomento di critica al risultato che, tenuto conto dello spettro in base al modello solare noto, mostrava circa un terzo delle reazioni previste. Questo fatto, oggi confermato anche da altri esperimenti indipendenti, è ormai interpretato come evidenza di oscillazione di flavour dei neutrini: i neutrini elettronici emessi dal Sole, durante la strada per arrivare sulla Terra, oscillavano negli altri flavours per cui ne arrivava mediamente solo un terzo di tipo elettronico, un terzo di tipo muonico e un terzo di tipo tauonico. Siccome, per pure ragioni energetiche, né i ν_μ né i ν_τ potevano produrre, via interazione di corrente carica, i rispettivi leptoni carichi, ecco che se ne osservava solo un terzo di quelli generati.

⁶²B. Pontecorvo: *Mesonium and antimesonium*, JETP 6, 429 (1958)

S.M. Bilen'ki, B.M. Pontecorvo: *Lepton mixing and neutrino oscillations*, Uspekhi 20, 776 (1977)

questione, corrispondenti agli autovalori m_1, m_2, m_3 . Si ha quindi

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (3.6.75)$$

con U matrice unitaria, per cui

$$|\nu_i\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (3.6.76)$$

Se prendiamo allora un neutrino di impulso definito \vec{p} , creato come $|\nu_\alpha\rangle$ al tempo $t = 0$, ecco che, al tempo t , esso sarà descritto dal vettore di stato

$$|\nu, t\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (3.6.77)$$

dove le energie $E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}$ sono differenti per i tre autostati a causa del diverso valore delle rispettive masse. Questo ha come conseguenza che, con il passare del tempo, ci sia oscillazione di sapore (*flavour oscillation*).

Facciamo, per semplicità, il caso di due sole generazioni di neutrini

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle \quad (3.6.78)$$

$$|\nu_\beta\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle \quad (3.6.79)$$

dove θ è l'angolo di mixing⁶³. Assumiamo dunque che, per $t = 0$, sia

$$|\nu\rangle = |\nu_\alpha\rangle \quad (3.6.80)$$

Risulta

$$|\nu(t)\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(\cos\theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \right) \quad (3.6.81)$$

La probabilità che, osservando lo stato $|\nu(t)\rangle$ esso sia trovato nello stato $|\nu_\beta\rangle$ vale, evidentemente

$$\begin{aligned} P_{\alpha\rightarrow\beta}(t) &= |\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle|^2 = \\ &= \left| (-\sin\theta \langle \nu_1 | + \cos\theta \langle \nu_2 |) (e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle) \right|^2 = \\ &= \left| -\sin\theta \cos\theta e^{-iE_1 t} + \sin\theta \cos\theta e^{-iE_2 t} \right|^2 = \\ &= \left| 2 \sin\theta \cos\theta \frac{e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}}{2} \right|^2 = \sin^2 2\theta \left| \frac{e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}}{2} \right|^2 = \\ &= \sin^2 2\theta \frac{(e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t})(e^{iE_1 t} - e^{iE_2 t})}{4} = \sin^2 2\theta \frac{1 - e^{i\Delta E t} - e^{-i\Delta E t} + 1}{4} = \\ &= \sin^2 2\theta \frac{2 - 2 \cos \Delta E t}{4} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta E t}{2} \end{aligned} \quad (3.6.82)$$

⁶³Come si è dimostrato nel caso dei quarks, se ci si limita a due generazioni, la più generale matrice unitaria di mixing può sempre essere ricondotta, attraverso una opportuna scelta delle fasi dei campi, a una matrice reale e dunque a una semplice *rotazione* piana di un opportuno angolo θ dei vettori della base.

dove abbiamo posto $\Delta E \equiv E_1 - E_2$.

D'altronde, per una particella ultrarelativistica come il neutrino (in ogni caso risulta infatti $m \ll E$), risulta

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} \approx p + \frac{m^2}{2p} \quad (3.6.83)$$

per cui, trascurando comunque la massa del neutrino rispetto alla sua energia ($p \approx E_\nu$), si ha

$$\Delta E \approx \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E_\nu} \equiv \frac{\Delta m^2}{2E_\nu} \quad (3.6.84)$$

e dunque

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 t}{4E_\nu} \quad (3.6.85)$$

ovvero, in termini di distanza percorsa ($L = ct$, $c = 1$), abbiamo

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E_\nu} \quad (3.6.86)$$

Definendo allora, per comodità, la quantità λ nel modo seguente

$$\frac{\lambda}{2\pi} \equiv \frac{4E_\nu}{\Delta m^2} \Rightarrow \lambda \equiv \frac{8\pi E_\nu}{\Delta m^2} = 8\pi \frac{E_\nu \hbar c}{\Delta m^2 c^4} \approx 4.96 \frac{E_\nu (MeV)}{\Delta m^2 (eV^2)} m \quad (3.6.87)$$

risulta infine

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{2\pi L}{\lambda} \Leftrightarrow P_{\alpha \rightarrow \alpha}(L) = 1 - P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) \quad (3.6.88)$$

Nella espressione di sopra, abbiamo messo in evidenza che, oltre a esperimenti di comparsa di un nuovo tipo di neutrino in un fascio che non ne possiede, si possono anche fare esperimenti di scomparsa. Questi però sono piuttosto complicati perché è necessario conoscere molto bene la normalizzazione del fascio stesso.

Un esempio di esperimento di comparsa era l'esperimento OPERA, installato nei Laboratori Nazionali del Gran Sasso. Esso veniva illuminato da un fascio di neutrini muonici proveniente dal *CERN* di Ginevra (fascio *CNGS*), risultando

$$L = 732 \text{ Km}, \quad \langle E_\nu \rangle = 17 \text{ GeV} \quad (3.6.89)$$

Nell'ipotesi che il valore del Δm^2 fra le masse quadre dei due neutrini il cui mescolamento porta al ν_μ e al ν_τ fosse quello centrale misurato nell'esperimento giapponese di SuperKamiokande, ovvero $\Delta m^2 = 2.4 \times 10^{-3} eV^2$, avremmo

$$\lambda = 4.96 \times \frac{1.7 \times 10^4}{2.4 \times 10^{-3}} \approx 3.5 \times 10^7 m = 35 \times 10^3 \text{ Km} \quad (3.6.90)$$

e dunque, nell'ipotesi di mixing massimale fra i due neutrini, cioè $\theta = \frac{\pi}{4}$, una probabilità di oscillazione

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) = \sin^2 \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) \approx 1.7 \times 10^{-2} \quad (3.6.91)$$

Si osservi adesso che, in generale, affinché si possa manifestare il fenomeno delle oscillazioni, è necessario che siano soddisfatte entrambe le seguenti due condizioni:

- i neutrini ν_1 , ν_2 e ν_3 devono avere masse non tutte e tre coincidenti (e quindi almeno una non può essere nulla);
- i neutrini di sapore debole definito devono risultare da un mixing non banale ($U \neq I$) fra i diversi autostati di massa.

Nel caso di tre generazioni, così come abbiamo avuto modo di vedere per i quarks, la più generale matrice di mixing U è intrinsecamente definita attraverso tre parametri reali (angoli di rotazione) e una fase, per cui essa può senz'altro essere scritta, al solito, come prodotto delle tre matrici di mixing seguenti

$$U = R_{23} \cdot R_{13}(\delta) \cdot R_{12} \quad \text{con} \quad |\nu_\alpha \rangle \equiv \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i \rangle \quad (3.6.92)$$

dove

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6.93)$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \quad (3.6.94)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \quad (3.6.95)$$

Ciascuna di queste matrici R_{ij} descrive separatamente il mixing fra le due specie (i, j) di neutrino, autostati di massa, che le contraddistingue e l'eventuale presenza della fase $e^{i\delta} \neq 1$, per gli stessi motivi già visti per i quarks, è sinonimo di violazione diretta di CP anche nelle interazioni deboli di corrente carica puramente leptoniche.

3.7 Ancora sulle oscillazioni di neutrino

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato il fenomeno delle oscillazioni nell'ipotesi che lo stato di neutrino "mixed" fosse comunque in uno stesso autostato dell'impulso spaziale per tutti e tre i valori delle masse.

Però non c'è alcuna ragione perché debba essere così.

Cerchiamo quindi di approfondire meglio la questione e iniziamo per questo osservando che il neutrino/antineutrino di sapore α verrà emesso e poi assorbito attraverso un processo di interazione debole di corrente carica che, per definizione, coinvolgerà necessariamente il leptone carico l_α^\pm . Iniziamo dunque riscrivendo la corrente carica debole leptonica, nella presunzione dell'esistenza del mixing: si ha

$$J^\mu(x) = \sum_\alpha \bar{\nu}_\alpha(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l_\alpha(x) \rightarrow \sum_{\alpha,k} U_{\alpha k}^* \bar{\nu}_k(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l_\alpha(x) \quad (3.7.96)$$

dove $\alpha = e, \mu, \tau$ è l'indice di "sapore" mentre $k = 1, 2, 3$ individua gli autostati di massa $|\nu_k\rangle$.

Consideriamo dunque un processo di produzione di neutrino di sapore α che, per esempio, possiamo immaginare consista in un decadimento del tipo

$$P_I \rightarrow P_F + \nu_\alpha + l_\alpha^+ \quad (3.7.97)$$

Indichiamo quindi con $\mathcal{A}_{\alpha k}^P$ l'ampiezza di produzione dello stato $|P_F, \nu_k, l_\alpha^+\rangle$. Se avremo rivelato il leptone l^+ , lo stato coerente di neutrino prodotto in associazione con quello sarà allora il seguente

$$|\nu_\alpha\rangle = \mathcal{A}_{\alpha k}^P |\nu_k\rangle \quad (3.7.98)$$

dove, procedendo nelle consuete ipotesi usate nella descrizione dei processi di urto o decadimento, $|\nu_k\rangle$ sarà in un autostato del quadrimpulso. Siccome stiamo assumendo che, comunque, le masse dei neutrini $|\nu_k\rangle$ siano molto piccole rispetto alla scala delle energie in gioco nel decadimento, possiamo assumere senz'altro che l'effetto della cinematica sia lo stesso su tutte le ampiezze e quindi che lo stato di neutrino prodotto, a meno di una costante moltiplicativa globale irrilevante, sia dato da

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (3.7.99)$$

Se questo stato, prodotto in un certo punto dello spazio, è rivelato dopo un tempo T in un altro punto spostato di \vec{L} rispetto al punto di produzione, allora, al momento della rivelazione lo stato del neutrino sarà diventato

$$|\nu_\alpha, T, L\rangle = e^{-iP_0 T + i\vec{P}\cdot\vec{L}} U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (3.7.100)$$

dove P_0 e \vec{P} sono, rispettivamente, gli operatori che descrivono i generatori delle traslazioni nel tempo e nello spazio.

Riguardo alla rivelazione, questo consisterà in generale in un processo del tipo

$$R_I + \nu_\alpha \rightarrow R_F + l_\alpha^- \quad (3.7.101)$$

il quale avviene secondo certe ampiezze $\mathcal{A}_{\beta k}^R$ le quali, di nuovo, se possiamo trascurare nella cinematica del processo le masse dei neutrini, corrisponderanno alla interazione sullo stato $|\nu_\beta\rangle = U_{\beta i}^* |\nu_i\rangle$.

Ne segue quindi che l'ampiezza del processo risulterà pari a

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle \nu_\beta | \nu_\alpha, T, L \rangle = \sum_{ik} U_{\beta i} \langle \nu_i | e^{-iP_0 T + i\vec{P} \cdot \vec{L}} | \nu_k \rangle U_{\alpha k}^* = \\ &= \sum_k U_{\beta k} U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} \end{aligned} \quad (3.7.102)$$

dove non abbiamo fatto ipotesi sui valori di E_k e p_k , se non che $m_k^2 = E_k^2 - p_k^2$ e che E_k e p_k siano determinati dalla conservazione del quadrimpulso nel processo considerato.

Osserviamo adesso che, se l'interazione ha avuto luogo, è perché \vec{L} e \vec{p}_k sono sostanzialmente colineari, dunque la fase nell'esponenziale presente nella (3.7.102) potrà scriversi come

$$\phi_k \equiv E_k T - \vec{p}_k \cdot \vec{L} = E_k T - p_k L \quad (3.7.103)$$

D'altronde, qualunque sia il processo considerato, i neutrini saranno ultra-relativistici, per cui possiamo assumere che $T = L$ ($c = 1$) e dunque, visto che L è certamente un parametro sperimentale noto, possiamo porre

$$\phi_k = E_k T - p_k L = (E_k - p_k) L = \frac{E_k^2 - p_k^2}{E_k + p_k} L = \frac{m_k^2}{2E} L \quad (3.7.104)$$

dove abbiamo qui assunto, al denominatore, che la somma $E_k + p_k$ coincida con il doppio dell'energia che avrebbe il neutrino nel processo se avesse massa nulla.

A questo riguardo dobbiamo aspettarci che le correzioni a p_k ed E_k rispetto al caso di massa nulla siano proporzionali a m^2 , dovendo per definizione annullarsi per $m^2 = 0$; per cui, dato comunque il legame esistente fra E_k e p_k , in termini della correzione su p_k possiamo scrivere, al primo ordine in m_k^2 , che

$$p_k \approx E - \xi \frac{m_k^2}{2E}; \quad E_k \approx E + (1 - \xi) \frac{m_k^2}{2E} \quad (3.7.105)$$

dove ξ è un parametro compreso fra 0 ed 1 che tiene conto della cinematica del processo alla base della nascita del neutrino stesso. Ne segue dunque che

$$E_k + p_k = 2E + \frac{m_k^2}{2E} \quad (3.7.106)$$

e dunque l'approssimazione fatta nella (3.7.104) è perfettamente valida.

Riguardo alla (3.7.102), essa ci consente di calcolare la probabilità di oscillazione fra sapori e si ha

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = |\mathcal{M}|^2 = \left| \sum_k U_{\beta k} U_{\alpha k}^* e^{-i\phi_k} \right|^2 \quad (3.7.107)$$

Per verificare che per questa strada ritroviamo il risultato (3.6.86) già ottenuto in precedenza, assumiamo di nuovo di avere a che fare con solo due generazioni di neutrini e quindi che sia

$$U_{\alpha 1} = \cos\theta; \quad U_{\alpha 2} = \sin\theta \quad (3.7.108)$$

$$U_{\beta 1} = -\sin\theta; \quad U_{\beta 2} = \cos\theta \quad (3.7.109)$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) &= \left| -\cos\theta \sin\theta e^{-i\phi_1} + \sin\theta \cos\theta e^{-i\phi_2} \right|^2 = \\ &= (2 \sin\theta \cos\theta)^2 \left| \frac{e^{-i\phi_2} - e^{-i\phi_1}}{2} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.7.110)$$

Ma, posto $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$, ecco che, per quanto visto sopra, risulta

$$\Delta\phi = \frac{\Delta m^2}{2E} L \quad (3.7.111)$$

e si ha

$$\begin{aligned} &\left| \frac{e^{-i\phi_2} - e^{-i\phi_1}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} (e^{-i\phi_2} - e^{-i\phi_1}) (e^{i\phi_2} - e^{i\phi_1}) = \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-i\Delta\phi} - e^{i\Delta\phi} + 1) = \frac{1}{4} (2 - 2 \cos\Delta\phi) = \frac{1 - \cos\Delta\phi}{2} = \\ &= \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \end{aligned} \quad (3.7.112)$$

ovvero

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} L \right) \quad (3.7.113)$$

che coincide, appunto, con il risultato (3.6.86) che avevamo già ottenuto nella deduzione presentata nel paragrafo precedente.

In questo calcolo, per valutare ϕ_k , abbiamo assunto che $L = T$, ovvero abbiamo assunto che il neutrino viaggi alla velocità della luce e questo ha condotto direttamente al risultato per cui

$$\phi_k = E_k T - p_k L = \frac{m_k^2}{2E} L \quad (3.7.114)$$

Potrebbe sembrare che si debba tenere conto del fatto che la velocità del neutrino ν_k vale piuttosto

$$V_k = \frac{p_k}{E_k} \quad (3.7.115)$$

e dunque, fissato L , porre piuttosto

$$T = \frac{L}{V_k} = L \frac{E_k}{p_k} \quad (3.7.116)$$

In questo caso

$$E_k T - p_k L = \frac{e_k^2}{p_k} L - p_k L = \frac{m_k^2}{p_k} \approx \frac{m_k^2}{E} \quad (3.7.117)$$

che mostra un fattore 2 di differenza rispetto al risultato (3.7.104).

Questo ragionamento, però, è sbagliato perché presume che la detezione avvenga a tempi diversi per i vari neutrini, mentre, chiaramente, l'evento di detezione è unico e avviene a un unico tempo T , così come avviene a una unica distanza L dal luogo di produzione.

Resta l'obiezione che, comunque, i neutrini non viaggiano a c e dunque ponendo $L = T$ abbiamo fatto una qualche approssimazione.

Possiamo tenere conto della velocità dei neutrini modificando la relazione in questione, ovvero ponendo

$$T = L \quad \rightarrow \quad T = L(1 + \epsilon) \quad (3.7.118)$$

dove la quantità $\epsilon \ll 1$ tiene conto appunto che i neutrini impiegano un poco più di tempo della luce a compiere il tratto L .

In questo caso, la fase ϕ_k diviene allora

$$\phi_k = E_k T - p_k L = E_k L(1 + \epsilon) - p_k L = \phi_k^0 + \epsilon E_k L \quad (3.7.119)$$

dove abbiamo indicato con ϕ_k^0 la fase ottenuta nell'ipotesi di $T = L$.

Quello che serve, per la valutazione della probabilità di oscillazione, è però la differenza di fase $\Delta\phi_{kj}$, per la quale abbiamo

$$\Delta\phi_{kj} = \phi_k - \phi_j = E_k T - p_k L - (E_j T - p_j L) = \Delta\phi_{kj}^0 + \epsilon L (E_k - E_j) \quad (3.7.120)$$

D'altronde, per la (3.7.105), risulta

$$E_k \approx E + (1 - \xi) \frac{m_k^2}{2E} \Rightarrow L(E_k - E_j) = (1 - \xi) \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} = (1 - \xi) \Delta\phi_{kj}^0 \quad (3.7.121)$$

e quindi la correzione per il tempo di volo del neutrino conduce semplicemente a

$$\Delta\phi_{kj} = \Delta\phi_{kj}^0 [1 + \epsilon(1 - \xi)] \quad (3.7.122)$$

e, essendo $\epsilon \ll 1$, questa correzione è evidentemente del tutto trascurabile. Comunque, il fatto che i diversi autostati di massa abbiano velocità di propagazione differenti può avere delle conseguenze nel fenomeno dell'oscillazione. Può infatti succedere che, poiché lo stato avrà in partenza una sua certa larghezza finita, le tre componenti si ritrovino spazialmente separate e quindi non più in grado di interferire: è il fenomeno della decoerenza.

Immaginiamo infatti che il pacchetto d'onda dei neutrini abbia una certa lunghezza Δx e immaginiamo, di nuovo, di trattare il fenomeno delle oscillazioni assumendo solo due sapori, corrispondenti agli autostati di massa ν_1 e ν_2 .

Al tempo T dopo la produzione, il neutrino ν_i avrà compiuto un tratto $L_i = T V_i = T \frac{p_i}{E_i}$ per cui, se accade che

$$\begin{aligned} \Delta x > \Delta L &= T \left| \frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} \right| \approx L \left| \left(1 - \frac{m_1^2}{2E^2} \right) - \left(1 - \frac{m_2^2}{2E^2} \right) \right| = \\ &= L \frac{\Delta m^2}{2E^2} = L \frac{\Delta \phi}{E} \end{aligned} \quad (3.7.123)$$

i pacchetti risulteranno spazialmente separati e dunque non potranno più interferire e quindi produrre effetti coerenti.

La condizione (3.7.123) può anche essere riscritta definendo la lunghezza di coerenza L^{coh} in modo che valga l'uguaglianza nella relazione (3.7.123): abbiamo allora

$$L^{coh} = \frac{2E^2}{\Delta m^2} \Delta x \quad (3.7.124)$$

Il suo significato è che, fino a distanze dell'ordine di L^{coh} , la coerenza è mantenuta. Proviamo a calcolare di quale distanza si parla, assumendo $\Delta m^2 = 10^{-3} eV^2$, $E = 100 MeV$ e $\Delta x = 10m$, che corrispondono, come ordine di grandezza, al decadimento del pione da fermo. Abbiamo

$$L^{coh} = \frac{2E^2}{\Delta m^2} \Delta x = \frac{2(10^8)^2}{10^{-3}} 10 = 2 \times 10^{20} m! \quad (3.7.125)$$

3.8 Misura della massa del $\bar{\nu}_e$

Dopo l'osservazione di Cowan e Reines dell'antineutrino, restava assolutamente aperto il problema della sua massa: si sapeva solo che doveva essere dell'ordine o più piccola della massa dell'elettrone ma niente di più!

Un modo per misurare questa massa è quello che fa uso del cosiddetto Kurie plot⁶⁴, metodo già previsto da Fermi nel suo lavoro del '34 sul Nuovo Cimento.

Consideriamo il decadimento beta più studiato a questo riguardo, cioè quello del trizio⁶⁵



Riguardo alla parte nucleare, si tratta di una transizione $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$, dunque con $\Delta J = 0$ e senza cambio di parità, la quale avviene all'interno dello stesso multipletto di isospin, dunque con $\Delta T = 0$. È una transizione superpermesa, con contributi sia del tipo di Fermi che del tipo di Gamow-Teller.

Il rate W di decadimenti (probabilità per unità di tempo), dalla teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, per la Regola d'oro di Fermi, è noto essere dato da

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 d\Phi$$

dove M_{fi} è l'elemento di matrice che descrive l'accoppiamento fra lo stato iniziale e quello finale prodotto dall'interazione mentre $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi, cioè una misura della densità degli stati finali accessibili cinematicamente. Però, dati sia il piccolo valore dell'energia massima E_0 (Q -valore) messa in gioco dalla reazione rispetto alle masse dei nuclei in

⁶⁴F.N.D. Kurie, J.R. Richardson, H.C. Paxton: *The radiations emitted from artificially produced radioactive substances: The upper limits and shapes of the β -ray spectra from several elements*, Phys. Rev. 49, 368 (1936).

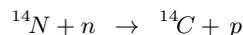
⁶⁵J.J. Simpson: *Measurement of the β -energy spectrum of ${}^3\text{H}$ to determine the anti-neutrino mass*, Phys. Rev. 23D, 649 (1981).

Ricordiamo che il trizio (Tritium, simbolo chimico $T \equiv {}^3\text{H}$) è un isotopo dell'idrogeno in cui il nucleo è fatto dal protone e due neutroni. Esso decade β^- con una vita media di 12.3 anni, liberando complessivamente un'energia E_0 pari a $E_0 = 18567 \pm 5 \text{ eV}$.

Esso si forma continuamente nell'alta atmosfera per assorbimento da parte dell'azoto di un neutrone prodotto in interazione di raggi cosmici, e successiva disintegrazione del nucleo secondo la reazione



Come curiosità ricordiamo che questo è lo stesso meccanismo che conduce alla produzione di ${}^{14}\text{C}$, isotopo radioattivo del Carbonio estesamente usato nelle datazioni di materiali originati da esseri viventi (tempo di dimezzamento $\lambda_{1/2} = 5568 \pm 30 \text{ anni} \Rightarrow$ vita media $\tau = 8033 \pm 43 \text{ anni}$). In quel caso la reazione, prodotta da neutroni termici, è la seguente:



gioco che l'enorme differenza di massa esistente fra l' ${}^3\text{He}$ e l'elettrone (e quindi l'antineutrino ...), si può senz'altro assumere che il nucleo di ${}^3\text{He}$ assorba tutto l'impulso senza che il suo rinculo "costi" in termini di energia. In altre parole, invece che un decadimento a tre corpi in cui si conserva energia e impulso, si può pensare a un decadimento a due corpi ($e, \bar{\nu}_e$) dove si conserva solo l'energia.

Se indichiamo con \vec{p} l'impulso dell'elettrone e con \vec{q} quello dell'antineutrino, si ha che lo spazio delle fasi accessibile è dato quindi da

$$d\Phi = d^3p d^3q \delta(E_0 - E - E_\nu) \quad (3.8.127)$$

dove E_0 è l'energia disponibile nel decadimento, E è l'energia dell'elettrone ed E_ν quella dell'antineutrino.

Quanto poi all'elemento di matrice del decadimento in esame, esso può essere considerato sostanzialmente indipendente dalla cinematica degli stati finali. Per rendercene conto, iniziamo osservando che, a causa del basso Q-valore della reazione, quanto alla parte adronica, essa può essere senz'altro trattata in approssimazione non relativistica. Inoltre, per lo stesso motivo, l'impulso trasferito \vec{P} al sistema nucleare, cioè $\vec{P} \equiv \vec{p} + \vec{q}$, è tale per cui la lunghezza d'onda di De Broglie a esso associata risulta molto grande rispetto alle dimensioni del nucleo. Questo significa che l'elemento di matrice non dipende dal momento trasferito, a meno di correzioni legate all'interazione coulombiana dell'elettrone con il nucleo. In particolare, per la parte adronica, abbiamo

$$\langle {}^3\text{He} | J_\mu | {}^3\text{H} \rangle \propto (1_F, -\beta \vec{\sigma}_{GT}) \quad (3.8.128)$$

dove β misura il rapporto fra il contributo assiale e quello vettoriale (che è +1 se la struttura di J_μ è di tipo $V - A$ puro, senza fattori di forma ...).

Da tutto questo segue che il rate di decadimento dipende dalle variabili cinematiche solo attraverso lo spazio delle fasi. Abbiamo dunque che il numero di decadimenti dn tali per cui l'elettrone ha impulso compreso fra p e $p + dp$ e l'antineutrino ha impulso compreso fra q e $q + dq$ è proporzionale semplicemente allo spazio delle fasi disponibile, ovvero

$$dn \propto p^2 dp d\Omega_e q^2 dq d\Omega_\nu \delta(E_0 - E - E_\nu) \quad (3.8.129)$$

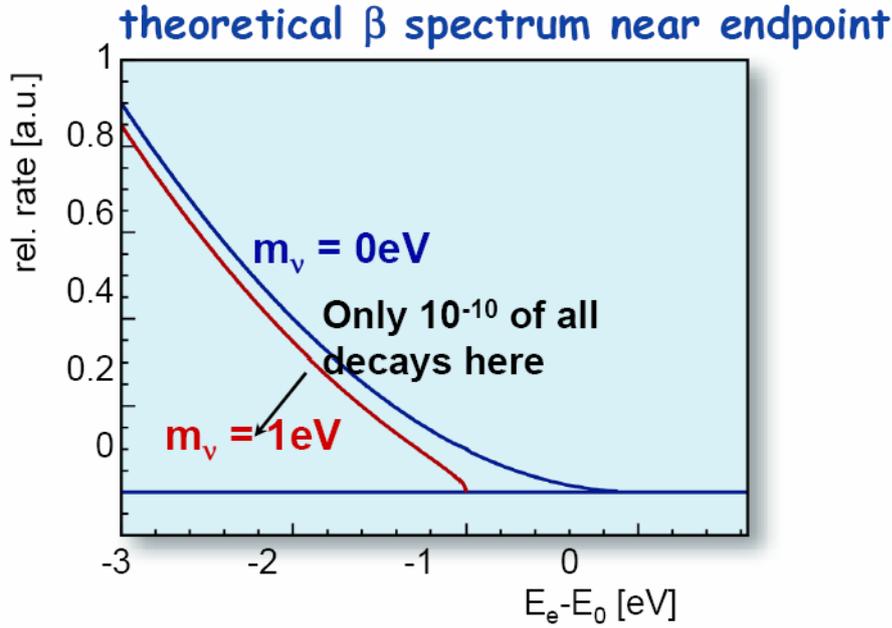
D'altronde, se indichiamo con m_ν la massa⁶⁶ dell'antineutrino, si ha ($c = 1$)

$$E_\nu^2 = q^2 + m_\nu^2 \Rightarrow q dq = E_\nu dE_\nu \quad (3.8.130)$$

e dunque

$$dn \propto p^2 dp d\Omega_e q E_\nu dE_\nu d\Omega_\nu \delta(E_0 - E - E_\nu) \quad (3.8.131)$$

⁶⁶Ricordiamo che particella e antiparticella, secondo il teorema CPT, devono avere la stessa massa; quindi, a meno di violazioni del teorema in questione che viene dimostrato in *QFT* sotto ipotesi davvero molto generali, parlare di massa del neutrino e dell'antineutrino è la stessa cosa.

Figura 3.15: *Kurie plot*

e se integriamo su E_ν e sulle variabili angolari, otteniamo

$$dn \propto p^2 dp (E_0 - E) \sqrt{((E_0 - E)^2 - m_\nu^2)} \quad (3.8.132)$$

D'altronde, detta $E_M = E_0 - m_\nu$ la massima energia cinetica possibile per l'elettrone e posto $I(p) = dn/dp$, risulta

$$\sqrt{\frac{I(p)}{p^2}} \propto \sqrt{(E_M - E + m_\nu) \sqrt{E_M - E} \sqrt{E_M - E + 2m_\nu}} \quad (3.8.133)$$

che, nel limite $E \rightarrow E_M$ va come $(E_M - E)$ se $m_\nu = 0$ e come $(E_M - E)^{\frac{1}{4}}$ se $m_\nu \neq 0$.

Dal punto di vista sperimentale, comunque, la misura è complicata da vari fattori, come, per esempio, la stessa struttura molecolare a cui il Trizio è legato. Essendo le energie di legame non dissimili dalla massa cercata dell'antineutrino, la loro presenza è sorgente di errori sistematici che occorre valutare molto accuratamente.

Vari gruppi sperimentali hanno lavorato a questo tipo di misura: il risultato recente più preciso del gruppo di Troitsk, fornisce⁶⁷

$$m_{\nu_e} < 2.5 \text{ eV} \quad (3.8.134)$$

⁶⁷V.M. Lobashev: *The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study it in the project KATRIN*, Nucl. Phys. 719A, 153c (2003)

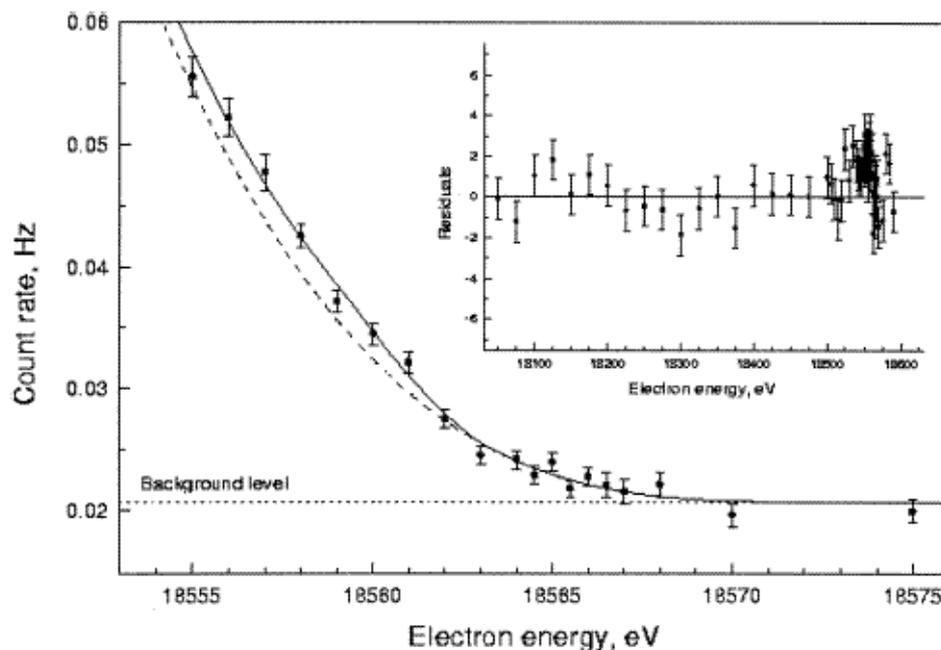


Figura 3.16: *Kurie plot sperimentale del gruppo di Troitsk*

compatibile con zero (cfr. fig.(3.16)).

Prima di concludere questo argomento, ricordiamo brevemente anche quali sono i limiti diretti che oggi conosciamo sulle masse del neutrino muonico e tauonico.

Quanto al neutrino muonico, la sua massa viene misurata direttamente attraverso uno studio cinematico completo della reazione di decadimento del pione a riposo



La prima sua determinazione⁶⁸ attraverso questo metodo risale al 1956.

Esso è tutt'ora il metodo seguito più preciso e il risultato più recente fornisce⁶⁹ come limite il valore seguente:

$$m_{\nu_\mu} < 170 \text{ keV} \quad (3.8.136)$$

⁶⁸W.H. Barkas et al: *Mass ratio method applied to the measurement of L-meson masses and the energy balance in pion decay*, Phys. Rev. 101, 778 (1956)

⁶⁹K. Assamagan et al: *Upper limit of the muon-neutrino mass and the charged pion mass from momentum analysis of a surface muon beam*, Phys. Rev. 53D, 6065 (1996)

Infine, quanto alla massa del neutrino tauonico, la sua determinazione più precisa è quella fornita dalla Collaborazione ALEPH che, al LEP del CERN ha studiato la reazione seguente:

$$\tau^- \rightarrow 2\pi^- + \pi^+ + \nu_\tau \quad (3.8.137)$$

stabilendo il limite

$$m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV} \quad (3.8.138)$$

Capitolo 4

Appendix: Generalità

4.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ($1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$, $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)

$$\begin{array}{ll} \text{carica dell'elettrone} & e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues} \\ \text{massa dell'elettrone} & m = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g} \\ \text{costante di Planck} & \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} \\ \text{velocità della luce} & c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s} \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito come

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA}$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{eV}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{eV}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v , possiede un impulso¹

$$p = mv = mc\beta = 0.511\beta \frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (4.1.2)$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (*SI*) ed in quello di Heaviside-Lorentz (*HL*) risulta²

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \quad (4.1.4)$$

¹Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\gamma\beta$, dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

²Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= \rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

In particolare, $q_{HL} = \sqrt{4\pi}q_{cgs}$, da cui, se $\hbar = c = 1$, ne segue che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Ricordiamo infine che, sempre nel *SI*, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono riportati di seguito.

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deka	da	10^{-24}	yocto	y

Figura 4.1: *Prefissi nel Sistema Internazionale*

4.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, \dots) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italiani (i, j, \dots) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \quad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \quad (4.2.5)$$

ed il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq , oppure (pq) , se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \quad (4.2.6)$$

Dato un quadrivettore p , rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (pp) = p^\mu p_\mu \quad (4.2.7)$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.2.8)$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (4.2.9)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (4.2.10)$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (4.2.11)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (4.2.12)$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu \equiv \not{p} \quad (4.2.13)$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (4.2.14)$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (4.2.15)$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad (4.2.16)$$

$$(\gamma_5)^2 = I \quad (4.2.17)$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (4.2.18)$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ , i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.19)$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2.20)$$

ed in questa rappresentazione, la matrice γ_5 assume la forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.21)$$