



*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica  
e tutta l'abilità messe in un lavoro  
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.  
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

*La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.*

*Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

Il Saggiatore (1623)

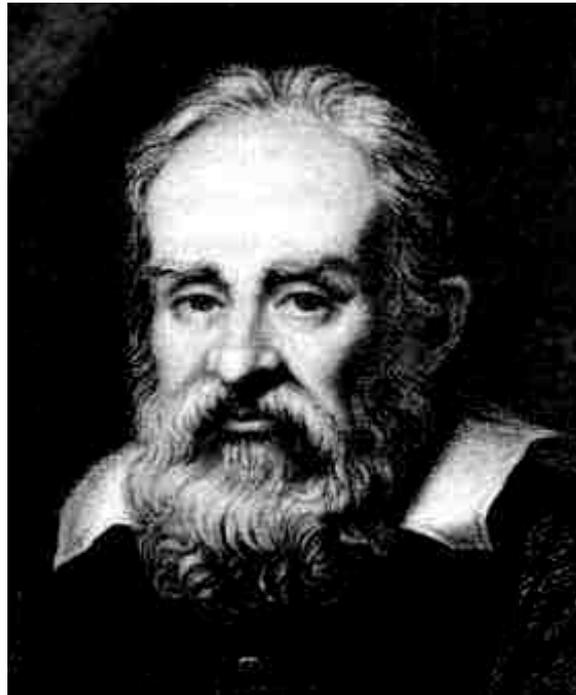


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Lo spazio-tempo</b>	<b>9</b>
2.1	Generalità . . . . .	9
2.2	L'evento . . . . .	14
2.3	Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	15
2.4	Conseguenze dalle trasformazioni di Lorentz . . . . .	29
2.4.1	Classificazione degli intervalli . . . . .	29
2.4.2	Il tempo proprio . . . . .	33
2.4.3	La lunghezza propria . . . . .	35
2.4.4	Paradosso dello sciatore . . . . .	38
2.4.5	Composizione delle velocità . . . . .	40
2.4.6	Aberrazione angolare . . . . .	42
2.4.7	Velocità superluminali apparenti . . . . .	44
2.5	Quadrivelocità e quadriaccelerazione . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Cinematica relativistica</b>	<b>49</b>
3.1	Il quadrimpulso . . . . .	49
3.2	Il fotone . . . . .	54
3.3	L'effetto Doppler . . . . .	56
3.4	Allargamento Doppler di una riga spettrale . . . . .	59
3.5	Verifiche dirette del Doppler trasverso . . . . .	63
3.6	Riflessione da un piano in moto . . . . .	79
3.7	Urto quasi-elastico . . . . .	84
3.8	L'effetto Compton . . . . .	96
3.9	L'urto anelastico . . . . .	103
3.10	Trasformazione di una distribuzione . . . . .	109
3.11	Decadimento di una particella in volo . . . . .	113
3.12	Massa trasversa e picco Jacobiano . . . . .	124
<b>4</b>	<b>Dinamica relativistica</b>	<b>133</b>
4.1	Dinamica del punto materiale . . . . .	133
4.2	Carica in campo e.m.: generalità . . . . .	135

4.3	Carica in campo magnetico . . . . .	136
4.4	Carica in campo elettrico . . . . .	142
4.5	Carica in campo e.m. uniforme e costante . . . . .	147
4.5.1	In campo magnetico . . . . .	148
4.5.2	In campo elettrico . . . . .	149
4.5.3	In campo elettrico e magnetico . . . . .	150
4.5.4	$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ma $E^2 - B^2 \neq 0$ . . . . .	153
4.5.5	$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ e anche $E^2 - B^2 = 0$ . . . . .	159
4.5.6	$\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ . . . . .	165
4.6	L'irraggiamento di una carica accelerata . . . . .	182
4.7	Irraggiamento in un acceleratore . . . . .	206
4.8	Una nota di colore ... . . . .	218
<b>5</b>	<b>Effetto Cerenkov</b> . . . . .	<b>221</b>
5.1	Teoria classica . . . . .	221
<b>6</b>	<b>Appendix: Generalità</b> . . . . .	<b>241</b>
6.1	Le unità di misura . . . . .	241
6.2	Le notazioni . . . . .	243

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo volume considereremo alcuni aspetti rilevanti della Teoria della Relatività Ristretta.

Daremo per nota la teoria del gruppo di Lorentz, svolta nel Vol.1.



## Capitolo 2

# Lo spazio-tempo

### 2.1 Generalità

Il punto di partenza della Teoria è il *principio di Relatività (ristretta)*. Esso afferma che le leggi della Natura si esprimono nello stesso modo, cioè hanno la stessa forma, in ogni riferimento inerziale.

La dinamica di Newton, contenuta nelle sue tre leggi del moto<sup>1</sup>, è in accordo con questo principio generale.

In questo schema (relatività galileiana<sup>2</sup>), lo spazio è omogeneo e isotropo, mentre il tempo, che scorre in modo uniforme<sup>3</sup>, è universale e assoluto<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup>I. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ed. 1686

<sup>2</sup>E' interessante come il concetto di relatività del moto sia già chiaramente espresso nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi tolemaico e copernicano* di G. Galilei (1632).

Salviati: Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in lá) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, nè, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra

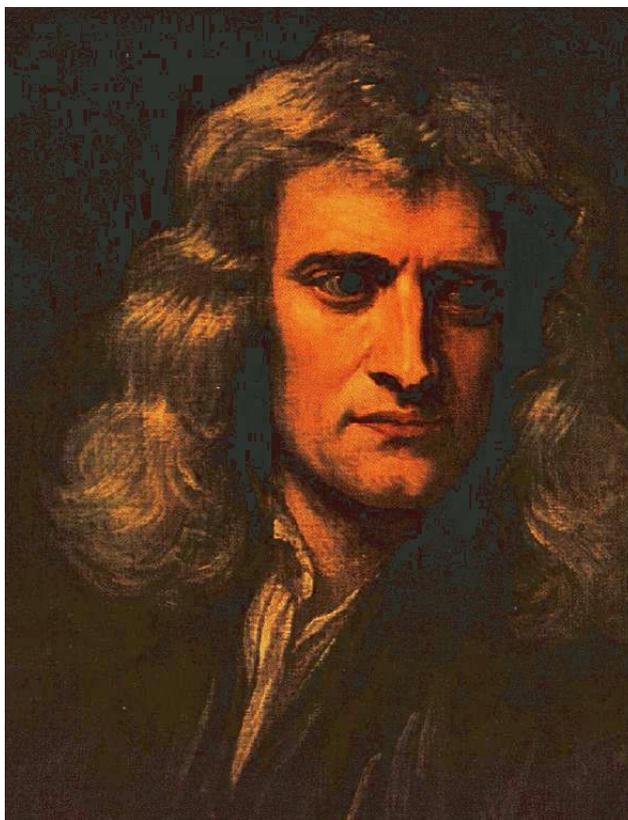


Figura 2.1: *Sir Isaac Newton (1643-1727)*

---

molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fossero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non più verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne é cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze più e men notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati: e non è dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche parimente e le farfalle, impedita dall'aria, non potrebbero seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notevole si separassero; ma trattenendovisi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella

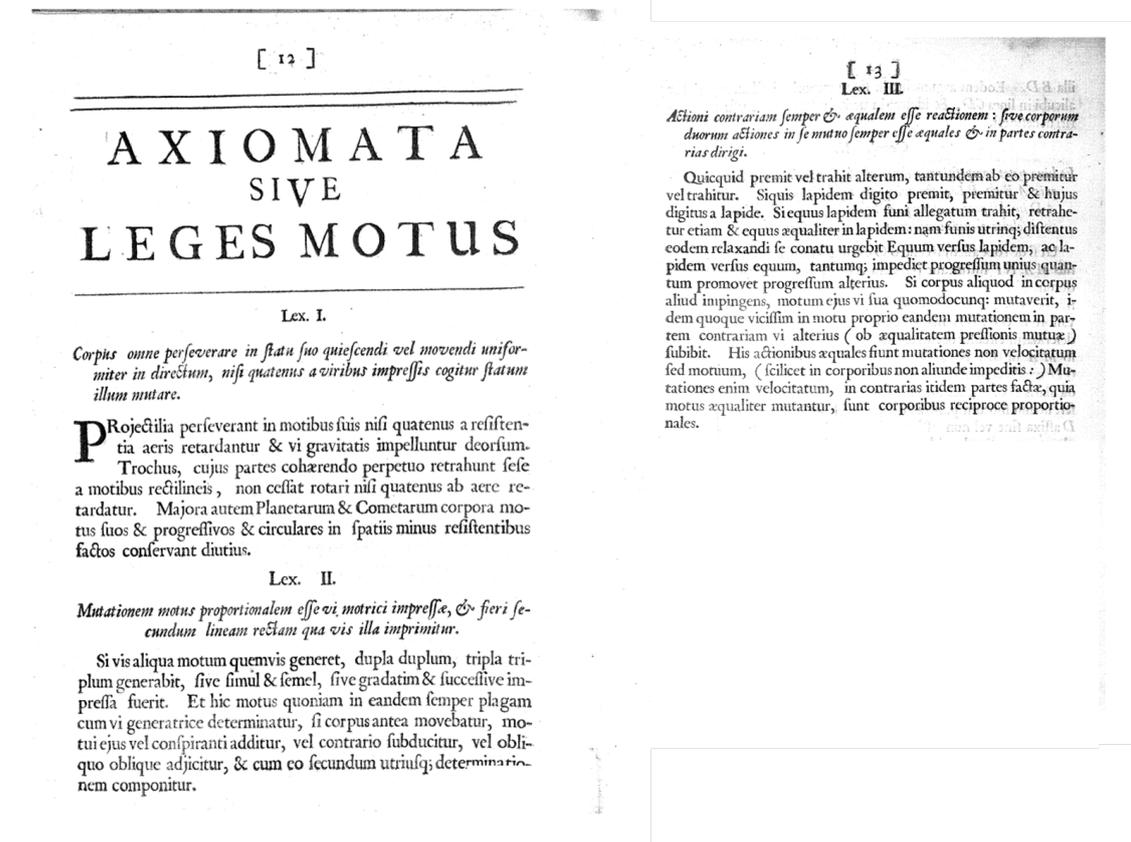


Figura 2.2: Enunciato delle tre leggi del moto di Newton (1686)

parte del corpo; ma nelle goccioline cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile.

<sup>3</sup>Come riportato nei *Principia* prima citati, Newton assume che *Tempus absolutum, verum & mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio ... Spatium absolutum, natura sua absque relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile ...*

<sup>4</sup>In questo schema, una conseguenza diretta e immediata è la legge secondo cui le velocità si compongono sommandosi vettorialmente:

$$\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

La critica del concetto di tempo assoluto e quindi di quello della contemporaneità, condusse Albert Einstein, nel 1905, alla riformulazione del



Figura 2.3: *Albert Einstein nel 1905*

principio di relatività<sup>5</sup> (ristretta), anche allo scopo di rendere compatibili l'elettromagnetismo classico e la stessa meccanica.

Questo, comunque, non fu il solo motivo, infatti, per esempio, la descrizione delle interazioni attraverso un potenziale, funzione solo delle posizioni dei vari corpi coinvolti, tipica della meccanica classica, implica l'istantaneità delle interazioni, cioè l'azione a distanza.

L'esperienza mostra però che l'azione a distanza non esiste: due oggetti (per esempio due cariche elettriche, oppure due masse...) interagenti fra loro "sentono" l'uno dell'altro solo dopo un certo tempo, legato alla velocità di propagazione dell'interazione stessa e alla loro distanza.

---

<sup>5</sup>A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*  
Annalen der Physik 17, 891 (1905)  
trad.: *On the electrodynamics of moving bodies*

Affinché la forma delle equazioni che descrivono le diverse interazioni possa essere la stessa in ogni riferimento inerziale, ovvero affinché sia soddisfatto il principio di relatività ristretta, è necessario che questa velocità di propagazione (che era quindi formalmente infinita nella relatività galileiana) sia comunque la stessa in ogni riferimento inerziale; sia, cioè, una costante universale<sup>6</sup>.

Di nuovo, è l'esperienza che identifica questa velocità con quella della luce nel vuoto ( $c = 299792458 \text{ m/s}$ ).

Il suo elevato valore sta alla base del fatto che, nell'esperienza quotidiana, gli effetti "relativistici" sono del tutto trascurabili e quindi non intuitivi.

Una conseguenza "drammatica" della costanza della velocità della luce nel vuoto in ogni riferimento inerziale è che non si può più considerare il tempo come *assoluto* (come abbiamo visto, questo assunto implica l'addizione classica delle velocità, che non può essere giusta per la velocità di propagazione dell'interazione, dovendo questa rimanere la stessa in ogni riferimento...), bensì come dipendente dal riferimento, cioè come *relativo*.

Operativamente, in un riferimento assegnato, un orologio fermo nell'origine consentirà di sincronizzare un altro qualunque orologio posto fermo nel punto  $\vec{P}$ , semplicemente tenendo conto del ritardo di trasmissione del segnale elettromagnetico fra il primo e il secondo, pari a  $\Delta t = |\vec{P}|/c$ .

Per due orologi  $O_1$  e  $O_2$  posti in due riferimenti inerziali in moto relativo, potremo procedere alla loro sincronizzazione senza incorrere in inconsistenze solo usando, idealmente, altri due orologi  $A$  e  $B$ , il primo a riposo nel riferimento dove  $O_1$  è immobile, il secondo fermo nel riferimento dove  $O_2$  è a riposo, i quali si trovano a occupare la stessa posizione spaziale al momento della loro sincronizzazione. Una volta sincronizzati  $A$  e  $B$  al momento della loro sovrapposizione spaziale, estenderemo il tempo di  $A$  a  $O_1$  e il tempo di  $B$  a  $O_2$  nel modo già detto.

Come vedremo, questa procedura rende "relativo" il tempo: eventi simultanei in un riferimento possono non esserlo più in un altro, e persino l'ordinamento temporale tra due eventi può dipendere, in certe condizioni, dal sistema di riferimento !

---

<sup>6</sup>Se così non fosse è evidente che le leggi non potrebbero essere le stesse in ogni riferimento inerziale ...

## 2.2 L'evento

Il concetto di *evento* è molto utile in Relatività Ristretta (*RR*): con questo nome si intende un accadimento in un punto dello spazio e a un certo istante. In modo naturale, allora, un "evento" (una particella che decade, una sorgente che emette un segnale ...) avrà associato in ogni riferimento, tre coordinate spaziali e una temporale, cioè una "quaterna"  $(t, \vec{x})$ .

Supponiamo ora di avere due riferimenti inerziali  $RS$  e  $RS'$  in moto relativo e consideriamo i due eventi seguenti

- (a): emissione di un segnale luminoso da una sorgente puntiforme data;
- (b): ricezione dello stesso segnale da un sensore puntiforme assegnato.

Nel riferimento  $RS$  questi due eventi saranno descritti, rispettivamente, da  $(t_a, \vec{x}_a)$  e  $(t_b, \vec{x}_b)$ , mentre in  $RS'$  gli stessi due eventi saranno descritti da  $(t'_a, \vec{x}'_a)$  e  $(t'_b, \vec{x}'_b)$ . Evidentemente, comunque, siccome la velocità della luce è la stessa nei due riferimenti, avremo<sup>7</sup>

$$|\vec{x}_b - \vec{x}_a|^2 = c^2 (t_b - t_a)^2 \quad (2.2.1)$$

$$|\vec{x}'_b - \vec{x}'_a|^2 = c^2 (t'_b - t'_a)^2 \quad (2.2.2)$$

Introduciamo adesso la quantità

$$s_{ab}^2 \equiv c^2 (t_b - t_a)^2 - |\vec{x}_b - \vec{x}_a|^2 \quad (2.2.3)$$

che chiameremo "intervallo" fra i due eventi. Chiaramente se due eventi sono caratterizzati, in un riferimento, da un valore nullo dell'intervallo, vuol dire che i due eventi sono, o comunque possono essere, connessi da un segnale luminoso. Ma allora manterranno questa proprietà anche in ogni altro riferimento inerziale e siccome la velocità della luce è una costante universale, l'intervallo fra i due eventi sarà nullo anche in ogni altro riferimento<sup>8</sup>.

Consideriamo ora due eventi differenti fra loro solo di infinitesimi: l'intervallo che li separa sarà allora dato da

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.2.4)$$

<sup>7</sup>In altre parole, le equazioni (2.2.1) e (2.2.2) stabiliscono che la propagazione del fronte d'onda luminoso che si è originato in un punto è una superficie sferica in *ogni* riferimento inerziale. Il raggio della superficie sferica cresce proporzionalmente al tempo, misurato in quel riferimento, e la costante di proporzionalità è la velocità  $c$ , indipendente dal sistema di riferimento.

<sup>8</sup>Questo formalizza il fatto che il vuoto appare lo stesso in ogni riferimento inerziale, cioè è invariante per trasformazioni di riferimento. Di conseguenza, la propagazione delle onde elettromagnetiche, che avviene appunto con velocità  $c$  nel vuoto, deve restare la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale. Questo non è in accordo con la relatività galileiana mentre è perfettamente coerente con quanto ci dicono le equazioni di Maxwell, punto di partenza della Relatività Ristretta, per le quali risulta  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , dove  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  misurano proprietà del vuoto, sperimentalmente indipendenti dal sistema di riferimento.

Al momento, in base all'invarianza della velocità della luce, possiamo solo concludere che, se l'intervallo infinitesimo<sup>9</sup> fra due eventi (il  $ds^2$  ...) è nullo in un riferimento inerziale, allora quello stesso intervallo appare nullo in ogni altro riferimento inerziale, cioè

$$ds^2 = 0 \Rightarrow ds'^2 = 0$$

Si può comunque dimostrare (e lo faremo nel prossimo paragrafo) che questo risultato è, in realtà, un caso particolare di una proprietà più generale dell'intervallo (infinitesimo o finito che sia) fra due eventi, secondo la quale risulta comunque

$$ds^2 = ds'^2$$

### 2.3 Le trasformazioni di Lorentz

Coerentemente con il Principio di Relatività ristretta, cerchiamo ora di esplicitare la forma delle trasformazioni omogenee di coordinate spazio-temporali concernenti uno stesso evento che sia visto da due riferimenti inerziali in moto relativo: esse vanno sotto il nome di *trasformazioni di Lorentz*.

Iniziamo da due eventi ( $a$ ) e ( $b$ ) che sono individuati, nel riferimento  $RS$ , rispettivamente, da  $(t_a, \vec{x}_a)$  e  $(t_b, \vec{x}_b)$ . In un altro riferimento inerziale  $RS'$ , in moto rispetto al primo con velocità  $\vec{V}$ , essi saranno individuati dalle coordinate  $(t'_a, \vec{x}'_a)$  e  $(t'_b, \vec{x}'_b)$ . Risulterà in generale che

$$\begin{aligned} t'_a &\equiv T(t_a, \vec{x}_a, \vec{V}); & t'_b &\equiv T(t_b, \vec{x}_b, \vec{V}) \\ \vec{x}'_a &\equiv \vec{X}(t_a, \vec{x}_a, \vec{V}); & \vec{x}'_b &\equiv \vec{X}(t_b, \vec{x}_b, \vec{V}) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

essendo  $T$  e  $\vec{X}$  funzioni opportune.

Comunque, se non vogliamo violare l'isotropia e l'omogeneità dello spazio e del tempo, le funzioni  $T$  e  $\vec{X}$  devono essere lineari in  $t$  ed  $\vec{x}$ .

L'ipotesi di omogeneità dello spazio e del tempo si traduce infatti nella richiesta che la differenza di coordinate fra due eventi risulti indipendente da traslazioni del sistema di riferimento, sia nello spazio che nel tempo, ovvero

$$\begin{aligned} t'_a - t'_b &= T(t_a, \vec{x}_a, \vec{V}) - T(t_b, \vec{x}_b, \vec{V}) \equiv \\ &\equiv T(t_a + \tau, \vec{x}_a + \vec{w}, \vec{V}) - T(t_b + \tau, \vec{x}_b + \vec{w}, \vec{V}) \\ \vec{x}'_a - \vec{x}'_b &= \vec{X}(t_a, \vec{x}_a, \vec{V}) - \vec{X}(t_b, \vec{x}_b, \vec{V}) \equiv \\ &\equiv \vec{X}(t_a + \tau, \vec{x}_a + \vec{w}, \vec{V}) - \vec{X}(t_b + \tau, \vec{x}_b + \vec{w}, \vec{V}) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

<sup>9</sup>Si osservi che la quantità  $ds^2$  non è una "distanza" nel senso proprio del termine poiché non è definita positiva ed eventi a "distanza" nulla non sono necessariamente coincidenti, bensì sono appunto tutti e solo quelli connessi da un segnale luminoso.

Una prima implicazione di questo fatto è che  $s^2$ , non definendo una metrica (definita positiva), non consente di introdurre una topologia propria nello spazio-tempo, per cui occorre fare attenzione quando si parla di eventi "vicini" ...



Figura 2.4: *Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)*

qualunque siano  $\tau$  e  $\vec{w}$ , e questo implica che  $T$  ed  $\vec{X}$  debbano necessariamente essere operatori lineari<sup>10</sup>. Questi operatori trasformano eventi in eventi, cioè, in definitiva, operano da una varietà quadridimensionale (varietà degli eventi) in se stessa. Questa varietà quadridimensionale sarà, nel seguito, indicata con il nome di *spazio-tempo* e gli eventi saranno *quadrivettori* in questo spazio vettoriale sul corpo reale. Per definizione, un evento verrà dunque individuato, da ora in poi, con il quadrivettore  $(x^\mu)$ , definito come

$$(ct, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu) \quad (2.3.7)$$

dimensionalmente omogeneo.

Con questa notazione, la lunghezza dell'intervallo fra due eventi  $(x^\mu)$  e  $(y^\mu)$  si può scrivere come

$$s^2 = (x^0 - y^0)^2 - \sum_i (x^i - y^i)^2 \equiv (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) \quad (2.3.8)$$

<sup>10</sup>Un altro modo, più fisico, per arrivare alla stessa conclusione è quello di osservare che, se richiediamo, in base al principio di relatività, che un moto rettilineo uniforme (non soggetto a forze) in un riferimento inerziale appaia tale in ogni altro riferimento inerziale, ecco che questo implica direttamente che le trasformazioni che legano le coordinate spazio-temporali fra due riferimenti inerziali debbano mandare rette in rette e dunque non possano che essere trasformazioni lineari.

dove il quadrivettore covariante  $x_\mu$  è definito in termini di quello controvariante  $x^\mu$  nel modo seguente

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.3.9)$$

e il tensore metrico  $g_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$  è definito da

$$g_{\mu\nu} : \quad g_{00} = +1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ se } \mu \neq \nu \quad (2.3.10)$$

da cui si ricava che  $gg = I$  e  $g = g^t$ .

Da quanto detto precedentemente, le trasformazioni di riferimento devono essere tali per cui

$$x'^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu \quad (2.3.11)$$

dove  $a^\mu$  è un quadrivettore qualsiasi che descrive l'eventuale traslazione esistente fra le origini spazio-temporali dei due sistemi di riferimento.

Allo scopo di caratterizzare completamente la matrice reale  $4 \times 4$   $(\Lambda)_{\mu\nu} \equiv \Lambda^\mu_{\nu}$ , è opportuno ritornare sulla questione, lasciata in sospeso, dell'invarianza dell'intervallo infinitesimo  $ds^2$ : così come le rotazioni sono caratterizzate dal fatto di essere trasformazioni lineari dello spazio euclideo in se stesso, le quali non cambiano la distanza fra due punti, analogamente, le trasformazioni di Lorentz di cui alla (2.3.11) possono essere caratterizzate dal fatto di lasciare invariante l'intervallo  $ds^2$ .

Ma andiamo con ordine, dimostrando per prima cosa che, per le ipotesi fisiche fatte, il  $ds^2$  *deve* essere invariante.

Per far questo, iniziamo considerando due riferimenti inerziali in moto relativo, che, senza perdita di generalità, assumeremo avvenire lungo l'asse  $x$ .

Per quanto riguarda le *coordinate trasverse*, cioè le coordinate  $y$  e  $z$ , da quanto precede, a priori sarà

$$\begin{aligned} y' &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t \\ z' &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t \end{aligned}$$

Se consideriamo adesso solo i punti dell'asse  $x \equiv x'$ , ne concludiamo che, essendo

$$y = z = 0 \Leftrightarrow y' = z' = 0$$

deve risultare

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11} x + a_{14} t & \Leftrightarrow & \quad a_{11} = a_{14} = 0 \\ 0 &= a_{21} x + a_{24} t & & \quad a_{21} = a_{24} = 0 \end{aligned}$$

dove il secondo set di equazioni è conseguenza dell'arbitrarietà di  $x$  e  $t$ .

Sostituendo, ne segue dunque che

$$\begin{aligned} y' &= a_{12} y + a_{13} z \\ z' &= a_{22} y + a_{23} z \end{aligned}$$

D'altronde, se i due riferimenti non sono ruotati uno rispetto all'altro, i punti del piano  $xz$  resteranno sul piano  $x'z'$  ovvero  $y = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ , e così pure i punti del piano  $xy$  resteranno sul piano  $x'y'$ , ovvero  $z = 0 \Rightarrow z' = 0$ . Ne segue allora che, per quanto riguarda le due variabili trasverse, deve essere

$$y' = a_{12}y; \quad z' = a_{23}z$$

e dunque, per l'isotropia dello spazio,

$$y' = \alpha y; \quad z' = \alpha z$$

dove la quantità  $\alpha$  potrà dipendere solo dalla velocità relativa fra i due riferimenti ma, sempre per l'isotropia dello spazio, non dal suo segno.

Usando adesso il risultato ottenuto per la trasformazione inversa, concludiamo che deve essere  $\alpha = 1$ , cioè che *le coordinate trasverse al moto relativo sono invarianti per trasformazioni di riferimento*.

Veniamo adesso alla questione del  $ds^2$ .

Quello che sappiamo è che, se i due riferimenti inerziali sono comunque in moto relativo, se  $ds^2 = 0$  nel primo riferimento allora lo è anche nel secondo (e viceversa). Separiamo ora la parte spaziale in quella trasversa e in quella longitudinale al moto relativo: si ha

$$0 = ds^2 = c^2 dt^2 - dr_{\parallel}^2 - dr_{\perp}^2 \Leftrightarrow c^2 dt'^2 - dr_{\parallel}'^2 - dr_{\perp}'^2$$

D'altronde, per quanto concluso precedentemente, risulta

$$dr_{\perp} = dr_{\perp}' \quad (2.3.12)$$

e quindi, dalle equazioni

$$c^2 dt^2 - dr_{\parallel}^2 - dr_{\perp}^2 = 0 = c^2 dt'^2 - dr_{\parallel}'^2 - dr_{\perp}'^2$$

si può dedurre che deve essere

$$c^2 dt^2 - dr_{\parallel}^2 = c^2 dt'^2 - dr_{\parallel}'^2 \quad (2.3.13)$$

Ma, essendo  $dr_{\perp}$  e  $dr_{\parallel}$ , in generale, indipendenti fra loro e valendo comunque la (2.3.12), sommando ad ambo i membri della (2.3.13) un qualsiasi  $dr_{\perp}^2$  ( $= dr_{\perp}'^2$ ), siamo in grado, finalmente di concludere che effettivamente, se vogliamo soddisfare il principio di relatività, nell'ipotesi della costanza della velocità della luce in ogni riferimento inerziale e dell'isotropia e omogeneità dello spazio-tempo, deve essere sempre

$$ds^2 = ds'^2 \quad (2.3.14)$$

indipendentemente dal fatto che esso sia nullo o meno.

Siamo ora in grado di caratterizzare completamente la generica matrice di Lorentz  $(\Lambda)_{\mu\nu} \equiv \Lambda_{\nu}^{\mu}$  di cui alla (2.3.11).

Essa deve evidentemente garantire l'invarianza dell'elemento di intervallo  $ds^2$ , ovvero deve essere tale per cui

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^\mu dx_\mu = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = ds'^2 = dx'^\mu dx'^\nu g_{\mu\nu} = \\ &= \Lambda_{\cdot\sigma}^{\mu} dx^\sigma \Lambda_{\cdot\rho}^{\nu} dx^\rho g_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda_{\cdot\sigma}^{\mu} \Lambda_{\cdot\rho}^{\nu} g_{\mu\nu} = g_{\sigma\rho} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Ricordando che  $\Lambda_{\cdot\sigma}^{\mu} \equiv (\Lambda)_{\mu\sigma}$ , se definiamo<sup>11</sup>

$$\Lambda_{\cdot\mu}^{\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda_{\cdot\beta}^{\alpha} g^{\beta\nu} \quad (2.3.16)$$

ne segue che, dalla (2.3.15), si ha

$$\Lambda_{\cdot\sigma}^{\mu} \Lambda_{\cdot\rho}^{\nu} g_{\mu\nu} g^{\rho\tau} = g_{\sigma\rho} g^{\rho\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau} \Rightarrow \Lambda_{\cdot\sigma}^{\mu} \Lambda_{\cdot\mu}^{\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau} \quad (2.3.17)$$

da cui

$$\Lambda^t g \Lambda g = I \Rightarrow g \Lambda^t g \Lambda = I \Rightarrow \Lambda^{-1} = g \Lambda^t g \quad (2.3.18)$$

ovvero

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{0j} \\ \Lambda_{i0} & \Lambda_{ij} \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & -\Lambda_{i0} \\ -\Lambda_{0j} & \Lambda_{ji} \end{pmatrix} \quad (2.3.19)$$

La condizione (2.3.18) definisce un sottogruppo<sup>12</sup> del gruppo delle matrici reali e invertibili  $4 \times 4$ . Queste matrici sono tali che

$$\det(\Lambda) = \det(\Lambda^{-1}) \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \quad (2.3.20)$$

Si tratta del gruppo di Lorentz esteso  $\mathcal{L}$ , che è un sottogruppo di  $GL_4(R)$ , cioè del gruppo delle matrici reali e invertibili di dimensione 4.

Una prima proprietà che discende in modo immediato dalla (2.3.18) è, evidentemente che

$$\Lambda \in \mathcal{L} \Rightarrow \Lambda^t \in \mathcal{L} \quad (2.3.21)$$

Vediamo ora alcuni esempi di elementi del gruppo di Lorentz:

<sup>11</sup>Si osservi che, dal punto di vista strettamente matriciale, senza tener conto degli indici covarianti-contravarianti, risulta

$$\Lambda_{\cdot\mu}^{\nu} = (g \Lambda g)_{\mu\nu}$$

<sup>12</sup>Infatti

- l'identità soddisfa la condizione (2.3.18);
- se  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  soddisfano la condizione (2.3.18), allora anche il loro prodotto la soddisfa, infatti

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1} = \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} = g \Lambda_2^t g \Lambda_1^t g = g (\Lambda_1 \Lambda_2)^t g$$

- se  $\Lambda$  soddisfa la condizione (2.3.18), allora anche  $\Lambda^{-1}$  la soddisfa, infatti

$$(\Lambda^{-1})^{-1} = \Lambda = (g \Lambda^t g)^{-1} = g (\Lambda^{-1})^t g$$

1.  $g$  questa matrice inverte le coordinate spaziali senza alterare quella temporale, dunque descrive, per quanto riguarda le coordinate, la trasformazione di parità P;
2.  $-g$  chiaramente, questa trasformazione cambia il segno dell'asse temporale, senza alterare le coordinate spaziali, dunque descrive, nello spazio-tempo, l'inversione temporale T;
3.  $-I$  questa descrive l'inversione delle quattro coordinate spazio-temporali.

Si osservi che, mentre  $g$  e  $-g$  hanno determinante  $-1$ ,  $-I$  ha determinante  $+1$ . Evidentemente se  $\Lambda$  è un elemento del gruppo di Lorentz, allora anche  $g\Lambda$  lo è, ma essi hanno determinanti opposti. Se ci restringiamo al sottogruppo del gruppo di Lorentz fatto dalle matrici con determinante positivo, è immediato dimostrare che esso è un sottogruppo: esso viene indicato con il nome di gruppo di Lorentz "proprio"  $\mathcal{L}_+$ . Evidentemente si può riottenere tutto il gruppo unendo agli elementi di  $\mathcal{L}_+$  quelli ottenuti da essi dopo averli moltiplicati per  $g$ .

Riprendiamo adesso la relazione che definisce gli elementi del gruppo, cioè

$$\Lambda^\mu_{\cdot\sigma} \Lambda_{\cdot\mu}^\tau = \delta_\sigma^\tau$$

Per  $\sigma = \tau = 0$  abbiamo che

$$\Lambda^\mu_{\cdot 0} \Lambda_{\cdot\mu}^0 = \delta_0^0 = 1$$

ovvero

$$(\Lambda)_{00}^2 - (\Lambda)_{10}^2 - (\Lambda)_{20}^2 - (\Lambda)_{30}^2 = 1 \quad (2.3.22)$$

ma poiché se  $\Lambda \in \mathcal{L}_+$  allora anche  $\Lambda^t \in \mathcal{L}_+$ , possiamo concludere altresì che

$$(\Lambda)_{00}^2 - (\Lambda)_{01}^2 - (\Lambda)_{02}^2 - (\Lambda)_{03}^2 = 1 \quad (2.3.23)$$

dove abbiamo indicato, al solito, con  $(\Lambda)_{\mu\nu}$  l'elemento corrispondente alla riga  $\mu$  e colonna  $\nu$  della matrice di Lorentz considerata.

Evidentemente, dalle (2.3.22) e (2.3.23) segue immediatamente che

$$(\Lambda)_{00}^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (\Lambda)_{00} \geq 1 \text{ oppure } (\Lambda)_{00} \leq -1 \quad (2.3.24)$$

Vogliamo dimostrare che gli elementi di  $\mathcal{L}_+$  che hanno  $(\Lambda)_{00} \geq 1$  formano, a loro volta, un sottogruppo. Per questo occorre dimostrare che

1. l'identità ha  $(\Lambda)_{00} \geq 1$ ;
2. se  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  sono tali, rispettivamente, che  $(\Lambda_1)_{00} \geq 1$  e  $(\Lambda_2)_{00} \geq 1$ , allora anche  $(\Lambda_1 \Lambda_2)_{00} \geq 1$ ;

3. se  $\Lambda$  ha  $(\Lambda)_{00} \geq 1$  allora anche  $(\Lambda^{-1})_{00} \geq 1$ .

Il punto 1) è ovvio. Passiamo al punto 2). Risulta

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)_{00} \equiv (\Lambda_1 \Lambda_2)_{.0}^0 = (\Lambda_1)_{.0}^0 (\Lambda_2)_{.0}^0 = (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00} + (\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{i0}$$

D'altronde, per la disuguaglianza triangolare, è

$$|(\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{i0}|^2 \leq \Sigma_i (\Lambda_1)_{0i}^2 \cdot \Sigma_i (\Lambda_2)_{i0}^2$$

e, dalla (2.3.22) e (2.3.23) risulta

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)_{00}^2 &\geq \Sigma_i (\Lambda_1)_{0i}^2; \\ (\Lambda_2)_{00}^2 &\geq \Sigma_i (\Lambda_2)_{i0}^2 \end{aligned}$$

ovvero, essendo  $(\Lambda_1)_{00} \geq 1$  e  $(\Lambda_2)_{00} \geq 1$ , si ha

$$|(\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{i0}|^2 \leq (\Lambda_1)_{00}^2 (\Lambda_2)_{00}^2 \Rightarrow |(\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{i0}| \leq (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00}$$

per cui, evidentemente, il segno di  $(\Lambda_1 \Lambda_2)_{00}$  sarà quello stesso di  $(\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00}$  e dunque, nel nostro caso, sarà positivo. Siccome abbiamo già dimostrato che questa stessa quantità o è  $\geq 1$  oppure è  $\leq -1$ , risulta così dimostrato che  $(\Lambda_1 \Lambda_2)_{00} \geq 1$ .

Quanto al punto 3), esso discende immediatamente dal fatto che, per la (2.3.19), risulta  $\Lambda_{00} = \Lambda_{00}^{-1} \dots$

Il sottogruppo delle matrici di Lorentz aventi  $\det(\Lambda) = +1$  e  $\Lambda_{00} \geq 1$  è il gruppo di Lorentz "ortocrono proprio"  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ : gli altri elementi del gruppo di Lorentz completo si ottengono da quelli di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  moltiplicandoli per il tensore metrico  $g$ , oppure per  $-I$ , o per entrambi ...

Le trasformazioni di Lorentz che hanno  $\det(\Lambda) = -1$  sono dette *improprie* mentre quelle per cui  $\Lambda_{00} \leq -1$  sono dette *anticrone*: nè queste nè quelle costituiscono un sottogruppo, non essendo stabili sotto la legge di composizione interna (per es. il prodotto di due trasformazioni improprie è una trasformazione propria, come pure quello di due anticrone è ortocrona).

La rilevanza delle trasformazioni di Lorentz *ortocrone* sta nel fatto che esse non possono alterare l'ordine temporale di due eventi legati fra loro da una relazione di causa-effetto. Infatti se in un riferimento inerziale sono dati due eventi  $(t_1, \vec{x}_1)$  e  $(t_2, \vec{x}_2)$  per i quali  $(t_1 - t_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2) \equiv (\Delta t, \vec{\Delta x})$  è tale che  $|\Delta t| > |\vec{\Delta x}|$ , ecco che in un altro sistema di riferimento connesso al primo da una trasformazione di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , avremo

$$\Delta t' = \Lambda_{00} \Delta t + \Lambda_{0i} \Delta x_i = \Lambda_{00} \Delta t + \sqrt{\sum_i (\Lambda_{0i})^2} |\vec{\Delta x}| \cos \theta$$

ed essendo  $\Lambda_{00} \geq \sqrt{\sum_i (\Lambda_{0i})^2} > 0$  e  $|\Delta t| > |\vec{\Delta x}|$ , è evidente che il segno di  $\Delta t'$  non potrà che coincidere con quello di  $\Delta t$ .

Il gruppo di Lorentz  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  è un sottogruppo invariante di  $\mathcal{L}$ , stabile per trasposizione, che consente di definire il gruppo quoziente  $\mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow$  fatto di quattro classi di equivalenza, i.e.  $\{[\mathcal{L}_+^\uparrow], [g\mathcal{L}_+^\uparrow], [-g\mathcal{L}_+^\uparrow], [-\mathcal{L}_+^\uparrow]\}$ .

Solo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  è un gruppo di Lie (a sei parametri), perché nessuna parametrizzazione potrebbe mai essere analitica se dovesse rendere conto della discontinuità nel valore del determinante, da  $+1$  a  $-1$  (dalle trasformazioni proprie a quelle improprie) o in quella del valore di  $\Lambda_{00}$ , da  $\geq 1$  a  $\leq -1$  (da quelle ortocrone a quelle anticrone).

### Le rotazioni

Passiamo ora a studiare alcuni elementi particolarmente significativi del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

Evidentemente, se  $R$  è una matrice  $3 \times 3$  di rotazione, ovvero se  $R$  è una matrice ortogonale reale (cioè tale che  $R^{-1} = R^t$ ,  $\det(R) = 1 \Leftrightarrow R \in SO(3)$ ), allora la matrice

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad (2.3.25)$$

appartiene al gruppo di Lorentz ortocrono proprio e il loro insieme ne costituiscono, appunto, il sottogruppo delle rotazioni<sup>13</sup>.

Il gruppo  $SO(3)$ , come abbiamo visto nel Vol.1, ha  $SU2$  come ricoprimento universale. Dalla teoria generale risulta immediato che una parametrizzazione delle matrici  $\Lambda_R$  è certamente la seguente

$$\Lambda_R = e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{L}} \quad (2.3.27)$$

dove le matrici  $L_j$  costituiscono una rappresentazione dei generatori del gruppo e possono essere scelte in modo che<sup>14,15</sup>

$$(\hat{L}_j)_{mn} = -i \epsilon_{jmn} \quad (2.3.28)$$

<sup>13</sup>La trasformazione (2.3.25) descrive evidentemente la più generale trasformazione omogenea fra due riferimenti in quiete relativa, senza inversione degli assi.

In questo caso, poiché la variabile temporale coincide nei due riferimenti, l'invarianza del  $ds^2$  significa infatti, semplicemente, l'invarianza della distanza spaziale  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Esplicitamente, queste trasformazioni di Lorentz sono tali per cui, se  $(t, \vec{x})$  sono le coordinate dell'evento nel riferimento assegnato e  $(t', \vec{x}')$  quelle nel riferimento ruotato, si ha

$$t' = t; \quad x'_i = R_{ij} x_j \quad (2.3.26)$$

<sup>14</sup>Le matrici  $\hat{L}_j$  definiscono la rappresentazione fondamentale di  $SO(3)$  che, come è noto, è la rappresentazione con  $s = 1$  di  $SU2$ .

<sup>15</sup>cfr. L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland 1982, pag 311

In  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , data la (2.3.25), questi generatori sono quindi espressi dalle matrici seguenti

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.29)$$

mentre  $\vec{\phi}$  è il vettore che individua la rotazione stessa: la sua direzione e verso definiscono l'asse di rotazione, mentre il suo modulo  $|\phi| \equiv \phi$  stabilisce l'ampiezza dell'angolo di rotazione intorno all'asse  $\vec{n} \equiv \frac{\vec{\phi}}{|\phi|}$ , di cui è ruotato, in senso antiorario, il nuovo riferimento rispetto al vecchio (assunti entrambi destrorsi, cioè tali che  $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ ).

Non insisteremo oltre sulle rotazioni, visto che l'argomento è stato ampiamente trattato nel Vol.1.

### I boost

Veniamo adesso alle trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio che descrivono la legge di trasformazione delle coordinate spazio-temporali fra due sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo e uniforme ("boost") e iniziamo assumendo che i due sistemi di riferimenti abbiano gli assi orientati nello stesso modo e che il moto avvenga lungo l'asse  $z$ .

Per quanto riguarda le *coordinate trasverse*, cioè le coordinate  $x$  e  $y$ , per quanto abbiamo visto in precedenza, evidentemente si ha

$$x' = x; \quad y' = y$$

per cui, vista anche la struttura generale delle matrici di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , la matrice che descrive la generica trasformazione fra riferimenti non ruotati e in moto lungo  $z$ , dovrà avere necessariamente la forma seguente

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \text{ reali} \quad (2.3.30)$$

La condizione sul determinante di  $\Lambda_z$  implica evidentemente che

$$ad - bc = 1 \quad (2.3.31)$$

mentre la condizione che  $\Lambda_z \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  implica che

$$\Lambda_z^{-1} = g \Lambda_z^t g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 0 & d \end{pmatrix}; \quad a \geq 1 \quad (2.3.32)$$

ovvero devono valere le equazioni

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 1 &\Rightarrow & a = \cosh \alpha; & b &= -\sinh \alpha \\ d^2 - c^2 &= 1 &\Rightarrow & d = \cosh \beta; & c &= -\sinh \beta \\ ac - bd &= 0 &\Rightarrow & -\cosh \alpha \sinh \beta + \cosh \beta \sinh \alpha = \sinh(\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

per cui, risolvendo tenendo conto che  $a \geq 0$ , si ottiene la soluzione generale

$$\begin{aligned} a = d &= \cosh \alpha \\ b = c &= -\sinh \alpha \end{aligned}$$

dove  $\alpha$  è un numero reale qualsiasi che viene indicato con il nome di *rapidità* del boost.

Iniziamo cercando di capire quale tipo di trasformazioni sono descritte dalle  $\Lambda_z$ . Per la (2.3.11), assumendo che le origini dei due sistemi di riferimento spazio-temporali coincidano (ovvero che  $a^\mu \equiv 0$ ), avremo in generale che<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} t' &= \Lambda_{,\nu}^0 x^\nu = \Lambda_{,0}^0 t + \Lambda_{,i}^0 x^i = ct \cosh \alpha - z \sinh \alpha \\ x' &= \Lambda_{,\nu}^1 x^\nu = x \\ y' &= \Lambda_{,\nu}^2 x^\nu = y \\ z' &= \Lambda_{,\nu}^3 x^\nu = \Lambda_{,0}^3 t + \Lambda_{,i}^3 x^i = -ct \sinh \alpha + z \cosh \alpha \end{aligned}$$

dove le coordinate spazio-temporali non primate si riferiscono al riferimento  $RS$  mentre quelle primate al riferimento  $RS'$ .

Consideriamo la legge oraria che descrive la posizione spazio-temporale dell'origine del sistema di riferimento  $RS$  in  $RS$  stesso: essa può essere vista come una successione ordinata di eventi, labellata dal tempo  $t$  (in  $RS$ ) associato a ciascuno di questi, per cui potremo rappresentarla evidentemente con la *linea di universo*  $(t, 0, 0, 0)$ .

Nell'altro riferimento ( $RS'$ ), collegato al primo dalla trasformazione  $\Lambda_z$ , ciascuno degli eventi della linea di universo considerata avrà associato un quadrivettore  $(t', x', y', z')$  che, per quanto sopra, sarà dato da  $(t \cosh \alpha, 0, 0, -t \sinh \alpha)$

dove la variabile  $t$  va adesso vista semplicemente come un parametro che descrive, in  $RS'$ , gli eventi della linea d'universo scelta. Nelle coordinate del secondo riferimento, la legge oraria diviene quindi  $(t', 0, 0, -t' \tanh \alpha)$  (vedi fig.2.5), ovvero essa descrive il moto uniforme di un punto con velocità pari a  $-\tanh \alpha$ , che significa che  $RS'$  si muove rispetto a  $RS$  con velocità costante

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tanh \alpha \end{pmatrix} \quad (2.3.33)$$

<sup>16</sup>Da ora in avanti, assumeremo, per semplicità, che  $c = 1$ , per cui  $t$  ed  $x$  diventano grandezze omogenee ...

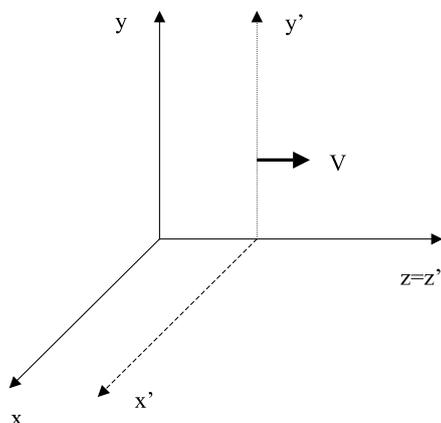


Figura 2.5: Moto relativo fra i due riferimenti lungo l'asse  $z$ .

lungo l'asse  $z$ , e i due riferimenti sono non ruotati l'uno rispetto all'altro. Essendo peraltro

$$\cosh^2 \alpha = \frac{1}{1 - \beta^2}; \quad \sinh \alpha = \beta \cosh \alpha \quad (2.3.34)$$

ecco che, se definiamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.3.35)$$

risulta

$$\begin{aligned} \Lambda_z(\alpha) &\equiv \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & -\sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \Lambda_z(\text{th}^{-1}\beta) \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

E' banale verificare che le trasformazioni  $\Lambda_z$  costituiscono un sottogruppo abeliano di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  a un parametro, infatti

$$\begin{aligned} \Lambda_z(\alpha_1) \Lambda_z(\alpha_2) &= \Lambda_z(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \Lambda_z^{-1}(\alpha) &= \Lambda_z(-\alpha) \\ \Lambda_z(0) &= I \end{aligned}$$

Come si vede, il parametro che individua la trasformazione prodotto  $\Lambda_z(\alpha_1) \Lambda_z(\alpha_2)$  è una funzione particolarmente semplice dei due parametri che individuano ciascuno dei due fattori se questo parametro è la *rapidità*, perchè, in questo

caso, vale semplicemente una legge di somma.

Finchè ci limitiamo a trasformazioni in una direzione fissata, la rapidità è l'analogo relativistico della velocità galileiana.

Poniamo adesso, per definizione

$$K_z \equiv -i \left. \frac{d\Lambda_z(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.37)$$

risulta

$$\begin{aligned} -i \frac{d\Lambda_z(\alpha)}{d\alpha} &= -i \left. \frac{d\Lambda_z(\beta + \alpha)}{d\beta} \right|_{\beta=0} = -i \left. \frac{d\Lambda_z(\beta)\Lambda_z(\alpha)}{d\beta} \right|_{\beta=0} = K_z \Lambda_z(\alpha) \\ \Rightarrow \Lambda_z(\alpha) &= e^{i\alpha K_z} \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Osserviamo adesso, prima di continuare, che, se poniamo per comodità

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \vec{k}^t = (0, 0, 1), \quad \text{allora possiamo scrivere}$$

$$K_z = \begin{pmatrix} 0 & i \vec{k}^t \\ i \vec{k} & O \end{pmatrix} \quad (2.3.39)$$

dove abbiamo indicato con  $O$  la matrice  $3 \times 3$  identicamente nulla<sup>17</sup>.

<sup>17</sup>La verifica diretta della (2.3.38) è semplice, infatti risulta

$$i K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (i K_z)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è

$$(i K_z)^{2n} = (i K_z)^2; \quad (i K_z)^{2n+1} = i K_z$$

per cui risulta

$$e^{i\alpha K_z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (i K_z)^n = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} (i K_z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} (i K_z)^2$$

ed essendo

$$sh\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad ch\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

segue immediatamente che  $\Lambda_z(\alpha) = e^{i\alpha K_z}$

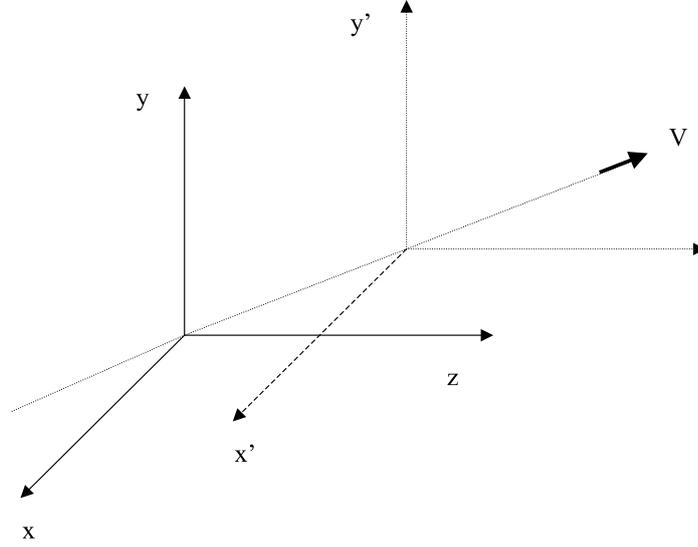


Figura 2.6: Moto relativo dei due riferimenti non ruotati in una direzione generica.

Fin'ora abbiamo considerato il caso in cui i due riferimenti, non ruotati uno rispetto all'altro, si muovono di moto rettilineo e uniforme lungo l'asse  $z$ . Se il moto avviene lungo uno degli altri assi coordinati, la generalizzazione è semplice, infatti, con ovvio significato di simboli, abbiamo

$$\Lambda_x(\alpha) \equiv e^{i\alpha K_x} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha & 0 & 0 \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.40)$$

$$\Lambda_y(\alpha) \equiv e^{i\alpha K_y} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & -\sinh \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \alpha & 0 & \cosh \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.41)$$

con

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.42)$$

Ma supponiamo ora (vedi fig.2.6) che la velocità relativa  $\vec{V} \equiv \vec{\beta}$  del secondo riferimento ( $RS'$ ) rispetto al primo ( $RS$ ) sia diretta secondo il generico

versore  $\vec{n}$ . Avremo dunque che

$$\Lambda_{\vec{n}}(\alpha) = \Lambda_R^{-1} \Lambda_z(\alpha) \Lambda_R \quad (2.3.43)$$

dove  $\Lambda_R$  ruota  $\vec{n}$  allineandolo con l'asse  $z$ . Dunque

$$\Lambda_{\vec{n}}(\alpha) = \Lambda_R^{-1} \Lambda_z(\alpha) \Lambda_R = \Lambda_R^{-1} e^{i\alpha K_z} \Lambda_R = e^{i\alpha \Lambda_R^{-1} K_z \Lambda_R} \equiv e^{i\alpha K_{\vec{n}}} \quad (2.3.44)$$

dove abbiamo definito

$$\begin{aligned} K_{\vec{n}} \equiv \Lambda_R^{-1} K_z \Lambda_R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \vec{k}^t \\ i \vec{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \vec{k}^t R \\ i R^t \vec{k} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

D'altronde, per ipotesi

$$R \vec{n} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = R^{-1} \vec{k} \equiv R^t \vec{k} \quad (2.3.46)$$

quindi

$$K_{\vec{n}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \vec{k}^t R \\ i R^t \vec{k} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \vec{n}^t \\ i \vec{n} & 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{n} \cdot \vec{K} \quad (2.3.47)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore  $\vec{K} \equiv (K_x, K_y, K_z)$  in accordo con il fatto che la (2.3.46) implica proprio che  $\vec{K}$  si trasformi, per rotazioni, come un operatore vettoriale<sup>18</sup>.

In generale, quindi, se i due riferimenti inerziali sono non ruotati uno rispetto all'altro e si trovano in moto relativo qualsiasi, la trasformazione di Lorentz<sup>19</sup> che li connette è

$$\Lambda(\vec{\beta}) = e^{i\alpha(\vec{n} \cdot \vec{K})} \quad (2.3.49)$$

dove le matrici  $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$  sono definite dalle equazioni (2.3.37) e (2.3.42), mentre  $\vec{n} \equiv \frac{\vec{\beta}}{|\beta|}$  e  $\alpha \equiv \tanh^{-1}(|\beta|)$ .

Le tre matrici  $\vec{K}$  sono i "generatori" dei boost che, insieme ai tre generatori  $\vec{L}$  delle rotazioni, completano la struttura di Lie del gruppo di Lorentz ortocrono proprio, come abbiamo visto nel Vol..1.

<sup>18</sup>Questo, coerentemente con quanto ottenuto anche per  $\vec{L}$ , corrisponde a dire che  $\Lambda_R K_j \Lambda_R^{-1} = R_{nj} K_n$ .

<sup>19</sup>Esplicitamente risulta

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma n_x & -\beta\gamma n_y & -\beta\gamma n_z \\ -\beta\gamma n_x & 1 + (\gamma - 1)n_x^2 & (\gamma - 1)n_x n_y & (\gamma - 1)n_x n_z \\ -\beta\gamma n_y & (\gamma - 1)n_y n_x & 1 + (\gamma - 1)n_y^2 & (\gamma - 1)n_y n_z \\ -\beta\gamma n_z & (\gamma - 1)n_z n_x & (\gamma - 1)n_z n_y & 1 + (\gamma - 1)n_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.3.48)$$

dove, come abbiamo già detto

$$\vec{n} = \vec{\beta}/\beta \equiv \vec{\beta}/\beta; \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

## 2.4 Conseguenze dalle trasformazioni di Lorentz

### 2.4.1 Classificazione degli intervalli

Abbiamo visto che l'intervallo fra due eventi  $(x^\mu)$  e  $(y^\mu)$  è definito come

$$s^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) \quad (2.4.50)$$

ed è invariante per trasformazioni di Lorentz. A questo riguardo si distinguono tre casi.

- a): intervallo di tipo "tempo"

Se  $s^2 > 0$ , l'intervallo è di tipo "tempo" (*time like*): esiste sempre (almeno) una trasformazione di Lorentz per cui  $(x^\mu - y^\mu) \equiv (\Delta t, \Delta \vec{x}) \rightarrow (\pm s, 0, 0, 0)$

In questo riferimento, dunque, i due eventi avvengono nello stesso luogo, ma a tempi differenti. Per determinare questo riferimento, iniziamo applicando una prima trasformazione di Lorentz che ruoti il sistema di riferimento in modo che il vettore  $\Delta \vec{x}$  risulti allineato con l'asse  $z$ :

$(\Delta t, \Delta \vec{x}) \rightarrow (\Delta t, 0, 0, \Delta r)$ , dove  $\Delta r \equiv |\Delta \vec{x}|$ .

Applicando ora un boost lungo  $z$ , cioè una trasformazione del tipo

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.4.51)$$

risulta

$$(\Delta t, 0, 0, \Delta r) \rightarrow (\gamma \Delta t - \beta \gamma \Delta r, 0, 0, -\beta \gamma \Delta t + \gamma \Delta r)$$

Se scegliamo allora  $\beta = \frac{\Delta r}{\Delta t}$  (questo è sempre possibile perchè, essendo l'intervallo di tipo "tempo", per ipotesi  $\Delta t^2 - |\Delta \vec{x}|^2 > 0$  e dunque  $\frac{\Delta r}{\Delta t} < 1$ ...) risulta<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} (\Delta t, 0, 0, \Delta r) &\rightarrow \left( \gamma \Delta t - \gamma \frac{(\Delta r)^2}{\Delta t}, 0, 0, 0 \right) = \gamma \Delta t (1 - \beta^2, 0, 0, 0) = \\ &= \frac{\Delta t}{\gamma} (1, 0, 0, 0) \equiv \left( \frac{\Delta t}{|\Delta t|} \sqrt{s^2}, 0, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

essendo

$$\frac{\Delta t^2}{\gamma^2} = \Delta t^2 (1 - \beta^2) = \Delta t^2 \left( 1 - \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} \right) = \Delta t^2 - \Delta r^2 \equiv s^2$$

---

<sup>20</sup>La quantità  $\beta = \frac{\Delta r}{\Delta t}$  fornisce, nel primo riferimento, la velocità con cui un punto materiale  $P$  dovrebbe recarsi dal luogo dove avviene il primo evento al luogo dove avviene il secondo, in modo da essere simultaneo con il primo evento quando  $P$  parte e con il secondo evento, quando  $P$  arriva. Un osservatore solidale con il punto  $P$ , vedrebbe dunque avvenire i due eventi entrambi nello stesso luogo.

Si osservi che nel riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo, l'intervallo temporale che li separa è il *più corto* possibile, infatti esso vale

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} < \Delta t$$

essendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\Delta r}{\Delta t})^2}} > 1$ .

Questo fenomeno è noto come *dilatazione dei tempi* e consiste nel fatto che eventi che in un riferimento accadono nello stesso luogo ma a tempi differenti, appaiono, in un riferimento in moto relativo con esso, avvenire in luoghi diversi (ovvio) e a un intervallo di tempo che è *dilatato* rispetto al primo del fattore  $\gamma$ .

Osserviamo che quando due eventi sono relativi a un medesimo corpo o particella, il loro intervallo è sempre di genere tempo, poichè lo spazio percorso fra i due eventi non può essere superiore a  $c \Delta t$ , dato che la velocità del corpo non può superare<sup>21</sup>  $c$ , la velocità della luce.

Osserviamo altresì che per eventi di tipo tempo, la sequenza temporale non può essere invertita, ovvero il segno di  $\Delta t$  non può cambiare a causa della trasformazione del sistema di riferimento. Fra eventi di questo tipo può dunque esistere un *nesso causale*, ovvero una relazione di causa ed effetto: questo fatto è confermato anche dalla possibilità che abbiamo, in ogni riferimento, di inviare un segnale (necessariamente a velocità non superiore a  $c$ ) dal primo al secondo ...

La distanza temporale  $\Delta t$  che lega i due eventi nel riferimento in cui avvengono nello stesso luogo si chiama *intervallo (differenza) di tempo proprio* e solitamente viene indicato con il simbolo  $\tau$  (oppure  $d\tau$ ,  $\delta\tau$ ,  $\Delta\tau$  ...). Il tempo proprio è una grandezza scalare, visto che

$$\Delta\tau = sgn \cdot \sqrt{s^2}$$

e tanto  $s^2$  come  $sgn \equiv \frac{\Delta t}{|\Delta t|}$  sono invarianti per trasformazioni di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

Si osservi infine che gli intervalli a cui corrisponde la stessa differenza di tempo proprio, per quanto precede, sono rappresentati in assi  $\Delta\vec{r}, \Delta t$ , dai punti che si trovano su una falda di iperboloidi di rotazione intorno all'asse temporale, tale che  $\Delta t^2 - \Delta r^2 = \Delta\tau^2$ , che è quello superiore se  $\Delta\tau > 0$  e quello inferiore se  $\Delta\tau < 0$ .

<sup>21</sup>Una conseguenza è la dilatazione apparente della vita media di una particella che decade in volo. Consideriamo, come esempio, i leptoni  $\mu$ : essi hanno una vita media (a riposo) di  $\tau = 2.197\mu s$ , e quindi un  $c\tau = 658.65m$ .

Come è possibile allora che vengano osservati copiosamente al livello del mare quando essi sono prodotti dai raggi cosmici nell'alta atmosfera, ovvero a distanze dell'ordine della decina di chilometri? La spiegazione sta nel fatto che la vita media è quella indicata ma nel riferimento in cui la particella è ferma: nel nostro riferimento la scala temporale che la riguarda appare, invece, dilatata del fattore  $\gamma$ , che, per i muoni in questione, può facilmente andare da svariate decine (GeV) ad alcune migliaia (centinaia di GeV).

- b): intervallo di tipo "luce"

Se  $s^2 = 0$ , l'intervallo è detto di tipo "luce" (*light like*).

Esso ha necessariamente la forma  $(x^\mu - y^\mu) \equiv (\Delta t, \Delta \vec{x})$  con  $|\Delta \vec{x}|^2 = \Delta t^2$ , per definizione di lunghezza dell'intervallo.

In questo caso, si tratta di eventi connessi con un segnale luminoso: se infatti dal punto  $(x^\mu)$  parte un segnale luminoso nella direzione del versore  $\vec{k}$ , esso si propaga secondo le equazioni

$$\begin{aligned} t' &= t + \Delta t \\ \vec{x}' &= \vec{x} + c \Delta t \end{aligned}$$

ed, evidentemente,  $(t', \vec{x}') - (t, \vec{x}) = (\Delta t, c \Delta t \vec{k})$  è di tipo luce (e viceversa).

Vediamo, di nuovo, come appariranno questi eventi dai vari riferimenti collegati a quello di partenza da trasformazioni di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

Possiamo, al solito, con una rotazione, allineare  $\Delta \vec{x}$  con l'asse  $z$ :

$$(\Delta t, \Delta \vec{x}) \rightarrow (\Delta t, 0, 0, \Delta r) \quad \text{dove} \quad \Delta r = |\Delta t|$$

Applichiamo ora un generico boost lungo  $z$ : avremo

$$(\Delta t, 0, 0, \Delta r) \rightarrow (\gamma \Delta t - \beta \gamma \Delta r, 0, 0, -\beta \gamma \Delta t + \gamma \Delta r)$$

Supponiamo ora, per semplicità, che  $\Delta t > 0 \Rightarrow \Delta t = \Delta r$ : ne segue che

$$(\Delta t, 0, 0, \Delta r) \rightarrow \gamma \Delta t (1 - \beta, 0, 0, 1 - \beta) = (1 - \beta) \gamma (\Delta t, 0, 0, \Delta r)$$

Se invece  $\Delta t < 0 \Rightarrow \Delta t = -\Delta r$  risulta

$$(\Delta t, 0, 0, \Delta r) \rightarrow \gamma \Delta t (1 + \beta, 0, 0, 1 + \beta) = (1 + \beta) \gamma (\Delta t, 0, 0, \Delta r)$$

Come si vede, essendo  $(1 \pm \beta) > 0$ , di nuovo, in nessun caso si può invertire il segno della differenza temporale: questo significa che se in un riferimento è avvenuto prima l'evento  $A$  e poi l'evento  $B$ , in ogni riferimento appare sempre avvenire prima  $A$ ; ovvero anche eventi light-like possono, coerentemente, essere in relazione causale fra loro.

Quanto ai fattori  $\gamma(1 \pm \beta)$ , essi possono assumere un qualunque valore reale positivo, per cui, partendo da un intervallo  $(\Delta t, \Delta \vec{x})$ , con opportuni boosts e rotazioni, si può raggiungere un qualsiasi altro quadrivettore  $(\Delta t', \Delta \vec{x}')$ , purchè  $\Delta t$  e  $\Delta t'$  abbiano lo stesso segno (e naturalmente, trattandosi di eventi light-like,  $|\Delta t'| = \Delta \vec{x}' \dots$ ): questi intervalli stanno tutti su una stessa falda del cosiddetto "cono luce" (privato dell'origine, cioè del punto  $(0,0,0,0)$ ), che sarà quella superiore se  $\Delta t > 0$  e quella inferiore nell'altro caso.

- c): intervallo di tipo "spazio"

Se  $s^2 < 0$ , l'intervallo è di tipo "spazio" (*space like*).

Esiste un riferimento in cui i due eventi avvengono simultaneamente in posti differenti. Infatti, partiamo, al solito, dal quadrivettore  $(\Delta t, \Delta \vec{x})$ , dove, stavolta,  $\Delta t^2 < |\Delta \vec{x}|^2$  (essendo  $s^2 < 0$ ) e ruotiamo in modo da allineare  $\Delta \vec{x}$  con l'asse  $z$

$$(\Delta t, \Delta \vec{x}) \rightarrow (\Delta t, 0, 0, \Delta r) \quad \text{con} \quad \Delta r = |\Delta \vec{x}|$$

Un boost lungo  $z$  lo trasforma in

$$(\Delta t, 0, 0, \Delta r) \rightarrow (\gamma \Delta t - \beta \gamma \Delta r, 0, 0, -\beta \gamma \Delta t + \gamma \Delta r)$$

Scegliamo adesso<sup>22</sup>  $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta r}$  per cui

$$\begin{aligned} (\Delta t, 0, 0, \Delta r) &\rightarrow (0, 0, 0, -\gamma \frac{\Delta t^2}{\Delta r} + \gamma \Delta r) = \gamma \Delta r (0, 0, 0, 1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta r^2}) = \\ &= \gamma \Delta r (0, 0, 0, 1 - \beta^2) = \frac{\Delta r}{\gamma} (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

In questo riferimento i due eventi sono divenuti simultanei.

Si osservi che, se, per esempio, iniziamo da un evento space-like per il quale  $\Delta t > 0$ , allora, per  $\beta > \frac{\Delta t}{\Delta r}$ , risulta  $\Delta t' = \gamma \Delta t - \beta \gamma \Delta r = \gamma(\Delta t - \beta \Delta r) < 0$ , ovvero, per eventi di tipo "space-like", è possibile invertire la loro sequenza temporale. Essi possono risultare simultanei in un riferimento, il primo precedere il secondo in un altro riferimento ed il secondo precedere il primo in un terzo riferimento !

In particolare, da queste argomentazioni, risulta chiaro che il concetto di *simultaneità di avvenimenti in luoghi differenti*, essendo direttamente legato al comportamento di eventi space-like, non è un concetto assoluto, bensì dipende dal sistema di riferimento.

Anche nel caso di intervalli space-like, tutti quelli che corrispondono ad uno stesso valore dell'invariante  $s^2$ , sono raggiungibili l'uno dall'altro con una opportuna combinazione di boosts e rotazioni. Gli intervalli si trovano ancora sulla superficie di un iperboloido di rotazione intorno all'asse temporale, che, però, questa volta, è fatto di una sola falda, di equazione  $\Delta r^2 - \Delta t^2 = |s^2|$ .

---

<sup>22</sup>Non stupisca il fatto che  $\beta$ , che descrive una velocità, venga scritto come  $\frac{\Delta t}{\Delta r}$ . Abbiamo già detto che  $c = 1$ , e dunque  $\Delta r$  e  $\Delta t$  sono grandezze omogenee e  $\beta$  è, in realtà, un numero puro! Se non avessimo posto  $c = 1$ , avremmo dovuto scegliere adesso  $v = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta r} \dots$

### 2.4.2 Il tempo proprio

Abbiamo visto che, per due eventi separati da un intervallo time-like, si può definire un invariante di Lorentz, che è il *tempo proprio* come la lunghezza dell'intervallo temporale che li separa nel riferimento in cui i due eventi accadono nello stesso posto.

Questa nozione può essere generalizzata a casi più complicati.

Immaginiamo, per esempio, di osservare, in un riferimento  $RS$ , un orologio animato di moto qualsiasi (supporremo che le eventuali accelerazioni cui è sottoposto non ne alterino il funzionamento normale) rispetto a noi.

La sua linea di universo (cioè la sua traiettoria nello spazio-tempo) sarà la curva  $(t, \vec{x}(t))$  dove  $t$  è il tempo misurato nel riferimento  $RS$ .

Consideriamo ora due istanti successivi molto vicini tra loro,  $\hat{t}$  ed  $\hat{t} + dt$ .

Le due posizioni dell'orologio in  $RS$  saranno descritte, rispettivamente, dagli eventi

- $A : (\hat{t}, \vec{x}(\hat{t}))$
- $B : \left( \hat{t} + dt, \vec{x}(\hat{t}) + \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{t=\hat{t}} dt \right) = (\hat{t} + dt, \vec{x}(\hat{t}) + v(\hat{t})dt)$

e l'intervallo che li lega, per quanto osservato in precedenza, non può che essere time-like. Per un osservatore che viaggiasse sempre alla velocità  $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{t=\hat{t}} \equiv v(\hat{t})$ , i due eventi apparirebbero avvenire nella stessa posizione e quindi, per quanto si è visto, risulterebbero separati da una distanza temporale  $d\tau = \frac{dt}{\gamma(\hat{t})}$ . Questo intervallo temporale è proprio quello che segna l'orologio, che, evidentemente, è sempre fermo rispetto a se stesso.

In generale quindi il tempo segnato dall'orologio sarà

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)} < t_2 - t_1$$

Questo risultato viene anche espresso dicendo che *un orologio in moto va più lentamente che uno fermo*: comunque, questa frase va intesa correttamente, perchè altrimenti si presta a paradossi ...

Supponiamo infatti che esistano due orologi in due riferimenti inerziali  $RS$  ed  $RS'$ , in moto relativo fra loro con velocità  $\vec{v}$ .

Un osservatore in  $RS$  vede che l'orologio  $C$  di  $RS$  va più veloce dell'orologio  $C'$  di  $RS'$ , ma un osservatore in  $RS'$  vede invece che è l'orologio  $C'$  ad andare più veloce dell'orologio  $C$ .

C'è contraddizione? No !!

L'apparente paradosso nasce dal fatto che continuiamo a pensare *la simultaneità come un concetto assoluto*, mentre abbiamo visto che, quando si riferisce ad eventi in luoghi diversi, è del tutto relativa.

Consideriamo i due orologi  $C$  e  $C'$  e osserviamoli dai due riferimenti.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che quando si trovano nello stesso

punto (sovrapposti), che assumeremo coincidere con l'origine dei due riferimenti, segnino entrambi il tempo  $t = 0$ . Poi si allontanano tra loro con velocità relativa  $\vec{v}$ ...

Quanto alle loro posizioni spazio-temporali, abbiamo dunque

	Orologio C	Orologio C'
RS	$(0, \vec{0})$ $(t, \vec{0})$	$(0, \vec{0})$ $(t, \vec{v}t)$
RS'	$(0, \vec{0})$ $(t', -\vec{v}t')$	$(0, \vec{0})$ $(t', \vec{0})$

cioè al tempo  $t$  in  $RS$ , l'orologio  $C'$  si trova nel punto  $(t, \vec{v}t)$  e segna il tempo proprio  $\tau = \frac{t}{\gamma}$ , ovvero l'evento  $(t, \vec{v}t)$  visto da  $RS'$  è l'evento  $(\tau = \frac{t}{\gamma}, \vec{0})$ . Sempre da  $RS'$ , a questo stesso tempo  $\tau$ , l'orologio  $C$  si trova in  $(\tau, -\vec{v}\tau)$  ma non segna il tempo  $t$  (nel qual caso avremmo contraddizione...), bensì il tempo  $\frac{\tau}{\gamma} = \frac{t}{\gamma^2}$ .

La ragione è che, dopo aver sincronizzato i due orologi  $C$  e  $C'$  quando erano nello stesso posto (nell'origine, al tempo  $t = 0$ ), per conoscere il tempo proprio di  $C'$  operando da  $RS$ , abbiamo misurato la posizione spazio-temporale dei due orologi *simultaneamente in  $RS$* , considerando gli eventi  $(t, \vec{0})$  e  $(t, \vec{v}t)$  e abbiamo concluso che quando  $C$  segna  $t$ ,  $C'$  deve segnare di meno, e precisamente  $\tau = \frac{t}{\gamma}$ . Se avessimo operato da  $RS'$ , la sincronizzazione sarebbe rimasta la stessa, essendo questa operazione invariante in quanto avvenuta sui due orologi quando erano nello stesso punto e allo stesso momento; però poi avremmo dovuto prendere le posizioni dei due orologi *simultaneamente in  $RS'$* , e siccome la seconda volta non possiamo più farlo con gli orologi nello stesso posto, troviamo l'apparente paradosso che, da  $RS$ , quando  $C$  segna  $t$ , allora  $C'$  segna  $\frac{t}{\gamma}$ , come pure, da  $RS'$  quando  $C'$  segna  $t'$ , allora  $C$  segna  $\frac{t'}{\gamma}$ , i.e. in entrambi i casi l'orologio in moto appare rallentato rispetto a quello fermo...

Un modo per provare a superare il problema relativo al fatto che, la seconda volta che si confrontano gli orologi, non possiamo farlo quando si trovano nello stesso posto, è quello di assumere che uno dei due per metà del tempo vada in un verso e per l'altra metà del tempo vada in verso opposto, in modo che i due orologi tornino a sovrapporsi...

E' il ***paradosso dei gemelli***.

Di due gemelli, uno resta sulla Terra (assunta come riferimento inerziale) mentre l'altro se ne va con un'astronave e ritorna dopo tantissimo tempo. Per il gemello rimasto a Terra, sarà trascorso il tempo  $\Delta t$  coincidente con l'intervallo di tempo proprio a lui associato, mentre per il gemello astronauta

sarà trascorso un tempo proprio

$$\Delta\tau = \int_t^{t+\Delta t} \frac{dt}{\gamma(t)} < \Delta t$$

dove  $\gamma(t)$  è il  $\gamma$  del gemello astronauta, rispetto alla Terra, valutato al tempo  $t$  della Terra. La conclusione è che il gemello intraprendente, quando torna è più giovane del gemello meno intraprendente !

Però, se invece di riferirci al gemello terrestre, ci fossimo riferiti al gemello astronauta, avremmo concluso che era quello terrestre, in quanto in moto rispetto all'astronauta, che veniva ritrovato più giovane...

Stavolta, siccome i due orologi sono sincronizzati in partenza e al ritorno, in entrambi i casi, quando sono sovrapposti, la relatività della simultaneità non c'entra. C'entra però il fatto che, mentre uno dei due riferimenti (quello terrestre) è inerziale, l'altro non può esserlo sempre, perchè, a un qualche momento, l'astronauta dovrà decelerare per tornare indietro. Dunque i due riferimenti non sono equivalenti: uno è inerziale e uno non lo è.

In quello inerziale si invecchia prima !!!

### 2.4.3 La lunghezza propria

Analogamente alla dilatazione dei tempi, in un riferimento in moto si manifesta anche il fenomeno, cosiddetto, della *contrazione delle lunghezze*.

A questo riguardo, riprendiamo l'argomento usato quando si è dimostrato che un intervallo space-like può sempre essere visto descrivere due eventi simultanei in due luoghi diversi di un opportuno riferimento. Eravamo partiti da  $(\Delta t, \Delta\vec{x})$ , con

$$\Delta t^2 - |\Delta\vec{x}|^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t^2 < \Delta r^2 \equiv |\Delta\vec{x}|^2$$

Avevamo visto che, dopo una rotazione che allineava  $\Delta\vec{x}$  con l'asse  $z$ , un boost lungo  $z$  con velocità  $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta r}$  produceva il risultato aspettato, cioè

$$(\Delta t, \Delta\vec{x}) \rightarrow (\Delta t, 0, 0, \Delta r) \rightarrow (\gamma\Delta t - \beta\gamma\Delta r, 0, 0, -\beta\gamma\Delta r + \gamma\Delta r) = (0, 0, 0, \frac{\Delta r}{\gamma})$$

Quindi i due eventi, che in  $RS$  erano  $(t, \vec{x})$  e  $(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta\vec{x})$ , visti da  $RS'$  diventano  $(t', \vec{x}')$  e  $(t', \vec{x}' + \frac{\Delta\vec{x}}{\gamma})$ . Sembrerebbe che, procedendo per similitudine con quanto visto per il tempo proprio, anche per le lunghezze debba accadere lo stesso fenomeno. Invece non è così: è vero giusto l'inverso !

Si tratta sempre di un problema legato alla questione della simultaneità. Vediamo come.

Se abbiamo un regolo fermo nel riferimento  $RS$ , la sua lunghezza la possiamo definire per confronto con un altro regolo campione, che sovrapponiamo al primo, da fermo: è la sua *lunghezza propria*.

Ma se il regolo si muove ? Come facciamo a determinarne la lunghezza del

regolo nel riferimento in cui è in moto ?

L'idea, da cui consegue la definizione operativa relativa alla misura della lunghezza del regolo in moto, è di determinare le posizioni dei due estremi del regolo *a uno stesso istante*, peraltro qualsiasi, e poi determinare la distanza fra queste due posizioni... Immaginiamo allora di avere un regolo lungo  $2D$ , fermo in  $RS$ . Chiamiamo  $A$  e  $B$  i suoi estremi. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che le loro linee di universo siano

$$A : (t_A, 0, 0, -D) \qquad B : (t_B, 0, 0, D)$$

Supponiamo ora di essere in  $RS'$ , in moto relativo con velocità  $\vec{v}$  lungo l'asse  $z$  rispetto a  $RS$ . Avremo

$$\begin{aligned} (t_A, 0, 0, -D) &\rightarrow (\gamma t_A + \beta \gamma D, 0, 0, -\beta \gamma t_A - \gamma D) \\ (t_B, 0, 0, D) &\rightarrow (\gamma t_B - \beta \gamma D, 0, 0, -\beta \gamma t_B + \gamma D) \end{aligned}$$

Secondo la procedura sopra esposta, per misurare la lunghezza del regolo in  $RS'$ , dove esso si muove con velocità  $-\vec{v}$ , occorre definire le posizioni assunte dai suoi estremi, *a uno stesso istante* nel riferimento  $RS'$  in cui ci troviamo e poi prendere semplicemente la differenza. Evidentemente si tratta di valutare la distanza spaziale in  $RS'$ , fra due eventi simultanei in  $RS'$ .

Le linee d'universo degli estremi del regolo, in  $RS'$ , sono date dalle funzioni di cui sopra, espresse in funzione dei parametri  $t_A$  e  $t_B$ , che descrivono il tempo di  $RS$ . Occorre imporre la simultaneità in  $RS'$ , ovvero

$$\begin{aligned} \gamma t_A + \beta \gamma D &= T &\Rightarrow & \gamma t_A = T - \beta \gamma D \\ \gamma t_B - \beta \gamma D &= T &\Rightarrow & \gamma t_B = T + \beta \gamma D \end{aligned}$$

Immediatamente si vede che la simultaneità in  $RS'$  implica la non simultaneità in  $RS$  ( $t_A \neq t_B$ ), ma fin qui sembrerebbe che ci fosse poco di male, visto che il regolo, in  $RS$  è comunque fermo...

Continuiamo con la nostra analisi.

In funzione di  $T$ , per i due estremi si ha

$$A : (T, 0, 0, -\beta(T - \beta \gamma D) - \gamma D) \qquad B : (T, 0, 0, -\beta(T + \beta \gamma D) + \gamma D)$$

quindi, in base alla definizione, la lunghezza del regolo in  $RS'$  vale

$$L = [-\beta(T + \beta \gamma D) + \gamma D] - [-\beta(T - \beta \gamma D) - \gamma D] = 2\gamma D(1 - \beta^2) = \frac{2D}{\gamma}$$

e dunque la lunghezza del regolo in moto è inferiore a quella del regolo fermo. Questa conclusione è corretta quando il regolo è disposto nel senso del moto.

Nel caso in cui il regolo sia disposto ortogonalmente alla direzione del moto, invece, come abbiamo già visto, non deve esserci alcun effetto.

Verifichiamolo formalmente considerando il solito regolo lungo  $2D$ , fermo in

*RS*. Abbiamo già visto che le linee d'universo descritte dai suoi estremi in *RS* sono

$$A : (t_A, 0, 0, -D) \qquad B : (t_B, 0, 0, D)$$

Supponiamo ora che *RS'* si muova con velocità  $\vec{v}$  diretta secondo l'asse  $x$ . Risulta che, in *RS'*, queste linee d'universo diventano

$$\begin{aligned} (t_A, 0, 0, -D) &\rightarrow (\gamma t_A, -\beta \gamma t_A, 0, -D) \\ (t_B, 0, 0, -D) &\rightarrow (\gamma t_B, -\beta \gamma t_B, 0, D) \end{aligned}$$

Come si vede, in questo caso, considerare allo stesso tempo la posizione dei due estremi del regolo in *RS'* equivale a farlo in *RS*: si ha infatti che la condizione di simultaneità in *RS'* stavolta è

$$\gamma t_A = T = \gamma t_B$$

per cui, in *RS'* per quanto riguarda la posizione simultanea dei due estremi del regolo, avremo

$$A : (T, -\beta T, 0, -D) \qquad B : (T, -\beta T, 0, D)$$

la cui distanza è sempre  $2D$  ...

Come abbiamo visto, di nuovo il gioco è fatto dalla relatività della simultaneità. Questo è un concetto per nulla intuitivo, e il suo cattivo uso, come si è già visto per il tempo proprio, si presta ad apparenti paradossi.

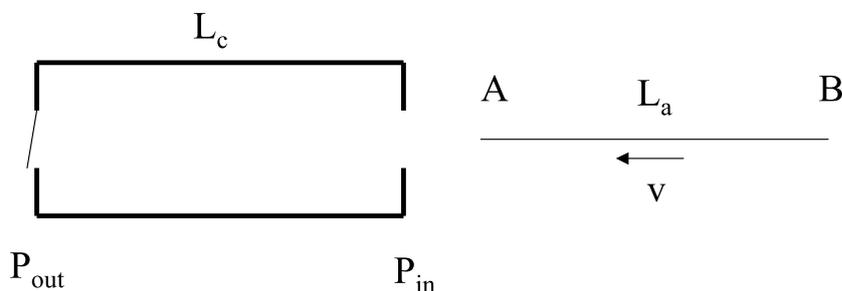


Figura 2.7: *Illustrazione relativa al paradosso dello sciatore*

#### 2.4.4 Paradosso dello sciatore

Consideriamo il seguente apparente paradosso. Uno sciatore ha uno sci di lunghezza  $L$  e sta sciando su una pista con velocità  $v$ . La pista presenta una buca anch'essa di lunghezza  $L$ . Lo sciatore vede la buca contratta e pensa di poterla superare, mentre un osservatore fermo vede lo sci contratto e conclude che lo sciatore rovinerà nella buca. Entrambi gli osservatori sono inerziali, ma arrivano a conclusioni opposte. Chi ha ragione?

Per capire meglio la questione, modifichiamo il problema e consideriamo il seguente. Un corridore tiene in mano un'asta lunga  $L_a$  e si muove a velocità  $v$  correndo nella direzione dell'asta stessa. Il corridore si dirige verso una capanna (vedi fig.(2.7)) che ha il lato nella direzione del moto pari a  $L_c$ . Il fondo della capanna è chiuso da una porta  $P_{out}$ , che si apre quando l'estremo posteriore  $B$  dell'asta attraversa la porta d'ingresso  $P_{in}$ .

Qual è la condizione su  $L_a$  ed  $L_c$  per cui, fissata la velocità dell'asta, la porta non venga sfondata da quest'ultima ?

Mettiamoci nel riferimento fisso (capanna ferma): abbiamo detto che l'asta appare accorciata del fattore  $\gamma$ , quindi sembrerebbe di poter concludere che la condizione richiesta sia

$$\frac{L_a}{\gamma} \leq L_c$$

Ma anche il riferimento dell'asta è inerziale, e quindi altrettanto valido per la descrizione del processo che quello della capanna: però, in questo riferimento è la capanna che appare accorciata del fattore  $\gamma$ , per cui, in questo riferimento, concluderemmo piuttosto che deve essere

$$\frac{L_c}{\gamma} \geq L_a$$

Siamo in contraddizione. Perché ?

La ragione sta ancora nella questione della relatività della simultaneità.

Per risolvere il paradosso è necessario formulare il problema in modo corretto. Poniamoci di nuovo nel riferimento della capanna ferma e domandiamoci: è possibile che, al momento in cui l'estremo B attraversa  $P_{in}$ , si apra simultaneamente la porta  $P_{out}$ ? (perchè è questo che abbiamo assunto implicitamente quando si è concluso che doveva essere  $\frac{L_a}{\gamma} \leq L_c \dots$ ).

La risposta è no. Non è possibile, perchè occorrerà che un segnale si propaghi da  $P_{in}$  a  $P_{out}$  per comandare l'apertura della porta, e questo richiederà almeno il tempo  $\tau = \frac{L_c}{c}$ . Ne segue che la condizione richiesta sarà piuttosto

$$\frac{L_a}{\gamma} + v\tau \leq L_c$$

Sostituendo, si ha dunque

$$\begin{aligned} \frac{L_a}{\gamma} + v\tau \leq L_c &\quad \Rightarrow \quad \frac{L_a}{\gamma} \leq -v\frac{L_c}{c} + L_c = L_c(1 - \beta) \\ &\quad \Rightarrow \quad L_a \leq L_c(1 - \beta)\gamma = L_c\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \end{aligned}$$

E se avessimo affrontato il problema dal riferimento dove l'asta è ferma? In quel caso, avremmo avuto (visto che la baracca, lunga  $\frac{L_c}{\gamma}$  ci viene contro con velocità  $v$ )

$$L_a \leq \frac{L_c}{\gamma} - v\tau'$$

dove  $\tau'$  adesso rappresenta il tempo che impiega, in questo riferimento, un segnale per andare da  $P_{in}$  a  $P_{out}$ . Siccome  $P_{in}$  e  $P_{out}$  si muovono, in questo riferimento, con velocità  $v$ , assumendo che il segnale viaggi alla massima velocità possibile, cioè  $c$ , abbiamo

$$c\tau' = \frac{L_c}{\gamma} - v\tau' \quad \Rightarrow \quad \tau' = \frac{L_c}{\gamma(c + v)}$$

ovvero, sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} L_a &\leq \frac{L_c}{\gamma} - v\tau' = \frac{L_c}{\gamma} - \frac{L_c v}{\gamma c(1 + \beta)} = \\ &= \frac{L_c}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{1 + \beta}\right) = \frac{L_c}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta} = L_c\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \end{aligned}$$

che, naturalmente, coincide con la stessa condizione ricavata nell'altro riferimento!

### 2.4.5 Composizione delle velocità

Una conseguenza immediata del fatto che la nozione di simultaneità è relativa, ovvero del fatto che il tempo non è assoluto come postulava Newton, è che la semplice legge di composizione delle velocità di Galileo (somma vettoriale) è un'approssimazione corretta della realtà, valida solo per basse velocità ( $v \ll c$ ). Supponiamo infatti che in un riferimento  $RS$  una particella segua una legge di moto  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ . Per definizione, la sua quadriposizione, quindi, è  $(t, \vec{x}(t))$  e la sua velocità in  $RS$  vale dunque  $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \equiv \vec{v}(t)$ .

Consideriamo un nuovo sistema di riferimento  $RS'$ , non ruotato nè traslato rispetto al precedente, in moto rispetto ad  $RS$  con velocità  $\beta$  lungo l'asse  $z$ . In  $RS'$ , la quadriposizione della particella sarà

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'(t') \\ y'(t') \\ z'(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (2.4.52)$$

ovvero avremo

$$(t', x'(t'), y'(t'), z'(t')) = (\gamma t - \beta\gamma z(t), x(t), y(t), -\beta\gamma t + \gamma z(t)) \quad (2.4.53)$$

e la velocità della particella vista da  $RS'$ , sarà dunque, adesso, pari a

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t') &= \frac{d\vec{x}'(t')}{dt'} = \frac{d\vec{x}'(t')}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt'} (v_x, v_y, \gamma v_z - \beta\gamma) \\ &= \frac{1}{\gamma(1 - \beta v_z)} (v_x, v_y, \gamma(v_z - \beta)) \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

dove, per semplicità di simboli, abbiamo ommesso di riportare esplicitamente la dipendenza dalla coordinata temporale  $t$ , misurata in  $RS$ , delle componenti della velocità  $v_x, v_y, v_z$ .

Come si vede, anche le componenti ortogonali alla direzione del moto relativo fra i due riferimenti cambiano, a causa del fattore  $\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta v_z)}$ , originato dal fatto che il tempo non scorre nello stesso modo nei due riferimenti. In generale, se  $RS'$  si muove in  $RS$  con velocità  $\vec{\beta}$  costante ma diretta nella direzione del versore generico  $\vec{n}$ , allora, se definiamo

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\parallel} &\equiv (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} & \vec{\beta} \cdot \vec{v}_{\parallel} &= \vec{\beta} \cdot \vec{v} \\ \vec{v}_{\perp} &\equiv \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} & \vec{\beta} \cdot \vec{v}_{\perp} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (2.4.55)$$

si può dimostrare che risulta<sup>23</sup>

$$\vec{v}'(t') = \frac{1}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})} (\vec{v}_\perp + \gamma(\vec{v}_\parallel - \vec{\beta})) \quad (2.4.56)$$

Evidentemente si ritrova l'espressione "galileiana" solo nel limite di basse velocità (sia della particella in  $RS$ , che di  $RS'$  visto da  $RS$  ...): in questo caso infatti, essendo  $\gamma \approx 1$  e così pure  $\frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})} \approx 1$ , si ha che  $t \approx t'$  e

$$\vec{v}'(t') = \vec{v}(t) - \vec{\beta} \quad (2.4.57)$$

---

<sup>23</sup>Si noti che, comunque,  $|\vec{v}'|^2 < 1$ , infatti risulta

$$\begin{aligned} |\vec{v}'|^2 &= \frac{1}{\gamma^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} [|\vec{v}_\perp|^2 + \gamma^2|\vec{v}_\parallel - \vec{\beta}|^2] = \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} \left[ \frac{v^2 - v_\parallel^2}{\gamma^2} + v_\parallel^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{\beta} + \beta^2 \right] = \\ &= \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} [(1 - \beta^2)(v^2 - v_\parallel^2) + v_\parallel^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{\beta} + \beta^2] = \\ &= \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} [v^2 - v_\parallel^2 - \beta^2 v^2 + \beta^2 v_\parallel^2 + v_\parallel^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{\beta} + \beta^2] = \\ &= \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} [v^2 - \beta^2 v^2 + (\vec{\beta} \cdot \vec{v})^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{\beta} + \beta^2] = \\ &= \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} [v^2 - \beta^2 v^2 + (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2 - 1 + \beta^2] = \\ &= 1 + \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} [v^2(1 - \beta^2) - (1 - \beta^2)] = 1 - \frac{(1 - \beta^2)(1 - v^2)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})^2} < 1 \quad c.v.d \end{aligned}$$

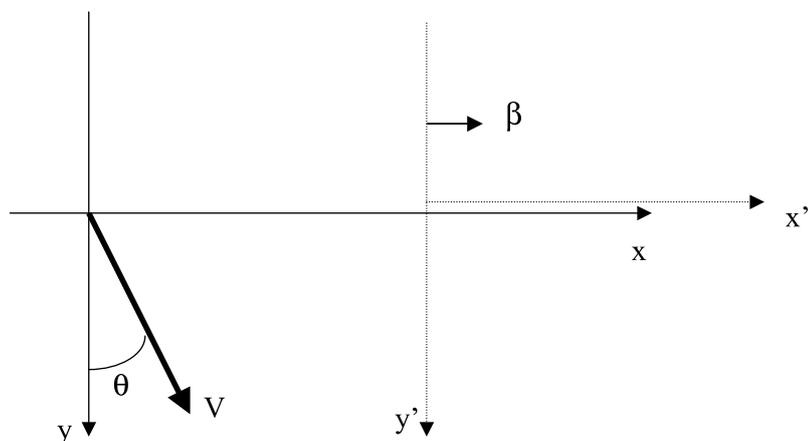


Figura 2.8: Aberrazione angolare stellare

### 2.4.6 Aberrazione angolare

Consideriamo la direzione della luce proveniente da una stella fissa (ovvero estremamente lontana da noi) osservata dalla Terra durante il periodo di rivoluzione della stessa intorno al Sole. Se la Terra fosse ferma in un riferimento inerziale, misureremmo costantemente una certa coordinata angolare fissa. Però la Terra ruota intorno al centro di massa Terra-Sole ...

Questo movimento che conseguenze ha ?

Supponiamo in generale che, nel riferimento  $RS$  delle stelle fisse, centrato nel baricentro del sistema Terra-Sole, una particella si muova (cfr. fig.(2.8)) con velocità  $\vec{v} = v(\sin\theta, \cos\theta, 0)$  e immaginiamo di voler conoscere la sua velocità nel riferimento  $RS'$ , in moto lungo l'asse<sup>24</sup>  $x$  rispetto a  $RS$  con velocità  $\beta$ .

Per la (2.4.56), in  $RS'$  le componenti della velocità della particella saranno dunque

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{-\beta + v \sin\theta}{(1 - \beta v \sin\theta)} \\ v'_y &= \frac{v \cos\theta}{\gamma(1 - \beta v \sin\theta)} \\ v'_z &= 0 \end{aligned}$$

<sup>24</sup>La scelta degli assi non ha ridotto la generalità del problema, infatti questi li abbiamo scelti in modo che la velocità in  $RS$  della particella e la velocità di  $RS'$  stiano entrambe nel piano  $x, y$ , e quindi abbiamo scelto  $x$  in modo che  $RS'$  si muova, visto da  $RS$ , proprio in questa direzione...

ovvero

$$tg\theta' \equiv \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{-\beta + v \sin\theta}{(1 - \beta v \sin\theta)} \frac{\gamma(1 - \beta v \sin\theta)}{v \cos\theta} = \gamma \left( tg\theta - \frac{\beta}{v \cos\theta} \right) \quad (2.4.58)$$

che, nel caso della luce ( $v = c = 1$ ), diventa

$$tg\theta' = \gamma \left( tg\theta - \frac{\beta}{\cos\theta} \right)$$

Se possiamo ritenere  $\beta \ll 1$  (nel caso del moto della Terra rispetto al centro di massa Terra-Sole, questo è certamente vero) e quindi assumere  $\gamma \approx 1$ , l'espressione precedente diventa

$$tg\theta' \approx tg\theta - \frac{\beta}{\cos\theta}$$

ovvero, ponendo

$$\theta' = \theta - \epsilon$$

lo sviluppo di Taylor della funzione *tangente*, troncato al primo ordine, fornisce

$$tg\theta' \approx tg\theta - \frac{\epsilon}{\cos^2\theta}$$

per cui risulta che il moto relativo introduce un'aberrazione angolare che, nelle condizioni di cui alla fig.(2.8), si riconduce a una diminuzione (dovuta al fatto che nel riferimento in moto  $RS'$  la componente  $x$  diminuisce...) dell'angolo  $\theta$  pari a

$$\epsilon = \beta \cos\theta$$

Si noti che questo risultato coincide con quello non relativistico, il quale fornisce, in generale, naturalmente che

$$tg\theta'_{nr} = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{-\beta + v \sin\theta}{v \cos\theta} = tg\theta - \frac{\beta}{v \cos\theta}$$

ovvero, nel caso particolare della luce

$$tg\theta' = tg\theta - \frac{\beta}{\cos\theta}$$

che coincide appunto con quanto ottenuto nel caso relativistico, quando  $v \ll c$  e  $\gamma$  possa essere approssimata con 1. Il fatto è che nell'espressione di  $tg\theta'_{nr} = \frac{v'_x}{v'_y}$  il fattore principale che distingue la composizione delle velocità nel caso relativistico dal caso non relativistico, cioè  $\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})}$  è comune a  $v'_x$  e  $v'_y$  e quindi si semplifica ... Resta solo il fattore  $\gamma$  associato alla velocità relativa dei due riferimenti, che dipende da  $\beta^2$  e quindi, al primo ordine in  $\beta$  vale 1.

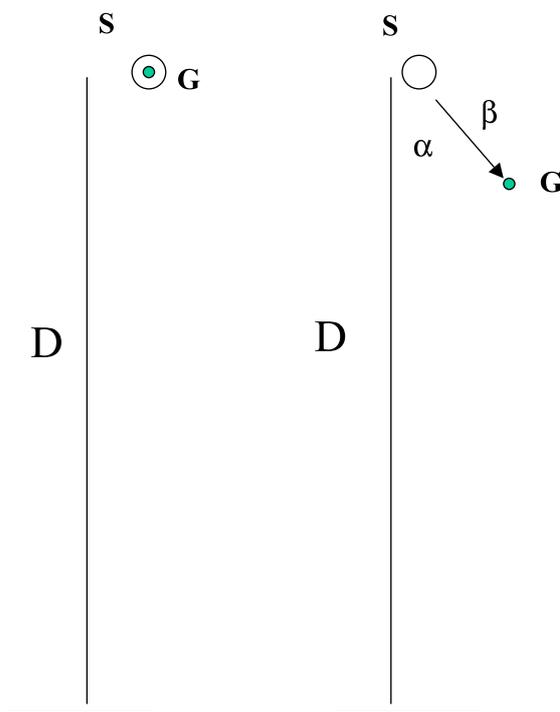


Figura 2.9: *Velocità superluminale apparente di un getto stellare*

### 2.4.7 Velocità superluminali apparenti

Esistono casi in cui oggetti celesti, come i "getti stellari", sembrano muoversi a velocità che possono essere anche molto superiori a quella della luce.

Vediamo di cosa si tratta.

Supponiamo che una stella  $S$ , che supporremo fissa, distante da noi  $D$ , emetta verso di noi, al tempo  $t = t_0$ , un getto di materia stellare con velocità  $c\vec{\beta}$  nel nostro riferimento (situazione di sinistra, in fig.(2.9)).

Sia la luce della stella che quella del getto, emesse al momento della nascita di quest'ultimo, cioè al tempo  $t_0$ , ci raggiungeranno al tempo  $t = t_0 + \frac{D}{c}$ . Dopo un tempo  $T$  dal tempo  $t_0$ , il getto si sarà portato nella posizione  $c\vec{\beta}T$  rispetto alla stella (vedi situazione di destra della fig.(2.9) e la sua luce ci giungerà al tempo

$$t_0 + T + \frac{D - c\beta T \cos\alpha}{c} = t_0 + \frac{D}{c} + T(1 - \beta \cos\alpha)$$

quindi noi lo vedremo nella sua nuova posizione dopo un tempo  $T(1 - \beta \cos\alpha)$  da quando la stella e il getto apparivano a noi sovrapposti. Apparentemente sembra allora che il getto abbia la componente della velocità ortogonale alla retta congiungente la stella con l'osservatore pari a

$$v_{\perp} = \frac{c\beta T \sin\alpha}{T(1 - \beta \cos\alpha)} = c \frac{\beta \sin\alpha}{1 - \beta \cos\alpha}$$

che può tranquillamente essere maggiore di  $c$  ...!

Si tratta di un puro e semplice effetto prospettico, che non implica alcuna violazione del fatto, fin qui assodato, che la materia ordinaria non può spostarsi a velocità maggiori o uguali a quella della luce nel vuoto.

## 2.5 Quadrivelocità e quadriaccelerazione

Come sappiamo, nel caso generale le velocità si compongono in modo piuttosto complicato<sup>25</sup>: una ragione è certamente che questa grandezza fisica non ha proprietà di trasformazione semplici sotto il gruppo di Lorentz, risultando dal rapporto della parte spaziale di un quadrivettore ( $d\vec{x}$ ) con la sua prima componente, cioè con la parte temporale  $dt$ .

Una generalizzazione della grandezza fisica "velocità" al caso relativistico è la quadrivelocità, che, come dice il nome, è un quadrivettore e quindi ha proprietà di trasformazioni semplici sotto il gruppo di Lorentz.

Questa grandezza viene definita a partire dal *quadrivettore posizione* ( $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$ ), derivando rispetto al *tempo proprio* associato al punto materiale in moto:

$$u^\mu(t) \equiv \frac{dx^\mu(t)}{d\tau} \equiv \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}(t)}{d\tau} \right) \quad (2.5.59)$$

Abbiamo già osservato come il tempo proprio  $d\tau$  sia uno scalare per trasformazioni di Lorentz, per cui  $u^\mu$  è palesemente un quadrivettore.

Se  $\vec{\beta}(t)$  è la velocità della particella, ovvero  $\vec{\beta}(t) \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$  e poniamo, al solito,  $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , segue immediatamente che, essendo  $d\tau = \frac{dt}{\gamma} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma$ , è

$$u^\mu(t) = \gamma(t) \left( 1, \vec{\beta}(t) \right) = \left( \gamma(t), \gamma(t) \vec{\beta}(t) \right) \quad (2.5.60)$$

che mostra, in particolare, come la parte spaziale della quadrivelocità coincida con la velocità  $\vec{\beta}(t)$  solo quando essa è piccola rispetto a 1.

La quadrivelocità gode della proprietà di avere modulo unitario, cioè  $u^\mu u_\mu = 1$  essendo  $u^\mu u_\mu = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$  e quindi, in particolare essa è time-like: nel riferimento tangente<sup>26</sup> al moto del punto materiale al tempo  $t$ , evidentemente risulta

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.5.61)$$

poichè, per definizione, nel riferimento tangente, il punto materiale ha velocità istantanea nulla al tempo  $t$  e la coordinata temporale del riferimento tangente coincide quindi con il tempo proprio del punto materiale ...

<sup>25</sup>Un punto materiale che in  $RS$  ha velocità  $\vec{v}$ , nel riferimento  $RS'$  che si muove con velocità  $\vec{\beta}$  rispetto a  $RS$ , ha velocità  $\vec{v}'$ , tale che

$$\vec{v}' = \frac{1}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})} \left( \vec{v}_\perp + \gamma(\vec{v}_\parallel - \vec{\beta}) \right)$$

dove  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

<sup>26</sup>Con "riferimento tangente a una particella al tempo  $t$ " intendiamo il riferimento inerziale che ha la velocità  $\vec{v}$  (costante) coincidente con la velocità della particella al tempo  $t$  (in generale, funzione di  $t$  ...).

Un altro quadrivettore importante per la cinematica relativistica di una particella è la derivata della quadrivelocità rispetto al tempo proprio: si tratta della quadriaccelerazione

$$a^\mu(t) \equiv \frac{du^\mu(t)}{d\tau} \quad (2.5.62)$$

Evidentemente, essendo per quanto visto prima  $u^\mu u_\mu = 1$ , ne segue che

$$\frac{d(u^\mu u_\mu)}{d\tau} = 0 \Rightarrow a^\mu u_\mu = 0 \quad (2.5.63)$$

cioè la quadriaccelerazione e la quadrivelocità sono "ortogonali" nella metrica di Minkowski. Una conseguenza immediata è che, nel riferimento tangente dove la quadrivelocità ha non nulla (e pari a 1...) solo la componente temporale, la quadriaccelerazione può avere non nulle solo le componenti spaziali e dunque, mentre la quadrivelocità è time-like, la quadriaccelerazione è space-like.

Nel riferimento tangente, poi, le componenti spaziali della quadriaccelerazione coincidono con le componenti dell'accelerazione usuale, dato che nel riferimento tangente tempo e tempo proprio coincidono.

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow a^\mu = (0, \vec{a}(t)) \quad (2.5.64)$$

In generale risulta invece che

$$\begin{aligned} a^\mu(t) &= \frac{du^\mu(t)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{du^\mu(t)}{dt} = \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[ \gamma(t) \left( 1, \vec{\beta}(t) \right) \right] = \\ &= \gamma(t) \frac{d\gamma}{dt} \left( 1, \vec{\beta}(t) \right) + \gamma^2(t) \left( 0, \frac{d\vec{\beta}(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.5.65)$$

ma

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (1 - \beta^2)^{-3/2} \cdot (-2 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \quad (2.5.66)$$

e dunque risulta

$$a^\mu(t) = \gamma^4(t) \left( \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \left( 1, \vec{\beta}(t) \right) + \gamma^2(t) \left( 0, \dot{\vec{\beta}}(t) \right) \quad (2.5.67)$$

che, nel riferimento tangente dove  $\vec{\beta} = 0$ , fornisce evidentemente la (2.5.64). Una conclusione che procede naturalmente da quanto sopra è infine che

$$a^\mu(t) a_\mu(t) = -|\vec{a}_N(t)|^2 \quad (2.5.68)$$

dove  $\vec{a}_N(t)$  è l'accelerazione "newtoniana" misurata nel riferimento tangente.



## Capitolo 3

# Cinematica relativistica

### 3.1 Il quadrimpulso

Supponiamo di avere una particella di massa<sup>1</sup>  $m$ , in moto vario in un riferimento inerziale  $RS$ . Secondo la Meccanica Newtoniana, essa ha associato un impulso  $\vec{p} = m \vec{v}$  e la seconda legge della Dinamica lega la derivata  $\frac{d\vec{p}}{dt}$  alla risultante  $\vec{F}$  delle forze esterne agenti sulla particella stessa.

Ma noi abbiamo già visto che la naturale generalizzazione relativistica della velocità  $\vec{v}$  è la quadrivelocità  $u^\mu$ .

Proviamo allora costruire il quadrivettore *quadrimpulso*  $p^\mu \equiv m u^\mu$  e cerchiamo di capirne il significato fisico. Dalla definizione si ha

$$p^\mu = (m u^0, m \vec{u}) = (m \gamma, m \gamma \vec{\beta}) \quad (3.1.1)$$

Nel limite di basse velocità, al secondo ordine nello sviluppo in serie di Taylor rispetto a  $\beta$ , abbiamo

$$p^\mu = \left( m \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right), m \vec{\beta} \right) \quad (3.1.2)$$

Come si vede, il termine spaziale coincide con l'impulso classico (si ricordi che abbiamo posto  $c = 1!$ ), mentre il termine temporale è pari a

$$p^0 = m + \frac{1}{2} m \beta^2 = m + E_c \quad (3.1.3)$$

dove  $E_c$  è l'energia cinetica del punto materiale stesso.

Volendo dunque generalizzare  $\vec{p}$ , abbiamo ottenuto una grandezza,  $p^\mu$ , che, per basse velocità, ha la parte spaziale coincidente con l'impulso  $\vec{p}$  e quella temporale, a meno dell'offset  $m$ , pari all'energia cinetica della particella.

---

<sup>1</sup>Per definizione  $m$  rappresenta la massa inerziale della particella, misurata nel riferimento "tangente", ovvero in quello dove la particella si trova istantaneamente ferma e verifica la seconda legge della dinamica di Newton.

Nel caso di un sistema isolato, potremo ancora procedere in modo analogo, definendo la massa inerziale  $M$  nel sistema di riferimento dove la velocità  $\vec{\beta}$  del Centro di Massa (CM) è nulla<sup>2</sup>, e quindi, ponendo

$$P^\mu = M u^\mu \equiv M (u^0, \vec{u}) \quad (3.1.4)$$

dove  $u^\mu$  è la quadrivelocità, definita a partire dalla velocità  $\vec{\beta}$  del CM.

Classicamente, se il sistema è isolato come abbiamo supposto all'inizio, l'impulso  $\vec{P} = M \vec{\beta}$  si conserva.

Se vogliamo che questo resti vero anche per la sua generalizzazione relativistica, allora, visto che le trasformazioni di Lorentz mescolano componenti spaziali e temporali tra loro, anche  $P^0$  dovrà conservarsi.

Dato che, nel caso della singola particella, abbiamo visto che la componente  $p^0$  del quadrimpulso è legata all'energia, potrebbe sembrare che questa proprietà di conservazione, dopotutto, non costituisca una gran novità: almeno in assenza di attriti, anche nella meccanica newtoniana l'energia si conserva! Ma non è così: in questa nuova legge di conservazione c'è un fatto nuovo molto importante.

Nel termine temporale del quadrimpulso compare tutta l'energia associata alla particella o al sistema di particelle che, a impulso spaziale totale nullo, è descritta appunto dal termine di massa (inerziale) del sistema dato, la quale, in questo senso, diviene sinonimo di energia totale intrinseca.

Per capire meglio, consideriamo il caso di due masse  $m$ , uguali fra loro e legate insieme da una molla ideale (senza massa) contratta che, al tempo  $t = 0$ , le lancia in versi opposti.

Classicamente si dice che il sistema è fatto da due masse  $m$ , con associata una certa energia potenziale, la quale si trasforma in energia cinetica al momento dello scatto della molla. Relativisticamente, invece, il processo deve essere descritto in termini di un sistema che, in quiete nel nostro sistema di riferimento, ha una massa  $M = 2(m + \epsilon)$ , il quale ha dato luogo a due particelle di quadrimpulso  $(m + \epsilon, \vec{p})$  e  $(m + \epsilon, -\vec{p})$ . In linguaggio non relativistico, la quantità  $2\epsilon$  misura l'energia potenziale iniziale presente nel sistema

---

<sup>2</sup>Nel caso di un sistema composito in interazione, volendo trovare il centro di massa, dobbiamo usare la massa libera dei costituenti o che altro?

Il difetto di massa è una peculiarità dell'intero sistema in interazione e non delle sue parti. Volendo determinare il sistema del CM, non è possibile farlo in modo coerente finché si rimane in una teoria di potenziale newtoniana classica, perché, come abbiamo già avuto modo di osservare, questa prevede interazione istantanea fra particelle in posti differenti e dunque non è compatibile con la relatività della contemporaneità. Occorre affrontare il problema nell'ambito di una teoria di campo relativisticamente covariante.

In questo caso, per trovare il riferimento del CM, occorre, a partire dalla Lagrangiana (scalare di Lorentz e invariante in forma per traslazioni nello spazio tempo), determinare il tensore (densità di) energia-impulso  $T^{\mu\nu}$ , il quale verificherà la legge di conservazione  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ; quindi integrare  $T^{0\nu}$  nello spazio e determinare così il quadrimpulso  $P^\nu$  del sistema (determinato in parte dalla materia e in parte dal campo di interazione) e cercare poi il riferimento in cui la sua parte spaziale è nulla.

a causa della molla contratta, che si trasforma in energia cinetica delle due masse lanciate da parti opposte. In linguaggio relativistico, essa, insieme a  $2m$ , più semplicemente determina la massa inerziale del sistema prima dello sgancio.

Va poi ricordato che, non solo l'energia interna "positiva" accresce la massa di un sistema rispetto a quello dei suoi costituenti, ma anche quella "negativa" di legame, agisce diminuendola ! La massa di un atomo di idrogeno nello stato fondamentale è più piccola della somma delle masse del protone e dell'elettrone, anche se, essendo la massa del protone circa  $938 \text{ MeV}$ , quella dell'elettrone circa  $512 \text{ keV}$  e quella di legame, al più, solo  $13.6 \text{ eV}$ , questa differenza è molto difficilmente apprezzabile (circa 15 parti per miliardo !...). Le cose cambiano radicalmente quando l'energia di legame è sensibilmente maggiore, come accade nei nuclei. Per esempio, la massa nella particella  $\alpha$  (nucleo dell'atomo di elio: due protoni e due neutroni) è pari a  $3727.380 \text{ MeV}$ , mentre la massa di un protone vale  $938.272 \text{ MeV}$  e quella di un neutrone è pari a  $939.565 \text{ MeV}$ , per cui

$$M_{He} - 2(m_p + m_n) = -28.3 \text{ MeV} \quad (3.1.5)$$

Questo *difetto di massa*, che rappresenta adesso ben lo 0.76% della massa della particella  $\alpha$ , misura l'energia di legame del sistema dei quattro nucleoni! E' proprio in questo difetto di massa che sta la risposta alla domanda sul motivo per cui i nuclei atomici sono sostanzialmente stabili.

Ma torniamo adesso al caso di una particella di massa  $m$  e osserviamo che, dalla definizione del quadrimpulso in termini della quadrivelocità e dal fatto che  $u^\mu u_\mu = 1$ , segue immediatamente che il quadrimpulso di una particella è time-like e risulta

$$p^\mu p_\mu = m^2 \quad (3.1.6)$$

e, ovviamente, nel riferimento "tangente", si ha

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (3.1.7)$$

In generale, avremo dunque che il quadrimpulso di una particella di massa  $m$  sarà dato da

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \equiv (p^0, p \sin\theta \cos\phi, p \sin\theta \sin\phi, p \cos\theta) \quad (3.1.8)$$

dove  $p^0 = \sqrt{m^2 + p^2} \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$  e  $p \equiv |\vec{p}|$  è il modulo dell'impulso spaziale pari a  $\vec{p} = m\gamma \vec{v}$ , quindi  $\gamma$  volte quello "newtoniano".

Vediamo adesso come cambia il quadrimpulso  $p^\mu$  per trasformazioni di Lorentz. Non ci interesseremo di cosa gli accade per rotazioni, perchè è ovvio: intendiamo vedere invece cosa gli succede sotto un boost di Lorentz. Data

la forma del tutto generale assunta per  $p^\mu$ , non c'è perdita di generalità nell'assumere che il boost avvenga lungo l'asse  $z$ , con velocità  $\beta$ .

Essendo il quadrimpulso un quadrivettore, se esso in  $RS$  è dato dalla (3.1.8), allora nel riferimento  $RS'$ , in moto rispetto ad  $RS$  con velocità  $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$ , esso sarà rappresentato dal quadrivettore  $p'^\mu$ , ottenuto da  $p^\mu$ , attraverso una trasformazione  $\Lambda_z$  del tipo seguente

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & -\sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.1.9)$$

ovvero

$$p'^\mu \equiv \begin{pmatrix} p'^0 \\ p'^1 \\ p'^2 \\ p'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma p^0 - \beta\gamma p^3 \\ p^1 \\ p^2 \\ \gamma p^3 - \beta\gamma p^0 \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

Con ovvio significato di simboli, questo risultato può essere sintetizzato dicendo che

$$p'^0 = \gamma [p^0 - (\vec{\beta} \cdot \vec{p})] \quad (3.1.11)$$

$$\vec{p}'_\perp = \vec{p}_\perp \quad (3.1.12)$$

$$p'_{\parallel} = \gamma [p_{\parallel} - \beta p^0] \quad (3.1.13)$$

Come si vede, la componente dell'impulso ortogonale alla direzione di  $\vec{\beta}$  non cambia, cioè  $\vec{p}'_\perp$  è invariante per trasformazioni di Lorentz (si ricordi che questo *non* è vero per la velocità, cioè per  $\vec{v}_\perp$ !), mentre nella componente longitudinale si "mescolano" contributi lineari sia in  $p_{\parallel}$  che in  $p^0$ .

In particolare, siccome  $p^\mu$  è time-like, allora  $p^0 > |\vec{p}| \geq |p_{\parallel}|$ , quindi è sempre garantito che, fissata comunque una direzione, si può trovare un riferimento in cui  $p$  è solo "trasverso" a quella direzione fissata. Nel caso particolare in cui la direzione scelta sia quella di  $\vec{p}$  stesso, allora dall'affermazione precedente segue che esiste un riferimento inerziale in cui la particella è ferma.

E questa non è che una riformulazione della proprietà secondo cui quadrivettori time-like ammettono sempre un riferimento (unico a meno di una rotazione) in cui hanno diversa da zero solo la componente temporale.

Si osservi infine che, per trasformazioni di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , risulta correttamente che la componente temporale del quadrimpulso  $p^0$ , individuata come quella che descrive l'energia relativistica della particella,

- è sempre positiva e non può cambiar di segno,
- può assumere un qualsiasi valore maggiore o uguale a quello della massa della particella stessa:  $p^0 \equiv \sqrt{m^2 + p^2} \geq m$ .

Passiamo infine a esplicitare le leggi di trasformazione del quadrimpulso, quando la parte spaziale sia espressa usando coordinate polari. Senza perdita di generalità, assumeremo che l'asse polare (asse  $z$ ) risulti orientato come la direzione della velocità relativa, cioè che sia

$$\begin{aligned}\vec{\beta} &= (0, 0, \beta) \\ p^\mu &= (p^0, p \sin\theta \cos\phi, p \sin\theta \sin\phi, p \cos\theta) \\ p'^\mu &= (p'^0, p' \sin\theta' \cos\phi', p' \sin\theta' \sin\phi', p' \cos\theta')\end{aligned}$$

Dalle (3.1.11) e (3.1.12) abbiamo immediatamente che

$$p'^0 = \gamma [p^0 - \beta p \cos\theta] \quad (3.1.14)$$

$$tg\phi' = tg\phi \quad (3.1.15)$$

Inoltre, essendo la componente trasversa dell'impulso invariata, sarà

$$p \sin\theta = p' \sin\theta' \quad (3.1.16)$$

ed essendo

$$p' \cos\theta' = \gamma [p \cos\theta - \beta p^0] \quad (3.1.17)$$

segue che

$$tg\theta' = \frac{p' \sin\theta'}{p' \cos\theta'} = \frac{p \sin\theta}{\gamma(p \cos\theta - \beta p^0)} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta \frac{p^0}{p})} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{\beta}{\beta_p})} \quad (3.1.18)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\frac{p^0}{p}$  è il modulo della velocità  $\beta_p$  della particella in  $RS$ .

### 3.2 Il fotone

Fino a ora abbiamo considerato quadrimpulsi di particelle provviste di massa e abbiamo concluso che essi sono quadrivettori time-like, proprio perchè nessuna particella materiale può andare a velocità uguale o superiore a quella della luce nel vuoto. Però sappiamo che la luce stessa, in vari fenomeni come nel caso dell'effetto fotoelettrico e dell'effetto Compton, si comporta come una particella: il fotone, appunto!

Qual è il quadrimpulso di un fotone ?

Evidentemente questo quadrimpulso deve rispecchiare il fatto che

- il fotone viaggia sempre e comunque alla velocità della luce (ci mancherebbe che non lo facesse !) in ogni riferimento inerziale;
- ogni fotone ha un'energia che abbiamo imparato appunto, per esempio, dall'effetto fotoelettrico, essere pari a  $\epsilon = h\nu = \hbar\omega$ .

Dunque un fotone che si muova nella direzione  $\vec{n}$ , deve essere descritto da un quadrimpulso light-like, avente la parte spaziale nella direzione  $\vec{n}$  ed energia  $h\nu$ , ovvero

$$p^\mu = \left( \frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \vec{n} \right) \equiv (p, p \vec{n}), \quad \text{dove} \quad p \equiv \frac{h\nu}{c} \quad (3.2.19)$$

Con questa definizione, essendo  $p^\mu p_\mu = 0$ , la massa del fotone risulta effettivamente nulla, come deve essere.

Da quello che già conosciamo circa i quadrivettori light-like, sappiamo che, in ogni riferimento inerziale,

- $p^\mu$  avrà comunque la struttura di cui sopra;
- l'energia del fotone sarà positiva in ogni riferimento (le trasformazioni di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  non cambiano il segno della componente temporale né dei quadrivettori time-like né di quelli light-like ...);
- l'energia del fotone potrà assumere valori reali positivi qualsiasi, cioè non avrà un limite inferiore strettamente positivo (la massa è nulla!).

Per quanto concerne le proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz (ortocrono proprio), valgono, naturalmente le conclusioni che abbiamo già tratto in tutta generalità per il quadrimpulso.

In questo caso, però, essendo  $p^0 = p$ , le equazioni (3.1.11)-(3.1.13) subiscono alcune semplificazioni e risulta

$$p' = \gamma(p - \vec{\beta} \cdot \vec{p}) = \gamma p(1 - \beta \cos\theta) \quad (3.2.20)$$

$$p'_\perp \equiv p' \sin\theta' = p_\perp \equiv p \sin\theta \quad (3.2.21)$$

$$p'_\parallel \equiv p' \cos\theta' = \gamma(p_\parallel - \beta p) = \gamma p(\cos\theta - \beta) \quad (3.2.22)$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra la direzione di propagazione del fotone  $\vec{n}$  e la velocità  $\vec{\beta}$  del riferimento  $RS'$ . In particolare, se la trasformazione di Lorentz avviene lungo la direzione di propagazione del fotone (i.e.  $p_{\perp}^{\vec{}} = 0$ ), risulta

$$p' = \gamma(p \pm \beta p) = p \gamma(1 \pm \beta) = p \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = p \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \quad (3.2.23)$$

dove vale il segno superiore quando  $\vec{\beta}$  e  $\vec{p}$  sono opposti, ovvero quando si va incontro al fotone (cioè quando  $RS'$  si muove incontro al fotone). Essendo poi  $\nu$  proporzionale a  $p^0 = p$ , nel caso si vada incontro al fotone, la frequenza apparirà dunque spostata verso il violetto, risultando, in  $RS'$ , pari a

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (3.2.24)$$

ed è il fenomeno del *blue shift*; mentre se il riferimento  $RS'$  si muove nello stesso verso di propagazione del fotone, di osserverà un *red shift* dato da

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (3.2.25)$$

Questo fenomeno consente di determinare la velocità radiale di allontanamento/avvicinamento delle stelle da noi, infatti, se il gas presente su una stella  $S$  emette una riga di frequenza nota  $\nu_0$ , allora, se la stella si allontana da noi, nel nostro riferimento quella radiazione apparirà spostata verso il rosso, venendo osservata da un riferimento che si muove *nello stesso verso* del fotone.

Lo shift è rappresentato dalla quantità  $z = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$  e la sua misura consente una determinazione diretta della velocità radiale relativa Terra-Stella  $\beta$ , almeno se possiamo trascurare analoghi effetti di relatività generale (red shift gravitazionale).

Naturalmente, se la stella si avvicinasse alla Terra, al posto di un *red shift*, osserveremmo, ovviamente, un *blue shift* ...

### 3.3 L'effetto Doppler

Il cambiamento di frequenza dovuto al moto relativo della sorgente rispetto all'osservatore è noto con il nome di *effetto Doppler* ed è un fenomeno classico, messo in evidenza per la prima volta<sup>3</sup> nel caso del suono.



Figura 3.1: *Christian Andreas Doppler (1803-1853)*

Assumendo di essere nel riferimento dove il mezzo nel quale il suono si propaga è in quiete, se indichiamo con  $\vec{n}$  il versore che individua la direzione orientata sorgente-osservatore, con  $\vec{v}$  la velocità della sorgente e con  $V$  quella del suono nel mezzo considerato, è abbastanza semplice rendersi conto che la nota di periodo  $T$  e lunghezza d'onda  $\lambda$  emessa dalla sorgente quando essa è in quiete, nel momento in cui la sorgente è in moto, appare nel riferimento del mezzo dove il suono si propaga come avente lunghezza d'onda

$$\lambda' = \lambda - \vec{v} \cdot \vec{n} T = \lambda - \vec{v} \cdot \vec{n} \frac{\lambda}{V} = \lambda \left( 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{V} \right)$$

da cui si ottiene<sup>4</sup>, evidentemente, che

$$f' = f \frac{V}{V - \vec{v} \cdot \vec{n}} \approx f \left( 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{V} \right) \quad (3.3.27)$$

<sup>3</sup>La leggenda vuole che C.A. Doppler se ne sia accorto ascoltando dalla banchina le orchestre che, a Vienna, suonavano sui battelli che viaggiavano lungo il Danubio.

<sup>4</sup>Nel caso in cui la sorgente sia ferma nel mezzo assegnato mentre l'osservatore si muove

dove  $f$  è la frequenza di emissione a riposo e  $f'$  è la frequenza del suono percepita dall'osservatore fermo nel riferimento del mezzo in quiete: la frequenza cresce quando la sorgente si muove verso l'osservatore, non cambia se la direzione di osservazione è ortogonale al moto della sorgente e diminuisce quando la sorgente è in allontanamento.

Nel caso del fotone<sup>5</sup>, se  $\nu_0$  è la sua frequenza in un riferimento inerziale  $RS$  dato, allora essendo il suo quadrimpulso in questo riferimento pari a

$$p^\mu = h\nu_0(1, \vec{n}) = p(1, \sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

se si osserva quel fotone da un riferimento  $RS'$  che si muove rispetto ad  $RS$  con velocità  $\beta$  lungo l'asse  $z$ , risultando

$$(p'^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p \sin\theta \cos\phi \\ p \sin\theta \sin\phi \\ p \cos\theta \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \gamma - \beta\gamma \cos\theta \\ \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \gamma \cos\theta - \beta\gamma \end{pmatrix} \quad (3.3.28)$$

ecco che, in  $RS'$ , la frequenza del fotone apparirà differente dal valore in  $RS$ , e, per la (3.3.28), avremo che

$$\nu' = \nu \gamma (1 - \beta \cos\theta) \quad (3.3.29)$$

$$\text{tg}\phi' = \text{tg}\phi \quad (3.3.30)$$

$$\cos\theta' = \frac{-\beta\gamma + \gamma \cos\theta}{\gamma - \beta\gamma \cos\theta} = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta} \quad (3.3.31)$$

le quali, nel limite in cui la velocità relativa fra i due riferimenti  $\beta \ll 1$ , coincidono con le relative espressioni classiche, risultando

$$\nu' \approx \nu (1 - \beta \cos\theta) \quad (3.3.32)$$

$$\begin{aligned} \cos\theta' &\approx (\cos\theta - \beta)(1 + \beta \cos\theta) \approx \cos\theta - \beta \sin^2\theta \\ \Rightarrow \theta' &\approx \theta + \beta \sin\theta \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

---

con velocità  $\vec{v}$  in quel mezzo, l'espressione della frequenza  $f'$  è la seguente

$$f' = f \left( 1 + \frac{\vec{v}}{V} \cdot \vec{n} \right) \quad (3.3.26)$$

che coincide con quella che si ottiene dalla (3.3.27) solo al primo ordine in  $v/V$ . Perché le due situazioni apparentemente simmetriche conducono allo stesso risultato solo in modo approssimato?

<sup>5</sup>Si noti che, a differenza del caso del suono, per la radiazione e.m. non esiste il riferimento del mezzo in quiete, perché questo mezzo è il vuoto, ed esso è uguale a se stesso in ogni riferimento inerziale (principio di relatività)!

Tornando all'espressione relativisticamente corretta dell'effetto Doppler, osserviamo, in particolare, che nel caso in cui  $\cos\theta = 0$  (cioè nel caso in cui il fotone si propaghi in  $RS$  ortogonalmente alla velocità  $\vec{\beta}$  del riferimento  $RS'$ , e quindi sia  $p^\mu = p(1, \cos\phi, \sin\phi, 0)$ ), risulta

$$(p'^\mu) = p(\gamma, \cos\phi, \sin\phi, -\gamma\beta) \quad (3.3.34)$$

ovvero

$$\nu' = \nu \gamma \quad (3.3.35)$$

$$\phi' = \phi \quad (3.3.36)$$

$$\cos\theta' = -\beta \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta' = \sqrt{1 - \cos^2\theta'} = \frac{1}{\gamma} \quad (3.3.37)$$

Questo risultato della  $RR$ , ampiamente dimostrato sperimentalmente, è noto come *effetto Doppler trasverso* e non ha analogo classico: esso discende direttamente dalla legge di trasformazione del quadrimpulso, riflettendo direttamente quella relativa alla coordinata temporale.

Accade che, se un fotone, in un riferimento  $RS$  assegnato, viaggia in una certa direzione e noi lo osserviamo da un riferimento  $RS'$  che si muove in  $RS$  con velocità ortogonale a quella direzione, la frequenza del fotone in  $RS'$  è vista sempre e comunque aumentata del fattore  $\gamma$ .

La ragione fisica è che in  $RS$  l'impulso spaziale del fotone è solo trasverso (alla velocità relativa fra  $RS$  ed  $RS'$ ) e questo resta invariato in  $RS'$  dove però nasce anche una componente longitudinale, a causa del mescolamento con quella temporale. Quindi, nel riferimento  $RS'$ , l'impulso spaziale dovrà avere un modulo superiore a quello nel riferimento  $RS$ , dove era presente solo la sua parte trasversa.

Siccome il modulo dell'impulso spaziale coincide con l'energia del fotone che, a sua volta, è proporzionale alla frequenza, quest'ultima deve crescere.

### 3.4 Allargamento Doppler di una riga spettrale

Iniziamo considerando un atomo in uno stato eccitato che, nel suo riferimento di quiete, si diseccita emettendo un fotone di frequenza  $\nu_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi}$ : questa frequenza non sarà univocamente definita a causa dell'allargamento naturale della riga  $\Delta\omega$ , legato alla vita media dello stato eccitato  $\tau$  dal principio di indeterminazione:  $\Delta\omega \approx 1/\tau$ . D'altronde, la vita media è pari all'inverso del coefficiente  $A$  di emissione spontanea che, per le comuni transizioni di dipolo, è data da

$$A = \frac{4\omega^3}{\hbar c^3} \left| \langle 0 | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon} | 1 \rangle \right|^2 = \frac{1}{\tau} \quad (3.4.38)$$

dove  $\vec{\epsilon}$  è il versore che descrive la polarizzazione del campo elettrico,  $\vec{d} = e\vec{x}$  è l'operatore *momento di dipolo elettrico* e  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$  indicano lo stato eccitato e quello fondamentale. Come ordine di grandezza, se indichiamo con  $r$  le dimensioni atomiche ( $r \approx 1$  Angström), tenendo conto che i momenti di dipolo saranno orientati a caso (da cui il fattore  $1/3$  dovuto alla media del  $\cos^2 \dots$ ), abbiamo che, per normali transizioni di dipolo, risulta

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= A \approx \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} e^2 |\langle \vec{x} \rangle|^2 = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{c^2} \alpha r^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{c^2} \alpha r^2 = \frac{4}{3} \alpha \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione emessa e  $\alpha$  è la costante di struttura fina:  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ .

Assumendo, per esempio, una transizione ottica avente  $\lambda \approx 4000$  Angström, risulta allora

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{4}{3} \alpha 4\pi^2 \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 = \frac{16\pi^2}{3} \alpha \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 \approx 2.4 \times 10^{-8} \quad (3.4.40)$$

Questo allargamento è *intrinseco* al processo di decadimento, ma ne esiste un altro che solitamente è molto maggiore di questo ed è legato al moto dell'emettitore ovvero all'effetto Doppler.

Se gli emettitori sono particelle di un gas alla temperatura  $T$ , essi avranno una distribuzione di velocità che è data dalla legge di distribuzione di Maxwell (caso particolare della distribuzione di Boltzmann), la quale fornisce, date la temperatura  $T$  del gas e la massa  $m$  delle molecole che lo costituiscono

$$\mathcal{P}(v) dv = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{m v^2}{kT}} 4\pi v^2 dv \quad (3.4.41)$$

L'effetto sull'energia del fotone, e dunque sulla sua frequenza  $\nu$  osservata nel Laboratorio, dovuto al moto dell'emettitore, per quanto già visto, è di spostarla in modo che

$$\nu = \gamma\nu_0 + \beta\gamma\nu_0 \cos\Theta$$



Figura 3.2: *Ludwig Boltzmann (1844-1906)*

dove  $\Theta$  adesso è l'angolo fra la velocità  $\vec{\beta}$  dell'emettitore nel Laboratorio e la direzione del fotone emesso nel riferimento dove l'emettitore è a riposo. Assegnato il valore di  $\beta$  e trattando il moto dell'emettitore come non relativistico ( $\gamma \rightarrow 1$ ), accade quindi che la frequenza osservata  $\nu$  sarà compresa fra un valore minimo  $\nu_m$  e un valore massimo  $\nu_M$ , dati rispettivamente da

$$\nu_m = \gamma \nu_0(1 - \beta) \approx \nu_0(1 - \beta) \quad (3.4.42)$$

$$\nu_M = \gamma \nu_0(1 + \beta) \approx \nu_0(1 + \beta) \quad (3.4.43)$$

con una distribuzione  $H(\nu, \beta)$  piatta<sup>6</sup> fra gli estremi, cioè tale che

$$H(\nu, \beta) = \frac{1}{2\beta\nu_0} \quad \text{per} \quad \frac{|\nu - \nu_0|}{\nu_0} \leq \beta \quad (3.4.44)$$

<sup>6</sup>La distribuzione è piatta perché possiamo certamente assumere che, nel riferimento dell'atomo fermo, il processo di emissione del fotone sia isotropo. Questo vuol dire che la densità di probabilità  $d\mathcal{P}$  che il fotone sia emesso a un angolo  $\Theta$  rispetto alla velocità dell'atomo nel nostro riferimento è semplicemente proporzionale all'angolo solido, ovvero

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{4\pi} d\phi \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{2} d(-\cos \Theta) \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos \Theta)} = \frac{1}{2}$$

che mostra, appunto, come  $d\mathcal{P}$  sia una distribuzione piatta in  $\cos \Theta$ .

Volendo allora la distribuzione in frequenza  $F(\nu)$  osservata nel Laboratorio, a causa del moto degli emettitori, ecco che, fissato  $\nu$ , a questa frequenza contribuiranno solo gli emettitori che si muovono con una velocità  $\beta \geq \frac{|\nu - \nu_0|}{\nu_0}$ , pesati con la distribuzione di Maxwell, ovvero sarà

$$F(\nu) = \int_{v(\nu)}^{\infty} \mathcal{P}(v) H(\nu, v) dv \quad (3.4.45)$$

dove  $v(\nu)$  è il limite inferiore di velocità per cui, fissata  $\nu_0$ , si può, a partire da quella, ottenere la frequenza  $\nu$  per effetto Doppler. Applicando quanto sopra al caso non relativistico<sup>7</sup> della distribuzione maxwelliana, si ha quindi

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{\frac{|\nu - \nu_0|}{\nu_0} c}^{\infty} dv 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} v^2 \frac{1}{2\nu_0 \frac{v}{c}} = \\ &= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{c}{2\nu_0} \int_{\frac{|\nu - \nu_0|}{\nu_0} c}^{\infty} dv e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} v = \\ &= 2\pi \frac{c}{\nu_0} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2kT}{m} \int_{\frac{|\nu - \nu_0|}{\nu_0} c \sqrt{\frac{m}{2kT}}}^{\infty} dx e^{-x^2} x \quad (3.4.46) \end{aligned}$$

Ma evidentemente

$$\int_a^{\infty} e^{-x^2} x dx = \frac{1}{2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{-a^2}$$

per cui risulta quindi<sup>8</sup>

$$F(\nu) = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{c}{\nu_0} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mc^2}{kT} \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2}} = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mc^2}{kT} \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2}} \quad (3.4.47)$$

Ovvero si tratta di una distribuzione gaussiana, avente valor medio  $\nu_0$  e scarto  $\Delta\nu$  pari a  $\nu_0 \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}$ , per cui si può concludere che l'agitazione termica è responsabile di un allargamento Doppler delle righe spettrali pari a

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} \quad (3.4.48)$$

<sup>7</sup>Formalmente l'integrale (3.4.45) è fatto fino a  $+\infty$ , nonostante sappiamo che la velocità massima dell'emettitore sarà comunque sempre inferiore a  $c$ . La ragione è che, essendo  $k = 8.617 \times 10^{-5} eVK^{-1}$ , ne segue che, anche alle temperature più estreme,  $kT \ll mc^2$  per cui, data la forma della distribuzione maxwelliana della velocità, essa risulta sensibilmente non nulla solo per  $v \ll c$  ...

<sup>8</sup>Ricordando che  $\int e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} dx = \sigma \sqrt{2\pi}$ , si verifica facilmente che  $F(\nu)$  è normalizzata correttamente a 1.

L'allargamento Doppler dipende quindi dal valore di  $kT$ , confrontato con l'energia di massa dell'atomo.

Nel caso, per esempio, dell'elio a temperatura ambiente

$$T = 300K, k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K = 8.6 \cdot 10^{-5} eV/K, m = 4 \cdot 931 MeV/c^2$$

(ricordiamo che l'elio ha una massa pari a 4 masse atomiche e che una massa atomica vale appunto:  $1 \text{ uma} = 931 \text{ MeV}/c^2$ ), si ottiene

$$\begin{aligned} kT &\approx 26 \text{ meV} \\ mc^2 &\approx 3700 \text{ MeV} \\ \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} &\approx 2.5 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

### 3.5 Verifiche dirette del Doppler trasverso

La prima evidenza sperimentale dell'esistenza dell'effetto Doppler trasverso, che, come abbiamo detto, è la vera novità relativa a questo fenomeno, legata alla Relatività Ristretta, è quella ottenuta da Ives e Stilwell<sup>9</sup> nel 1938.

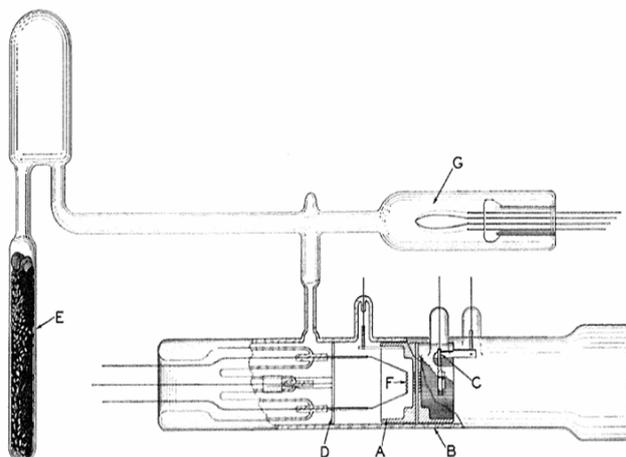


Figura 3.3: *Apparato sperimentale usato da Ives e Stilwell*

Essi osservarono simultaneamente la frequenza della radiazione emessa da una sorgente in moto nel verso della velocità ( $\nu_p$ ) e in quello opposto<sup>10</sup> ( $\nu_a$ ). Rispetto alla frequenza ( $\nu_0$ ) emessa con la sorgente a riposo, dalla (3.3.29) si ha, evidentemente, che

$$\nu_p = \nu_0 \gamma(1 + \beta) = \nu_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \nu_a = \nu_0 \gamma(1 - \beta) = \nu_0 \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.5.50)$$

da cui risulta che il valor medio  $\lambda^*$  delle due lunghezze d'onda osservate è

$$\lambda^* = \frac{\lambda_p + \lambda_a}{2} = \frac{\frac{\lambda_0}{\gamma(1+\beta)} + \frac{\lambda_0}{\gamma(1-\beta)}}{2} = \frac{\lambda_0}{2\gamma} \frac{2}{1 - \beta^2} = \lambda_0 \gamma \approx \lambda_0(1 + \beta^2/2) \quad (3.5.51)$$

Definendo allora

$$\Delta\lambda \equiv \lambda^* - \lambda_0 \approx \lambda_0 \beta^2/2; \quad \Delta\lambda' \equiv \lambda_a - \lambda_p = 2\lambda_0\gamma\beta \approx 2\lambda_0\beta \quad (3.5.52)$$

la dipendenza quadratica di  $\Delta\lambda$  da  $\Delta\lambda'$  è la prova diretta<sup>11</sup> dell'esistenza dell'effetto Doppler trasverso.

<sup>9</sup>H.E. Ives, G.R. Stilwell: *An experimental study of the rate of a moving atomic clock* Opt. Soc. Am. 28, 215 (1938)

<sup>10</sup>I simboli  $\nu_p$  e  $\nu_a$  stanno, rispettivamente, per  $\nu$ -parallelo e  $\nu$ -antiparallelo.

<sup>11</sup>Si osservi che, in questo modo, ad essi non era richiesto di conoscere il valore di  $\beta$ .

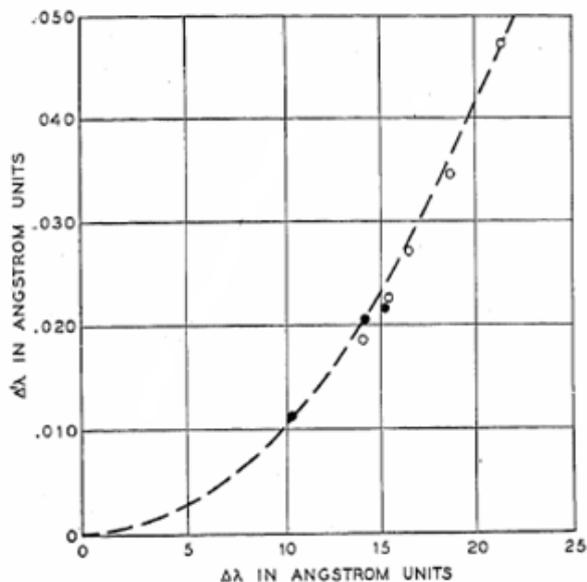


Figura 3.4: Risultati ottenuti da Ives e Stilwell: per vari valori del potenziale di accelerazione, in ascissa è riportato lo shift Doppler  $\lambda_1 - \lambda_2$  fra le due righe osservate, i.e. l'effetto lineare in  $\beta$ , mentre in ordinata è riportato l'effetto quadratico in  $\beta$ , i.e. la differenza  $\lambda^* - \lambda_0$

Per mettere in evidenza questa dipendenza, Ives e Stilwell operarono nel modo seguente. Essi ionizzarono, attraverso un arco elettrico, dell'idrogeno posto in un tubo a bassa pressione e quindi accelerarono gli ioni idrogeno così formati, applicando differenze di potenziale variabili (fino a circa 30000 *Volts*, a cui corrisponde un  $\beta \approx 5 \cdot 10^{-3}$ ) fra due elettrodi forati. In questo modo poterono ottenere un fascio di ioni di velocità regolabile. Essi osservarono la radiazione di ricombinazione degli ioni con gli elettrodi all'uscita del campo elettrico. Essi studiarono la riga blu-verde<sup>12</sup>  $H_\beta$  a

<sup>12</sup>Ricordiamo che le righe dell'atomo di idrogeno sono tali che la loro frequenza è data dalla ben nota relazione

$$\nu_{nk} = R c \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad k > n; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5.53)$$

dove la costante di Rydberg  $R$  è data da [ $hcR = 13,60569193(34) \text{ eV}$ ]

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m}{c h^3} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{mc}{h} = 109737 \text{ cm}^{-1} \quad (3.5.54)$$

La serie di righe  $\nu_{1k}$  è la serie di Lyman ed è nell'ultravioletto, mentre la serie di righe  $\nu_{2k}$  è la serie di Balmer e si trova quasi per intero nel visibile. Le lunghezze d'onda delle righe di questa serie, come fu trovato da Balmer stesso nel 1884, possono essere riscritte

4861 Å, osservando come essa appare sia nel verso del moto che nel verso opposto, e confrontando il baricentro con la differenza delle due righe.

In questo modo Ives e Stilwell poterono verificare l'esistenza dell'effetto con un'incertezza migliore del 10%.

Più recentemente<sup>13</sup>, per effettuare questa verifica è stato usato il metodo della spettroscopia risonante in saturazione<sup>14</sup>.

Due fasci laser di frequenza, rispettivamente,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , si propagano nella stessa direzione ma in versi opposti e interagiscono con un fascio atomico che si muove nella loro stessa direzione, con velocità media assegnata.

Quando entrambi i fasci interagiscono con la stessa popolazione, lo spettro della radiazione di fluorescenza in funzione della frequenza di uno dei due fasci presenta un *Lamb dip* caratteristico.

L'effetto Doppler trasverso implica che il prodotto delle due frequenze (o delle due lunghezze d'onda ...) sia indipendente dalla velocità del fascio atomico. Infatti

$$\nu_1 \cdot \nu_2 = \nu_0 \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \nu_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu_0^2 \quad (3.5.56)$$

Con questo metodo è stata raggiunta una incertezza sperimentale nella verifica dell'effetto Doppler trasverso di  $2.2 \cdot 10^{-7}$  e, più recentemente, di  $8.4 \cdot 10^{-8}$ .

---

nel modo seguente

$$\lambda_k = \frac{c}{\nu_{2k}} = \frac{1}{R} \frac{4k^2}{k^2 - 4} = 3645.6 \frac{k^2}{k^2 - 4} \text{ \AA} \quad (3.5.55)$$

e corrispondono, nella nomenclatura degli spettroscopisti fine '800, alle righe  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  ...

<sup>13</sup>G. Saathoff et al.: *Improved test of time dilation in special relativity*, Phys. Rev. Lett. 91, 190403 (2003)

S. Reinhardt et al.: *Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities*; Nature Physics 3, 861, (2007)

<sup>14</sup>Vediamo brevemente in che cosa consiste questo metodo.

Supponiamo di avere un gas a una certa temperatura, che presenta una riga di assorbimento alla frequenza  $\nu_0$ , la quale sia allargata di  $\Delta\nu$  per effetto Doppler. Un fascio laser di frequenza  $\nu_0(1 + \epsilon)$ , se  $\nu_0\epsilon \simeq \Delta\nu_0$ , potrà essere assorbito dalla popolazione degli atomi con componente della velocità nel verso di propagazione della luce pari a  $\beta \approx \epsilon$ , mentre, per esempio, se illuminiamo il gas anche con un altro fascio laser di frequenza  $\nu_0(1 - \epsilon)$ , questo interagirà con una diversa popolazione di atomi, quella per cui per cui  $\beta \approx -\epsilon$ , e la conseguenza è che le radiazioni diffuse, cioè dovute alla successiva diseccitazione atomica, si sommeranno fra loro. Se adesso modifichiamo per esempio la frequenza  $\nu$  di uno dei due fasci laser fino a che entrambi interagiscono con la *stessa* popolazione atomica, allorché verrà raggiunta questa condizione, in funzione di  $\nu$  osserveremo un decremento della luce diffusa (Lamb dip).

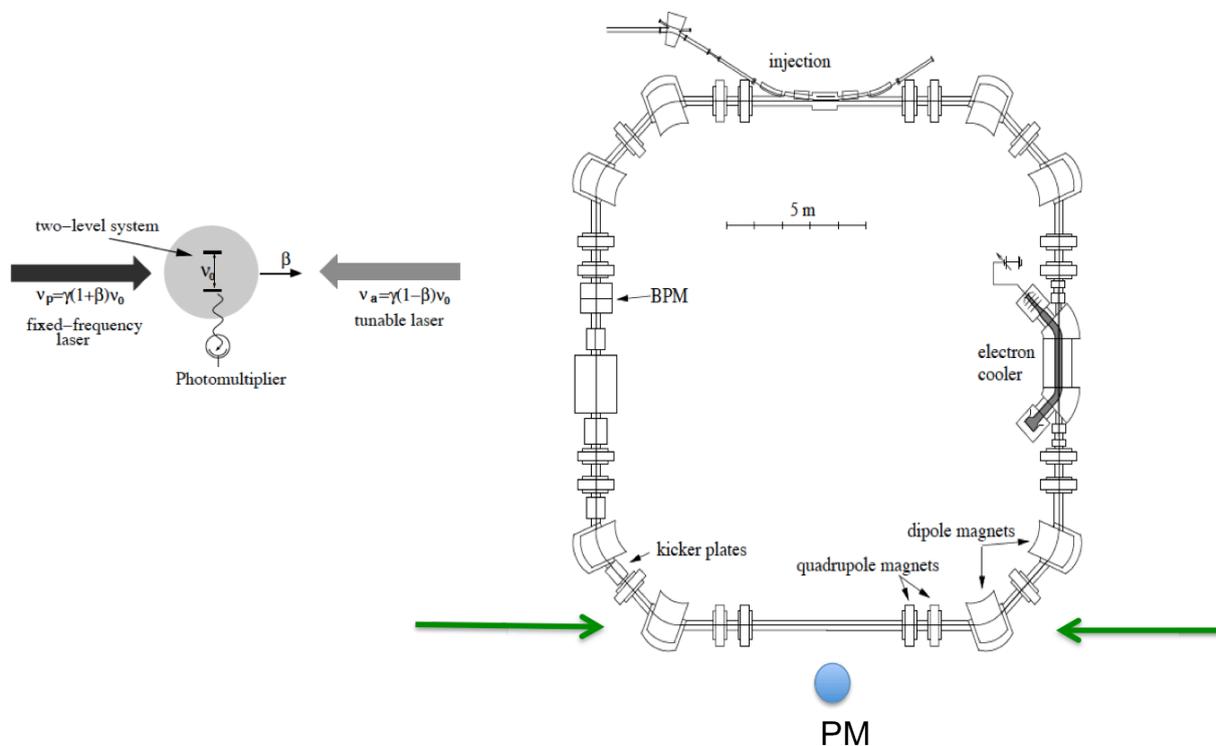


Figura 3.5: Schema della misura del Doppler trasverso con il metodo della fluorescenza in risonanza

L'esperimento citato è stato condotto ad Heidelberg, presso il Tandem Van der Graaff. Si sono usati ioni di  ${}^7\text{Li}^+$ , accelerati a una energia di  $13.3\text{ MeV}$  a cui corrisponde una velocità pari a  $\beta = 0.064$ . Al momento dello *stripping* dell'elettrone di valenza, circa il 10% degli ioni finisce sul livello di tripletto  $2s\ {}^3S_{J=1}$  che è metastabile con vita media  $\tau = 50\text{ s}$ . L'esperimento sfrutta la transizione di dipolo elettrico allo stato  $2p\ {}^3P_{J=2}$  che richiede radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 548,5\text{ nm}$ . La frequenza variabile  $\nu_1$  era centrata a  $514\text{ nm}$  mentre quella fissa  $\nu_2$  era di  $585\text{ nm}$ .

Un altro modo storicamente importante per misurare il Doppler trasverso fu certamente quello basato sull'effetto Mössbauer, con cui fu raggiunta, a suo tempo, una precisione di circa l'1%.

Prima di vedere come questa fu realizzata, vediamo brevemente in che cosa consiste l'effetto Mössbauer stesso<sup>15</sup>.

Quando un  $\gamma$  viene emesso da un nucleo isolato, il nucleo rincula e l'energia del  $\gamma$  emesso è ridotta della quantità pari all'energia di rinculo del nucleo.

Se il nucleo di massa  $M$  è inizialmente a riposo, la sua velocità  $\vec{v}$  dopo l'emissione del  $\gamma$  nella direzione  $\vec{n}$ , sarà tale che

$$M \vec{v} + \frac{h\nu}{c} \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{h\nu}{Mc} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{h\nu}{Mc^2} \quad (3.5.57)$$

e dunque il nucleo avrà acquistato una energia cinetica<sup>16</sup>  $E_{rinc}$  pari<sup>17</sup> a

$$E_{rinc} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M c^2 \beta^2 = \frac{1}{2} h\nu \beta \quad (3.5.58)$$

a spese dell'energia di transizione fra i due livelli nucleari coinvolti.

Ne segue dunque che il fotone subirà un red-shift pari a

$$\Delta\nu = \frac{E_{rinc}}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2} \beta \quad (3.5.59)$$

Vediamo adesso qualche numero. Consideriamo il caso del  $^{57}\text{Fe}$ , che si forma dal  $^{57}\text{Co}$  per cattura elettronica (vita media circa 270 giorni). Esso si origina nello stato  $\frac{5}{2}^-$  e, nel 91% dei casi, decade sul livello  $\frac{3}{2}^-$  emettendo un gamma da 122 keV e quindi, con una vita media di circa  $10^{-7} s$ , decade sullo stato fondamentale  $\frac{1}{2}^-$  emettendo un  $\gamma$  da 14.38 keV.

Siamo interessati a quest'ultima transizione. Usando la (3.5.57) e sostituendo nella (3.5.59), si ha che

$$\beta = \frac{h\nu}{Mc^2} \approx 2.7 \cdot 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\Delta\nu}{\nu} \right|_{rinc} \approx 1.4 \cdot 10^{-7} \quad (3.5.60)$$

essendo l'energia di rinculo pari a

$$E_{rinc} = \frac{1}{2} (1.438 \times 10^4) \times 2.7 \cdot 10^{-7} = 1.94 \text{ meV} \quad (3.5.61)$$

Siccome, come abbiamo detto, la vita media  $\tau$  della transizione è circa  $10^{-7} s$ , ne segue che la larghezza naturale della riga vale ( $\hbar = 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$ )

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.582 \cdot 10^{-19}}{10^{-7}} \approx 6.6 \cdot 10^{-12} \text{ keV} \quad (3.5.62)$$

<sup>15</sup>R. Mössbauer: Zeit. fur Physik 151, 124 (1958)

<sup>16</sup>Perchè usiamo la meccanica non relativistica per descrivere il moto del nucleo ?

<sup>17</sup>Un altro modo per scrivere l'energia di rinculo fa uso direttamente dell'impulso  $p = E/c$  acquistato dal nucleo stesso (con  $E$  stiamo indicando l'energia del fotone emesso), per cui si ha (c=1)  $E_{rinc} = p^2/2M = E^2/2M$ .

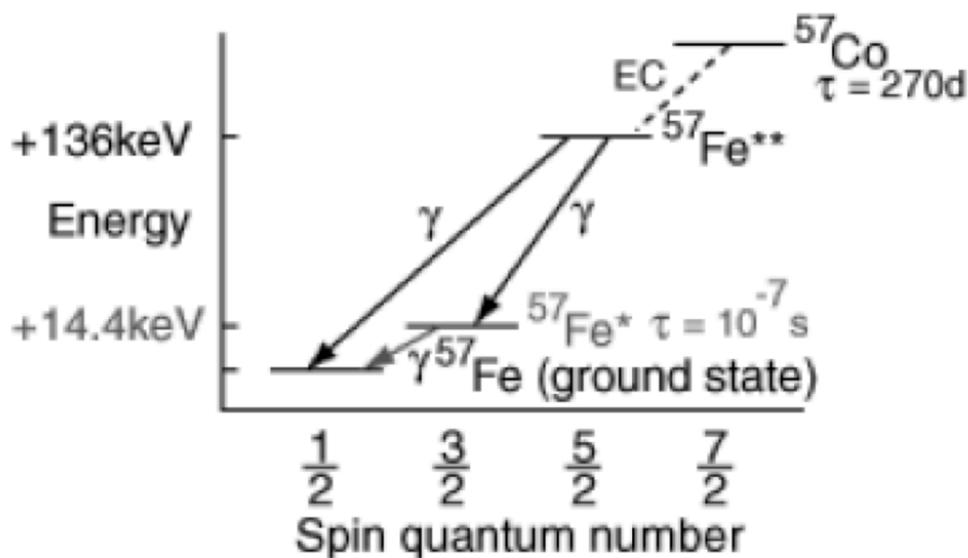


Figura 3.6: Schema del decadimento Mössbauer del  $^{57}\text{Fe}$

ovvero

$$\left. \frac{\Delta\nu}{\nu} \right|_{nat} = \frac{\Gamma}{h\nu} = \frac{6.6 \cdot 10^{-12}}{14.38} = 0.46 \cdot 10^{-12} \quad (3.5.63)$$

di gran lunga inferiore allo spostamento dovuto al rinculo !!

La conseguenza è che, nel caso considerato, cioè nel caso di nucleo libero e inizialmente fermo, lo shift dovuto al rinculo nucleare rende impossibile per ragioni energetiche, il riassorbimento<sup>18</sup> risonante della radiazione così emessa.

Nella pratica, però, i nuclei non saranno fermi a causa dell'agitazione termica, la quale, almeno nel caso di nuclei liberi, via appunto l'effetto Doppler, determina un allargamento della riga che, detta  $M$  la massa del nucleo di Ferro, vale<sup>19</sup>

$$\left. \frac{\Delta\nu}{\nu} \right|_{therm} = \sqrt{\frac{kT}{Mc^2}} \approx \sqrt{\frac{26 \text{ meV}}{53 \text{ GeV}}} \approx 0.7 \cdot 10^{-6} \quad (3.5.64)$$

la quale è ben maggiore dello shift (3.5.60) e quindi è ampiamente in grado di ripristinare, a temperatura ambiente, il fenomeno dell'assorbimento risonante.

<sup>18</sup>Si noti che, al momento del riassorbimento da nucleo fermo, accade qualcosa di molto simile: il fotone deve possedere un'energia maggiore di quella strettamente necessaria per la transizione, in modo da "pagare" anche per l'energia cinetica che il nucleo possederà dopo il riassorbimento, a causa della conservazione del moto del centro di massa.

<sup>19</sup>Confronta con la (3.4.48).

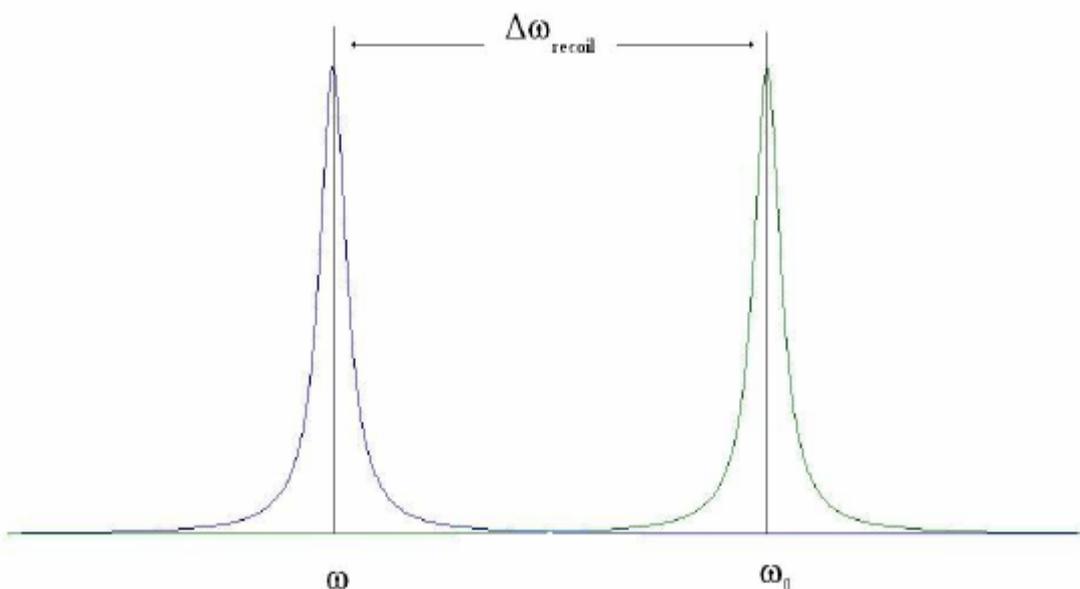


Figura 3.7: Confronto fra la larghezza naturale di riga e lo shift dovuto al rinculo nucleare: senza rinculo la riga sarebbe centrata intorno a  $\omega_0$ , ma a causa di questo essa si sposta di  $-\Delta\omega_{rec}$ , intorno a  $\omega$ .

nante, che dovrebbe però scomparire man mano che la temperatura viene fatta scendere.

Rudolf Mössbauer stava studiando lo scattering risonante di  $\gamma$  da  $129\text{ keV}$  su  $^{191}\text{Ir}$  e per ridurre la risonanza di fluorescenza, provò proprio ad abbassare la temperatura, con il risultato di veder aumentare l'effetto !

La spiegazione classica del fenomeno è la seguente<sup>20</sup>.

Immaginiamo di avere un nucleo che, a riposo nell'origine, emette un'onda elettromagnetica di pulsazione  $\omega_0$ . Descriveremo allora la sua propagazione lungo l'asse  $z$  attraverso un potenziale vettore

$$\vec{A}(t) = \vec{A}_0 e^{i\phi(t)}, \quad \text{con} \quad \phi(t) = \int^t \omega_0 dt' = \omega_0 t \quad (3.5.65)$$

essendo  $\vec{A}_0$  nel piano  $x, y$ .

Supponiamo ora che il nucleo si muova di moto oscillatorio con pulsazione  $\Omega$  lungo l'asse  $z$  attorno alla sua posizione di equilibrio, ovvero che la sua

<sup>20</sup>F.L. Shapiro: *The Mössbauer effect*; Sov. Phys. Uspekhi 4, 881 (1961)

posizione sia data da

$$z(t) = z_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (3.5.66)$$

A causa dell'effetto Doppler, al primo ordine in  $v/c$ , abbiamo che

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{z_0 \Omega}{c} \cos(\Omega t + \phi) \right) \quad (3.5.67)$$

e dunque la fase dell'onda sarà adesso data da

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \omega_0 t + \omega_0 \frac{z_0 \Omega}{c} \int^t \cos(\Omega t' + \phi) = \omega_0 t + \frac{2\pi}{\lambda} z_0 \sin(\Omega t + \phi) = \\ &= \omega_0 t + \frac{z_0}{\lambda} \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

Nel caso più realistico in cui le frequenze di oscillazione siano molteplici, in generale risulterà

$$\phi(t) = \omega_0 t + \sum_m \frac{z_m}{\lambda} \sin(\Omega_m t + \phi_m) \quad (3.5.69)$$

e dunque

$$\vec{A}(t) = \vec{A}_0 e^{i\omega_0 t} \prod_m e^{i \frac{z_m}{\lambda} \sin(\Omega_m t + \phi_m)} \quad (3.5.70)$$

Ma, in termini delle funzioni di Bessel, sappiamo che risulta

$$e^{i z \sin \theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\theta} \quad (3.5.71)$$

per cui possiamo scrivere

$$\vec{A}(t) = \vec{A}_0 e^{i\omega_0 t} \prod_m \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n \left( \frac{z_m}{\lambda} \right) \cdot e^{in(\Omega_m t + \phi_m)} \quad (3.5.72)$$

Se  $\Omega$  fosse unica, la radiazione emessa non sarebbe più monocromatica ma, oltre ad  $\omega_0$ , sarebbero presenti tutte le pulsazioni (con ampiezza via via decrescente<sup>21</sup>) che distano da  $\omega_0$  di un multiplo intero di  $\Omega$ .

Se, invece, come accade in un solido, le frequenze proprie del nucleo sono molte, allora ne risulterà una distribuzione pressoché continua di frequenze intorno a  $\omega_0$  la quale riproduce, in buona sostanza, l'allargamento Doppler. C'è però adesso una novità importante: tutte le serie generate dalle varie

<sup>21</sup>Si ricordi che, per  $0 < z < 1$ , rispetto all'indice  $n$ , risulta che  $J_n(z) \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ .

$\Omega_m$  possiedono comunque il termine alla pulsazione  $\omega_0$ , il cui peso relativo complessivo nell'intensità emessa è dunque dato da

$$f = \prod_m J_0^2 \left( \frac{z_m}{\lambda} \right) \quad (3.5.73)$$

La quantità  $f$  misura dunque la frazione relativa di intensità emessa alla frequenza fondamentale  $\omega_0$ , ovvero proprio la frazione relativa di radiazione Mössbauer emessa dal nucleo.

Se, per ogni modo di oscillazione del nucleo possiamo ragionevolmente assumere che sia  $z_m \ll \lambda$ , allora essendo

$$J_0 \approx 1 - \frac{z_m^2}{4 \lambda^2} \quad \rightarrow \quad J_0^2 \approx 1 - \frac{z_m^2}{2 \lambda^2} \quad (3.5.74)$$

e quindi

$$\ln f \approx -\frac{1}{2 \lambda^2} \sum_m z_m^2 \equiv -\frac{\langle z^2 \rangle}{\lambda^2} \quad (3.5.75)$$

ne risulta infine che

$$f \approx e^{-\frac{\langle z^2 \rangle}{\lambda^2}} \quad (3.5.76)$$

dove abbiamo indicato con  $\langle z^2 \rangle$  lo scarto quadratico medio della posizione del nucleo rispetto a quella di equilibrio nella direzione di emissione del fotone.

L'interpretazione fisica del risultato così ottenuto è abbastanza semplice: per ipotesi, il nucleo sta emettendo un'onda continua da una regione di dimensioni  $\sqrt{\langle z^2 \rangle}$ : solo se questa dimensione è più piccola della lunghezza d'onda (ridotta) ci potrà essere interferenza costruttiva sulla frequenza fondamentale ...

La spiegazione che fa uso, invece, della Meccanica Quantistica, è quella di H.J. Lipkin (*Some simple features of the Mössbauer effect*), Ann. of Phys. 9, 332 (1960)), che riportiamo qui di seguito.

Iniziamo considerando l'emissione di un fotone da un nucleo libero.

Questo processo sarà descritto dall'elemento di matrice  $\mathcal{M}$  di un opportuno operatore  $A$  fra lo stato iniziale  $|i\rangle$  e quello finale  $|f\rangle$  del nucleo, cioè

$$\mathcal{M} = \langle f | A(\vec{x}_j, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j) | i \rangle \quad (3.5.77)$$

e l'operatore  $A$  dipenderà dalle coordinate, impulsi e spin dei componenti il nucleo stesso, il cui moto viene trattato sia prima che dopo l'emissione come non relativistico.

L'invarianza (galileiana) per cambiamento di sistema di riferimento inerziale garantisce che gli impulsi  $\vec{p}_j$  possono essere semplicemente quelli relativi

ai componenti nucleari visti nel sistema del nucleo a riposo ( $CM$ ). Se indichiamo ora con  $\vec{x}$  le coordinate baricentriche e con  $q_k$  quelle relative (inclusi i momenti nel sistema del  $CM$  e le variabili di spin) ecco che la dipendenza di  $A$  da  $\vec{x}$  risulta completamente determinata dall'invarianza per traslazioni del processo: accade infatti che, indicando con  $U(\vec{a})$  l'operatore di traslazione spaziale ( $\hbar = c = 1$ )

$$U(\vec{a}) \equiv e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}} \quad (3.5.78)$$

si ha

$$U^{-1}(\vec{a}) A(\vec{x}_j, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j) U(\vec{a}) = A(\vec{x}_j - \vec{a}, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j) \quad (3.5.79)$$

e dunque, facendo  $\vec{a} = \vec{x}$ , abbiamo che

$$A(\vec{x}_j, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j) = U(\vec{x}) \tilde{A}(q_k) U^{-1}(\vec{x}) \quad (3.5.80)$$

Ma, per la conservazione dell'impulso spaziale, lo stato  $|f\rangle$  deve evidentemente possedere un impulso pari a  $\vec{p} - E\vec{n}$ , dove  $\vec{p}$  è l'impulso dello stato iniziale  $|i\rangle$ , mentre  $E$  è l'energia del fotone emesso e  $\vec{n}$  la sua direzione e verso. Dunque

$$\begin{aligned} \langle f| A(\vec{x}_j, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j) |i\rangle &= e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-E\vec{n})} \langle f| \tilde{A}(q_k) |i\rangle e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \\ &= e^{iE\vec{x}\cdot\vec{n}} \langle f| \tilde{A}(q_k) |i\rangle \end{aligned} \quad (3.5.81)$$

e quindi, in termini operatoriali

$$A(\vec{x}_j, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j) = e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} \tilde{A}(q_k) \quad (3.5.82)$$

dove  $\vec{X}$  è l'operatore associato alla coordinata baricentrica del nucleo in questione.

Veniamo adesso al caso dell'emissione del fotone da un nucleo legato in un reticolo. Le forze reticolari non sono in grado di mutare l'interazione all'interno del nucleo che ne determina il decadimento, ovvero l'operatore  $\tilde{A}$  non cambia rispetto al caso libero. Occorre però, adesso, tenere conto anche dello stato del reticolo sia prima che dopo il decadimento, definito in termini di fononi presenti. Abbiamo dunque che

$$|i\rangle \rightarrow |i\rangle |n_i\rangle; \quad \langle f| \rightarrow \langle f| \langle n_f| \quad (3.5.83)$$

dove  $|n_i\rangle$  ed  $|n_f\rangle$  sono gli stati fononici che descrivono appunto lo stato del reticolo e, in particolare, le coordinate baricentriche del nucleo. Avremo allora, riguardo all'ampiezza di transizione, che potremo fattorizzarla nel modo che segue

$$\mathcal{M} = \langle n_f| e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} |n_i\rangle \langle f| \tilde{A} |i\rangle \quad (3.5.84)$$

dove il termine  $\langle f | \tilde{A} | i \rangle$  riguarda solo il nucleo, mentre l'altro termine ha a che fare unicamente con il reticolo.

La probabilità di transizione è proporzionale al modulo quadro di  $\mathcal{M}$ : evidentemente, quanto agli stati fononici, si ha allora che la probabilità di transizione  $P(n_f, n_i)$  da  $|n_i\rangle$  a  $|n_f\rangle$  risulta data da

$$P(n_f, n_i) = \left| \langle n_f | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle \right|^2 \quad (3.5.85)$$

A questo punto, per poter procedere oltre occorrerebbe far uso delle espressioni esplicite degli stati del cristallo.

Si può comunque ottenere ugualmente un risultato interessante mediante una *regola di somma* ovvero una proprietà integrale che il sistema possiede, a prescindere dai dettagli specifici.

Partiamo per questo dall'osservazione che l'hamiltoniana  $H$  che descrive il reticolo sarà fatta da termini di natura potenziale e cinetici: il solo termine che non commuta (se  $H$  e  $\vec{X}$  commutassero allora, data la (3.5.85),  $P(n_f, n_i)$  sarebbe nullo fra stati non degeneri e dunque non sarebbe possibile cedere energia al reticolo ...) con l'osservabile  $\vec{X}$  di cui sopra è naturalmente il termine cinetico del nucleo considerato, cioè  $\frac{1}{2M}|\vec{P}|^2$ , per cui risulta ( $\hbar = c = 1$ )

$$[H, \vec{X}] = -\frac{i}{M}\vec{P} \quad (3.5.86)$$

D'altronde, dati due generici operatori  $A$  e  $B$  tali che il loro commutatore  $[A, B] = c$  sia semplicemente un numero complesso, allora se  $\alpha$  è anch'esso un numero complesso qualsiasi, si ha che<sup>22</sup>

$$[A, e^{\alpha B}] = \alpha [A, B] e^{\alpha B} = \alpha c e^{\alpha B} \quad (3.5.89)$$

<sup>22</sup>Verifichiamo la (3.5.89). Abbiamo

$$\begin{aligned} [A, B] &= c \\ [A, B^2] &= B[A, B] + [A, B]B = 2cB \\ [A, B^3] &= B[A, B^2] + [A, B]B^2 = 2cB^2 + cB^2 = 3cB^2 \\ [A, B^4] &= B[A, B^3] + [A, B]B^3 = 3cB^3 + cB^3 = 4cB^3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.5.87)$$

dunque

$$\begin{aligned} [A, e^{\alpha B}] &= \left[ A, I + \alpha B + \frac{(\alpha B)^2}{2!} + \frac{(\alpha B)^3}{3!} + \frac{(\alpha B)^4}{4!} + \dots \right] = \\ &= \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, B^2] + \frac{\alpha^3}{3!} [A, B^3] + \frac{\alpha^4}{4!} [A, B^4] + \dots = \\ &= \alpha c + \frac{\alpha^2}{2!} 2cB + \frac{\alpha^3}{3!} 3cB^2 + \frac{\alpha^4}{4!} 4cB^3 + \dots = \\ &= \alpha c + \alpha c \frac{(\alpha B)}{1!} + \alpha c \frac{(\alpha B)^2}{2!} + \alpha c \frac{(\alpha B)^3}{3!} + \dots = \alpha c e^{\alpha B} \end{aligned} \quad (3.5.88)$$

da cui si ricava che

$$\begin{aligned} [A^2, e^{\alpha B}] &= A [A, e^{\alpha B}] + [A, e^{\alpha B}] A = \alpha c A e^{\alpha B} + \alpha c e^{\alpha B} A = \\ &= \alpha c [A, e^{\alpha B}] + 2\alpha c e^{\alpha B} A = (\alpha c)^2 e^{\alpha B} + 2\alpha c e^{\alpha B} A \quad (3.5.90) \end{aligned}$$

da cui segue segue che

$$\begin{aligned} [[A^2, e^{\alpha B}], e^{-\alpha B}] &= [2\alpha c e^{\alpha B} A, e^{-\alpha B}] = 2\alpha c e^{\alpha B} [A, e^{-\alpha B}] = \\ &= -(2\alpha c)^2 e^{\alpha B} e^{-\alpha B} = -(2\alpha c)^2 \quad (3.5.91) \end{aligned}$$

Applichiamo quanto ottenuto sopra al caso in cui  $A$  e  $B$  siano rispettivamente le componenti omologhe dell'impulso e delle coordinate baricentriche del nucleo: risulta

$$(c = -i, \alpha = iEn_k \Rightarrow \alpha c = En_k)$$

$$\sum_k [[P_k P_k, e^{iEn_k X_k}], e^{-iEn_k X_k}] = -2 \sum_k (En_k)(En_k) = -2E^2 \quad (3.5.92)$$

e dunque, quanto all'hamiltoniana  $H$  del reticolo, per quanto detto sopra si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{2E^2}{2M} &= [[H, e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}}], e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}}] = [H e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} - e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} H, e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}}] = \\ &= 2H - e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} H e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} - e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} H e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} \quad (3.5.93) \end{aligned}$$

Prendendo il valor medio di questo operatore sullo stato reticolare (normalizzato)  $|n_i\rangle$ , si ha

$$\begin{aligned} -\frac{E^2}{M} &= 2E_i - \langle n_i | e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} H e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle - \langle n_i | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} H e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle = \\ &= 2E_i - \sum_f \langle n_i | e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle \langle n_f | H e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle - \\ &- \sum_f \langle n_i | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle \langle n_f | H e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle \quad (3.5.94) \end{aligned}$$

essendo  $\sum_f |n_f\rangle\langle n_f|$  una decomposizione dell'identità. Risulta quindi

$$\begin{aligned} -\frac{E^2}{M} &= 2E_i - \sum_f \langle n_i | e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle E_f \langle n_f | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle \\ &- \sum_f \langle n_i | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle E_f \langle n_f | e^{-iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_i \rangle = \\ &= 2E_i - 2 \sum_f \left| \langle n_i | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle \right|^2 \quad (3.5.95) \end{aligned}$$

Ma abbiamo già visto che la probabilità di transizione dallo stato fononico  $|n_i\rangle$  allo stato  $|n_f\rangle$  è proprio data dalla quantità  $\left| \langle n_i | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle \right|^2$  che, quindi, soddisfa la condizione per cui  $\sum_f \left| \langle n_i | e^{iE\vec{n}\cdot\vec{X}} | n_f \rangle \right|^2 = 1$ . Sostituendo, abbiamo dunque

$$\begin{aligned} -\frac{E^2}{M} &= 2E_i - 2 \sum_f P(n_f, n_i) E_f = 2E_i \sum_f P(n_f, n_i) - 2 \sum_f P(n_f, n_i) E_f = \\ &= 2 \sum_f (E_i - E_f) P(n_f, n_i) \Rightarrow \sum_f (E_f - E_i) P(n_f, n_i) = \\ &= \frac{E^2}{M} \equiv E_{rinc} \end{aligned} \quad (3.5.96)$$

La regola di somma trovata dice che l'energia media trasferita dal nucleo al reticolo è proprio quella di rinculo libero  $E_{rinc}$ . Evidentemente, allora, se esistono probabilità importanti per transizioni reticolari con  $\Delta E > E_{rinc}$ , per poter soddisfare la (3.5.96) occorre che ci sia anche una sensibile probabilità che avvengano transizioni senza scambio di energia con il reticolo, ovvero emissione Mössbauer. Se consideriamo, per esempio, il caso in cui il nucleo possa scambiare con il reticolo solo, per esempio, energie maggiori di un  $E_{min}$  maggiore di  $E_{rinc}$ , ecco che, dalla regola di somma, si ricava che

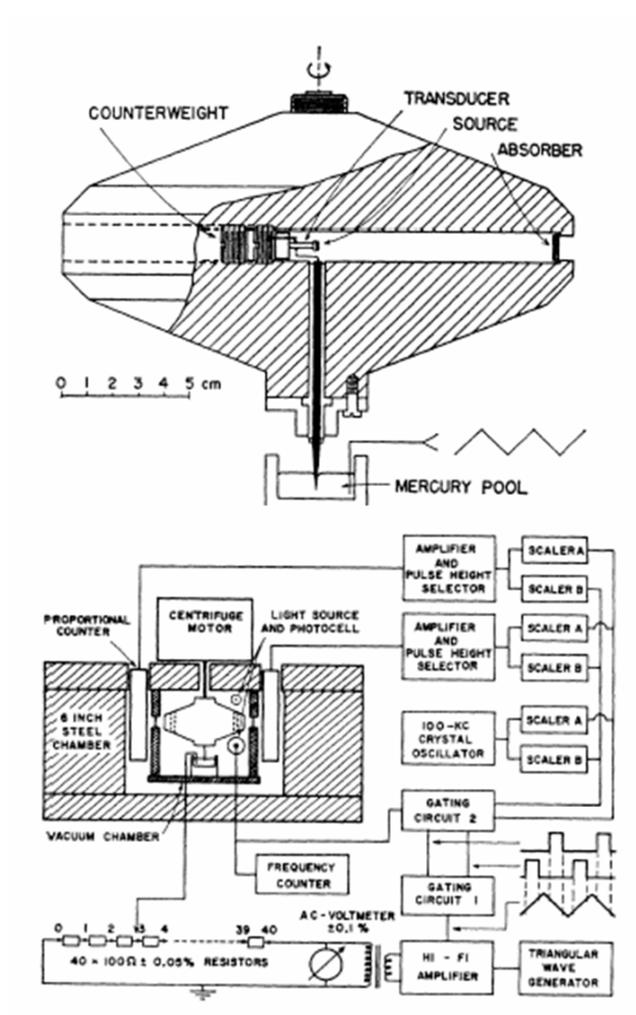
$$\begin{aligned} E_{rinc} &= \sum_f (E_f - E_i) P(n_f, n_i) = \sum_{f \neq i} (E_f - E_i) P(n_f, n_i) > E_{min} \sum_{f \neq i} P(n_f, n_i) > \\ &> E_{rinc} \sum_{f \neq i} P(n_f, n_i) = E_{rinc} (1 - P(n_i, n_i)) \Rightarrow P(n_i, n_i) > 0 \end{aligned} \quad (3.5.97)$$

Vediamo adesso come l'effetto Mössbauer fu usato per la verifica del Doppler trasverso.

L'esperimento a cui ci riferiamo è quello di Kundig<sup>23</sup>, che era così congegnato.

Al centro del rotore di una ultracentrifuga era disposta la sorgente di  $^{57}\text{Co}$  e quindi di fotoni da  $14.38 \text{ MeV}$  del  $^{57}\text{Fe}$ , che, per quanto visto sopra, si origina da esso. Il rotore era forato lungo il diametro e, a una estremità ( $R = 9.3 \text{ cm}$ ), era posto l'assorbitore, fatto da una lamina da  $6 \mu\text{m}$  arricchita al 91% di  $^{57}\text{Fe}$ , opportunamente supportata. Il sistema di rivelazione era poi costituito da contatori proporzionali al Krypton, in grado di rivelare i gamma per effetto fotoelettrico. La sorgente era posta su un trasduttore ferroelettrico a cui veniva applicata una tensione triangolare di ampiezza variabile, attraverso un collegamento elettrico mantenuto con l'aiuto di un

<sup>23</sup>W. Kundig: *Measurement of the transverse Doppler effect in an accelerated system* Phys. Rev. 129, 2371 (1963)

Figura 3.8: *Esperimento di Kundig*

contatto rotante in una bacinella di mercurio.

Il rotore era poi condotto in rotazione da un motore di ultracentrifuga, la cui velocità poteva essere regolata manualmente entro lo 0.1% e veniva misurata attraverso una fotocella che apriva e chiudeva anche le scale di conteggio in modo che esse contassero solo quando c'era allineamento fra sorgente, assorbitore e rivelatore.

Il numero di conteggi, normalizzato al suo valore asintotico, è dato dalla relazione

$$n(E) = 1 - \frac{F}{1 + \left(\frac{E-E_0}{\Gamma}\right)^2} \quad (3.5.98)$$

dove  $F$  è la profondità della riga di assorbimento, mentre  $\Gamma$  è la sua larghezza.

Per una fissata velocità angolare  $\omega$  dell'ultracentrifuga, attraverso la sweep applicata alla sorgente, veniva ricostruita la curva di assorbimento e si osservò che la posizione di massimo assorbimento così determinata dipendeva da  $\omega^2$ .

Più precisamente fu verificato, con la precisione di circa l'1.1%, che il massimo si otteneva quando la velocità  $v$  della sorgente (nel verso opposto all'assorbitore) era pari a

$$v = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{c} \quad (3.5.99)$$

in perfetto accordo con quanto atteso.

Nel sistema di riferimento dell'assorbitore, infatti, affinché possa esserci assorbimento Mössbauer, la frequenza del fotone deve essere proprio uguale a  $\nu_0$  e dunque occorre che, nel riferimento del laboratorio, essa valga

$$\nu_{lab} = \frac{\nu_0}{\gamma} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \quad (3.5.100)$$

dove  $\beta = \frac{\omega R}{c}$ , essendo  $\omega$  la velocità angolare dell'ultracentrifuga.

Questo può essere realizzato nel sistema del laboratorio usando l'effetto Doppler longitudinale e facendo allontanare la sorgente di radiazione Mössbauer dal suo assorbitore. Si ha allora che

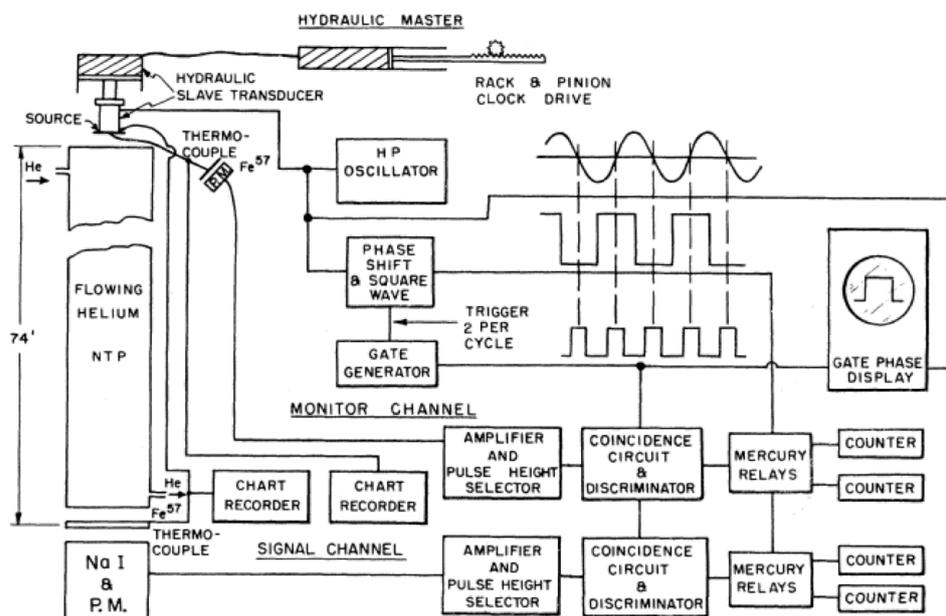
$$\nu_{lab} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu_0 \quad (3.5.101)$$

per cui ne segue che il massimo dell'assorbimento verrà ottenuto proprio quando<sup>24</sup>

$$\frac{v}{c} = \frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \Rightarrow v = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{c} \quad (3.5.102)$$

---

<sup>24</sup>Vale la pena farsi un'idea degli ordini di grandezza in gioco. L'ultracentrifuga permetteva di raggiungere velocità angolari fino a circa 30000 giri/minuto, per cui la velocità massima dell'assorbitore, posto a 9.3 cm dall'asse di rotazione, era  $\omega R \approx 300$  m/s da cui, per la (3.5.99), otteniamo una velocità della sorgente tale da compensare con il suo Doppler lineare il Doppler trasverso dell'assorbitore, pari a  $v \approx 0.15$  mm/s !

Figura 3.9: *Esperimento di Pound e Rebka*

Prima di lasciare l'argomento, ricordiamo infine che, utilizzando lo stesso principio di misura, Pound e Rebka<sup>25</sup> poterono verificare, con la precisione dell'10%, il red shift gravitazionale dei fotoni, nel campo della Terra, su una distanza (altezza) di circa 25 m. La teoria della relatività generale prevede che un fotone, spostandosi in vuoto in un campo gravitazionale di potenziale  $\phi$ , subisca uno shift in frequenza pari a

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\phi}{c^2} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{g\Delta h}{c^2} \quad (3.5.103)$$

dove il secondo termine rappresenta lo shift nel campo gravitazionale sulla Terra, che su un'altezza di 25 m vale  $2.7 \times 10^{-15}$ .

Pound e Rebka operarono confrontando la posizione del centro dell'assorbimento, determinato ancora attraverso l'effetto Doppler longitudinale ( $v_{Doppler} = 0.8 \mu\text{m/s}$ ) quando l'assorbitore si trovava in alto e quando si trovava in basso.

<sup>25</sup>R.V. Pound, G.A. Rebka: *Apparent weight of photons*  
Phys. Rev. Lett. 4, 337 (1960)

### 3.6 Riflessione da un piano in moto

Sia data, nel sistema di riferimento  $RS$  del laboratorio, una particella di massa  $m$  e quadrimpulso  $p_{in}^\mu = (p^0, 0, p \sin \theta, p \cos \theta)$ , e indichiamo con  $\beta_0 = \frac{p}{p^0}$  il modulo della sua velocità in  $RS$ . Supponiamo che  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ovvero che  $\cos \theta > 0$  e che essa urti elasticamente il piano di equazione  $z = 0$ , che assumeremo *liscio*, cioè in grado di esercitare solo reazioni ortogonali al piano stesso. Essa rimbalzerà indietro con quadrimpulso

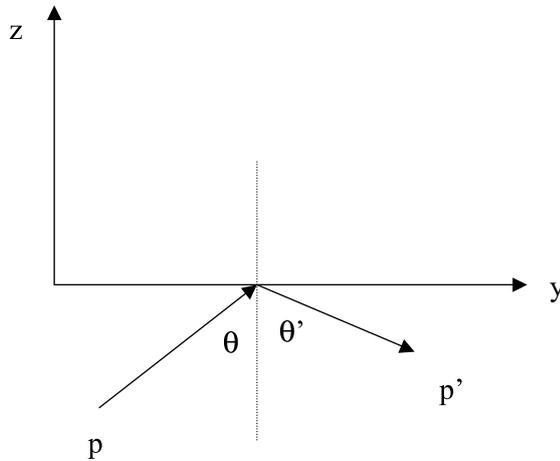


Figura 3.10: Riflessione di una particella da un piano.

$p_{out}^\mu = (p^0, 0, p \sin \theta, -p \cos \theta)$  e quindi l'impulso ceduto al piano sarà pari a

$$\Delta p_z = 2p \cos \theta > 0$$

Ma che succede se il piano in questione si muove con velocità  $(0, 0, \beta)$  ?

Per vederlo, operiamo dal riferimento  $RS'$  in cui il piano è in quiete.

In questo, per quanto già visto, il quadrimpulso prima dell'urto risulta dato da

$$p'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ 0 \\ p \sin \theta \\ p \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma p^0 - \beta\gamma p \cos \theta \\ 0 \\ p \sin \theta \\ \gamma p \cos \theta - \beta\gamma p^0 \end{pmatrix} \quad (3.6.104)$$

Intanto, affinché il processo d'urto possa avvenire, è necessario evidentemente che  $p'_z > 0$ , ovvero che in  $RS'$  la particella si muova inizialmente verso il piano. Abbiamo quindi da soddisfare la condizione preliminare

$$\gamma p \cos \theta - \beta\gamma p^0 > 0 \Rightarrow p \cos \theta > \beta p^0 \Rightarrow \beta < \frac{p \cos \theta}{p^0} \equiv \beta_{0z} \quad (3.6.105)$$

cioè è necessario<sup>26</sup> che  $\beta < \beta_z$  (ovvio!).

Risulterà più comodo, nel seguito, invece che descrivere il boost di Lorentz in termini delle variabili  $\beta$  e  $\gamma$  di cui sopra, farlo in termini delle funzioni iperboliche (cfr. eq.(3.1.9)) e quindi della rapidità. Risulta

$$\gamma = \cosh \alpha, \quad \beta\gamma = \sinh \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = \tanh \alpha \quad (3.6.106)$$

per cui la condizione (3.6.105) diventa

$$p^0 \tanh \alpha < p \cos \theta \quad (3.6.107)$$

Avvenuta la riflessione, in  $RS'$  la terza componente spaziale del quadrimpulso  $p'^\mu$  della particella cambierà naturalmente di segno. Per conoscere allora il quadrimpulso  $p''^\mu$  della stessa in  $RS$ , basterà applicare il boost inverso, cioè quello in cui  $\beta \rightarrow -\beta$ . Avremo quindi

$$\begin{aligned} p''^\mu &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma p^0 - \beta\gamma p \cos \theta \\ 0 \\ p \sin \theta \\ -\gamma p \cos \theta + \beta\gamma p^0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1 + \beta^2)p^0 - 2\beta\gamma^2 p \cos \theta \\ 0 \\ p \sin \theta \\ 2\beta\gamma^2 p^0 - \gamma^2(1 + \beta^2)p \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.6.108) \end{aligned}$$

Ma, in termini delle funzioni iperboliche e della rapidità  $\alpha$  risulta

$$\begin{aligned} \gamma^2(1 + \beta^2) &= \cosh^2 \alpha(1 + \tanh^2 \alpha) = \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha = \cosh 2\alpha \\ 2\beta\gamma^2 &= 2 \tanh \alpha \cosh^2 \alpha = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha = \sinh 2\alpha \end{aligned}$$

per cui, in termini di  $\alpha$ , il quadrimpulso in  $RS$  della particella dopo che ha subito la riflessione dal piano in moto è dato da

$$p''^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \cosh 2\alpha - p \cos \theta \sinh 2\alpha \\ 0 \\ p \sin \theta \\ p^0 \sinh 2\alpha - p \cos \theta \cosh 2\alpha \end{pmatrix} \quad (3.6.109)$$

Osserviamo immediatamente che, se  $\beta > 0$  e quindi anche  $\alpha > 0$ , l'energia in  $RS$  della particella dopo la riflessione è inferiore a quella che essa aveva precedentemente, infatti risulta

$$\begin{aligned} p''^0 &= p^0 \cosh 2\alpha - p \cos \theta \sinh 2\alpha < p^0 \cosh 2\alpha < p^0 \iff \\ \iff &p^0 \cosh 2\alpha - p^0 < p \cos \theta \sinh 2\alpha \end{aligned}$$

<sup>26</sup>Si noti che se lo specchio si muove come la particella, questa condizione richiede a maggior ragione che  $\cos \theta > 0$ . In questa ipotesi essa è automaticamente soddisfatta se lo specchio si muove, invece, *incontro* alla particella, perchè, in quel caso,  $\beta$  è negativo ...

Questo accade perchè

$$p^0 \cosh 2\alpha - p^0 = p^0 (\cosh 2\alpha - 1) = p^0 (\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha - \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha) = 2p^0 \sinh^2 \alpha$$

e usando la condizione di "riflessione" (3.6.107), ovvero

$$p^0 \tanh \alpha < p \cos \theta \Rightarrow p^0 \sinh \alpha < p \cos \theta \cosh \alpha$$

si ha appunto ( $\sinh \alpha > 0$  essendo per ipotesi  $\beta > 0 \dots$ )

$$p^0 \cosh 2\alpha - p^0 = 2p^0 \sinh^2 \alpha < 2p \cos \theta \cosh \alpha \sinh \alpha = p \cos \theta \sinh 2\alpha$$

Per renderci conto di questo risultato da un punto di vista fisico, osserviamo che per il tempo in cui è avvenuto il processo di riflessione, ci sarà stata una forza  $F(t)$  applicata al piano, nel verso del suo moto, tale che

$$\int F(t) dt = \Delta p_z$$

Ma siccome il piano è in moto, questa forza ha compiuto un lavoro sul piano stesso, pari a<sup>27</sup>

$$\Delta L = \int F(t) \beta dt = \beta \Delta p_z \quad (3.6.111)$$

che, nel limite non relativistico, vale  $\Delta L = 2\beta p \cos \theta$ . In ogni caso, il lavoro  $\Delta L$  dovrà essere avvenuto, naturalmente, a spese dell'energia della particella. D'altronde, da quanto precede e dalla (3.6.110), risulta che la particella ha perduto una quantità di energia  $\Delta E$  pari a

$$\begin{aligned} \Delta E &= p^0 - p''^0 = p^0 - p^0 \cosh 2\alpha + p \cos \theta \sinh 2\alpha = p^0 - p^0 \gamma^2 (1 + \beta^2) + 2\beta \gamma^2 p \cos \theta = \\ &= p^0 \left[ 1 - \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right] + 2\beta \gamma^2 p \cos \theta = -2\beta^2 \gamma^2 p^0 + 2\beta \gamma^2 p \cos \theta \\ &= 2\beta \gamma^2 [p \cos \theta - \beta p^0] = \beta \Delta p_z \end{aligned} \quad (3.6.112)$$

e questo, data la (3.6.111), è esattamente quanto ci aspettavamo in base, appunto, alla conservazione dell'energia.

<sup>27</sup>Per quanto riguarda il calcolo dell'impulso  $\Delta p_z$  ceduto dalla particella al piano, nel limite non relativistico, basta fermarsi all'ordine zero in  $\beta$ , dato che siamo interessati al calcolo del lavoro fatto da questa forza e questo già contiene  $\beta$  linearmente. Comunque, il risultato (3.6.112) è esatto qualunque sia  $\beta < 1$ , infatti

$$\begin{aligned} \Delta p_z &= p \cos \theta - (p^0 \sinh 2\alpha - p \cos \theta \cosh 2\alpha) = p \cos \theta (1 + \cosh 2\alpha) - p^0 \sinh 2\alpha = \\ &= p \cos \theta \left( 1 + \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right) - 2\beta p^0 \gamma^2 = 2\gamma^2 p \cos \theta - 2p^0 \beta \gamma^2 = \\ &= 2\gamma^2 (p \cos \theta - \beta p^0) \end{aligned} \quad (3.6.110)$$

che, comunque, data la (3.6.105), è sempre positiva (come è intuitivo che debba essere!).

Si noti in particolare che, come già osservato, il segno di  $\Delta E$  coincide con il segno di  $\beta$ , visto che  $\Delta p_z$  è comunque una quantità positiva ...

Un'altra conseguenza del moto del piano è che, in  $RS$ , l'angolo di riflessione è diverso da quello di incidenza, infatti si ha

$$\begin{aligned} -p_z'' &= p \cos \theta \cosh 2\alpha - p^0 \sinh 2\alpha = -p \cos \theta + p \cos \theta (\cosh 2\alpha + 1) - p^0 \sinh 2\alpha = \\ &= -p \cos \theta + p \cos \theta \left( \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} + 1 \right) - 2\beta\gamma^2 p^0 = -p \cos \theta + 2\gamma^2 (p \cos \theta - \beta p^0) \end{aligned}$$

e dunque, se  $\theta''$  è l'angolo di riflessione, risulta infine

$$\tan \theta'' \equiv \frac{p_y''}{-p_z''} = \frac{p \sin \theta}{-p \cos \theta + 2\gamma^2 (p \cos \theta - \beta p^0)} \quad (3.6.113)$$

Si osservi che  $\tan \theta''$  può anche essere negativa, ovvero, data la definizione adottata, la particella, dopo la riflessione, può avere ancora la componente  $z$  dell'impulso positiva. Non solo, ma nel caso in cui risulti

$$\beta p^0 = p \cos \theta \quad (3.6.114)$$

ovvero nel caso in cui la riflessione risulti *radente* nel riferimento dello specchio fisso, abbiamo, naturalmente, che la direzione della particella *non* viene alterata dalla riflessione e quindi, date le diverse definizioni, risulta

$$\tan \theta'' = -\tan \theta \quad (3.6.115)$$

Fin qui non abbiamo fatto approssimazioni, ma se  $\beta \ll 1$ , allora, al primo ordine in  $\beta$ , ovvero ponendo  $\gamma = 1$  nella equazione (3.6.113), si ha

$$\begin{aligned} \tan \theta'' &\approx \frac{p \sin \theta}{p \cos \theta - 2\beta p^0} = \frac{p \sin \theta}{p \cos \theta \left( 1 - \frac{2\beta p^0}{p \cos \theta} \right)} \approx \tan \theta \left( 1 + \frac{2\beta p^0}{p \cos \theta} \right) \\ &\approx \tan \theta + \frac{2\beta p^0 \sin \theta}{p \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.6.116)$$

dove la seconda approssimazione è valida solo se risulta anche  $\frac{2\beta p^0}{p \cos \theta} \ll 1$ . In questo caso, ponendo  $\theta'' = \theta + \delta$  e sviluppando in serie di Taylor, al primo ordine in  $\delta$ , la funzione  $\tan(\theta + \delta)$  intorno all'angolo  $\theta$ , risulta

$$\begin{aligned} \tan \theta'' &= \tan(\theta + \delta) \cong \tan \theta + \frac{\delta}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \delta = 2\beta \frac{p^0}{p} \sin \theta = \\ &= 2\beta \beta_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.6.117)$$

Possiamo adesso chiederci che cosa cambia se la particella che si riflette sul piano è un fotone, ovvero se la particella ha massa nulla.

Assumiamo ancora che il fotone provenga dal basso e che il suo quadrimpulso iniziale, nel riferimento del laboratorio  $RS$ , sia dato da<sup>28</sup>

$$p_{in}^\mu = (p, 0, p \sin \theta, p \cos \theta) = p(1, 0, \sin \theta, \cos \theta); \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.6.118)$$

Se la riflessione avviene sul piano di equazione  $z = 0$ , in quiete in  $RS$ , il quadrimpulso del fotone riflesso sarà ovviamente dato da

$$p_{in}^\mu = (p, 0, p \sin \theta, p \cos \theta) = p(1, 0, \sin \theta, -\cos \theta) \quad (3.6.119)$$

Nel caso in cui il piano si muova in  $RS$  lungo l'asse  $z$  con velocità  $\beta$ , la (3.6.104) ci dice che il quadrimpulso del fotone visto dal riferimento  $RS'$  dove il piano risulta in quiete, è pari a

$$p_{in}'^\mu = p(\gamma(1 - \beta \cos \theta), 0, \sin \theta, \gamma(\cos \theta - \beta)) \quad (3.6.120)$$

Di nuovo, se  $\beta > 0$  ovvero se il piano si muove in  $RS$  nel verso positivo dell'asse  $z$  come il fotone, allora la riflessione è possibile se e solo se (cfr.(3.6.105))

$$\beta < \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta - \beta > 0 \quad (3.6.121)$$

Da notare che se  $\beta < 0$ , ovvero se il piano va incontro al fotone, la (3.6.121) risulta sempre soddisfatta e la riflessione è ovviamente sempre possibile.

Dopo la riflessione, sempre in  $RS'$ , avremo evidentemente

$$p_{out}'^\mu = p(\gamma(1 - \beta \cos \theta), 0, \sin \theta, -\gamma(\cos \theta - \beta)) \quad (3.6.122)$$

il quale in  $RS$ , cioè nel sistema del laboratorio, diventa

$$p_{out}^\mu = p(\gamma^2(1 + \beta^2) - 2\beta\gamma^2 \cos \theta, 0, \sin \theta, 2\beta\gamma^2 - \gamma^2(1 + \beta^2) \cos \theta) \quad (3.6.123)$$

Iniziamo osservando che, così come accadeva per le particelle con massa, anche per il fotone succede che la sua energia dopo la riflessione è diversa da quella prima della stessa. Abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta E \equiv p_{in}^0 - p_{out}^0 &= p - p[\gamma^2(1 + \beta^2) - 2\beta\gamma^2 \cos \theta] = \\ &= p[-2\beta^2\gamma^2 + 2\beta\gamma^2 \cos \theta] = 2\beta\gamma^2 p(-\beta + \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.6.124)$$

Evidentemente, se  $\beta > 0$ , poichè dovrà comunque essere  $\cos \theta - \beta > 0$ ,  $\Delta E$  sarà positiva, ovvero l'energia del fotone incidente risulta maggiore di quella del fotone riflesso perchè, durante la riflessione, il fotone avrà svolto un lavoro positivo sul piano in moto, attraverso la pressione di radiazione. Se invece  $\beta < 0$ ,  $\Delta E$ , per lo stesso motivo, cambia segno ...

<sup>28</sup>La componente positiva  $p_z$  del quadrimpulso del fotone, ovvero  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , è necessaria affinché possa avere luogo la riflessione stessa.

### 3.7 Urto quasi-elastico

Consideriamo un processo d'urto in cui lo stato iniziale sia rappresentato da due particelle  $A$  e  $B$ , di massa, rispettivamente,  $m_A$  ed  $m_B$ .

Per fissare le idee, assumeremo che la particella  $A$  sia in moto con impulso spaziale  $\vec{p} = (0, 0, p)$  e quindi energia  $E = \sqrt{m_A^2 + p^2}$ , mentre la particella  $B$  sia ferma nel sistema del Laboratorio.

Se  $A$  e  $B$  sono le sole due particelle presenti anche nello stato finale, allora si parla di processo o urto *elastico*.

Nel caso, invece, in cui lo stato finale sia fatto ancora da *due* particelle ma diverse da quelle dello stato iniziale, che chiameremo  $C$  e  $D$ , di masse  $m_C$  ed  $m_D$ , allora si parla di *urto quasi-elastico* perché lo stato finale continua a essere fatto comunque da due particelle; altrimenti, se il numero di particelle nello stato finale è diverso da due, si parla di urto *anelastico*.

Essendo il sistema in ogni caso isolato, il quadrimpulso complessivo *si conserva* e questo fatto impone comunque precisi vincoli cinematici<sup>29</sup>.

Iniziamo considerando il caso quasi-elastico (il caso elastico può essere sempre visto come un caso particolare di quello quasi-elastico): avremo dunque che

$$p_A + p_B = p_C + p_D \quad (3.7.125)$$

che, nel sistema del centro di massa ( $CM$ ), evidentemente diventa

$$(p_A + p_B)_{CM} = (\sqrt{s}, 0, 0, 0) = (p_C + p_D)_{CM} \quad (3.7.126)$$

dove  $s$  è il quadrato della massa (quantità invariante) del sistema, cioè

$$s \equiv (p_C + p_D)^\mu (p_C + p_D)_\mu = (p_A + p_B)^\mu (p_A + p_B)_\mu \quad (3.7.127)$$

$$\Rightarrow s = m_A^2 + m_B^2 + 2(p_A)^\mu (p_B)_\mu = m_A^2 + m_B^2 + 2E m_B \quad (3.7.128)$$

e l'ultima relazione è ottenuta nell'ipotesi, come si è detto, che nel sistema del laboratorio, la particella  $B$  sia inizialmente ferma mentre  $A$  abbia impulso  $\vec{p}$  e quindi energia  $E = \sqrt{m_A^2 + p^2}$ .

Nel riferimento del  $CM$ , per quanto riguarda le due particelle  $A$  e  $B$ , potremo assumere, senza perdita di generalità, che sia

$$(p_A)_{CM} = (E_A, 0, 0, a); \quad E_A \equiv \sqrt{m_A^2 + a^2} \quad (3.7.129)$$

$$(p_B)_{CM} = (E_B, 0, 0, -a); \quad E_B \equiv \sqrt{m_B^2 + a^2} \quad (3.7.130)$$

<sup>29</sup>Si osservi ancora una volta che in un sistema isolato la conservazione del quadrimpulso *implica* che l'energia relativistica si conservi sempre e comunque, quindi sia per l'urto elastico che per quello quasi-elastico o anelastico. Questo accade perché, come si è visto, l'energia relativistica contiene anche l'energia interna del sistema, di qualunque natura essa sia.

dove, evidentemente, risulta

$$\sqrt{s} \equiv E_A + E_B = \sqrt{m_A^2 + a^2} + \sqrt{m_B^2 + a^2} \quad (3.7.131)$$

ovvero

$$m_A^2 + a^2 + m_B^2 + a^2 + 2\sqrt{m_A^2 + a^2}\sqrt{m_B^2 + a^2} = s$$

e dunque

$$2\sqrt{m_A^2 + a^2}\sqrt{m_B^2 + a^2} = s - m_A^2 - m_B^2 - 2a^2$$

da cui, elevando ancora al quadrato, otteniamo infine

$$\begin{aligned} & 4(m_A^2 + a^2)(m_B^2 + a^2) = \\ & = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4a^2(s - m_A^2 - m_B^2) + 4a^4 \\ & \text{cioè} \\ & 4m_A^2 m_B^2 + 4a^2(m_A^2 + m_B^2) + 4a^4 = \\ & = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 + 4a^2(m_A^2 + m_B^2) - 4a^2 s + 4a^4 \end{aligned} \quad (3.7.132)$$

Semplificando opportunamente nella (3.7.132), si ottiene infine il valore  $a$  del modulo dell'impulso delle due particelle  $A$  e  $B$  presenti inizialmente nel sistema del  $CM$ , come funzione solo del quadrato della massa invariante  $s$  del sistema complessivo, nonché delle loro masse. Risulta infatti

$$4s a^2 = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2 \quad (3.7.133)$$

↓

$$a = \frac{\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.7.134)$$

Sostituendo<sup>30</sup> adesso nella (3.7.129) e (3.7.130), per le energie delle due

---

<sup>30</sup>Si osservi che l'argomento della radice quadrata nella (3.7.134) è sempre certamente non negativo, infatti se fosse negativo allora giungeremmo all'assurdo per cui

$$\begin{aligned} & (s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2 < 0 \Rightarrow |s - m_A^2 - m_B^2| < 2m_A m_B \Rightarrow s - m_A^2 - m_B^2 < 2m_A m_B \Rightarrow \\ & \Rightarrow s < m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \Rightarrow s \equiv (E_A + E_B)^2 < (m_A + m_B)^2 ! \end{aligned}$$

particelle nel  $CM$  si ottengono i valori<sup>31</sup> seguenti

$$\sqrt{m_A^2 + a^2} = E_A = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.7.137)$$

$$\sqrt{m_B^2 + a^2} = E_B = \frac{s + m_B^2 - m_A^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.7.138)$$

Riguardo alle particelle  $C$  e  $D$  che emergono dal processo di scattering, sempre nel sistema del  $CM$  potremo scrivere, in termini dell'angolo di scattering  $\Theta$  (definito, per esempio, fra le direzioni di volo delle particelle  $A$  e  $C$ ) e dell'angolo azimutale  $\phi$ , che deve risultare

$$(P_C)_{CM} = (E_C, b \sin \Theta \cos \phi, b \sin \Theta \sin \phi, b \cos \Theta); \quad E_C \equiv \sqrt{m_C^2 + b^2} \quad (3.7.139)$$

$$(P_D)_{CM} = (E_D, -b \sin \Theta \cos \phi, -b \sin \Theta \sin \phi, -b \cos \Theta); \quad E_D \equiv \sqrt{m_D^2 + b^2} \quad (3.7.140)$$

dove, evidentemente, a causa della differenza nei valori delle masse presenti nello stato iniziale e finale, sarà in generale  $b \neq a$ ; ma dovrà comunque essere

$$\sqrt{s} \equiv E_C + E_D = \sqrt{m_C^2 + b^2} + \sqrt{m_D^2 + b^2}$$

per cui, ripetendo i calcoli fatti sopra circa le particelle  $A$  e  $B$ , segue che

$$b = \frac{\sqrt{(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.7.141)$$

Occorre però, adesso, mettere subito in evidenza una novità rispetto al caso trattato in precedenza. Il modulo  $b$  dell'impulso delle due particelle  $C$  e  $D$  prodotte dalla reazione ed espresso dalla equazione (3.7.141), dovrà comunque essere una quantità reale (positiva) e questo può accadere se e solo se l'argomento della radice quadrata è non negativo, ovvero se accade che

$$(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2 \geq 0 \quad (3.7.142)$$

e questo richiede che<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} (s - m_C^2 - m_D^2)^2 \geq 4m_C^2 m_D^2 &\Rightarrow s - m_C^2 - m_D^2 \geq 2m_C m_D \\ s &\geq (m_C + m_D)^2 \end{aligned} \quad (3.7.143)$$

<sup>31</sup>In termini delle grandezze cinematiche definite nel sistema del Laboratorio, abbiamo poi, chiaramente, che se la particella  $A$  è quella in moto con energia  $E$  mentre  $B$  è ferma, nel  $CM$  risulta

$$E_A \equiv \sqrt{m_A^2 + a^2} = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} = \frac{E m_B + m_A^2}{\sqrt{s}} \quad (3.7.135)$$

$$E_B \equiv \sqrt{m_B^2 + a^2} = \frac{s + m_B^2 - m_A^2}{2\sqrt{s}} = \frac{E m_B + m_B^2}{\sqrt{s}} \quad (3.7.136)$$

<sup>32</sup>Si ricordi che deve essere necessariamente che  $s - m_C^2 - m_D^2 \geq 0$ ...

Evidentemente, come è ovvio che sia, questa condizione mentre è sempre soddisfatta nel caso di urto elastico<sup>33</sup>, può non essere soddisfatta nel caso quasi-elastico, se le masse finali sono più grandi di quelle iniziali e l'energia della particella incidente non è sufficientemente elevata.

Se questo accade, si dice che  $C$  e  $D$  non possono essere prodotte in quanto ci troviamo sotto la loro *soglia di produzione*.

A soglia, cioè quando  $\sqrt{s} = m_C + m_D$ , nel sistema del  $CM$ , le due particelle  $C$  e  $D$  hanno, evidentemente, impulso spaziale nullo, ovvero sono entrambe ferme: in ogni altro riferimento quindi, come per esempio in quello del Laboratorio, esse si muovono con la stessa velocità, che è poi quella del  $CM$  in quel sistema di riferimento !

Sopra soglia di produzione<sup>34</sup> abbiamo invece concluso che, nel sistema del  $CM$ , risulta

$$b = \frac{\sqrt{(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.7.144)$$

e conseguentemente, quanto alle energie (sempre nel sistema del  $CM$ ), si ha

$$E_C = \frac{s + m_C^2 - m_D^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_D = \frac{s + m_D^2 - m_C^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.7.145)$$

Per conoscere ora la forma dei quadrimpulsi delle particelle  $C$  e  $D$  nel sistema del Laboratorio, occorre applicare alle (3.7.139) e (3.7.140) il boost di Lorentz che porta dal sistema del  $CM$  a quello del Laboratorio.

Se ci occupiamo, quindi, per esempio, della particella  $C$  (per la particella  $D$  il risultato è lo stesso che nel caso di  $C$ , solo che occorre cambiare  $E_C$  con  $E_D$  e mandare  $\Theta$  in  $\Theta + \pi$ ) e vogliamo determinare il suo quadrimpulso nel sistema del Laboratorio, indicando con  $p_{\perp} \equiv b \sin \Theta$  e  $p_{\parallel} \equiv b \cos \Theta$  l'impulso trasverso e longitudinale di  $C$  nel  $CM$ , valutati rispetto alla direzione della velocità relativa  $\vec{\beta}$  del sistema del  $CM$  vista in quello del Laboratorio, otteniamo allora

$$E'_C = \gamma E_C + \beta \gamma b \cos \Theta \quad (3.7.146)$$

$$p'_{C\perp} = b \sin \Theta \quad (3.7.147)$$

$$p'_{C\parallel} = \beta \gamma E_C + \gamma b \cos \Theta \quad (3.7.148)$$

<sup>33</sup>Abbiamo già osservato, infatti, che valutando  $s$  sullo stato iniziale, si ha comunque che  $\sqrt{s} = E_A + E_B \geq m_A + m_B$ .

<sup>34</sup>Dovrebbe essere ormai chiaro da quanto precede che, riguardo agli aspetti cinematici di cui ci stiamo occupando, le conclusioni che adesso trarremo quanto alle particelle  $C$  e  $D$  *coincidono* con quelle che potremmo trarre se esse, invece che originarsi da un processo d'urto fra le due particelle  $A$  e  $B$  per un quadrimpulso complessivo (nel sistema del Laboratorio)  $P^\mu$ , si originassero da un decadimento di una singola particella  $Z$  avente, nel riferimento del laboratorio, lo stesso quadrimpulso  $P^\mu$  del sistema fatto dalle due particelle  $A$  e  $B$  e dunque avente massa  $M_Z = \sqrt{P^\mu P_\mu} \equiv \sqrt{s}$ .

dove  $\beta$  e  $\gamma$  si riferiscono al boost in questione, definito univocamente dalle condizioni iniziali, ovvero dal quadrimpulso complessivo del sistema in esame, visto nel sistema del Laboratorio, che per le ipotesi fatte sullo stato di moto di  $A$  e  $B$ , come abbiamo già osservato, vale appunto

$$P^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = (E, \vec{p}) + (m_B, \vec{0}) = (E + m_B, \vec{p})$$

per cui ne risulta che

$$\gamma = \frac{P^0}{\sqrt{s}} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}}; \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{P^0} = \frac{\vec{p}}{E + m_B}; \quad \gamma\beta = \frac{p}{\sqrt{s}} \quad (3.7.149)$$

Evidentemente, dalle (3.7.147) e (3.7.148), risulta immediato che, in funzione di  $\Theta$ , il luogo dei punti descritti da  $\vec{p}'_C$  in assi  $(p_{\parallel}, p_{\perp})$  è un'ellisse<sup>35</sup> di semiasse minore uguale a  $b$  nel piano trasverso e semiasse maggiore  $b\gamma \equiv b \frac{E+m_B}{\sqrt{s}}$  lungo  $z$ , traslata in  $z$  della quantità<sup>36</sup>

$$A \equiv \beta\gamma E_C = \frac{p}{\sqrt{s}} E_C = \frac{p}{\sqrt{s}} \sqrt{m_C^2 + b^2} = p \frac{s+m_C^2-m_D^2}{2s} \quad (\text{ellisse di Blaton}^{37}).$$

Iniziamo considerando la situazione corrispondente alla figura 3.11, per la quale abbiamo implicitamente assunto che sia

$$\begin{aligned} \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} b \equiv \gamma b &\geq A \equiv \beta\gamma E_C = \frac{p}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{m_C^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow b &\geq \beta E_C \Leftrightarrow \beta \leq \frac{b}{E_C} = \beta_0 \end{aligned} \quad (3.7.150)$$

ovvero che corrisponda al caso in cui il modulo  $\beta_0$  della velocità della particella  $C$  considerata, vista nel sistema del  $CM$ , sia maggiore del modulo  $\beta$  della velocità relativa fra i due riferimenti.

<sup>35</sup>L. Landau, E. Lifchitz: *The Classical Theory of fields*, Pergamon Press, 1962, pag. 42 Usando le coordinate  $p'_\perp$  e  $p'_\parallel$ , la figura è, in realtà, una semiellisse poiché, essendo  $0 \leq \Theta \leq \pi$ , risulta, come la sua stessa definizione impone, che  $p'_\perp \geq 0$ .

In tre dimensioni, detto  $z$  l'asse lungo cui è diretta la velocità  $\vec{\beta}$ , la figura è un'ellissoide di rotazione intorno a  $z$  stesso, con  $p'_x = p'_\perp \cos\phi$  e  $p'_y = p'_\perp \sin\phi$ , essendo  $\phi$  l'angolo azimutale. Nella figura 3.11 abbiamo ommesso, per semplicità, di disegnare l'asse  $p'_x$  e posto  $\phi = \pi/2$ .

<sup>36</sup>Nella meccanica newtoniana, il luogo dei punti descritti da  $\vec{p}'_C$  è un semicerchio, essendo, in questo caso  $\gamma = 1$  ed  $A = \beta m$ , visto che la legge di trasformazione dell'impulso è tale per cui la sola componente che cambia è

$$p'_\parallel = b \cos\Theta + \beta m$$

Questa è anche l'espressione a cui tende la (3.7.148) nel limite NR, dato che essa può essere scritta anche come

$$p'_\parallel = \beta\gamma \sqrt{m^2 + b^2} + \gamma b \cos\Theta$$

(essendo, per quanto visto sopra,  $\gamma\beta = \frac{p}{\sqrt{s}}$  e  $\gamma = \frac{E+m}{\sqrt{s}}$ )

e, nel limite NR,  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $\sqrt{m^2 + b^2} \rightarrow m \dots$

<sup>37</sup>J. Blaton: *On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes*, Mat.-Fys Medd. Vol. 24, nr.20, 1 (1950)

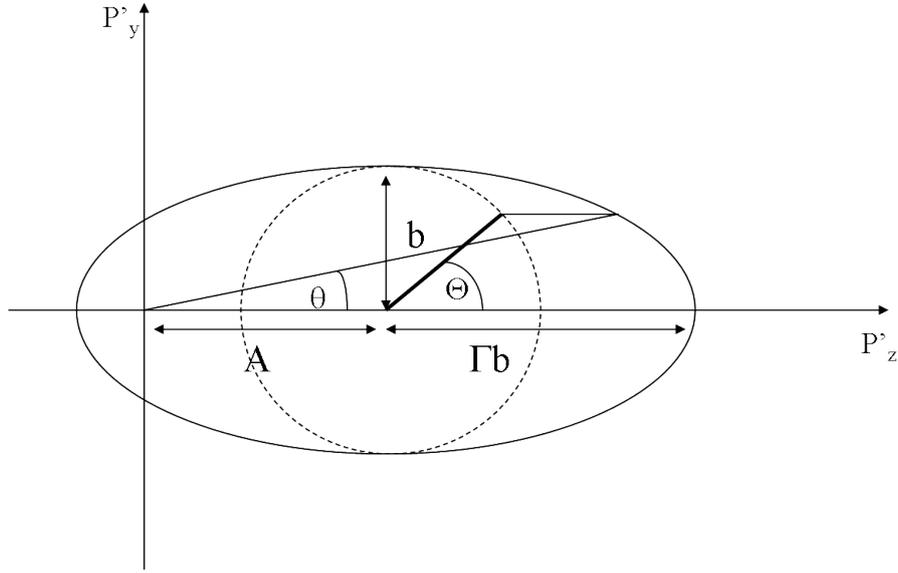


Figura 3.11: *Impulso nel Laboratorio e nel CM quando  $v > v_{rel}$*

In questo caso, infatti, come è intuitivo che sia e come è mostrato graficamente dalla figura 3.11, anche nel sistema del laboratorio, sono possibili tutti gli angoli di scattering<sup>38</sup>  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $p'(\theta)$ , fissato  $\theta$ , risulta unico, visto che l'origine del sistema degli assi si trova all'interno dell'ellisse.

Nel caso, invece, in cui  $\beta_0 < \beta$ , allora, da quanto precede è, evidentemente,  $\gamma b < A$  e dunque la configurazione che si realizza è quella illustrata in figura 3.12, in cui l'origine del sistema degli assi è esterno all'ellisse, per cui sono possibili solo angoli di scattering  $\theta$  nel primo quadrante, inferiori a un opportuno<sup>39</sup>  $\theta_{MAX}$ , e a ognuno di essi corrispondono, stavolta, due angoli di scattering  $\Theta$  nel sistema del centro di massa e, corrispondentemente, due

<sup>38</sup>Si osservi che, nel caso in cui la distribuzione angolare delle particelle scattate di massa  $m_C$  sia isotropa, allora metà delle stesse vengono emesse nel sistema del Laboratorio con un angolo di scattering tale che

$$0 \leq \Theta \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \tan \theta \leq \frac{b}{A} = \frac{b}{\beta\gamma E_C} = \frac{\beta_0}{\beta\gamma}$$

dove  $\beta_0$  è la velocità nel CM della particella considerata, mentre  $\beta\gamma$  si riferiscono al moto del CM visto dal sistema del Laboratorio.

Nel caso in cui la particella  $C$  sia un fotone ( $\beta_0 = 1$ ) e il CM si muova di moto ultrarelativistico nel sistema del Laboratorio, allora la condizione precedente diviene, evidentemente, la seguente

$$0 \leq \tan \theta \leq \frac{1}{\beta\gamma} \approx \frac{1}{\gamma}$$

<sup>39</sup>Se, per comodità di notazione si pone  $p'_\perp \equiv y$ ,  $p'_z \equiv x$ , allora l'angolo di scattering massimo nel sistema del Laboratorio si determina, evidentemente, imponendo l'esistenza di un solo  $p'(\theta_{MAX})$ , ovvero di un solo punto di intersezione fra l'ellisse di Blaton, di

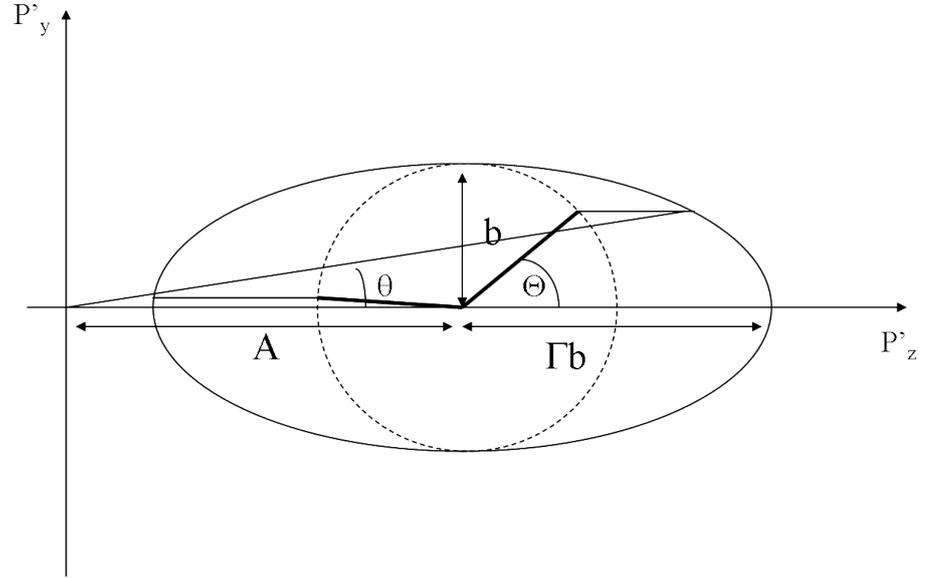


Figura 3.12: Impulso nel Laboratorio e nel CM quando  $v < v_{rel}$

valori di  $p'(\theta)$ .

Questo, per quanto riguarda le componenti spaziali del quadrimpulso.

Quanto poi alla sua componente temporale, cioè all'energia, dalla (3.7.146) abbiamo che risulta

$$E'_C = \gamma E_C + \gamma\beta b \cos \Theta = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C + \frac{pb}{\sqrt{s}} \cos \Theta \quad (3.7.152)$$

Questo risultato, per prima cosa, ci conferma la cosa ovvia che la particella  $C$  non appare monocromatica nel sistema del Laboratorio, come lo è in quello

---

equazione

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x-A}{\gamma b}\right)^2 = 1$$

con la retta di equazione  $y = tx$  dove  $t \equiv \tan \theta_{MAX}$ . Risulta

$$(\gamma tx)^2 + (x-A)^2 = (\gamma b)^2 \Rightarrow x^2(\gamma^2 t^2 + 1) - 2Ax + A^2 - \gamma^2 b^2 = 0 \Rightarrow \Delta/4 = A^2 - (1 + \gamma^2 t^2)(A^2 - \gamma^2 b^2)$$

e dunque la condizione di tangenza retta-ellisse (ovvero di  $\theta_{MAX}$ ) risulta essere la seguente

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta/4 = A^2 - (1 + \gamma^2 t^2)(A^2 - \gamma^2 b^2) \Rightarrow 0 = A^2 - A^2 + \gamma^2 b^2 - \gamma^2 t^2 (A^2 - \gamma^2 b^2) \\ \Rightarrow \gamma^2 t^2 (A^2 - \gamma^2 b^2) &= \gamma^2 b^2 \Rightarrow t = \frac{b}{\sqrt{A^2 - \gamma^2 b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\beta^2 \gamma^2 E_C^2 - \gamma^2 b^2}} = \frac{1}{\gamma \sqrt{\beta^2 \left(\frac{E_C}{b}\right)^2 - 1}} \Rightarrow \\ t \equiv \tan \theta_{MAX} &= \frac{1}{\gamma \sqrt{\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^2 - 1}} \end{aligned} \quad (3.7.151)$$

del  $CM$ , e la sua energia vista nel Laboratorio, va da un massimo, raggiunto per  $\Theta = 0$ , pari a

$$E_{MAX} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C + \frac{pb}{\sqrt{s}} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} \sqrt{m_C^2 + b^2} + \frac{pb}{\sqrt{s}} \quad (3.7.153)$$

a un minimo, che si ottiene per  $\Theta = \pi$ , pari a

$$E_{min} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C - \frac{pb}{\sqrt{s}} = E_{MAX} - 2\frac{pb}{\sqrt{s}} \quad (3.7.154)$$

ovvero essa copre una "larghezza"  $\Delta E$  data da

$$\Delta E = 2\gamma\beta b = 2\frac{pb}{\sqrt{s}} \quad (3.7.155)$$

Nel caso particolare dell'urto elastico  $a = b$  e, chiaramente, essendo  $B$  inizialmente ferma nel sistema del Laboratorio, risulta

$$b = a = m_B \gamma\beta = m_B \frac{p}{\sqrt{s}} \quad (3.7.156)$$

per cui la (3.7.155) diventa

$$\Delta E = \frac{2 m_B p^2}{s} = \frac{2 m_B (E^2 - m_A^2)}{s} \quad (3.7.157)$$

Per  $\Theta_{CM} = 0$ , però, non c'è urto e quindi, per la particella urtante  $A$  (identificata con la particella uscente  $C$ ) deve<sup>40</sup> essere  $E_{MAX} = E$ .

Nel caso poi in cui  $m_A = m_B \equiv m$ , è facile convincersi che  $E_{MIN} = m$ , che si realizza per  $\Theta = \pi$ , quando la particella  $A$  dopo l'urto resta ferma nel Laboratorio.

Ritornando al caso quasi-elastico, quanto all'altra particella  $D$  prodotta, risulta evidentemente che

$$E'_D = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_D - \frac{pb}{\sqrt{s}} \cos\Theta \quad (3.7.159)$$

---

<sup>40</sup>Formalmente risulta

$$E_C = E_A = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_A^2 + m_B^2 + 2E m_B + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_A^2 + E m_B}{\sqrt{s}} \quad (3.7.158)$$

e dunque, usando anche la (3.7.156), risulta appunto che

$$\begin{aligned} E_{MAX} &= \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C + \frac{pb}{\sqrt{s}} = \frac{(E + m_B)(m_A^2 + E m_B)}{s} + \frac{p^2 m_B}{s} = \\ &= \frac{E m_A^2 + E^2 m_B + m_B m_A^2 + E m_B^2 + p^2 m_B}{s} = \frac{E m_A^2 + E^2 m_B + E m_B^2 + E^2 m_B}{s} = \\ &= E \frac{m_A^2 + m_B^2 + 2E m_B}{s} = E \end{aligned}$$

da cui segue in particolare che la somma delle energie delle particelle  $C$  e  $D$  nel sistema del Laboratorio vale

$$E'_C + E'_D = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} (E_C + E_D) = E + m_B \quad (3.7.160)$$

come è ovvio che debba essere<sup>41,42</sup>.

<sup>41</sup>Dalla (3.7.160) segue in particolare che, nel caso dell'urto elastico, l'energia della particella urtata parte da un minimo pari proprio alla sua massa, che si realizza nel caso di scattering in avanti ( $\Theta = 0$ ).

<sup>42</sup>Naturalmente, l'analisi del processo d'urto fatta nel sistema del  $CM$  e poi riportata in quello del Laboratorio, può essere anche effettuata direttamente in quest'ultimo, solo che l'algebra è notevolmente più pesante.

Per questo motivo tratteremo direttamente nel sistema del Laboratorio solo il caso elastico. Per semplificare le notazioni, quanto alle masse iniziamo ponendo

$$m_A = m_C = m; \quad m_B = m_D = M \quad (3.7.161)$$

Ricordiamo che abbiamo assunto che la particella  $B$  sia inizialmente ferma mentre  $A$  abbia un impulso spaziale  $\vec{p}$ , dunque le condizioni iniziali sono che

$$p_A^\mu = (E, \vec{p}); \quad p \equiv |\vec{p}|, \quad E = \sqrt{m^2 + p^2} \quad (3.7.162)$$

$$p_B^\mu = (M, \vec{0}); \quad (3.7.163)$$

da cui

$$P_{tot}^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = (E + M, \vec{p}) \quad (3.7.164)$$

Questo quadrimpulso totale si conserva nell'urto e quindi se, dopo l'urto, poniamo che sia

$$p'_A{}^\mu = (E'_A, \vec{p}'); \quad p'_A \equiv |\vec{p}'|, \quad E'_A \equiv \sqrt{m^2 + p'^2} \quad (3.7.165)$$

$$p'_B{}^\mu = (E'_B, \vec{P}'); \quad P'_A \equiv |\vec{P}'|, \quad E'_B \equiv \sqrt{M^2 + P'^2} \quad (3.7.166)$$

allora la conservazione dell'impulso spaziale implica che

$$\vec{p}' + \vec{P}' = \vec{p} \quad \Rightarrow \quad P'^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta \quad (3.7.167)$$

mentre dalla conservazione dell'energia relativistica stabilisce che

$$E + M = \sqrt{M^2 + P'^2} + \sqrt{m^2 + p'^2} \quad (3.7.168)$$

e dunque

$$\sqrt{M^2 + P'^2} = (E + M) - \sqrt{m^2 + p'^2}$$

da cui, elevando al quadrato ed usando l'espressione (3.7.167), si ottiene

$$M^2 + p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta = E^2 + M^2 + 2EM + m^2 + p'^2 - 2(E + M)\sqrt{m^2 + p'^2}$$

Semplificando si ha

$$E^2 + 2EM + m^2 - p^2 + 2pp' \cos\theta = 2(E + M)\sqrt{m^2 + p'^2}$$

ma  $E^2 - p^2 = m^2$ , per cui sostituendo e dividendo per 2, abbiamo

$$m^2 + EM + pp' \cos\theta = (E + M)\sqrt{m^2 + p'^2} \quad (3.7.169)$$

da cui, elevando ancora al quadrato, si ottiene

$$\begin{aligned} & m^4 + E^2 M^2 + p^2 p'^2 \cos^2 \theta + 2EMm^2 + 2m^2 p p' \cos \theta + 2EM p p' \cos \theta = \\ & = (E^2 + 2EM + M^2)(m^2 + p'^2) = \\ & = E^2 m^2 + E^2 p'^2 + 2EMm^2 + 2EMp'^2 + m^2 M^2 + M^2 p'^2 \end{aligned}$$

Semplificando e ordinando come polinomio in  $p'$ , risulta

$$\begin{aligned} & p'^2 (p^2 \cos^2 \theta - E^2 - 2EM - M^2) + 2p' (m^2 p \cos \theta + EM p \cos \theta) + \\ & m^4 + E^2 M^2 - E^2 m^2 - m^2 M^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.7.170)$$

ovvero

$$\begin{aligned} & p'^2 (p^2 (1 - \sin^2 \theta) - E^2 - 2EM - M^2) + 2p p' \cos \theta (m^2 + EM) + \\ & m^4 + (p^2 + m^2) M^2 - (p^2 + m^2) m^2 - m^2 M^2 = 0 \\ & \quad \downarrow \\ & p'^2 (p^2 - p^2 \sin^2 \theta - E^2 - 2EM - M^2) + 2p p' \cos \theta (m^2 + EM) + \\ & m^4 + p^2 M^2 + m^2 M^2 - p^2 m^2 - m^4 - m^2 M^2 = 0 \end{aligned}$$

da cui, sostituendo  $p^2 - E^2 = -m^2$  e cambiando tutto di segno, si ottiene finalmente l'equazione

$$\begin{aligned} & p'^2 (p^2 \sin^2 \theta + 2EM + M^2 + m^2) - 2p p' \cos \theta (m^2 + EM) + \\ & + p^2 (m^2 - M^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.7.171)$$

Questa equazione può essere vista come una equazione di secondo grado in  $p'$ , in cui le condizioni iniziali (fissate le masse  $M$  e  $m$ ) entrano attraverso il modulo  $p$  dell'impulso della particella incidente, mentre le condizioni finali sono contenute nel valore dell'angolo di scattering  $\theta$ : si tratta dunque di una equazione di secondo grado, *parametrica* in  $\theta$ . Evidentemente le soluzioni saranno accettabili per ragioni fisiche solo se reali e positive ( $p'$  è il modulo dell'impulso spaziale della particella di massa  $m$ , dopo l'urto), per cui occorre studiare il discriminante dell'equazione, che vale

$$\begin{aligned} \Delta/4 &= [p \cos \theta (EM + m^2)]^2 - p^2 (p^2 \sin^2 \theta + 2EM + M^2 + m^2) (m^2 - M^2) = \\ & p^2 \cos^2 \theta (EM + m^2)^2 - p^2 [(m^2 - M^2) p^2 \sin^2 \theta + (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ & p^2 (1 - \sin^2 \theta) (EM + m^2)^2 - p^2 [(m^2 - M^2) p^2 \sin^2 \theta + (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ & p^2 (EM + m^2)^2 - p^2 \sin^2 \theta (EM + m^2)^2 - \\ & \quad - p^2 [(m^2 - M^2) p^2 \sin^2 \theta + (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ & -p^2 \sin^2 \theta [(EM + m^2)^2 + (m^2 - M^2) p^2] + \\ & \quad p^2 [(EM + m^2)^2 - (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ & p^2 [E^2 M^2 + 2EMm^2 + m^4 - 2EMm^2 + 2EM^3 - m^2 M^2 + M^4 - m^4 + m^2 M^2] \\ & \quad - p^2 \sin^2 \theta [E^2 M^2 + 2EMm^2 + m^4 + m^2 E^2 - m^4 - M^2 E^2 + m^2 M^2] = \\ & p^2 [(EM + M^2)^2] - p^2 \sin^2 \theta [m^2 (2EM + E^2 + M^2)] = \\ & p^2 M^2 (E + M)^2 - p^2 m^2 \sin^2 \theta (E + M)^2 = \\ & p^2 (E + M)^2 [M^2 - m^2 \sin^2 \theta] \end{aligned}$$

e le due soluzioni, se  $\Delta/4 > 0$ , sono

$$p'_{\pm} = \frac{p \cos \theta (EM + m^2) \pm p (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{p^2 \sin^2 \theta + 2EM + M^2 + m^2} \quad (3.7.172)$$

Prima di lasciare l'argomento, è utile ribadire che le conclusioni tratte

Quant' al denominatore, che è evidentemente strettamente positivo essendo somma di quantità tutte strettamente positive, ricordando che  $p^2 + m^2 = E^2$ , esso può essere scritto come

$$\begin{aligned} p^2 \sin^2\theta + 2EM + M^2 + m^2 &= p^2 - p^2 \cos^2\theta + 2EM + M^2 + m^2 = \\ &= E^2 + 2EM + M^2 - p^2 \cos^2\theta = (E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta \end{aligned}$$

per cui le due soluzioni dell'equazione diventano infine

$$p'_{\pm} = p \frac{(EM + m^2) \cos\theta \pm (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \quad (3.7.173)$$

La condizione di positività del determinante, e quindi di realtà delle soluzioni  $p'_{\pm}$

$$M^2 - m^2 \sin^2\theta \geq 0 \quad (3.7.174)$$

non impone limitazioni sull'angolo di scattering  $\theta$  se e solo se  $M \geq m$ , altrimenti richiede che

$$0 \leq \theta \leq \arcsin \frac{M}{m} \quad (3.7.175)$$

per cui, quando  $M < m$ , non tutti gli angoli di scattering  $\theta$  nel Laboratorio sono possibili. Cerchiamo ora di determinare il numero delle soluzioni accettabili, nei diversi casi.

- Siccome il coefficiente di  $p'^2$  nella (3.7.171) è positivo, le soluzioni sono entrambe dello stesso segno se il termine noto dell'equazione di secondo grado (3.7.171) è positivo, cioè se  $m^2 - M^2 > 0 \Rightarrow m > M$ . In questo caso,  $\theta$  sta nel primo quadrante e la soluzione  $p'_+$  è evidentemente positiva e dunque lo è anche  $p'_-$ . Entrambe le soluzioni  $p'_+$  e  $p'_-$  dunque sono accettabili, con la conseguenza che, per lo stesso angolo di scattering  $\theta$ , esistono due possibili valori di  $p'$ .  
Si osservi, a proposito di queste soluzioni, che la condizione (3.7.174) è pari in  $\sin\theta$ , per cui, a priori, se  $\theta$  soddisfa la condizione per cui  $\Delta \geq 0$ , allora anche  $\theta' = \pi - \theta$  la soddisfa. Comunque, nel secondo quadrante (dove si trova  $\theta'$ ), essendo  $\cos\theta' < 0$ , chiaramente  $p'_-$  è negativo e dunque anche  $p'_+$  lo è, per cui, in questo caso, non esistono soluzioni positive in  $p'_{\pm}$ .
- Nel caso in cui  $m^2 - M^2 < 0$ , ovvero quando  $M > m$ , allora le due soluzioni hanno segno discorde. Non c'è limitazione ai possibili valori di  $\theta$  fra 0 e  $\pi$ , ma solo la soluzione  $p'_+$  sarà accettabile in quanto, come abbiamo già osservato,  $p'$  deve essere comunque una grandezza reale positiva e, dalla definizione, si ha che  $p'_+ > p'_-$  (ovvio!).

Evidentemente poi, fissato il valore di  $p'$  è anche fissata l'energia  $E'$  della massa  $m$  dopo l'urto: usando la (3.7.169), si ottiene, per le due soluzioni, rispettivamente

$$E'_{\pm} = \frac{(M + E)(EM + m^2) \pm p^2 \cos\theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \quad (3.7.176)$$

Risulta infatti che, per la (3.7.169), è

$$m^2 + EM + p p' \cos\theta = (E + M) \sqrt{m^2 + p'^2} \Rightarrow m^2 + EM + p p' \cos\theta = (E + M) E'$$

ovvero, usando il fatto che

$$p'_{\pm} = \frac{p \cos\theta (EM + m^2) \pm p (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta}$$

riguardo alla cinematica delle due particelle  $C$  e  $D$  prodotte nel processo quasi-elastico considerato, si applicano esattamente allo stesso modo al caso del decadimento di una particella  $X$  in  $C$  e  $D$ , pur di identificare  $\sqrt{s}$  con la massa  $M_X$  di  $X$  e  $\vec{\beta}$  con la velocità di  $X$  nel riferimento del Laboratorio. Riguardo all'espressione di  $E'_C$  di  $C$  nel laboratorio, abbiamo visto che

$$E'_C = \gamma E_C + \gamma \beta b \cos \Theta \quad (3.7.177)$$

da cui

$$\gamma(E_C - \beta b) \leq E \equiv E'_C \leq \gamma(E_C + \beta b) \quad (3.7.178)$$

Chiediamoci adesso quale sarà la funzione di distribuzione  $F(E)$  dell'energia di  $C$ , all'interno dell'intervallo di energie permesso ( $E_{min}, E_{MAX}$ ).

Nel sistema del  $CM$  la particella  $C$  è evidentemente monocromatica in quanto  $E_C = \sqrt{M_C^2 + b^2}$ , mentre nel sistema del Laboratorio questo non è più vero, data la (3.7.178).

Se  $C$  è prodotta nel  $CM$  in modo isotropo, allora la distribuzione di probabilità associata a  $C$  in questo sistema di riferimento è data da

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{2} d(-\cos\Theta) \quad (3.7.179)$$

e siccome dalla (3.7.177) risulta

$$dE'_C = \gamma \beta b d(\cos\Theta) \quad (3.7.180)$$

ne segue che, nel sistema del laboratorio, la funzione di distribuzione  $F(E)$  cercata è la seguente

$$F(E) \equiv \left| \frac{d\mathcal{P}}{dE'_C} \right| = \frac{1}{2\gamma\beta b} \quad (3.7.181)$$

ovvero essa risulta *piatta* fra  $E_{min}$  ed  $E_{MAX}$ .

---

si ha

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m^2 + EM + pp' \cos\theta}{E + M} = \\ &= \frac{1}{E + M} \frac{(m^2 + EM)[(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta] + p^2 \cos^2\theta (EM + m^2)}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \\ &\pm \frac{p^2 \cos\theta (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} = \\ &= \frac{1}{E + M} \frac{(m^2 + EM)(E + M)^2 \pm p^2 \cos\theta (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} = \\ &= \frac{(m^2 + EM)(E + M) \pm p^2 \cos\theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \quad c.v.d. \end{aligned}$$

Come risulta chiaro da quanto precede, la determinazione nel Sistema del Laboratorio dei quadrimpulsi delle particelle coinvolte nell'urto è solitamente abbastanza laboriosa ... per questo abbiamo preferito affrontare il problema partendo piuttosto dal sistema del  $CM$ .

### 3.8 L'effetto Compton

L'effetto Compton<sup>43</sup> consiste nello scattering elastico di un fotone con un elettrone

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e \quad (3.8.182)$$

in cui l'elettrone nello stato iniziale può essere considerato fermo nel sistema di riferimento del Laboratorio.

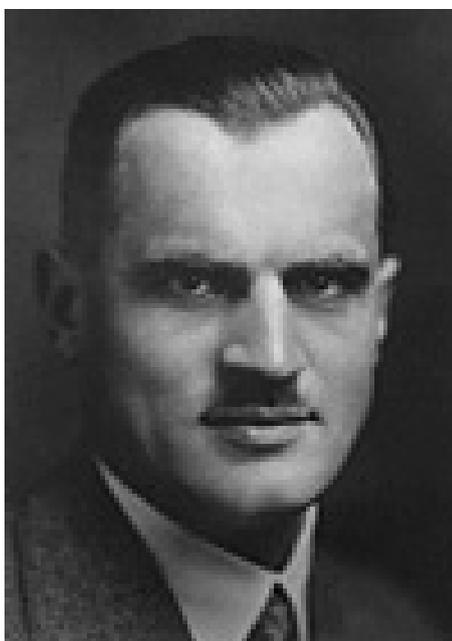


Figura 3.13: *Arthur H. Compton (1892-1962)*

Volendo studiare le caratteristiche cinematiche del fotone nello stato finale, poiché la sua velocità  $c$  è certamente maggiore della velocità del  $CM$  del sistema, possiamo intanto concludere per quanto già osservato in precedenza che saranno possibili tutti gli angoli di scattering  $0 \leq \theta \leq \pi$  anche nel sistema del Laboratorio.

Nelle notazioni usate in precedenza secondo cui lo scattering è descritto da  $A + B \rightarrow C + D$ , se identifichiamo  $A$  e  $C$  con il fotone, e dunque  $m_A = m_C = \mu = 0$ , mentre identifichiamo  $B$  e  $D$  con l'elettrone, per cui  $m_B = m_D = m$ , dalla (3.7.152), nel caso particolare in cui l'energia del

<sup>43</sup>A.H. Compton: *A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements* Phys. Rev. 21, 483 (1923)

fotone incidente sia  $E \equiv k$ , ecco che l'energia del fotone scatterato, sempre vista nel sistema del laboratorio, è data da

$$\begin{aligned} E' &= \gamma \sqrt{\mu^2 + b^2} + \gamma \beta b \cos \Theta = \frac{E + m}{\sqrt{s}} \sqrt{\mu^2 + b^2} + \frac{k b}{\sqrt{s}} \cos \Theta = \\ &= \frac{k + m}{\sqrt{s}} b + \frac{k b}{\sqrt{s}} \cos \Theta = \frac{m b}{\sqrt{s}} + \frac{k b}{\sqrt{s}} (1 + \cos \Theta) \end{aligned} \quad (3.8.183)$$

dove  $\Theta$  è l'angolo di scattering del fotone nel riferimento del  $CM$ .

Dalle espressioni (3.7.128), (3.7.141) e (3.7.156), riscritte nel caso in cui  $\mu = 0$ , abbiamo

$$s = 2k m + m^2; \quad b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{k m}{\sqrt{s}} \quad (3.8.184)$$

da cui, evidentemente

$$\frac{b}{\sqrt{s}} = \frac{k m}{s} = \frac{k m}{2k m + m^2} = \frac{k}{2k + m} \quad (3.8.185)$$

per cui, sostituendo nella (3.8.183), si ha infine, in accordo con la (3.7.152), (3.7.153) e (3.7.154), che

$$\begin{aligned} E' = k' &= \frac{m b}{\sqrt{s}} + \frac{k b}{\sqrt{s}} (1 + \cos \Theta) = \\ &= \frac{m k}{m + 2k} + \frac{k^2}{m + 2k} (1 + \cos \Theta) \end{aligned} \quad (3.8.186)$$

↓

$$E'_{min} = \frac{m k}{m + 2k} = k \frac{m}{m + 2k} \quad (3.8.187)$$

$$E'_{max} = \frac{m k}{m + 2k} + \frac{2k^2}{m + 2k} = k \quad (3.8.188)$$

$$\Rightarrow \Delta E' \equiv E'_{max} - E'_{min} \equiv \Delta k' = k - k \frac{m}{m + 2k} = \frac{2k^2}{m + 2k} \quad (3.8.189)$$

Il risultato ottenuto consente di affermare che l'energia del fotone, vista dal riferimento del Laboratorio

- non cambia, se l'angolo  $\Theta$  è nullo (ovvero se il fotone non subisce deflessione nel sistema del  $CM$ , e quindi non subisce scattering ...);
- assume il valore minimo, quando il fotone viene fatto "rimbalzare" all'indietro nel  $CM$ .

Vogliamo adesso esprimere l'energia del fotone uscente, di cui alla (3.8.186), in termini dell'angolo di scattering  $\theta$ , misurato nel sistema del Laboratorio.

Ripartiamo dunque dalla (3.8.186) la quale stabilisce che

$$\begin{aligned}
 k' &= \frac{m k}{m + 2k} + \frac{k^2}{m + 2k} (1 + \cos \Theta) = \\
 &= \frac{m k}{m + 2k} + \frac{2k^2}{m + 2k} - \frac{k^2}{m + 2k} (1 - \cos \Theta) = \\
 &= k - \frac{k^2}{m + 2k} (1 - \cos \Theta) \quad (3.8.190)
 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che il cambiamento di energia subito dal fotone a causa del processo d'urto è espresso dalla relazione

$$\Delta k \equiv k - k' = \frac{k^2}{2k + m} (1 - \cos \Theta) = \frac{m k^2}{s} (1 - \cos \Theta) \quad (3.8.191)$$

Volendo far intervenire l'angolo di scattering  $\theta$  del fotone nel sistema del Laboratorio, iniziamo osservando che, con ovvio significato di simboli, risulta

$$k_{\parallel}' = k' \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta \equiv \frac{k_{\parallel}'}{k'} \quad (3.8.192)$$

D'altronde, la componente  $k_{\parallel}'$  si trasforma, come sappiamo, nel modo seguente

$$k_{\parallel}' \equiv k' \cos \theta = \beta \gamma b + \gamma b \cos \Theta \quad (3.8.193)$$

e dunque si ha

$$\begin{aligned}
 k' - k' \cos \theta &\equiv k' (1 - \cos \theta) = \gamma b + \beta \gamma b \cos \Theta - \beta \gamma b - \gamma b \cos \Theta = \\
 &= \gamma b (1 - \beta) - \gamma b (1 - \beta) \cos \Theta = (1 - \beta) \gamma b (1 - \cos \Theta) = \\
 &= \frac{m}{k + m} \frac{k + m}{\sqrt{s}} \frac{k m}{\sqrt{s}} (1 - \cos \Theta) = \frac{k m^2}{s} (1 - \cos \Theta) \quad (3.8.194)
 \end{aligned}$$

per cui risulta che (nell'ultima espressione di  $\Delta k$  abbiamo ripristinato  $c$  per rendere il risultato più chiaro dal punto di vista dimensionale)

$$\begin{aligned}
 \Delta k &\equiv k - k' = \frac{m k^2}{s} (1 - \cos \Theta) = \frac{k}{m} (k' - k' \cos \theta) = \frac{k k'}{m} (1 - \cos \theta) \\
 \Rightarrow \Delta k &= \frac{k k'}{m c} (1 - \cos \theta) \quad (3.8.195)
 \end{aligned}$$

ovvero, in termini della frequenza,

$$\begin{aligned}
 \Delta k &= \frac{h}{c} (\nu - \nu') = \left( \frac{h}{c} \right)^2 \frac{\nu \nu'}{m c} (1 - \cos \theta) \\
 \Rightarrow \Delta \nu &\equiv \nu - \nu' = \frac{h}{m c^2} \nu \nu' (1 - \cos \theta) \quad (3.8.196)
 \end{aligned}$$

che, in termini della lunghezza d'onda ( $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ), diviene

$$\begin{aligned}\Delta\nu &\equiv \nu - \nu' \equiv \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h}{Mc^2} \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} (1 - \cos\theta) \\ \Rightarrow c \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} &= \frac{h}{mc^2} \frac{c^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos\theta) \\ \Rightarrow \Delta\lambda &\equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \equiv \lambda_c (1 - \cos\theta) \quad (3.8.197)\end{aligned}$$

dove abbiamo definito<sup>44</sup> la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone* nel modo consueto

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{mc} = 2.42631 \times 10^{-10} \text{ cm} \quad (3.8.199)$$

in termini della sua massa  $m$ , della velocità della luce nel vuoto e della costante di Planck.

Lo scattering Compton, essendo un processo elastico, avviene qualunque sia l'energia del fotone incidente; però la sua manifestazione caratteristica, rappresentata dal cambiamento di frequenza del fotone, si manifesta in modo sperimentalmente evidente solo quando la lunghezza d'onda  $\lambda_0$  del fotone incidente non è troppo grande rispetto a  $\lambda_c$ , altrimenti, l'effetto rappresentato dall'aumento di lunghezza d'onda diventa praticamente inosservabile.

Se richiediamo, per esempio, che l'effetto sulla lunghezza d'onda sia del 10%, occorre assumere che  $\lambda_0 = a \lambda_c$ , con  $a = 20$ , così che i fotoni che subiscono scattering all'indietro hanno lunghezza d'onda  $\lambda' = \lambda_0 + 2\lambda_c = 22 \lambda_c \dots$

Dato il valore di  $\lambda_c$ , questi fotoni hanno energia

$$k = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{a\lambda_c} = \frac{hc}{a\frac{h}{mc}} = \frac{mc^2}{a} \approx 25 \text{ keV} \quad (3.8.200)$$

e dunque si trovano nel dominio dei raggi  $X$ .

Quanto poi alla cinematica del processo, osserviamo che in questa regione di energie del fotone  $k \ll m$ , la massa invariante del sistema, data dalla (3.8.184), vale

$$s = 2km + m^2 = m^2 \left(1 + \frac{2k}{m}\right) \Rightarrow \sqrt{s} \approx m \left(1 + \frac{k}{m}\right) = m + k \quad (3.8.201)$$

<sup>44</sup>Per ragioni che verranno più chiare in seguito, si definisce anche la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton ridotta* nel modo seguente

$$\chi_c \equiv \frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{r_e}{\alpha} = 3.8615926 \cdot 10^{-11} \text{ cm} \quad (3.8.198)$$

Essa rappresenta la scala naturale di lunghezza associata alla particella di massa  $m$  e, per esempio, nel caso la particella sia il mediatore di una forza, essa ne individua il *range*.

ovvero è poco diversa da  $m$ .

Quanto poi all'impulso e quindi all'energia del fotone nel sistema del  $CM$ , dato ancora dalla (3.8.184), esso vale

$$b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{km}{\sqrt{s}} \approx k \frac{m}{k + m} \quad (3.8.202)$$

non molto dissimile da  $k$  stesso perché il  $CM$  si muove in modo non relativistico nel sistema del laboratorio, essendo

$$\beta_{CM} = \frac{k}{m + k} \quad (3.8.203)$$

Un'applicazione interessante dell'effetto Compton è quella che lo utilizza per ottenere fotoni monocromatici di energia variabile nel dominio, per esempio, delle decine di  $MeV$ .

Consideriamo per questo un fascio laser di luce di lunghezza d'onda  $\lambda \approx 500 nm$  (si tratta di luce verde), il quale si propaga lungo la direzione positiva dell'asse  $z$  e immaginiamo di inviare in verso opposto un fascio di elettroni ultrarelativistici di impulso  $p$  ed energia  $E$ . Il quadrimpulso del sistema elettrone-fotone, nel riferimento del Laboratorio, vale quindi

$$P^\mu = (\epsilon, 0, 0, \epsilon) + (E, 0, 0, -p) \quad (3.8.204)$$

dove  $\epsilon \approx 2.5 eV$  rappresenta l'energia del fotone.

La massa invariante quadra del processo è dunque

$$s = P^\mu P_\mu = m^2 + 2\epsilon(E + p) \quad (3.8.205)$$

per cui, nel  $CM$ , l'energia del fotone (coincidente con il modulo del suo impulso spaziale) vale

$$b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{\epsilon(E + p)}{\sqrt{s}} \quad (3.8.206)$$

Assumendo, per esempio,  $E = 1 GeV$ , abbiamo ( $E \approx p$ )

$$\begin{aligned} s &= m^2 + 2\epsilon(E + p) = (0.511)^2 + 2 \cdot 2.5 \times 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 = \\ &= (0.511)^2 + 10^{-2} MeV^2 \end{aligned} \quad (3.8.207)$$

Poiché risulta numericamente, in questo caso, che il termine  $2\epsilon(E + p) \ll m^2$ , possiamo riscrivere  $s$  nel modo seguente

$$\begin{aligned} s &= m^2 + 2\epsilon(E + p) = m^2 \left( 1 + \frac{2\epsilon(E + p)}{m^2} \right) \\ \Rightarrow \sqrt{s} &\approx m + \frac{\epsilon(E + p)}{m} = m + k \end{aligned} \quad (3.8.208)$$

dove abbiamo definito  $k \equiv \frac{\epsilon(E+p)}{m}$  e risulta che  $k \approx 10 \text{ keV}$ , in perfetta analogia con quanto accade nel caso di scattering Compton "classico" considerato in precedenza, cioè su elettrone fermo.

Poiché l'energia del fotone nel  $CM$  dipende unicamente da  $s$ , anche questa quantità sarà analoga al caso "classico" considerato sopra, infatti

$$b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{\epsilon(E+p)}{\sqrt{s}} \approx k \quad (3.8.209)$$

La differenza fondamentale che c'è fra i due casi è che in questo secondo caso il  $CM$  ha un moto ultrarelativistico, mentre nel primo caso, come avevamo notato, esso è non relativistico. Adesso abbiamo infatti che, quanto al moto del  $CM$  nel Laboratorio, risulta

$$\gamma = \frac{E + \epsilon}{\sqrt{s}} \quad (3.8.210)$$

$$\beta = \frac{-p + \epsilon}{E + \epsilon} \approx \frac{-p}{E} \quad (3.8.211)$$

$$\gamma\beta = \frac{-p + \epsilon}{\sqrt{s}} \quad (3.8.212)$$

ovvero, nel Laboratorio, la velocità del  $CM$  è quasi coincidente con quella dell'elettrone incidente.

Riprendendo in esame l'energia del fotone nel Laboratorio, per la quale abbiamo

$$E = \gamma b + \beta\gamma b \cos \Theta \quad (3.8.213)$$

ecco che, nel caso di scattering all'indietro ( $\Theta = \pi$ ), risulta

$$\begin{aligned} E &= \gamma b - \beta\gamma b = b \left( \frac{E + \epsilon}{\sqrt{s}} + \frac{p - \epsilon}{\sqrt{s}} \right) = \frac{b}{\sqrt{s}}(E + p) = \frac{\epsilon(E + p)}{s}(E + p) = \\ &= \epsilon \left( \frac{E + p}{\sqrt{s}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.8.214)$$

Ma se l'elettrone è ultrarelativistico, risulta  $p \approx E$  e dunque, per i fotoni di back-scattering abbiamo che

$$E \approx \epsilon \left( \frac{2E}{m + k} \right)^2 \approx \epsilon \left( \frac{2E}{m} \right)^2 = 4\epsilon\gamma_e^2 \quad (3.8.215)$$

dove abbiamo indicato con  $\gamma_e$  il fattore gamma relativistico dell'elettrone nel sistema del Laboratorio.

Nel caso considerato, essendo  $\gamma_e \approx 2000$ , avremmo, per i fotoni di back-scattering una energia dell'ordine di  $40 \text{ MeV}$  ...

Osserviamo che il risultato (3.8.214) ottenuto per l'energia del fotone di back-scattering può essere ricavato anche in modo diretto, usando le formule dell'effetto Doppler longitudinale. Se, infatti, nel sistema del Laboratorio il quadrimpulso del fotone incidente è dato da

$$k^\mu = \epsilon(1, 0, 0, 1) \quad (3.8.216)$$

allora, nel  $CM$  del sistema fotone-elettrone, esso diventa (effetto Doppler longitudinale)

$$k'^\mu = k'(1, 0, 0, 1) \quad (3.8.217)$$

dove

$$\begin{aligned} k' &= \gamma\epsilon - \beta\gamma\epsilon = \epsilon\gamma(1 - \beta) = \epsilon\gamma \left(1 - \frac{\epsilon - p}{E + \epsilon}\right) = \epsilon\gamma \frac{E + p}{E + \epsilon} = \\ &= \epsilon \frac{E + \epsilon}{\sqrt{s}} \frac{E + p}{E + \epsilon} = \epsilon \frac{E + p}{\sqrt{s}} \equiv b \end{aligned} \quad (3.8.218)$$

In caso di back-scattering, accade che il nuovo quadrimpulso del fotone nel  $CM$  diventa

$$k'^\mu = k'(1, 0, 0, -1) \quad (3.8.219)$$

e la trasformazione di Lorentz inversa dal  $CM$  al Laboratorio agisce su questo quadrimpulso con lo stesso fattore moltiplicativo della trasformazione diretta sul quadrimpulso iniziale, ovvero, nel Laboratorio, questo fotone di back-scattering ha un quadrimpulso dato da

$$k''^\mu = k''(1, 0, 0, -1) \quad (3.8.220)$$

dove, in accordo con la (3.8.214), risulta

$$k'' = b \frac{E + p}{\sqrt{s}} = \epsilon \left( \frac{E + p}{\sqrt{s}} \right)^2 \quad (3.8.221)$$

### 3.9 L'urto anelastico

Veniamo ora all'urto anelastico.

Chiaramente, anche in questo caso, si pone il problema del vincolo cinematico sulla reazione (*soglia*) che, in questo caso, ha uno dei due seguenti possibili stati finali

- una sola particella;
- più di due particelle (dunque, tre o più).

Non sembri strano che si consideri anche la possibilità per cui due particelle interagiscono fra loro per produrne una sola: si tratta di un processo meno accademico di quanto potrebbe sembrare<sup>45</sup>.

Vediamo quali sono i vincoli cinematici relativi a un tale processo.

Indichiamo con  $M$  la massa della particella prodotta: evidentemente, si tratta esattamente dell'inverso del processo di decadimento a due corpi.

Affinchè il processo si produca, per quanto concerne unicamente la cinematica, occorre e basta semplicemente che sia

$$\sqrt{s} = M \quad (3.9.222)$$

Va detto comunque che le reazioni in cui una particella  $A$  avente energia  $E$ , si fonde con una particella  $B$  inizialmente ferma, per dare luogo a una terza particella  $C$ , possono avvenire solo perché, almeno la particella  $C$ , non ha una massa univocamente determinata, bensì essa è definita entro una *larghezza* propria  $\Gamma \equiv \hbar/\tau$ , per cui il valore di  $E$  necessario ad  $A$  affinché la reazione possa avvenire non è unico. Se fosse unico, infatti, la probabilità che la reazione potesse realizzarsi sarebbe nulla perché non ci sarebbe spazio delle fasi in grado di garantire la reazione.

Nel caso, per esempio, in cui  $M^*$  abbia larghezza  $\Gamma$ , i valori di  $E$  possibili saranno a loro volta  $\approx (M^* - M) \pm \Gamma$  e la reazione si manifesterà appunto come un picco di risonanza di larghezza  $\Gamma$ .

<sup>45</sup>Di questo tipo è, per esempio, la reazione per cui un fotone è assorbito da un atomo (o da un nucleo), che si porta in uno stato eccitato. In questo caso, se l'atomo è inizialmente fermo e ha massa  $M$ , mentre la massa dell'atomo eccitato è  $M^*$ , l'energia del fotone può essere unicamente pari a  $E = \frac{M^{*2} - M^2}{2M}$  e dopo l'interazione, l'atomo eccitato, di massa  $M^*$ , si muove con la velocità del  $CM$ , ovvero con  $\beta = \frac{E}{M+E}$ .

Infatti deve essere  $(E, E\vec{n}) + (M, \vec{0}) = M^*(\gamma, \gamma\vec{\beta})$ .

L'energia necessaria alla transizione non coincide con la differenza  $M^* - M$ , bensì vale

$$E = \frac{(M^*)^2 - M^2}{2M} = (M^* - M) \frac{2M + M^* - M}{2M} = (M^* - M) + \frac{(M^* - M)^2}{2M}$$

la quale ci dice che, affinché la reazione avvenga, occorre che il fotone supplisca, oltre alla differenza di massa  $\mathcal{E} \equiv M^* - M$ , anche l'inevitabile termine cinetico legato alla conservazione dell'impulso spaziale (moto del baricentro). Questo impulso, per l'atomo eccitato, è quello del fotone, ovvero  $p = E$ , da cui origina il termine  $\frac{\mathcal{E}^2}{2M}$  che, nel caso di atomo non relativistico, può essere approssimato appunto con  $\frac{p^2}{2M^*}$ .

Consideriamo adesso l'altro caso di urto anelastico, ovvero quello in cui le particelle nello stato finale sono più di due e consideriamo, per esempio, quello in cui esse siano tre, cioè la reazione

$$A + B \rightarrow C + D + F \quad (3.9.223)$$

Evidentemente, nel sistema del centro di massa, sarà

$$\begin{aligned} (\sqrt{s}, \vec{0}) &= (E_C, \vec{p}_C) + (E_D, \vec{p}_D) + (E_F, \vec{p}_F) \\ \Rightarrow \sqrt{s} &= E_C + E_D + E_F; \quad \vec{p}_C + \vec{p}_D + \vec{p}_F = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.9.224)$$

da cui segue immediatamente che, essendo  $E \geq m$ , deve essere

$$\sqrt{s} \geq m_C + m_D + m_F \equiv \sqrt{s_{th}} \quad (3.9.225)$$

potendo, la condizione sull'impulso spaziale, essere soddisfatta con tutti gli impulsi dei prodotti identicamente nulli (a soglia).

Nel caso particolare in cui le due particelle incidenti si ritrovino anche nello stato finale, insieme a una terza particella, ovvero accada che

$$A + B \rightarrow A + B + F \quad (3.9.226)$$

per la (3.9.225) si ha che la soglia di produzione di  $F$  è posta a

$$s_{th} = (m_A + m_B + m_F)^2 \quad (3.9.227)$$

e, siccome

$$s = (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2p_A p_B$$

abbiamo che la soglia di reazione può essere scritta nel seguente modo *invariante*

$$\begin{aligned} s_{th} &= (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2p_A p_B = (m_A + m_B + m_F)^2 = \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_F^2 + 2m_A m_B + 2m_F(m_A + m_B) \\ \Rightarrow 2p_A p_B &= m_F^2 + 2m_A m_B + 2m_F(m_A + m_B) \end{aligned} \quad (3.9.228)$$

Supponiamo ora che  $B$  sia ferma nel sistema del laboratorio e vediamo cosa diventa la (3.9.228). Indicando con  $\mathcal{E}_A$  l'energia di  $A$  nel laboratorio, abbiamo

$$2p_A p_B = 2\mathcal{E}_A m_B \quad (3.9.229)$$

e quindi la (3.9.228) stabilisce che la soglia di produzione di  $F$  si raggiunge quando

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_A m_B &\geq m_F^2 + 2m_A m_B + 2m_F(m_A + m_B) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_A &\geq m_A + \frac{m_F}{2m_B}(m_F + 2m_A + 2m_B) \end{aligned} \quad (3.9.230)$$

Questa relazione, nel caso in cui  $A$  e  $B$  abbiano la stessa massa  $M$  (per esempio, nel caso del processo di scattering di due protoni con produzione di un  $\pi^0$  ...), posto  $\mathcal{E}_A \equiv \gamma M$  ed  $m_F = m$ , fornisce la condizione

$$2\gamma M^2 \geq m^2 + 2M^2 + 4mM \quad (3.9.231)$$

ovvero

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 + 4\left(\frac{m}{M}\right) + 2(1 - \gamma) \leq 0 \quad (3.9.232)$$

la quale, fissata l'energia della particella incidente, cioè fissato  $\gamma$ , può essere vista come una disequazione di secondo grado nella massa  $m$  della particella che vogliamo produrre. La disequazione è soddisfatta nell'intervallo compreso fra le radici dell'equazione, che sono, evidentemente, le seguenti

$$\frac{m}{M} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8(1 - \gamma)}}{2} \quad (3.9.233)$$

e quindi le soluzioni accettabili, dovendo essere positive, sono le seguenti

$$0 \leq \frac{m}{M} \leq -2 + \sqrt{2(1 + \gamma)} \quad (3.9.234)$$

Fissato  $\gamma$ , non si potrà dunque produrre alcuna massa  $m$  superiore a  $m_{th}$  data da

$$m \leq m_{th} \equiv M \left(-2 + \sqrt{2(1 + \gamma)}\right) \quad (3.9.235)$$

Osserviamo adesso che se  $A$  è non relativistica, allora  $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$  e dunque

$$m_{th} \approx M \left[-2 + \sqrt{2\left(2 + \frac{\beta^2}{2}\right)}\right] = M \left[-2 + 2\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}}\right] \approx M \frac{\beta^2}{4} \quad (3.9.236)$$

in accordo con il fatto che, a soglia, l'energia nello stato iniziale dovrà uguagliare la somma delle masse presenti nello stato finale e supplire anche all'inevitabile (conservazione dell'impulso!) energia cinetica<sup>46</sup> delle stesse, cioè

$$M + M \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = (2M + m_{th}) + \frac{1}{2} \frac{(M\beta)^2}{(2M + m_{th})} \quad (3.9.237)$$

da cui

$$2M + M \frac{\beta^2}{2} \approx 2M + m_{th} + \frac{M^2 \beta^2}{4M} \Rightarrow m_{th} = M \frac{\beta^2}{4} \quad (3.9.238)$$

In questo caso, dunque, il *costo* per mantenere in moto il  $CM$  del sistema è pari a metà dell'energia cinetica disponibile nel Laboratorio. Dobbiamo

<sup>46</sup>Classicamente abbiamo infatti che  $E_{cin} = p^2/(2M_{tot}) = (M\beta)^2/[2(2M + m)]$ .

disporre di  $M\beta^2/2$  per poter creare una massa  $M\beta^2/4$  perché metà energia cinetica *resta indisponibile* per creare nuova materia !

Le cose, poi, vanno anche molto peggio nel caso ultrarelativistico, infatti se  $\gamma \gg 1$ , si ha

$$m_{th} = M(-2 + \sqrt{2 + 2\gamma}) \approx M\sqrt{2\gamma} \quad (3.9.239)$$

e se confrontiamo questa quantità con l'energia presente nel sistema del laboratorio

$$\mathcal{E} = M + \gamma M \approx \gamma M \quad (3.9.240)$$

vediamo che il processo di produzione di nuova materia per urto su bersaglio fisso risulta essere estremamente inefficiente.



Figura 3.14: Tunnel dell'SPS del CERN (3.8 Km di circonferenza): accelera protoni fino a 450 GeV

Per esempio, il processo di scattering (acceleratore SPS del CERN, a bersaglio fisso) di un protone da 450 GeV contro un protone fermo

( $M \approx 0.938 \text{ GeV}$ ) ha una soglia di produzione che non può comunque eccedere

$$m \approx 0.938(\sqrt{960} - 2) \approx 27.2 \text{ GeV} \quad (3.9.241)$$

La ragione è che dei  $451 \text{ GeV}$  presenti nel sistema in interazione, almeno 422 sono, in realtà indisponibili, per il fatto che servono a garantire il moto del centro di massa del sistema.

Un processo molto più efficiente per creare nuova materia è quello dell'urto *frontale*, così come accade, per esempio, nei collisionatori (*colliders*), fra particelle aventi impulsi opposti.

In questo caso, il sistema del Laboratorio coincide con il sistema del  $CM$ , per cui abbiamo

$$\sqrt{s} = 2M\gamma \quad (3.9.242)$$

e la condizione di soglia diviene semplicemente

$$m_{th} = 2M(\gamma - 1) \quad (3.9.243)$$

ovvero, adesso, dal punto di vista cinematico, a priori *tutta* l'energia è disponibile per creare nuova materia<sup>47</sup>.

Per esempio, al LEP, nella sua prima fase venivano fatti scontrare elettroni e positroni con una energia di poco superiore a  $45 \text{ GeV}$  per fascio per produrre la  $Z^0$ .

Se avessimo voluto produrre la  $Z^0$  facendo urtare un positrone contro un elettrone fermo, il positrone avrebbe dovuto possedere una energia<sup>48</sup> tale che

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= 91.19 \text{ GeV} \approx m_e \sqrt{2\gamma} \Rightarrow \sqrt{2\gamma} \approx \frac{91188}{0.511} = 178000 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma \approx 1.6 \times 10^{10} \end{aligned} \quad (3.9.244)$$

ovvero una energia  $\mathcal{E} = \gamma m_e = 1.6 \times 10^{10} \times 0.5 \text{ MeV} = 0.8 \times 10^{10} \text{ MeV} = 0.8 \times 10^{16} \text{ eV}$ , al di là del bene e del male ...!

---

<sup>47</sup>Come mai, allora, per produrre la  $Z^0$ , la cui massa è  $M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$  ( $\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}$ ), al collider del CERN si facevano scontrare protoni e antiprotoni con un'energia di  $420 \text{ GeV}$  per fascio ?

<sup>48</sup>In questo caso elettrone e positrone non sono più presenti nello stato finale; ma, poiché siamo giunti alle conclusioni generali di cui sopra trascurando, in buona sostanza, la presenza nello stato finale delle masse delle particelle incidenti ancorché presenti, queste conclusioni risultano adesso valide a maggior ragione !

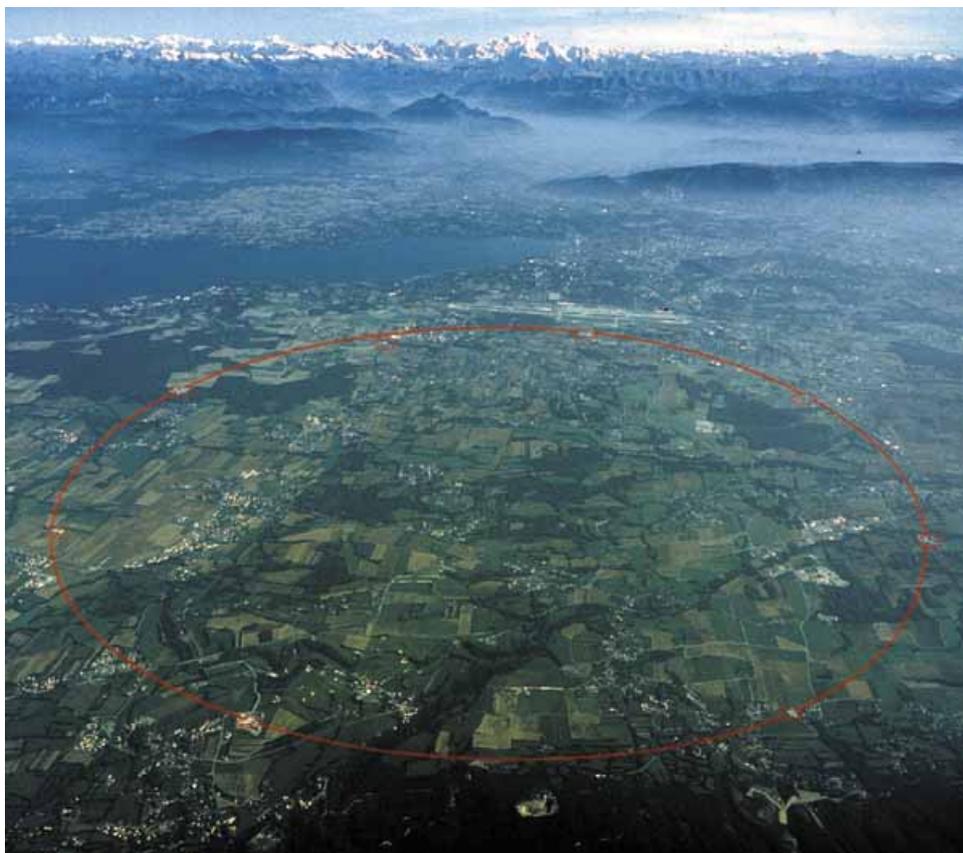


Figura 3.15: Vista aerea del LEP al CERN (27 Km di circonferenza), in grado di accelerare elettroni e positroni dapprima fino a 50 GeV e poi fino a 105 GeV. LEP ha cessato di funzionare a fine 2000 e il suo tunnel ospita adesso LHC.

In *LHC*, sono stati realizzati, nel 2010, urti fra protoni a una energia di  $3.5 + 3.5 \text{ TeV}$ , ovvero a una  $\sqrt{s} = 7 \text{ TeV}$ , passati poi nel 2012 a  $4 + 4 \text{ TeV}$ , per diventare quindi  $7 + 7 \text{ TeV}$  nel 2016. Per poter realizzare quest'ultimo valore di  $\sqrt{s}$  su protone fermo, occorrerebbe che quello in moto avesse un gamma tale che

$$\sqrt{s} \approx M \sqrt{2\gamma} = 14 \text{ TeV} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\gamma} = 1.5 \cdot 10^4 \quad (3.9.245)$$

ovvero  $\gamma = 1.1 \cdot 10^8$ , corrispondente a una energia del protone incidente di circa  $10^{17} \text{ eV}$ , impossibile da raggiungere con le attuali tecnologie (ma presente, come vedremo, nei *raggi cosmici*).

### 3.10 Trasformazione di una distribuzione

Considereremo adesso il problema di come cambia una distribuzione in impulso di particelle di massa  $m$  assegnata, a causa di una trasformazione di riferimento.

Supponiamo dunque che, in un certo riferimento inerziale, sia data una distribuzione di particelle, che scriveremo nella forma

$$dn = N f(\vec{p}) d^3p \Rightarrow d\mathcal{P} = f(\vec{p}) d^3p \quad (3.10.246)$$

dove  $f(\vec{p})$  è la funzione di distribuzione associata, cioè la distribuzione di probabilità, normalizzata appunto in modo che

$$\int f(\vec{p}) d^3p = 1 \quad (3.10.247)$$

Secondo la Relatività di Galileo, osservando il sistema di particelle assegnato da un altro riferimento inerziale, la distribuzione  $f'$  che lo descrive è semplicemente ottenuta dalla  $f$  attraverso una traslazione nello spazio dell'impulso, infatti, nel nuovo riferimento avremo semplicemente che

$$\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{v}$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità relativa del secondo riferimento rispetto al primo.

Ne segue dunque che

$$d^3p' = d^3p$$

e quindi che

$$f(\vec{p}) d^3p = f(\vec{p}' + m\vec{v}) d^3p' \equiv f'(\vec{p}') d^3p' \quad (3.10.248)$$

dove si è definito appunto

$$f'(\vec{p}') \equiv f(\vec{p}(\vec{p}')) = f(\vec{p}' + m\vec{v}) \quad (3.10.249)$$

In meccanica relativistica, la prima differenza a cui ci troviamo di fronte è che l'elemento di volume  $d^3p$  *non* è invariante per trasformazioni di Lorentz. Una quantità, legata in modo semplice a  $d^3p$  che, fissata la particella e quindi la sua massa  $m$ , è invariante per trasformazioni di Lorentz è, invece, la quantità

$$d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0) \quad (3.10.250)$$

dove la  $\delta$  è la funzione  $\delta$  di Dirac, mentre la funzione  $\theta(p^0)$  vale 1 quando  $p^0 > 0$ , mentre vale 0 altrimenti. E' chiaro che la (3.10.250) è una quantità invariante, essendo il prodotto di tre scalari che sono

- $d^4p$  : esso è scalare perchè le trasformazioni di Lorentz hanno determinante 1 e quindi lo jacobiano della trasformazione  $J = \left| \frac{\partial p}{\partial p'} \right| = |\det(\Lambda_{Lorentz})| = 1$ ;

- $\delta(p^\mu p_\mu - m^2)$ , in quanto funzione di scalari;
- $\theta(p^0)$ , in quanto il segno di  $p^0$  non cambia per trasformazioni di  $\mathcal{L}_+^\dagger$ , come abbiamo già dimostrato per i quadrivettori time-like come il quadrimpulso.

Più esplicitamente, abbiamo

$$\begin{aligned} d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0) &= d^3p dp^0 \delta(p_0^2 - p^2 - m^2) \theta(p^0) = \\ &= d^3p dp^0 \theta(p^0) \left[ \frac{\delta(p^0 - \sqrt{m^2 + p^2})}{2\sqrt{m^2 + p^2}} + \frac{\delta(p^0 + \sqrt{m^2 + p^2})}{2\sqrt{m^2 + p^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.10.251)$$

dove abbiamo usato il fatto che se  $x_1, \dots, x_n$  sono le radici dell'equazione  $f(x) = 0$ , allora se  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \neq 0$ , risulta

$$\delta(f(x)) dx = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \right|} dx \quad (3.10.252)$$

Integrando<sup>49</sup> in  $dp^0$ , risulta allora che, siccome  $\theta(p^0)$  è nullo se  $p^0$  è negativo, il secondo addendo dell'espressione (3.10.251) non contribuisce e quindi risulta

$$\begin{aligned} d^3p \int dp^0 \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0) &= d^3p \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{m^2 + p^2})}{2\sqrt{m^2 + p^2}} = \\ &= \frac{d^3p}{2E} \end{aligned} \quad (3.10.253)$$

dove abbiamo posto, al solito  $E \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$  ed è inteso altresì che, in qualunque punto della funzione integranda comparisse  $p^0$ , occorre sostituirlo con  $E = E(p)$ .

Dunque, se è vero che  $d^3p$  non è invariante di Lorentz,  $\frac{d^3p}{2E}$  lo è<sup>50</sup> (naturalmente lo sarebbe anche senza il 2 al denominatore ...).

<sup>49</sup>Evidentemente, per garantire che anche il risultato dell'integrazione sia invariante di Lorentz, occorre accertarci sia che la funzione integranda risulti scalare come pure che anche il volume di integrazione lo sia. Nel caso in questione, stiamo integrando su tutti i possibili valori di  $p^0$ , ovvero per  $p^0 \geq m$ , e questo è evidentemente un "volume" Lorentz-invariante.

<sup>50</sup>Possiamo giungere allo stesso risultato secondo cui  $\frac{d^3p}{E}$  è invariante, anche in un altro modo, ed è quello di procedere direttamente osservando che, a parte rotazioni, che lasciano comunque sia  $d^3p$  che  $E$  invarianti, fra i due riferimenti ci sarà di mezzo un boost di Lorentz che possiamo assumere avvenga lungo  $z$  (a meno di rotazioni che sono ininfluenti). A causa del boost, avremo allora

$$E' = \gamma E + \beta \gamma p_z; \quad p'_x = p_x; \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = \beta \gamma E + \gamma p_z$$

Ripartiamo, allora, dalla distribuzione data:

$$dn = N f(\vec{p}) d^3p \quad \Leftrightarrow \quad d\mathcal{P} = f(\vec{p}) d^3p \quad (3.10.254)$$

che fornisce la probabilità che una particella si trovi nell'elemento di volume  $d^3p$ , quando viene osservata nel riferimento di partenza  $RS$ . Visto quanto concluso circa l'invarianza degli elementi di volume, possiamo riscrivere la (3.10.254) in modo che compaia l'elemento di volume invariante, ponendo

$$d\mathcal{P} = f(\vec{p}) d^3p = 2E f(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \equiv F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \quad (3.10.255)$$

dove abbiamo definito

$$F(\vec{p}) \equiv 2E f(\vec{p}) \quad (3.10.256)$$

In un altro sistema di riferimento inerziale  $RS'$  avremo, in generale

$$\vec{p}' = \vec{G}(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = \vec{G}^{-1}(\vec{p}') \quad (3.10.257)$$

dove la funzione  $G$  è determinata unicamente dalla trasformazione di Lorentz e dalla massa  $m$  della particella<sup>51</sup>.

Per conoscere l'espressione della distribuzione delle particelle nel riferimento  $RS'$  ripartiamo dalla definizione iniziale, secondo cui, in  $RS$ , avevamo

$$dn = N F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \quad (3.10.258)$$

---

per cui lo jacobiano (si ricordi che  $E$  ed  $E'$  non sono indipendenti da  $p$  e  $p'$ , risultando  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$  e, analogamente  $E' = \sqrt{m^2 + p'^2}$ ) associato al cambiamento di variabile risulta dato da

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p'}{\partial p} \right| &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma \frac{p_x}{E} & \beta\gamma \frac{p_y}{E} & \beta\gamma \frac{p_z}{E} + \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \gamma \left( 1 + \beta \frac{p_z}{E} \right) = \frac{\gamma}{E} (E + \beta p_z) = \frac{E'}{E} \end{aligned}$$

ovvero

$$d^3p' = \left| \frac{\partial p'}{\partial p} \right| d^3p \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'} \quad c.v.d.$$

<sup>51</sup>Per esempio, per un boost lungo l'asse  $z$ , si ha

$$\begin{aligned} p'_x &= G_x(\vec{p}) = p_x \\ p'_y &= G_y(\vec{p}) = p_y \\ p'_z &= G_z(\vec{p}) = \gamma(p_z + \beta E) = \gamma \left( p_z + \beta \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \right) \\ E' &\equiv \sqrt{m^2 + p'^2} \end{aligned}$$

dove  $dn$  rappresenta, dato un numero complessivo<sup>52</sup>  $N$  di particelle, quelle che hanno in  $RS$  impulso compreso fra  $\vec{p}$  e  $\vec{p} + d\vec{p}$ , con  $d^3p = dp_1 dp_2 dp_3$ .

Evidentemente, nel riferimento  $RS'$  il numero  $dn$  di particelle che stanno nel volume  $d^3p'$  trasformato di  $d^3p$  sarà lo stesso che in  $RS$ ; dunque, dato che, fissata la massa,  $\vec{p}$  identifica completamente la cinematica della particella ed  $N$  è uno scalare, potremo scrivere senz'altro ancora che anche in  $RS'$  sarà

$$dn = N F'(\vec{p}') \frac{d^3p'}{2E'} \quad (3.10.259)$$

dove  $\vec{p}'$  è il trasformato di  $\vec{p}$ .

Uguagliando allora la (3.10.258) con la (3.10.259) e ricordando che  $\frac{d^3p}{2E} = \frac{d^3p'}{2E'}$ , ne segue finalmente che

$$F'(\vec{p}') = F(\vec{p}) = F(G^{-1}(\vec{p}')) \Leftrightarrow F' = F \circ G^{-1} \quad (3.10.260)$$

che è l'equivalente relativistico della relazione classica (3.10.248) e dimostra che la distribuzione  $F$  definita attraverso la (3.10.255), è invariante per trasformazioni di Lorentz, ovvero è una funzione scalare.

Si osservi infine che per basse velocità relative fra i sistemi di riferimento e basse velocità delle particelle presenti nel sistema considerato, essendo allora

$$E \approx E' \approx m \quad (3.10.261)$$

ritroviamo, a meno del fattore di scala altrimenti irrilevante  $\frac{1}{2m}$ , la conclusione "galileiana".

---

<sup>52</sup>Evidentemente questo numero di particelle non cambia al cambiare del riferimento, ovvero esso è uno scalare di Lorentz.

### 3.11 Decadimento di una particella in volo

Supponiamo adesso che, in un riferimento assegnato  $RS$ , siano presenti particelle ferme, che decadono in modo isotropo. Se il decadimento avviene in due particelle  $C$  e  $D$ , la distribuzione associata a ciascuna di loro sarà *monocromatica* (siamo nel riferimento del  $CM$  ...).

Ognuna possiede lo stesso impulso  $b$ , legato alla massa  $M$  della particella instabile che decade ( $M = \sqrt{s}$ !) e alle masse  $m_C$  ed  $m_D$  delle due particelle<sup>53</sup> prodotte, dalla consueta relazione (3.7.144), ovvero

$$b = \frac{\sqrt{(M^2 - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2}}{2M} \quad (3.11.262)$$

mentre, per la (3.7.145), abbiamo che

$$E_C = \sqrt{m_C^2 + b^2} = \frac{M^2 + m_C^2 - m_D^2}{2M} \quad (3.11.263)$$

$$E_D = \sqrt{m_D^2 + b^2} = \frac{M^2 + m_D^2 - m_C^2}{2M} \quad (3.11.264)$$

la cui somma coincide, ovviamente, con  $M$ .

Consideriamo adesso, sempre nel riferimento  $RS$  del  $CM$ , la distribuzione in impulso di una delle due particelle prodotte, per esempio la particella  $C$ , e indichiamo semplicemente con  $m$  la sua massa.

Essendo per ipotesi il decadimento isotropo, risulterà

$$dn = N \delta(p - b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (3.11.265)$$

e la particella avrà quindi, in generale, un quadrimpulso<sup>54</sup> dato da

$$p^\mu = (E, p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta); \quad E = \sqrt{m^2 + p^2} \quad (3.11.266)$$

Quanto alla distribuzione di probabilità, dalla (3.11.265) segue evidentemente che

$$d\mathcal{P} = \delta(p - b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (3.11.267)$$

<sup>53</sup>Ricordiamo che il  $Q$  della reazione è definito da

$$Q \equiv M - m_C - m_D$$

e quindi rappresenta l'energia di massa che il decadimento trasformerà in energia cinetica dei prodotti, nel  $CM$ .

<sup>54</sup>La presenza della delta impone poi che  $p = b$  ...

ovvero, in termini della funzione di distribuzione Lorentz-invariante  $F(\vec{p})$  definita dalla relazione

$$d\mathcal{P} \equiv F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \quad (3.11.268)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} &= \delta(p-b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \Rightarrow F(\vec{p}) \frac{p^2}{2E} dp d\Omega = \delta(p-b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \\ \Rightarrow F(\vec{p}) &= \frac{2E}{4\pi p^2} \delta(p-b) \end{aligned} \quad (3.11.269)$$

Supponiamo ora di voler conoscere la forma assunta dalla distribuzione descritta in  $RS$  dalla (3.11.269), quando si osservi il processo di decadimento da un altro riferimento inerziale  $RS'$ , in moto rispetto a  $RS$  con velocità  $\vec{\beta} = (0, 0, -\beta)$ . Il boost di Lorentz da  $RS$  in  $RS'$ , è allora il seguente

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.11.270)$$

per cui, il generico quadrimpulso  $(E, \vec{p})$  in  $RS$  è visto in  $RS'$  come

$$(E', \vec{p}') = (\gamma E + \beta\gamma p_z, p_x, p_y, \beta\gamma E + \gamma p_z) \quad (3.11.271)$$

ovvero, nel caso di una particella della distribuzione considerata, in cui il quadrimpulso in  $RS$  è dato dalla (3.11.266), risulta

$$(E', \vec{p}') = (\gamma E + \beta\gamma p \cos \theta, p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, \beta\gamma E + \gamma p \cos \theta) \quad (3.11.272)$$

dove  $\theta$  e  $\phi$  sono le coordinate polari della particella definite in  $RS$ .

Da quanto precede, essendo  $F(\vec{p}) = F'(\vec{p}')$ , quanto alla distribuzione delle particelle in  $RS'$ , abbiamo allora che

$$d\mathcal{P} = F'(\vec{p}') \frac{d^3p'}{2E'} = \frac{2E}{4\pi p^2} \delta(p-b) \frac{d^3p'}{2E'} \quad (3.11.273)$$

dove le quantità  $E$  e  $p$  che compaiono nella (3.11.273) devono essere considerate entrambe funzioni di  $\vec{p}'$ . Queste funzioni si ottengono semplicemente invertendo la (3.11.271), per cui si ha<sup>55</sup>

$$E = \gamma E' - \beta\gamma p' \cos \theta' \quad (3.11.274)$$

da cui

$$p^2 = E^2 - m^2 \Rightarrow p = \sqrt{[\gamma E' - \beta\gamma p' \cos \theta']^2 - m^2} \quad (3.11.275)$$

<sup>55</sup>Basta per questo applicare  $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$  al quadrivettore  $(E', \vec{p}')$  ...

dove  $\theta'$  indica l'angolo polare in  $RS'$  associato a  $\vec{p}'$ .

Esplicitamente, risulta

$$d\mathcal{P} = \frac{\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta'}{2\pi[(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2]} \delta(\sqrt{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} - b) \cdot \frac{p'^2}{2E'} dp' d\Omega' \quad (3.11.276)$$

la cui integrazione nell'angolo azimutale  $\phi'$ , data la simmetria assiale intorno a  $z$ , produce semplicemente un fattore moltiplicativo  $2\pi$ , per cui<sup>56</sup>, in definitiva, si ha

$$d\mathcal{P} = \frac{\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta'}{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} \delta(\sqrt{[(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2]} - b) \cdot \frac{p'^2}{2E'} dp' d(-\cos \theta') \quad (3.11.277)$$

la quale diventa un po' più comprensibile se la integriamo in una qualsiasi delle due variabili da cui continua a dipendere, cioè  $p'$  oppure  $\cos \theta'$ .

### Distribuzione in energia

La distribuzione in energia si ottiene integrando la (3.11.277) nella variabile angolare  $d(\cos \theta')$  e questo conduce al risultato già noto di una distribuzione piatta.

Riscriviamo infatti la (3.11.277) in termini delle variabili  $E$  e  $p$  di cui alle (3.11.274) e (3.11.275): abbiamo allora

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2}{2E'} dp' d(-\cos \theta') \quad (3.11.278)$$

Osserviamo adesso che, a  $p'$  fissato, la (3.11.274) stabilisce che<sup>57</sup>

$$dE = \beta \gamma p' d(-\cos \theta') \Rightarrow d(-\cos \theta') = \frac{dE}{\beta \gamma p'} \quad (3.11.279)$$

Sostituendo allora nella (3.11.278), si ha

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2}{2E'} dp' \frac{dE}{\beta \gamma p'} = \frac{E dE}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2 dp'}{2E' \beta \gamma p'} \quad (3.11.280)$$

D'altronde, essendo

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow 2E dE = 2p dp \quad (3.11.281)$$

<sup>56</sup>Si ricordi che  $d\Omega' \equiv \sin \theta' d\theta' d\phi'$  per cui, dopo l'integrazione in  $d\phi'$ , dell'elemento di angolo solido  $d\Omega'$  resta solamente la quantità  $\sin \theta' d\theta' = d(-\cos \theta')$  ...

<sup>57</sup>Questo corrisponde più propriamente a dire che, al posto delle variabili  $(p', \cos \theta')$  usiamo le variabili  $(p', E)$  e lo jacobiano della trasformazione di variabili è appunto  $J = \frac{1}{\beta \gamma p'}$ .

risulta dunque

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{p dp}{p^2} \delta(p-b) \frac{p'^2 dp'}{2E' \beta \gamma p'} = \frac{dp}{p} \delta(p-b) \frac{p' dp'}{2E' \beta \gamma} = \\ &= \frac{dp}{p} \delta(p-b) \frac{E' dE'}{2E' \beta \gamma} = \frac{dp}{p} \delta(p-b) \frac{dE'}{2\beta \gamma} \end{aligned} \quad (3.11.282)$$

che, integrata in  $dp$ , fornisce finalmente

$$d\mathcal{P} = \frac{dE'}{2b \beta \gamma} \quad (3.11.283)$$

la quale afferma appunto che una distribuzione di particelle di massa  $m$  e modulo di impulso  $b$ , che è isotropa e monocromatica in  $RS$ , appare in  $RS'$  distribuita in modo *piatto* in energia, fra i valori estremi<sup>58</sup>

$$E'_{min} = \gamma E - \beta \gamma b \quad E'_{max} = \gamma E + \beta \gamma b \quad (3.11.284)$$

### Distribuzione angolare

Volendo determinare ora la distribuzione angolare, riprendiamo l'espressione (3.11.277), secondo cui, sempre usando le variabili implicite  $E$  e  $p$ , come si è già visto, si ha

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p-b) \frac{p'^2}{2E'} dp' d(-\cos \theta') \quad (3.11.285)$$

Occorre adesso integrare l'espressione di cui sopra nella variabile  $dp'$ . Come sappiamo, quanto alla delta, in generale risulta

$$\delta(p-b) dp' \equiv \sum_i \frac{\delta(p' - p'_i)}{\left| \frac{dp}{dp'} \right|} dp' \quad (3.11.286)$$

dove  $p'_i$  sono radici dell'equazione  $p - b = 0$ .

D'altronde, per la (3.11.275), risulta

$$p = \sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta']^2 - m^2}; \quad \text{con} \quad E' = \sqrt{p'^2 + m^2} \quad (3.11.287)$$

e dunque

$$\frac{dp}{dp'} = \frac{2[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta'] \left( \gamma \frac{dE'}{dp'} - \beta \gamma \cos \theta' \right)}{2\sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta']^2 - m^2}} \quad (3.11.288)$$

<sup>58</sup>Si noti che, come deve essere, risulta

$$\int_{E'_{min}}^{E'_{max}} d\mathcal{P} = \int_{\gamma E - \beta \gamma b}^{\gamma E + \beta \gamma b} \frac{dE'}{2b \beta \gamma} = 1$$

Siccome però

$$\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta' = E \quad (3.11.289)$$

$$\sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta']^2 - m^2} = b \quad (3.11.290)$$

$$\frac{dE'}{dp'} = \frac{p'}{E'} \quad (3.11.291)$$

ecco che la (3.11.288) diventa

$$\frac{dp}{dp'} = \frac{\gamma E \left( \frac{p'}{E'} - \beta \cos \theta' \right)}{b} = \frac{\gamma E}{b E'} (p' - \beta E' \cos \theta') \quad (3.11.292)$$

Bisogna ora determinare il punto o i punti dove calcolare la derivata di cui sopra e per questo è necessario, come già detto, trovare gli zeri della funzione  $p - b = 0$ , cioè risolvere in funzione di  $p'$  l'equazione seguente

$$p - b = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} - b = 0 \quad (3.11.293)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} - b = 0 &\Rightarrow (\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 = m^2 + b^2 \\ \Rightarrow \gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta' = \sqrt{m^2 + b^2} &\equiv E \end{aligned}$$

ovvero che

$$\gamma E' \equiv \gamma \sqrt{m^2 + p'^2} = E + \beta \gamma p' \cos \theta' \quad (3.11.294)$$

e dunque, posto

$$\epsilon \equiv \frac{E}{\gamma} \quad (3.11.295)$$

risulta

$$\sqrt{m^2 + p'^2} = \epsilon + \beta p' \cos \theta' \quad (3.11.296)$$

da cui otteniamo

$$m^2 + p'^2 = \epsilon^2 + \beta^2 p'^2 \cos^2 \theta' + 2 \epsilon \beta p' \cos \theta' \quad (3.11.297)$$

e cioè

$$p'^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') - 2 \epsilon \beta p' \cos \theta' + m^2 - \epsilon^2 = 0 \quad (3.11.298)$$

L'equazione di secondo grado in  $p'$  così ottenuta ha per discriminante la quantità seguente

$$\begin{aligned} \Delta/4 &= \epsilon^2 \beta^2 \cos^2 \theta' - (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') (m^2 - \epsilon^2) = \\ &= \epsilon^2 \beta^2 \cos^2 \theta' + \epsilon^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') - m^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') = \\ &= \epsilon^2 - m^2 + m^2 \beta^2 \cos^2 \theta' \end{aligned} \quad (3.11.299)$$

A priori, non è detto che l'espressione (3.11.299) sia positiva, nel qual caso, evidentemente, significa che *non* esistono soluzioni in  $p'$ , per quel dato valore di  $\epsilon$  e  $\cos \theta'$ , dovendo, queste soluzioni, essere comunque reali positive.

D'altronde, è evidente che affinché  $\Delta$  sia non negativo per qualunque valore di  $\cos \theta'$ , e quindi possa esistere una soluzione in  $p'$  per ogni suo valore, occorre e basta che

$$\epsilon^2 - m^2 \geq 0 \quad (3.11.300)$$

ovvero che

$$\epsilon \geq m \Leftrightarrow E \geq m \gamma \quad (3.11.301)$$

dove  $E \equiv m \gamma_0$  è l'energia della particella nel sistema  $RS$ , per cui la (3.11.301) si può scrivere anche come

$$\sqrt{m^2 + b^2} \equiv m \gamma_0 \geq m \gamma \Leftrightarrow \beta_0 \geq \beta \quad (3.11.302)$$

ovvero ritroviamo il ben noto risultato secondo cui, affinché tutti gli angoli  $\theta'$  siano possibili, occorre e basta che la velocità relativa fra i due riferimenti  $\vec{\beta}$  sia in modulo inferiore a quello delle velocità  $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{b}}{m \gamma_0}$  delle particelle in  $RS$ .

Supponiamo<sup>59</sup> dunque di essere nelle condizioni per cui<sup>60</sup>

$$\epsilon \geq m$$

ovvero nell'ipotesi in cui, quindi  $\Delta \geq 0 \quad \forall \theta'; \quad 0 \leq \theta' < \pi$ .

Siccome il coefficiente del termine in  $p'^2$  dell'equazione di secondo grado (3.11.298) è positivo mentre il termine noto della stessa equazione ha il segno di  $m^2 - \epsilon^2$ , ovvero ha segno negativo, le due soluzioni in  $p'$  hanno segno discorde: ma d'altronde  $p'$  è il modulo di un vettore e non

<sup>59</sup>Nel caso in cui  $m^2 > \epsilon^2$ , ovvero nel caso in cui non tutti i  $\theta'$  sono possibili, ma solo quelli del primo quadrante inferiori ad un opportuno  $\theta'_{max}$ , definito dalle condizioni  $\theta'_{max} \geq 0$ ,  $\epsilon^2 - m^2(1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{max})' = 0$ , le soluzioni  $p'_+$  e  $p'_-$  dell'equazione di secondo grado (3.11.298) sono, per quanto osservato prima, dello stesso segno. Siccome però, quando  $\theta'$  è nel primo quadrante  $p'_+$ , per come è definito, non può che essere positivo, ne segue che anche  $p'_-$  deve esserlo. Ci troviamo così nella situazione in cui, dunque, non tutti i  $\theta'$  sono possibili, ma per quelli che lo sono le soluzioni in  $p'$  sono due e distinte, per cui, corrispondentemente, la (3.11.286) non è fatta dal solo termine riportato ma dalla somma di quello con l'analogo per  $p'_-$ .

<sup>60</sup>Si ricordi che ci troviamo certamente in questa ipotesi ogni qual volta la particella abbia massa nulla e dunque viaggi alla velocità della luce in ogni riferimento. Evidentemente, infatti, in questo caso ci troviamo sempre nella condizione di cui le velocità soddisfano la (3.11.302), ovvero ci troviamo nel caso in cui la particella ha, in  $RS$ , velocità superiore a quella relativa fra i due riferimenti...

può che essere positivo per cui solo una soluzione è accettabile. Essa non può dunque essere che  $p'_+$ , definita da

$$p'_+ = \frac{\epsilon \beta \cos \theta' + \sqrt{\Delta/4}}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'} \quad (3.11.303)$$

visto che  $p'_+ > p'_-$ , per definizione.

In definitiva, dunque, la (3.11.285) può essere riscritta come<sup>61</sup>

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p' - p'_+) \frac{b E'}{\gamma E(p' - \beta E' \cos \theta')} \frac{p'^2}{2E'} dp' \sin \theta' d\theta' \quad (3.11.312)$$

<sup>61</sup>In questo modo si sta implicitamente assumendo che la quantità  $\frac{\gamma E}{p E'} (p' - \beta E' \cos \theta')$  sia comunque sempre positiva. Questo è vero se e solo se, evidentemente, risulta

$$p' - \beta E' \cos \theta' > 0 \quad (3.11.304)$$

Per dimostrare che questo è effettivamente vero, procediamo per assurdo e supponiamo che la (3.11.304) sia falsa, ovvero che risulti

$$p' - \beta E' \cos \theta' \leq 0 \quad (3.11.305)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} p' - \beta E' \cos \theta' \leq 0 &\Rightarrow (p')^2 \leq \beta E' p' \cos \theta' \Leftrightarrow E'^2 - m^2 \leq \beta p' E' \cos \theta' \\ &\Leftrightarrow E'^2 - \beta p' E' \cos \theta' \leq m^2 \Leftrightarrow E' (E' - \beta p' \cos \theta') \leq m^2 \end{aligned} \quad (3.11.306)$$

Usando la (3.11.289), abbiamo così che dalla (3.11.305) ne segue necessariamente che

$$\frac{E E'}{\gamma} \leq m^2 \Leftrightarrow E E' \leq \gamma m^2 \quad (3.11.307)$$

Dimostriamo che questa disuguaglianza è assurda. Consideriamo per questo il quadripulso della particella data nel  $CM$ . Esso è pari a  $p^\mu = m\gamma_0(1, \vec{\beta}_0)$  dove  $m\gamma_0 \equiv E$ .

Nel riferimento del laboratorio, l'energia diviene  $E' = m\gamma_0\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}_0)$  dove  $\vec{\beta}$  è la velocità del riferimento del  $CM$  vista dal sistema del laboratorio. Dunque

$$E' \geq m\gamma_0\gamma(1 - \beta\beta_0) \Leftrightarrow E E' \geq m\gamma_0\gamma(1 - \beta\beta_0) m\gamma^0 = m^2\gamma\gamma_0^2(1 - \beta\beta_0) \quad (3.11.308)$$

D'altronde  $\beta < \beta_0$  per ipotesi, infatti abbiamo assunto che il riferimento del  $CM$  si muova "più piano" delle particelle nel  $CM$  stesso, dunque

$$1 - \beta\beta_0 > 1 - \beta_0^2 = \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (3.11.309)$$

e quindi, sostituendo, abbiamo

$$E E' > m^2\gamma\gamma_0^2\frac{1}{\gamma_0^2} = m^2\gamma \quad (3.11.310)$$

che contraddice la (3.11.307) e quindi dimostra la validità della (3.11.304).

A rigore, quanto dimostrato vale solo per  $m \neq 0$ . Per  $m = 0$ , però, la condizione (3.11.304) è sempre certamente vera, infatti, essendo  $E' = p'$ , risulta

$$p' - \beta E' \cos \theta' = E' - \beta E' \cos \theta' = E'(1 - \beta \cos \theta') > 0 \quad (3.11.311)$$

ovvero, integrando in  $dp'$  e ricordando che l'impulso che corrisponde in  $RS$  a  $p'_+$  è comunque  $b$ , otteniamo

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{E}{b^2} \frac{p'_+{}^2}{2E'_+} \frac{b E'_+}{\gamma E(p'_+ - \beta E'_+ \cos \theta')} \sin \theta' d\theta' = \\ &= \frac{1}{2\gamma b} \frac{p'_+{}^2}{p'_+ - \beta E'_+ \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' \end{aligned} \quad (3.11.313)$$

dove, secondo la (3.11.303), risulta

$$p'_+ = \frac{\epsilon \beta \cos \theta' + \sqrt{\Delta/4}}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'} \quad (3.11.314)$$

Nel caso in cui la massa della particella sia nulla<sup>62</sup>, essendo  $E = b$  ed  $E' = p'$ , la relazione (3.11.313) si semplifica e diventa

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2\gamma b} \frac{p'_+}{1 - \beta \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' \quad (3.11.315)$$

dove

$$\begin{aligned} p'_+ &= \frac{\epsilon \beta \cos \theta' + \epsilon}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'} = \frac{\epsilon(1 + \beta \cos \theta')}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'} = \frac{\epsilon}{1 - \beta \cos \theta'} \\ &= \frac{E}{\gamma(1 - \beta \cos \theta')} \end{aligned} \quad (3.11.316)$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{1}{2\gamma b} \frac{E}{\gamma(1 - \beta \cos \theta')^2} \sin \theta' d\theta' = \\ &= \frac{1}{2\gamma^2(1 - \beta \cos \theta')^2} \sin \theta' d\theta' \end{aligned} \quad (3.11.317)$$

---

<sup>62</sup>Evidentemente, in questo caso, la condizione  $\epsilon^2 - m^2 \geq 0$  è sempre soddisfatta e dunque, fissati comunque  $\epsilon$  e  $\theta'$ , esiste sempre una ed una sola soluzione positiva in  $p'$ .

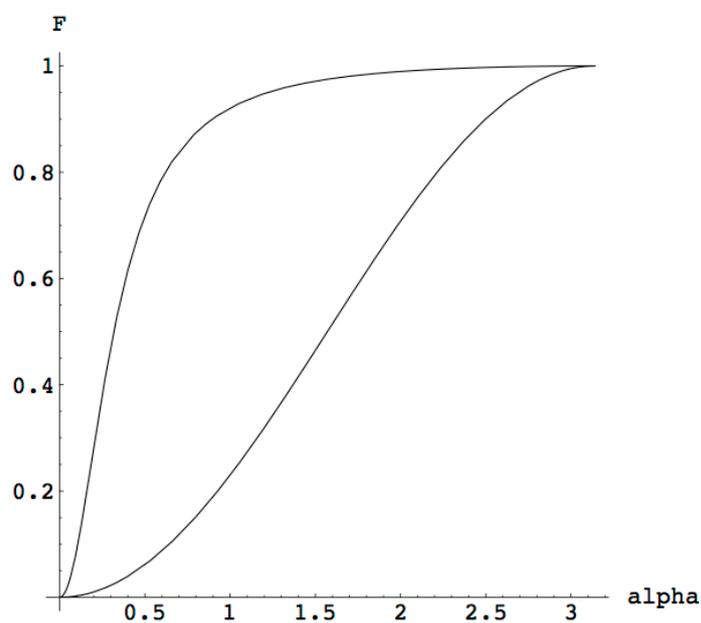


Figura 3.16: Confronto fra due distribuzioni integrali di probabilità, relative allo stesso processo, così come appaiono in due riferimenti in moto relativo.

L'andamento della funzione  $\frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')}$ , mentre è ovviamente piatto per  $\beta = 0$ , diventa sempre più piccato intorno a  $\theta' = 0$  al crescere di  $\beta$ .

Infatti la funzione  $\frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')}$  è chiaramente monotona decrescente in  $\theta'$  e risulta

$$\begin{aligned} \theta' = 0 & : \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')} = \frac{1}{2\gamma^2(1-\beta)^2} = \frac{1-\beta^2}{2(1-\beta)^2} = \frac{1+\beta}{2(1-\beta)} \approx \frac{1}{1-\beta} \\ \theta' = \pi & : \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')} = \frac{1}{2\gamma^2(1+\beta)^2} = \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta)^2} = \frac{1-\beta}{2(1+\beta)} \approx \frac{1-\beta}{4} \end{aligned}$$

E' opportuno introdurre adesso la seguente distribuzione integrale

$$I(\alpha) \equiv \int_0^\alpha d\mathcal{P} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (3.11.318)$$

Risulta

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= \frac{1}{2\gamma^2} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = \frac{1}{2\gamma^2} \int_0^\alpha \frac{d(-\cos \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = \\
 &= \frac{1}{2\gamma^2} \int_{-1}^{-\cos \alpha} \frac{dz}{(1 + \beta z)^2} = \frac{1}{2\gamma^2} \frac{-1}{\beta(1 + \beta z)} \Big|_{-1}^{-\cos \alpha} = \\
 &= \frac{1}{2\beta\gamma^2} \left( \frac{-1}{1 - \beta \cos \alpha} - \frac{-1}{1 - \beta} \right) = \frac{1}{2\beta\gamma^2} \frac{-1 + \beta + 1 - \beta \cos \alpha}{(1 - \beta)(1 - \beta \cos \alpha)} = \\
 &= \frac{1}{2\beta(1 - \beta)\gamma^2} \frac{\beta(1 - \cos \alpha)}{1 - \beta \cos \alpha} \quad (3.11.319)
 \end{aligned}$$

ma

$$\gamma^2(1 - \beta) = \frac{1}{1 + \beta} \quad \Rightarrow \quad I(\alpha) = \frac{1 + \beta}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \beta \cos \alpha} \quad (3.11.320)$$

La funzione  $I(\alpha)$  è mostrata in figura 3.16 nel caso di  $\beta = 0$  e  $\beta = 0.95$ . Chiaramente, per la sua stessa definizione, risulta comunque che

$$I(\pi) = 1 \quad (3.11.321)$$

Infine, per apprezzare meglio il significato della funzione  $I(\alpha)$ , osserviamo che se prendiamo  $\alpha = 1/\gamma$  allora, assumendo  $\gamma \gg 1$ , abbiamo

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

e dunque

$$I\left(\frac{1}{\gamma}\right) \approx \frac{1 + \beta}{2} \frac{\frac{1}{2\gamma^2}}{1 - \beta\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)} \quad (3.11.322)$$

Ma poichè, se  $\gamma \gg 1$ , allora risulta

$$\frac{1}{2\gamma^2} \approx 1 - \beta$$

ne segue infine che

$$I\left(\frac{1}{\gamma}\right) \approx \frac{(1 + \beta)(1 - \beta)}{2(1 - \beta + \beta(1 - \beta))} \approx \frac{(1 + \beta)(1 - \beta)}{2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{1}{2} \quad (3.11.323)$$

ovvero ritroviamo il fatto già osservato in precedenza per cui ben metà degli eventi sono tutti concentrati nel cono di apertura angolare  $\frac{1}{\gamma}$ .

Il risultato (3.11.323), come si è detto, è approssimato ed è valido solo nel caso ultrarelativistico, cioè quando  $\gamma \gg 1$ .

Determiniamo, per questa strada, il risultato esatto, valido indipendentemente dal valore di  $\gamma$ .

Imponiamo dunque che  $I(\alpha) = 1/2$  e determiniamo  $\alpha$ . Risulta

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{1 + \beta}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \beta \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow (1 + \beta) \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \beta \cos \alpha} = 1 \\ &\Rightarrow (1 + \beta)(1 - \cos \alpha) = 1 - \beta \cos \alpha \\ &\Rightarrow 1 - \cos \alpha + \beta - \beta \cos \alpha = 1 - \beta \cos \alpha \\ &\Rightarrow \cos \alpha = \beta \end{aligned} \quad (3.11.324)$$

e dunque

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \frac{1}{\beta \gamma} \quad (3.11.325)$$

valida per ogni  $\beta$ , anche per  $\beta = 0$ , quando fornisce l'ovvio risultato di  $\alpha = \pi/2$  !

### 3.12 Massa trasversa e picco Jacobiano

Abbiamo già considerato in diverse occasioni la *massa invariante*  $M$  di un sistema, legata al quadrimpulso  $P^\mu$  dello stesso dalla ben nota relazione  $M^2 \equiv P^\mu P_\mu$ .

Nel caso del decadimento di una particella instabile

$$A \rightarrow B + C + \dots + D \quad (3.12.326)$$

poter ricostruire dai quadrimpulsi dei frammenti la massa invariante di  $A$  significa poterla mettere in relazione con i frammenti stessi e dunque anche poterne dimostrare l'esistenza.

Purtroppo non sempre l'evento è "chiuso" cinematicamente, ovvero tutti i quadrimpulsi dei frammenti sono osservati (osservabili). Se questo accade, allora, per la conservazione del quadrimpulso di un sistema isolato, sarà

$$\begin{aligned} P_A^\mu &= P_B^\mu + P_C^\mu + \dots + P_D^\mu \\ \Rightarrow M^2 &= (P_B + P_C + \dots + P_D)^\mu (P_B + P_C + \dots + P_D)_\mu = \\ &= m_B^2 + m_C^2 + \dots + m_D^2 + 2[(P_B)^\mu (P_C)_\mu + (P_B)^\mu (P_D)_\mu + (P_C)^\mu (P_D)_\mu + \dots] \end{aligned}$$

Per esempio, un caso in cui questo accade è quando i prodotti sono carichi per cui, a meno di effetti di accettanza, uno spettrometro, unito a un sistema di rivelatori che possa consentirne l'identificazione, può permettere la misura di tutti i loro quadrimpulsi, come, per esempio, nelle reazioni<sup>63</sup>

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-; \quad K^\pm \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^\pm$$

<sup>63</sup>In linea di principio non è necessario che i prodotti del decadimento siano carichi, purchè essi interagiscano con il rivelatore e questo ne possa definire il quadrimpulso. Consideriamo, per esempio, il decadimento del  $\pi^0$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$$

Se l'energia dei due fotoni  $E_1$  ed  $E_2$  può essere misurata con precisione e si conosce il punto  $\vec{R}_0$  dove il  $\pi_0$  ha avuto origine (la sua vita media trascurabilmente piccola, pari a  $8.4 \times 10^{-17} s \Rightarrow c\tau = 25.1 nm$ , è tale per cui il punto di origine coincide anche con la sua posizione di decadimento) nonchè i punti di impatto  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$  dei due fotoni sul rivelatore, allora, posto

$$\vec{n}_1 \equiv \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|}; \quad \vec{n}_2 \equiv \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_0|}$$

risulta

$$P_1^\mu = (E_1, E_1 \vec{n}_1); \quad P_2^\mu = (E_2, E_2 \vec{n}_2)$$

e dunque il quadrimpulso del sistema dei due fotoni è

$$P^\mu = (E_1 + E_2, E_1 \vec{n}_1 + E_2 \vec{n}_2)$$

ovvero tale sistema possiede una massa invariante pari a

$$P^\mu P_\mu \equiv M_{inv}^2 = (E_1 + E_2)^2 - |E_1 \vec{n}_1 + E_2 \vec{n}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 - (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$$

Se, per esempio, vogliamo accertarci che in un processo d'urto si produca la particella instabile  $A$ , ma sia i prodotti dell'urto come quelli del decadimento di  $A$  non costituiscono un sistema cinematicamente chiuso, una grandezza che può aiutare all'identificazione della presenza della particella  $A$  fra quelle prodotte, è la sua *massa trasversa*.

Essa è senz'altro molto utile tutte le volte che

- il decadimento della particella  $A$  è a due corpi, di cui solo uno visibile;
- è determinabile a priori la direzione di volo  $\vec{n}$  della particella  $A$  (anche se non se ne conosce nè l'energia nè l'impulso);
- è possibile osservare molti decadimenti simili, in modo da poter studiare statisticamente<sup>64</sup> la cinematica dei prodotti "visibili".

Vediamo un esempio concreto

Nell'interazione  $p\bar{p}$  all'SPS-Collider del CERN, furono prodotti e osservati per la prima volta nel 1983 i bosoni vettori  $W^\pm$ . Nonostante che i due fasci di protoni e antiprotoni avessero impulsi esattamente opposti, siccome il  $W$  è originato dalla "fusione" di un quark del protone con un "antiquark" dell'antiprotone, l'impulso longitudinale del  $W$  non era conoscibile nel sistema del Laboratorio. Invece era definita la sua direzione di volo, che sostanzialmente coincideva con quella dei due fasci incrociati (può sussistere un piccolo moto trasverso che, a questo stadio, possiamo però trascurare).

Un decadimento molto caratteristico del  $W$  è il seguente

$$W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu} \quad (3.12.327)$$

in cui, mentre dell'elettrone si può agevolmente determinare l'energia e l'impulso, per quanto riguarda l'antineutrino, esso non è osservabile e dunque questo canale di decadimento non è cinematicamente chiuso. Vista l'esiguità della massa dei prodotti di decadimento, elettrone e neutrino, in confronto

per cui, se definiamo

$$\cos \theta \equiv \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

ovvero se indichiamo con  $\theta$  l'angolo fra le direzioni di propagazione dei due fotoni, è

$$M_{inv}^2 = 2 E_1 E_2 (1 - \cos \theta)$$

e, se i due fotoni, provengono dal decadimento di un  $\pi^0$ , questa deve coincidere, a meno delle incertezze di misura, con  $m_{\pi^0}^2$ . Si osservi che, se il  $\pi_0$  ha alta energia, ( $E_1 + E_2 \gg m_{\pi_0}$ ) allora l'angolo di apertura  $\theta$  dell'evento è verosimilmente piccolo (quali sono i limiti entro cui  $\theta$  deve necessariamente trovarsi? possono i due fotoni essere opposti l'uno all'altro nel Laboratorio? qual è il valore minimo di  $\theta$ ?), per cui risulta

$$M_{inv}^2 \approx 2E_1 E_2 [1 - (1 - \theta^2/2 + \dots)] \approx E_1 E_2 \theta^2$$

<sup>64</sup>Nel caso di un decadimento cinematicamente chiuso, a priori ne basta uno solo, in assenza di fondo, per identificare la presenza di  $A$  fra le particelle generate.

alla massa  $M$  del  $W$  ( $M_W = 80.425 \pm 0.038 \text{ GeV}$ ), il loro impulso, nel sistema del CM, dove il  $W$  è a riposo, ha modulo costante e pari a

$$|\vec{p}| \equiv \bar{p} = M/2 \quad (3.12.328)$$

dovendo appunto risultare

$$(M, 0, 0, 0) = \left( \frac{M}{2}, \frac{M}{2} \vec{u} \right)_e + \left( \frac{M}{2}, -\frac{M}{2} \vec{u} \right)_\nu \quad (3.12.329)$$

essendo  $\vec{u}$  il versore di propagazione dell'elettrone nel sistema del CM.

Nel sistema del Laboratorio, solo la parte trasversa dell'impulso dell'elettrone

$$\vec{p}^T = \frac{M}{2} \sin \theta \vec{u}_T \quad (3.12.330)$$

ha relazione diretta con la cinematica del decadimento, essendo uguale a quella nel sistema del  $CM$ , a differenza della sua parte longitudinale

$$p_L = \frac{\gamma M}{2} (\beta + \cos \theta) \quad (3.12.331)$$

che risente anche dell'effetto di trascinamento dovuto al moto del sistema del  $CM$  rispetto a quello del Laboratorio, che avviene con velocità  $\beta$ , a priori ignota. Per l'elettrone, definiamo allora un *quadrimpulso trasverso*

$$(p_e^T)^\mu = (p_e^T, \vec{p}_e^T) \quad (3.12.332)$$

Poichè l'evento deve essere complessivamente bilanciato anche nel piano trasverso, se si tratta di un vero decadimento  $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}$  dovrà quindi esistere un sensibile impulso trasverso mancante  $\vec{p}_{miss}^T$ , che identificheremo con quello associato al neutrino, il quale, in condizioni ideali, a parte dunque le incertezze di misura, dovrebbe essere uguale e opposto a quello dell'elettrone. Poniamo

$$(p_\nu^T)^\mu = (p_{miss}^T, \vec{p}_{miss}^T) \equiv (p_\nu^T, \vec{p}_\nu^T) \quad (3.12.333)$$

Definiamo adesso il quadrimpulso seguente

$$(P^T)^\mu \equiv (p_e^T)^\mu + (p_\nu^T)^\mu = (p_e^T + p_\nu^T, \vec{p}_e^T + \vec{p}_\nu^T) \quad (3.12.334)$$

La massa trasversa del sistema elettrone-neutrino è definita allora come

$$M_T^2 = (P^T)^\mu (P^T)_\mu = (p_e^T + p_\nu^T)^2 - |\vec{p}_e^T + \vec{p}_\nu^T|^2 = 2 p_e^T p_\nu^T (1 - \cos \phi) \quad (3.12.335)$$

dove  $\phi$  è l'angolo, nel piano trasverso, fra i due vettori  $\vec{p}_e^T$  e  $\vec{p}_\nu^T$ , che, in condizioni ideali dovrebbe essere esattamente  $\pi$ .

Idealmente dovrebbe dunque essere

$$\begin{aligned} M_T^2 &= 4(p_e^T)^2 = 4\left(\frac{M}{2}\right)^2 \sin^2 \theta = M^2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow M_T &= 2 p_e^T = M \sin \theta \end{aligned} \quad (3.12.336)$$

Dunque, per un sistema elettrone-neutrino ( $e - \nu$ ) dal decadimento del  $W$ ,

- la massa trasversa  $M_T$  del sistema  $e - \nu$  è *comunque* inferiore alla sua massa invariante;
- *dipende* dall'angolo polare di emissione dell'elettrone nel riferimento del  $CM$  (la direzione dell'asse polare  $z$  è quella che abbiamo chiamato "longitudinale" ed è, come abbiamo già osservato, allineato con i fasci di protoni e antiprotoni: il verso scelto è, per convenzione, quello del fascio dei protoni ...).

Ne segue che una sola misura non è in grado di consentirci alcuna conclusione sul fatto che sia stato veramente presente nell'evento un bosone  $W$  che è poi decaduto, e quindi non siamo in grado di concludere nemmeno che sia stato prodotto.

La certezza del fenomeno può essere acquisita solo su base statistica, accumulando molti eventi e studiando come si distribuiscono, per esempio, in funzione appunto della massa trasversa.

Vediamo infatti come gli eventi sono distribuiti in funzione di  $M_T$ , che, chiaramente, a parte un fattore 2, equivale a studiare la distribuzione degli eventi in funzione del momento trasverso  $p_T$  dell'elettrone !

Cominciamo assumendo (non è vero !) che il decadimento sia isotropo nel sistema del  $CM$  del  $W$ . Evidentemente, in questo caso, per un numero totale  $N$  di  $W$  che decadono, quelli che hanno l'elettrone nell'angolo solido  $d\Omega$  sono

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad dn = \frac{N}{2} \sin \theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dn}{d\theta} = \frac{N}{2} \sin \theta \quad (3.12.337)$$

Volendo mettere in relazione il numero di eventi con la loro massa trasversa, cioè valutare  $\frac{dn}{dM_T}$ , iniziamo osservando che la funzione  $M_T = M(\theta) \equiv M \sin \theta$  non è iniettiva quando  $0 \leq \theta \leq \pi$ , quindi

$$\frac{dn}{dM_T} = \frac{dn}{d\theta_+} \left| \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_+}} \right| + \frac{dn}{d\theta_-} \left| \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_-}} \right|$$

dove gli angoli  $\theta_{\pm}$  sono definiti da

$$M_T = M \sin \theta_{\pm} \Rightarrow \theta_+ \equiv \theta = \arcsin \frac{M_T}{M}; \quad \theta_- = \pi - \theta, \quad \text{con} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

da cui segue che

$$\left| \frac{dM_T}{d\theta_{\pm}} \right| = M |\cos \theta| = M \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{M^2 - M_T^2} \quad (3.12.338)$$

Dunque, in termini di questo angolo  $\theta \equiv \arcsin \frac{M_T}{M}$ , risulta infine

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dM_T} &= \frac{N}{2} \sin \theta \frac{1}{M |\cos \theta|} + \frac{N}{2} \sin \theta \frac{1}{M |\cos \theta|} = N \frac{M_T}{M} \frac{1}{M \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \\ &= N \frac{M_T}{M} \frac{1}{\sqrt{M^2 - M_T^2}} \end{aligned} \quad (3.12.339)$$



Figura 3.17: *Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)*

Ovvero, in termini della variabile adimensionale

$$\mu \equiv \frac{M_T}{M}$$

abbiamo

$$\frac{dn}{d\mu} = N \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (3.12.340)$$

da cui, finalmente, consegue una densità di probabilità degli eventi per  $0 \leq \mu \leq 1$  data da<sup>65</sup>

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathcal{P}}{d\mu^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2}} \quad (3.12.341)$$

Questa densità di probabilità presenta un picco (asintoto verticale !) per  $\mu = 1$ , che è dovuto all'annullarsi della derivata  $\frac{dM}{d\theta}$  per  $\theta = \pi/2$ . Per questo motivo, essendo il picco dovuto al cambiamento di variabile  $\theta \rightarrow M_T$ , esso viene solitamente chiamato *picco jacobiano*.

Usualmente il picco jacobiano non è così netto come la matematica vorrebbe, a causa dello *smearing* di  $M_T$ , dovuto sia alle incertezze di misura come alla incertezza naturale del valore della massa della particella che decade, legata al principio di indeterminazione ( $\Gamma_W = 2.124 \pm 0.041 \text{ GeV}$ ).

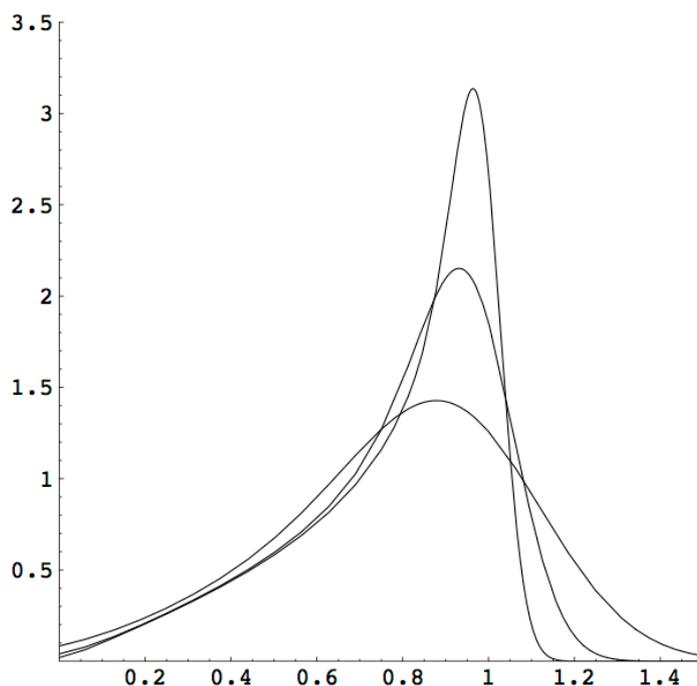


Figura 3.18: Picco jacobiano  $\frac{d\mathcal{P}}{dm}$  per tre diverse risoluzioni sulla massa

Per quanto riguarda l'effetto delle incertezze dovute alla misura di  $M_T$ , se indichiamo con  $P(m|\mu)$  la densità di probabilità di misurare un valore compreso fra  $m$  ed  $m + dm$ , quando il valore vero di  $M_T/M$  è compreso fra  $\mu$  e  $\mu + d\mu$ , i dati sperimentali relativi ad  $m$  si distribuiscono secondo la curva

$$\frac{d\mathcal{P}}{dm} = \int_0^1 \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} P(m|\mu) d\mu \quad (3.12.342)$$

La figura (3.18) mostra l'effetto di smearing dovuto all'accuratezza della misura della massa trasversa (normalizzata), nel caso in cui

$$P(m|\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.12.343)$$

con  $\sigma = 0.2$ ,  $\sigma = 0.1$  e  $\sigma = 0.05$ , rispettivamente.

La figura 3.19 mostra invece i dati sperimentali (e il loro fit) che sono stati ottenuti dall'esperimento *UA2* del *CERN* (fig.3.21), relativi alla misura della massa del  $W$ , fatta con il metodo prima descritto del picco jacobiano.

<sup>65</sup>E' immediato verificare che questa densità di probabilità è normalizzata a 1, come deve.

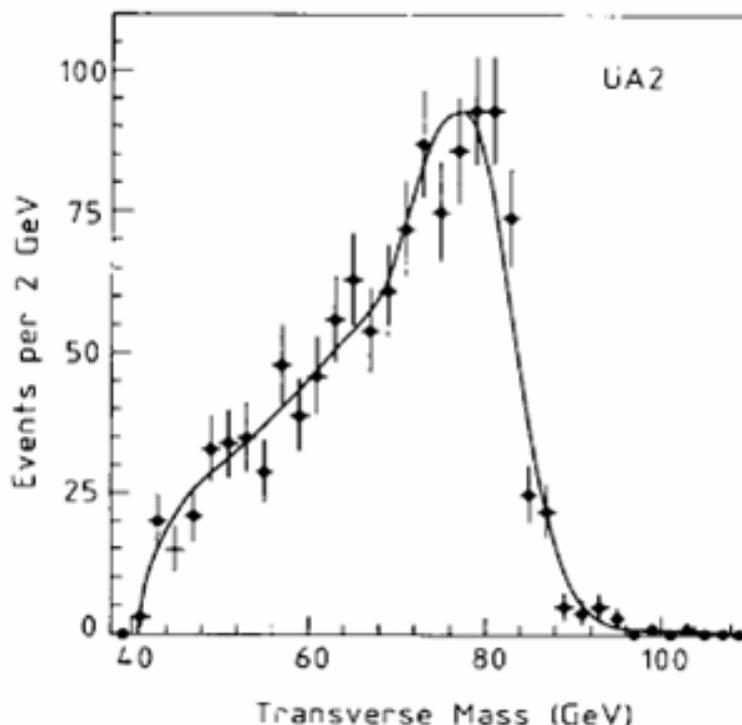


Figura 3.19: *Misura della massa del  $W$  in UA2, dal picco jacobiano*  
*Phys. Lett. 241B, 150 (1990:  $M_W = 80.49 \pm 0.43$  GeV, con 1203 eventi*

Nella realtà, sia il  $W^-$  come il  $W^+$ , prodotti, rispettivamente, dalla  *fusione* di due quarks  $\bar{u}$ ,  $d$  e  $\bar{d}$ ,  $u$ , dell'antiprotone e del protone, operata dalle interazioni deboli, sono completamente polarizzati longitudinalmente e il loro spin è diretto, in entrambi i casi, nel verso del fascio degli antiprotoni (vedi fig 3.20).

Questo accade perché le interazioni deboli selezionano l'elicità della particella ( $d$  o  $u$ ) uguale a  $-1$  e quella dell'antiparticella ( $\bar{u}$  o  $\bar{d}$ ) uguale a  $+1$ . La completa polarizzazione del  $W$  rende non isotropo il decadimento.

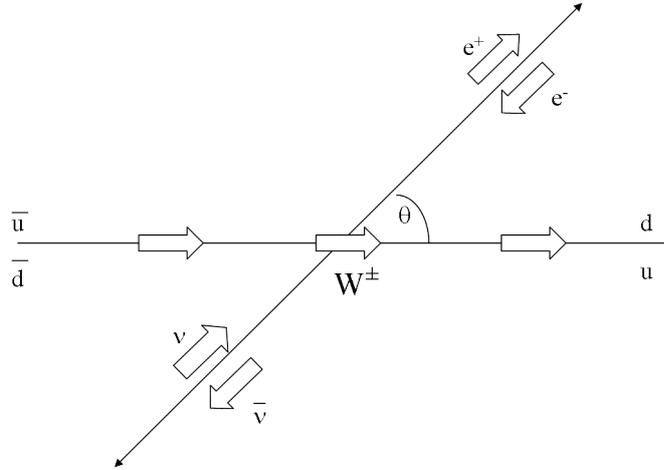
Per il  $W^-$ , infatti, la distribuzione degli elettroni, rispetto alla direzione di volo degli antiprotoni, risulta essere data da

$$d\mathcal{P} = \frac{3}{8} (1 - \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta \quad (3.12.344)$$

mentre, per quanto riguarda il  $W^+$  che è polarizzato come il  $W^-$ , poiché l'elicità del positrone emesso è opposta a quella dell'elettrone, risulta, sempre rispetto alla direzione di volo degli antiprotoni, che

$$d\mathcal{P} = \frac{3}{8} (1 + \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta \quad (3.12.345)$$

Poiché UA2 non poteva determinare la carica dell'elettrone/positrone, non era possibile discriminare il decadimento del  $W^-$  da quello del  $W^+$  e quindi

Figura 3.20: Polarizzazione del  $W$ 

era possibile solo mediare sulle due distribuzioni, ottenendo

$$d\mathcal{P} = \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.12.346)$$

Ripetendo le considerazioni svolte prima<sup>66</sup> otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dM_T} &= 2 \frac{d\mathcal{P}}{d\theta} \left| \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta}} \right| = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta \frac{1}{M |\cos \theta|} = \\ &= \frac{3}{4} (1 + 1 - \sin^2 \theta) \frac{\sin \theta}{M |\cos \theta|} \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} &= \frac{3}{4} (2 - \mu^2) \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \end{aligned} \quad (3.12.347)$$

ovvero, al posto della (3.12.341), abbiamo<sup>67</sup>

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = \frac{3}{4} (2 - \mu^2) \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathcal{P}}{d\mu^2} = \frac{3}{8} \frac{2 - \mu^2}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad (3.12.348)$$

che continua, naturalmente, a presentare un picco jacobiano del tutto simile a quello già discusso nel caso (3.12.341), riferito al decadimento isotropo del  $W$  nel CM, dato che questo è originato dalla trasformazione per  $\mu = 1$ , dove, in entrambi i casi, le funzioni  $\frac{d\mathcal{P}}{d\theta}$  sono comunque diverse da zero e regolari.

<sup>66</sup>Il fattore 2, come già, detto, dipende dal fatto che esistono due angoli,  $\theta$  e  $\pi - \theta$ , che forniscono lo stesso valore di  $M_T$ .

<sup>67</sup>Risulta immediato dimostrare che la distribuzione di probabilità così ottenuta è effettivamente normalizzata a 1, come deve essere.

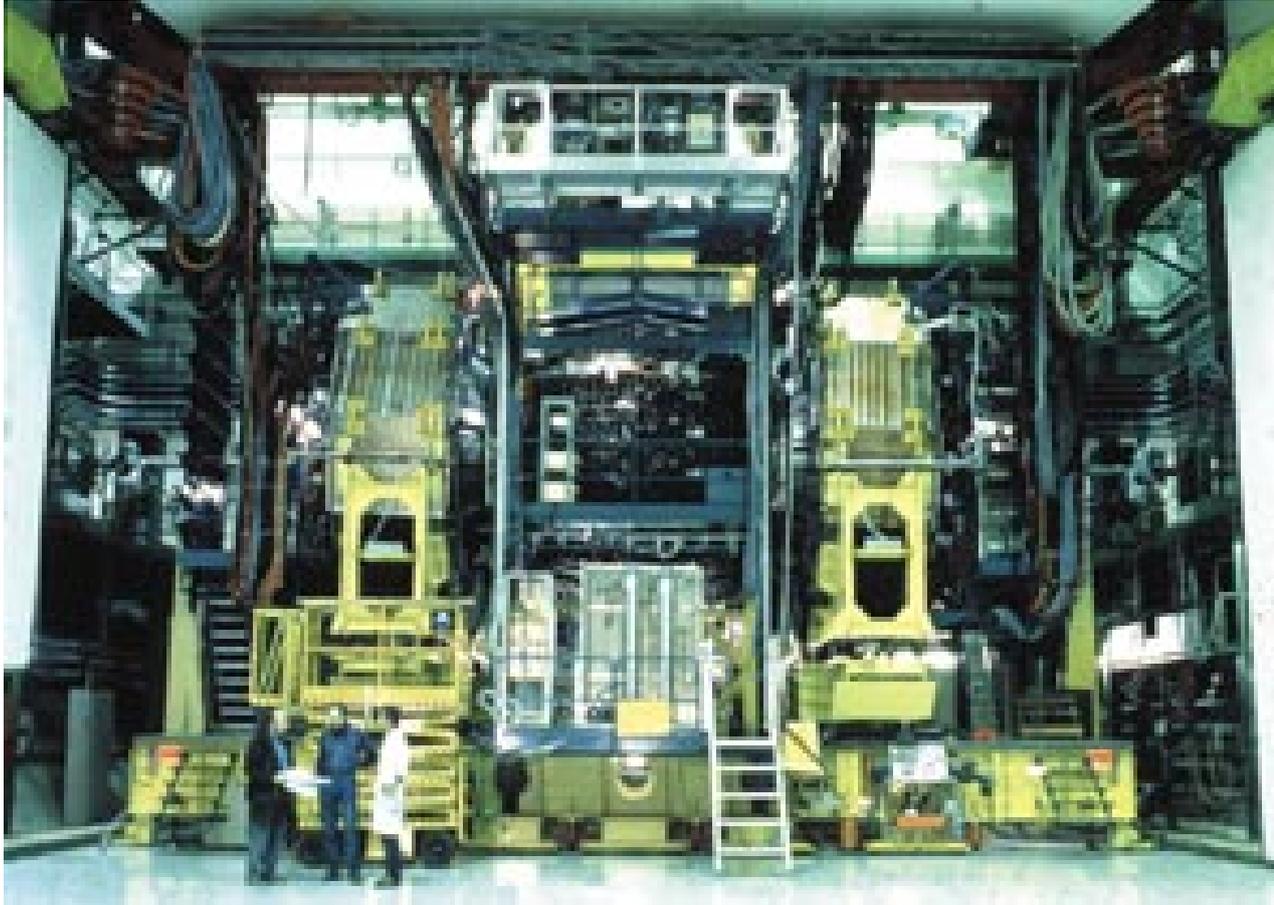


Figura 3.21: *UA2 detector*

## Capitolo 4

# Dinamica relativistica

### 4.1 Dinamica del punto materiale

La seconda legge della Dinamica di Newton stabilisce che, in un riferimento inerziale, in presenza di forze esterne agenti su un corpo di massa  $m$ , risulti

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv m \vec{a} = \vec{f}$$

L'analogia già usata ci induce a generalizzarla nel caso relativistico, ponendo

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \equiv ma^\mu = f^\mu \quad (4.1.1)$$

dove  $f^\mu$  dovrà essere il quadrivettore che generalizza la *forza* al caso relativistico. Evidentemente, di nuovo, se questa equazione descriverà veramente la realtà fisica è materia soggetta a conferma sperimentale...

Infatti solo l'esperienza può giudicare sull'accettabilità o meno dell'equazione (4.1.1), che Einstein ha posto alla base della dinamica relativistica.

Oggi però sappiamo che tutta la Fisica che riguarda il moto delle particelle elementari può essere interpretata solo partendo da tale legge, per cui questa nuova dinamica risulta ampiamente confermata !

Prima di procedere nello studio di alcuni esempi, osserviamo che dalla (4.1.1) si ricava subito che

$$f^\mu = ma^\mu \Rightarrow f^\mu u_\mu = m a^\mu u_\mu \equiv 0 \quad (4.1.2)$$

Questo significa che, a differenza di quanto accade con le tre componenti ordinarie della forza, le componenti della quadriforza  $f^\mu$  non sono fra loro indipendenti, infatti

$$f^\mu u_\mu = 0 \Rightarrow f^0 u^0 = \vec{f} \cdot \vec{u} \Rightarrow f^0 \gamma = \gamma \vec{f} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow f^0 = \vec{f} \cdot \vec{\beta} \quad (4.1.3)$$

Questo risultato, dal punto di vista fisico, esprime semplicemente la conservazione dell'energia relativistica, infatti la componente temporale dell'equazione (4.1.1) stabilisce che

$$f^0 = m \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d(m\gamma)}{d\tau} = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} \equiv \gamma \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

e quindi, data la (4.1.3), che

$$\gamma \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{\beta} \quad (4.1.4)$$

dove  $\mathcal{E}$  è l'energia relativistica del corpo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Si noti, comunque, la novità rispetto al caso classico, in cui risulta  $\frac{d\mathcal{E}_{cin}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$ , della presenza del  $\gamma$ , che è legata direttamente all'uso, come coordinata temporale, non del tempo proprio della particella ma del tempo del riferimento assegnato.

## 4.2 Carica in campo e.m.: generalità

Vediamo ora alcune applicazioni della dinamica relativistica al caso di una particella di massa  $m$  e carica elettrica  $q$ , in un campo elettromagnetico<sup>2</sup>.

Come sappiamo, l'equazione del moto classica di una particella carica in un campo elettromagnetico statico è la seguente<sup>3</sup>

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{Lorentz} = q \left( \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} + \vec{E} \right) \equiv q \left( \vec{\beta} \times \vec{B} + \vec{E} \right) \quad (4.2.5)$$

Questa equazione, in termini del tensore del campo elettromagnetico<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

si generalizza nel seguente modo relativisticamente covariante ( $c = 1$ )

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \equiv f^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad (4.2.11)$$

dove  $f^\mu \equiv q F^{\mu\nu} u_\nu$  è quindi la generalizzazione relativistica della forza di Lorentz. Chiaramente, come abbiamo già detto, dovrà poi essere l'esperienza a mostrare se la generalizzazione ipotizzata è corretta o meno; infatti,

<sup>2</sup>Per comodità qui nel seguito assumeremo che  $q > 0$ : il caso in cui  $q < 0$  si ottiene semplicemente dal caso considerato invertendo il verso dei campi e quindi è piuttosto immediato.

<sup>3</sup>Stiamo qui scrivendo l'espressione della forza di Lorentz nel sistema *cgs es*.

<sup>4</sup>Ricordiamo, a questo proposito, che, per trasformazioni di Lorentz, i campi elettrici e magnetici si trasformano nel modo seguente:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \quad (4.2.6)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \quad (4.2.7)$$

ovvero, in termini delle componenti parallele e perpendicolari a  $\vec{\beta}$ , velocità del nuovo riferimento  $RS'$  rispetto al vecchio riferimento  $RS$

$$\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp + \gamma \vec{\beta} \times \vec{B} \quad (4.2.8)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}_\parallel + \gamma \vec{B}_\perp - \gamma \vec{\beta} \times \vec{E} \quad (4.2.9)$$

nonostante la loro eleganza, in queste generalizzazioni non c'è nulla di "automatico" e non si tratta in nessun senso di "teoremi"... non dimentichiamoci, infatti, che stiamo parlando di Fisica !

### 4.3 Carica in campo magnetico

Assumiamo che il moto avvenga in campo magnetico *uniforme e costante*, che, senza perdita di generalità, assumeremo diretto secondo l'asse  $z$ . Risulta

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp^0}{d\tau} = 0 \\ \frac{dp^1}{d\tau} = -q B u_2 \\ \frac{dp^2}{d\tau} = q B u_1 \\ \frac{dp^3}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Siccome  $p^0 = m\gamma$ , la prima equazione dice semplicemente che  $\gamma$  rimane costante durante il moto, ovvero che la velocità della particella resta comunque costante in modulo. Sappiamo infatti che il campo magnetico statico non compie lavoro (nemmeno in dinamica relativistica ...) e quindi l'energia cinetica della particella non può cambiare!

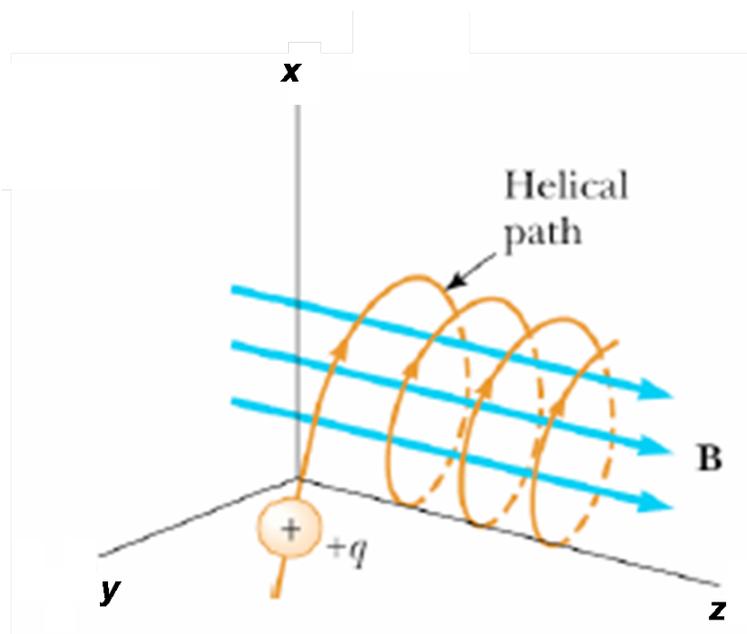


Figura 4.1: Moto di una carica in campo magnetico uniforme

Dalla quarta equazione abbiamo poi che, evidentemente,  $mu^3 \equiv m\gamma\beta_z$  è indipendente da  $\tau$ , dunque, essendo  $\gamma$  costante, che anche la componente

della velocità lungo l'asse  $z$ , cioè nella direzione del campo magnetico, è indipendente dal tempo (sia esso il tempo proprio o quello del riferimento ... a questo punto è irrilevante!).

Si noti che queste due conclusioni (velocità in modulo costante e componente costante della stessa nella direzione del campo) erano già note dalla dinamica non relativistica di una carica in campo magnetico, descritta dalla forza di Lorentz.

Ma vediamo allora se c'è e dove sta la novità ...

Le altre due equazioni forniscono<sup>5</sup> (si ricordi che  $\gamma$  è costante)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(m\gamma\beta_x) &= qB\gamma\beta_y & \Rightarrow & & m\frac{d\beta_x}{d\tau} &= qB\beta_y \\ \frac{d}{d\tau}(m\gamma\beta_y) &= -qB\gamma\beta_x & & & m\frac{d\beta_y}{d\tau} &= -qB\beta_x \end{aligned}$$

Ma  $\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \equiv \gamma \frac{d}{dt}$ , per cui le equazioni di sopra diventano<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_x}{dt} &= \frac{qB}{m\gamma}\beta_y & \Rightarrow & & \beta_x &= A \sin(\Omega t + \phi) \\ \frac{d\beta_y}{dt} &= -\frac{qB}{m\gamma}\beta_x & & & \beta_y &= A \cos(\Omega t + \phi) \end{aligned}$$

dove abbiamo definito, al solito, la frequenza di *betatrone*  $\Omega$  come  $\Omega \equiv \frac{qB}{m\gamma}$ , mentre  $A$  e  $\phi$  sono costanti di integrazione<sup>7</sup>.

La novità della dinamica relativistica rispetto a quella classica sta nel fatto che, a differenza della frequenza di ciclotrone<sup>8</sup> classica  $\Omega_{cycl} = \frac{qB}{m}$ , la *frequenza di betatrone*  $\Omega$  è *funzione della velocità*, dipendendo in modo inversamente proporzionale da  $\gamma$ , cioè dall'energia della particella stessa<sup>9</sup>. Questo

<sup>5</sup>Si ricordi che  $p^{1,2} \equiv mu^{1,2} = m\gamma\beta_{x,y}$ , mentre  $u_{1,2} = -u^{1,2}$ .

<sup>6</sup>Ricordiamo di nuovo che stiamo assumendo  $c = 1$ .

Nel sistema *cgs es* e nel *SI* risulta rispettivamente che

$$\Omega|_{cgs} = \frac{qB}{m c \gamma}; \quad \Omega|_{SI} = \frac{qB}{m \gamma} \quad (4.3.13)$$

<sup>7</sup>Evidentemente  $A$  è nient'altro che il modulo di  $\vec{\beta}_\perp$ , cioè il modulo della componente della velocità nel piano  $xy$ , cioè nel piano ortogonale alla direzione del campo.

<sup>8</sup>Per esempio, nel caso dell'elettrone, è

$$\Omega_{cycl} = \frac{qB}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \cdot B[T]}{0.91 \times 10^{-30}} = 1.76 \times 10^{11} B[T] \text{ rad/s} \quad (4.3.14)$$

<sup>9</sup>In taluni testi, soprattutto un po' datati, si prende spunto da questo fatto per concludere che la massa dipende dalla velocità. Noi, come già detto, non ci adegueremo a questa tradizione perchè riteniamo che essa sia più sorgente di equivoci che altro.

La massa inerziale è una costante caratteristica della particella e il suo quadrato coincide appunto con l'invariante  $p^\mu p_\mu$ . Il sostenere che la massa dipende dall'energia o dalla velocità nasconde semplicemente il desiderio di continuare a usare la dinamica newtoniana.

è un fatto sperimentale, verificato con altissima precisione, per esempio, negli acceleratori di particelle, che dimostra come la dinamica corretta da usare nel trattare il moto di particelle che si muovono in campo magnetico con velocità prossime a quella della luce, sia proprio quella relativistica.

Da quanto precede, abbiamo dunque che

$$\beta_x = \beta_{\perp} \sin(\Omega t + \phi) \quad x(t) = x_0 - \frac{\beta_{\perp}}{\Omega} \cos(\Omega t + \phi) \quad (4.3.15)$$

$$\beta_y = \beta_{\perp} \cos(\Omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + \frac{\beta_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t + \phi) \quad (4.3.16)$$

$$\beta_z = \beta_{\parallel} \quad z(t) = z_0 + \beta_{\parallel} t \quad (4.3.17)$$

dove  $x_0$ ,  $y_0$ , e  $z_0$  sono opportune costanti di integrazione.

Se il moto avviene sempre all'interno della zona dove è presente il campo magnetico uniforme e costante  $\vec{B}$ , allora la traiettoria del moto è un'elica di passo costante

$$\delta = \beta_{\parallel} T = \frac{2\pi\beta_{\parallel}}{\Omega} = \frac{2\pi\beta_{\parallel} m \gamma}{qB} = \frac{2\pi p_{\parallel}}{qB} \quad (4.3.18)$$

e di raggio<sup>10</sup>

$$R = \frac{\beta_{\perp}}{\Omega} = \frac{\beta_{\perp} m \gamma}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB} \quad (4.3.22)$$

<sup>10</sup>Vediamo la forma che assumono le relazioni (4.3.18) e (4.3.22) sia nel sistema *cgs es* come nel sistema *SI*.

Sappiamo che dovremo, in generale, poter ottenere la loro forma corretta moltiplicando eventualmente per qualche opportuna potenza di  $c$  ... Iniziamo dal sistema *cgs es*.

In questo sistema  $qB$  ha le dimensioni di una forza, dunque semplici ragioni dimensionali impongono che risulti

$$\delta = \frac{2\pi p_{\parallel} c}{qB}; \quad R = \frac{p_{\perp} c}{qB} \quad (4.3.19)$$

Nel sistema *SI*, invece, la quantità  $qB$  ha proprio le dimensioni di una forza divisa per una velocità, dunque le espressioni (4.3.18) e (4.3.22) non mutano di forma.

Non è però comodo usare  $[J/(m/s)]$  come unità di misura per l'impulso, né il Coulomb come unità di misura per la carica elettrica: è meglio usare, rispettivamente, il  $MeV/c$  e la carica elettronica. Siccome risulta

$$1 \frac{MeV}{c} = 1 \cdot \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^6}{3 \times 10^8} \frac{J s}{m}$$

ponendo  $q = ze$ , dove  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$  è appunto la carica elementare in Coulomb, ecco che la (4.3.22) diventa (approssimando  $c$  con  $3 \times 10^8$  ...)

$$R[m] = \frac{p_{\perp}[J s/m]}{q[C] B[T]} \rightarrow \frac{p_{\perp}[MeV/c] \times \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^6}{3 \times 10^8}}{1.6 \times 10^{-19} z B[T]} = \frac{p_{\perp}[MeV/c]}{300 z B[T]} \quad (4.3.20)$$

$$\Rightarrow p_{\perp}[MeV/c] = 300 z B[T] R[m] \Rightarrow p_{\perp}[GeV/c] = 0.3 z B[T] R[m] \quad (4.3.21)$$

dove le parentesi quadre racchiudono, appunto, le unità di misura delle grandezze coinvolte.

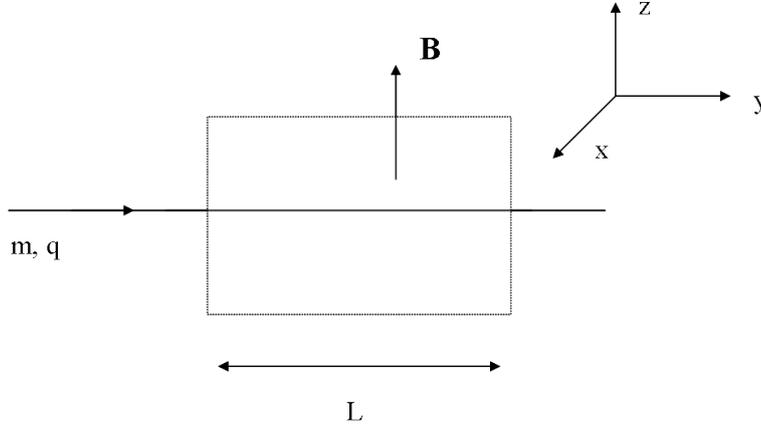


Figura 4.2: *Deflessione magnetica su una particella in moto.*

Vediamo invece cosa succede, per esempio, quando la particella non si trova permanentemente intrappolata all'interno del campo magnetico (come accade, per esempio, in un dipolo magnetico di un sincrotrone<sup>11</sup>).

Consideriamo per questo una particella di impulso  $p$  e assumiamo che viaggi nella direzione dell'asse  $y$ . Durante il suo moto, essa incontra una zona lunga  $L$  dove è presente un campo magnetico uniforme e costante  $\vec{B}$ , diretto ortogonalmente alla direzione iniziale di moto della particella, lungo l'asse  $z$ . Da quanto detto sopra, la particella inizierà un movimento a spirale (in questo caso, date le condizioni iniziali scelte, di passo nullo ...). Se, come assumeremo,  $L$  è molto minore del raggio della spirale, il moto della particella sarà solo debolmente deviato. Imponendo le condizioni iniziali e tenendo conto che il moto diviene di nuovo inerziale dopo che la particella è uscita, cioè dopo un tempo  $\delta t \approx \frac{L}{\beta}$ , risulta

$$\begin{aligned} p_x^{out} &= m\gamma\beta \sin(\Omega \delta t) \approx m\gamma\beta \Omega \delta t = m\gamma\beta \frac{qB}{m\gamma\beta} L = qBL \\ p_y^{out} &= m\gamma\beta \cos(\Omega \delta t) \approx m\gamma\beta \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

<sup>11</sup>Per esempio, nel caso dell'acceleratore *LHC* del *CERN*, i protoni potranno raggiungere un impulso massimo di  $p_{max} = 7 \text{ TeV}/c$ , corrispondente quindi ad un  $\gamma$  di circa 7000. Il campo magnetico dei 1232 dipoli, ciascuno lungo circa  $14 \text{ m}$ , necessario per mantenere i protoni in orbita a  $7 \text{ TeV}$  è di  $8.36 \text{ T}$ , come si calcola determinando il raggio della macchina circolare equivalente (l'acceleratore ha anche tratti dritti per un perimetro totale di circa  $27 \text{ Km}$ ) dalla relazione

$$(\text{numero di dipoli}) * (\text{lunghezza di un dipolo})/6.28 = 1232 * 14/(2\pi) = 2745 \text{ m}$$

e applicando quindi la formula (4.3.20).

La particella ha dunque acquistato un impulso trasversale a  $\vec{B}$  e alla direzione del suo moto originario, pari a<sup>12</sup>

$$\Delta p_t = qBL \quad (4.3.25)$$

L'angolo di deflessione nel piano  $xy$  vale dunque (tra parentesi, l'espressione dell'angolo di deflessione sia nel sistema *cgs es* che nel *SI*)

$$\Theta_{out} = \frac{\Delta p_t}{p} = \frac{qBL}{p} = \frac{qBL}{m\gamma\beta} = \Omega \frac{L}{\beta} \quad \left( \Theta_{out} = \frac{\Omega L}{c\beta} \right)_{cgs/SI} \quad (4.3.26)$$

e la traiettoria di uscita, per una ben nota proprietà geometrica delle tangenti alla circonferenza, è la stessa di quella di un punto materiale che continua dritto per  $\frac{L}{2}$  e quindi devia di  $\Theta_{out}$ , proseguendo poi di moto rettilineo ...

La deflessione magnetica, oltre a essere utilizzata per curvare la traiettoria delle particelle negli acceleratori *circolari* e quindi accelerarle più volte usando le stesse cavità a radiofrequenza, è utilmente usata anche per misurare l'impulso delle particelle cariche attraverso i cosiddetti *spettrometri magnetici*.

Esistono sostanzialmente due modi per fare la misura, ovvero usando un sistema di tracciatura della traiettoria esterno alla zona dove è presente il campo magnetico, oppure uno interno alla zona di campo.

Iniziamo trattando il primo caso.

Lo spettrometro consisterà in almeno due rivelatori di posizione posti prima del volume dove è presente il campo magnetico, capaci di definire la direzione di volo della particella carica con una incertezza  $\delta\theta_{in}$  nel piano ortogonale al campo magnetico (piano *bending*), seguiti da un altro sistema analogo<sup>13</sup> capace di fornire la nuova direzione di volo dopo la deflessione magnetica, con una incertezza angolare nel piano bending pari a  $\delta\theta_{out}$ .

L'angolo di deflessione  $\Theta$  che la particella carica ha subito nel piano bending, per quanto visto sopra, vale

$$\Theta = \frac{qBL}{p_{\perp}} \Rightarrow p_{\perp} = \frac{qBL}{\Theta} \quad (4.3.27)$$

ovvero, volendo riscrivere nelle unità di cui alla (4.3.21) il risultato di cui sopra per una carica unitaria, tenendo conto altresì della possibile non uni-

<sup>12</sup>In generale, e dunque anche se  $\vec{B}$  non è costante, l'impulso trasverso acquistato vale  $\Delta\vec{p}_t = q \int \vec{dl} \times \vec{B}$ , come è facile verificare a partire dalla forza di Lorentz, per cui

$$d\vec{p} = \vec{F} dt = q dt \vec{\beta} \times \vec{B} = q d\vec{L} \times \vec{B} \quad (4.3.24)$$

risultato che resta valido, per quanto visto, anche nella dinamica relativistica.

<sup>13</sup>In realtà, per l'osservazione fatta di sopra riguardo alle proprietà geometriche delle tangenti alla circonferenza, in uscita basterebbe un solo piano tracciante, potendo usare come primo punto per definire la direzione di uscita proprio l'intersezione della traiettoria rettilinea incidente con il piano di simmetria del magnete.

formità del campo magnetico, si ha

$$p_{\perp}[\text{GeV}/c] = \frac{0.3 \int B[T] dx[m]}{\Theta} \quad (4.3.28)$$

La precisione della misura dipende, ovviamente, dalla precisione con cui sono note le quantità da cui  $p_{\perp}$  dipende.

Limitandoci alle sole incertezze nelle determinazioni angolari, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} &= \frac{\delta \Theta}{\Theta} = p_{\perp} \frac{\delta \Theta}{q B L} = p_{\perp} \frac{1}{q B L} \sqrt{(\delta \theta_{in})^2 + (\delta \theta_{out})^2} = \\ &\Rightarrow \frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} = p_{\perp}[\text{GeV}/c] \frac{1}{0.3 \int B[T] dx[m]} \sqrt{(\delta \theta_{in})^2 + (\delta \theta_{out})^2} \quad (4.3.29) \end{aligned}$$

Passiamo adesso a considerare il caso in cui il sistema tracciante è esso stesso immerso nel campo magnetico. Senza entrare nelle possibili complicazioni che questa disposizione può presentare, assumeremo di disporre di tre piani, posti lungo il percorso della particella carica a distanza  $L/2$  uno dall'altro, ciascuno capace di fornire una misura di posizione della traccia nel piano bending, con incertezza  $\sigma$ .

In questo caso, essendo la traccia un arco di circonferenza, la determinazione dell'impulso trasverso è fatta mediante la misura del raggio della stessa, attraverso la determinazione della sagitta  $s$  associata all'arco descritto.

Semplici considerazioni geometriche conducono alla relazione

$$s = \frac{L^2}{8R} \quad (4.3.30)$$

da cui, essendo in base alla (4.3.20) che

$$R = \frac{p_{\perp}}{qB} \Leftrightarrow R[m] = \frac{p_{\perp}[\text{GeV}/c]}{0.3 B[T]} \quad (4.3.31)$$

abbiamo

$$p_{\perp} = q B R = q B \frac{L^2}{8s} \Leftrightarrow p_{\perp} = \frac{0.3 \int B x dx}{4s} \quad (4.3.32)$$

Evidentemente l'incertezza sulla misura dipende, nel caso di perfetta conoscenza dell'integrale del campo, dalla incertezza sulla misura della sagitta. Nella coordinata *bending*, se indichiamo con  $y_1$ ,  $y_2$  ed  $y_3$  le tre misure successive della posizione della traiettoria, risulta<sup>14</sup>

$$s = \left| \left( \frac{y_1 + y_3}{2} - y_2 \right) \right| \Rightarrow \delta s = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4} + \sigma_2^2} \quad (4.3.33)$$

<sup>14</sup>Evidentemente il segno dell'espressione in parentesi nella (4.3.33) di cui  $s$  è il modulo, è legato semplicemente al segno della carica della particella tracciata.

che mostra come sia l'incertezza sulla misura centrale a essere la più rilevante. In questo caso, risulta

$$\frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} = \frac{\delta s}{s} = p_{\perp} [GeV/c] \frac{4}{0.3 \int B[T] x dx [m]} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4} + \sigma_2^2} \quad (4.3.34)$$

#### 4.4 Carica in campo elettrico

Un altro caso interessante è quello in cui la carica si muove in un campo elettrico *uniforme e costante*, che, senza perdita di generalità, assumeremo di nuovo diretto secondo l'asse  $z$ . In questo caso, il tensore elettromagnetico e le equazioni del moto della carica che da esso conseguono via la (4.2.11), risultano essere espresse dalle equazioni seguenti

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp^0}{d\tau} = -qE u_3 \\ \frac{dp^1}{d\tau} = 0 \\ \frac{dp^2}{d\tau} = 0 \\ \frac{dp^3}{d\tau} = qE u_0 \end{cases} \quad (4.4.35)$$

La seconda e la terza equazione, relative alle componenti  $x$  e  $y$  del quadrimpulso, dicono semplicemente che  $p^1$  e  $p^2$  sono costanti e quindi che le componenti della quadrivelocità  $u^1$  e  $u^2$  ortogonali al campo non cambiano nel tempo<sup>15</sup> (di nuovo, tempo del riferimento o tempo proprio non fa differenza, visto che si tratta di costanti ...). Passiamo a considerare le altre due equazioni (si ricordi che  $u^3 = -u_3$  mentre  $u^0 = u_0$ ): si ha

$$\begin{aligned} m \frac{du^0}{d\tau} &= E q u^3 \\ m \frac{du^3}{d\tau} &= E q u^0 \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

Come abbiamo già avuto modo di osservare, l'equazione relativa alla componente temporale del quadrimpulso esprime la conservazione dell'energia, infatti, esplicitamente essa afferma che

$$\frac{dp^0}{d\tau} \equiv m \frac{d\gamma}{d\tau} = E q \gamma \beta_z \quad (4.4.37)$$

ma  $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$ , essendo  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ , quindi l'equazione in questione afferma che

$$m\gamma \frac{d\gamma}{dt} = E q \gamma \beta_z \Rightarrow \frac{d(m\gamma)}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{\beta} \quad (4.4.38)$$

<sup>15</sup>Attenzione perchè questo non significa che anche  $\beta_x$  e  $\beta_y$  restano costanti, ma solo che  $\gamma\beta_x$  e  $\gamma\beta_y$  non cambiano nel tempo. Siccome  $\gamma$  dipende ovviamente anche da  $\beta_z$  che, come vedremo, cambia nel tempo, in realtà  $\beta_x$  e  $\beta_y$  non restano affatto costanti ...

la quale, appunto, stabilisce che il lavoro fatto nel nostro riferimento, nel tempo  $dt$ , dalla forza elettrica sulla carica  $q$  va semplicemente ad aumentare l'energia relativistica  $m\gamma$  della particella.

Ma veniamo alla soluzione delle equazioni di moto scritte sopra. Poniamo, per comodità,  $a \equiv \frac{qE}{m}$ : si noti che questa è l'accelerazione classica a cui sarebbe soggetta la carica nel campo elettrico dato<sup>16</sup>. Risulta

$$\frac{du^0}{d\tau} = a u^3 \quad \Rightarrow \quad u^0 = \frac{1}{2} (A e^{a\tau} + B e^{-a\tau}) \quad (4.4.39)$$

$$\frac{du^3}{d\tau} = a u^0 \quad \Rightarrow \quad u^3 = \frac{1}{2} (A e^{a\tau} - B e^{-a\tau}) \quad (4.4.40)$$

dove  $A$  e  $B$  sono le costanti di integrazione<sup>17</sup>.

Se si assume che l'origine del tempo proprio sia nel momento in cui  $\beta_z = 0$ , allora  $u^3(\tau = 0) \equiv u_0^3 = 0$  e quindi  $A = B$ , ovvero

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= A \cosh(a\tau) = \gamma \\ u^3(\tau) &= A \sinh(a\tau) = \beta_z \gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p^0(\tau) &= m A \cosh(a\tau) \\ p^3(\tau) &= m A \sinh(a\tau) \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

Evidentemente, per  $\tau = 0$ , quando  $\beta_z = 0$  per ipotesi, può essere che le componenti  $\beta_{x0}$  e  $\beta_{y0}$  della velocità e quindi le corrispondenti componenti dell'impulso, siano non nulle, nel qual caso, dalla (4.4.41), risulta

$$u^0(\tau = 0) \equiv \gamma_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{x0}^2 - \beta_{y0}^2}} = A \quad (4.4.42)$$

<sup>16</sup>Per trasformazioni di Lorentz lungo l'asse  $z$  il campo elettrico non cambia di intensità, visto che  $E_{\parallel}$  è invariante. Dunque, se ci mettiamo nel riferimento inerziale in cui  $\beta_z$  è momentaneamente nullo, troviamo qui la stessa intensità di campo elettrico che nel riferimento di partenza. Se  $p_x = p_y = 0$ , questo riferimento è tangente e allora la quantità  $a$  rappresenta effettivamente l'accelerazione subita dalla carica; però, se  $p_x$  o  $p_y$  non sono nulli, questa conclusione, in generale, è falsa: come vedremo, infatti, in questo caso il modulo della quadriaccelerazione non coincide con  $-a^2 \dots$

<sup>17</sup>Si ricordi, di nuovo, che  $c = 1$ : nel sistema *cgs es* oppure *SI* dobbiamo effettuare la sostituzione  $a\tau \rightarrow a\tau/c$ .

Quindi, in definitiva, da quanto precede risulta che, in generale, sarà<sup>18</sup>

$$\gamma(\tau) = u^0(\tau) = A \cosh(a\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{x0}^2 - \beta_{y0}^2}} \cosh(a\tau) \quad (4.4.44)$$

$$\beta_x(\tau) = \frac{u^1(\tau)}{u^0(\tau)} = \frac{\gamma_0 \beta_{x0}}{u^0(\tau)} = A \frac{\beta_{x0}}{\gamma(\tau)} = \frac{\beta_{x0}}{ch(a\tau)} \quad (4.4.45)$$

$$\beta_y(\tau) = \frac{u^2(\tau)}{u^0(\tau)} = \frac{\gamma_0 \beta_{y0}}{u^0(\tau)} = A \frac{\beta_{y0}}{\gamma(\tau)} = \frac{\beta_{y0}}{ch(a\tau)} \quad (4.4.46)$$

$$\beta_z(\tau) = \frac{u^3(\tau)}{u^0(\tau)} = \tanh(a\tau) \quad (4.4.47)$$

Per quanto riguarda poi la quadriaccelerazione, derivando la quadrivelocità rispetto al tempo proprio, si ottiene immediatamente che

$$\begin{aligned} a^\mu &= \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (u^0(\tau), u^1, u^2, u^3(\tau)) = \\ &= (A a \sinh(a\tau), 0, 0, A a \cosh(a\tau)) = a (u^3, 0, 0, u^1) \end{aligned} \quad (4.4.48)$$

che, nella metrica di Minkowski, è evidentemente ortogonale a  $u^\mu$  (come deve essere...) e ha modulo quadro pari a

$$a^\mu a_\mu = -(aA)^2 \quad (4.4.49)$$

Come si vede, questa quantità coincide con  $-a^2$  solo se la particella non ha componenti della velocità nella direzione trasversa al campo elettrico<sup>19</sup>.

<sup>18</sup>Si osservi che, come deve essere, risulta ad ogni tempo che  $u^\mu u_\mu = 1$ , infatti

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau) u_\mu(\tau) &= \gamma^2(\tau) (1 - \beta_x^2(\tau) - \beta_y^2(\tau) - \beta_z^2(\tau)) = \\ &= A^2 \cosh^2(a\tau) - A^2 \sinh^2(a\tau) - A^2 \beta_{x0}^2 - A^2 \beta_{y0}^2 = \\ &= A^2 (1 - \beta_{x0}^2 - \beta_{y0}^2) = \frac{A^2}{\gamma_0^2} = 1 \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

<sup>19</sup>Per capire questo punto occorre partire innanzi tutto dalle proprietà di trasformazione del campo elettrico per cambiamenti di riferimento, le quali, come abbiamo già visto, stabiliscono che

$$\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp \quad (4.4.50)$$

Se esistono, dunque, nel riferimento del Laboratorio  $RS$  componenti della velocità della particella che sono trasverse al campo elettrico uniforme e costante assegnato  $\vec{E} = (0, 0, E)$ , allora non si può certamente mai andare nel riferimento tangente soltanto con un boost nella direzione  $z$  del campo stesso, perché questo non può cambiare le componenti trasverse del quadrimpulso  $p^1$  e  $p^2$  che, come abbiamo visto, sono costanti del moto in  $RS$ .

Occorre, per esempio, procedere prima con il boost lungo  $z$  che conduce al riferimento  $RS''$  dove  $p^3$  è istantaneamente nulla e dunque è presente solo una velocità della particella trasversa all'asse  $z$ , pari, evidentemente, a quella della particella in  $RS$  al tempo  $\tau = 0$ , dato che le componenti del quadrimpulso trasverse al campo non cambiano durante il moto e abbiamo fissato  $\tau = 0$  quando  $\beta_{0z} = 0$ .

In termini del tempo  $t$  misurato nel sistema di riferimento assegnato, risulta

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = A \cosh(a\tau) \Rightarrow t = \frac{A}{a} \sinh(a\tau) + t_0 \quad (4.4.51)$$

e quindi se  $t_0$  è tale che risulta  $t = 0$  quando  $\tau = 0$ , abbiamo che

$$t = \frac{A}{a} \sinh(a\tau) \Rightarrow \sinh(a\tau) = \frac{at}{A} \quad (4.4.52)$$

per cui risulta infine che

$$\gamma(t) = A \cosh(a\tau) = A \sqrt{1 + \sinh^2(a\tau)} = \sqrt{A^2 + (at)^2} \quad (4.4.53)$$

$$\beta_x(t) = A \frac{\beta_{x0}}{\sqrt{A^2 + (at)^2}} \quad (4.4.54)$$

$$\beta_y(t) = A \frac{\beta_{y0}}{\sqrt{A^2 + (at)^2}} \quad (4.4.55)$$

$$\beta_z(t) = \tanh(a\tau) = \frac{at}{\sqrt{A^2 + (at)^2}} \quad (4.4.56)$$

Quanto poi alle coordinate, abbiamo evidentemente che

$$u^1(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = u_0^1 \Rightarrow x = x_0 + u_0^1 \tau \quad (4.4.57)$$

$$u^2(\tau) = \frac{dy}{d\tau} = u_0^2 \Rightarrow y = y_0 + u_0^2 \tau \quad (4.4.58)$$

$$u^3(\tau) = \frac{dz}{d\tau} = A \sinh(a\tau) \Rightarrow z = z_0 + \frac{A}{a} \cosh(a\tau) = z_0 + \frac{1}{a} \sqrt{A^2 + (at)^2} \quad (4.4.59)$$

Per tempi<sup>20</sup> piccoli rispetto a  $\frac{1}{a}$ , il moto è parabolico (si ricordi che  $A = \gamma_0$ ,  $u_0^1 \equiv \gamma_0 \beta_{x0}$  e  $u_0^2 \equiv \gamma_0 \beta_{y0}$  ...)

Questo boost, per la (4.4.50), non cambia il campo elettrico, ovvero, in  $RS''$  risulta  $\vec{E}'' = \vec{E}$ . Per andare adesso da  $RS''$  nel riferimento tangente  $RS'$ , occorre effettuare il boost definito dalla velocità della particella in  $RS''$  che, per quanto sopra, è la sua stessa velocità al tempo  $\tau = 0$  in  $RS$ , trasversa a  $\vec{E}$  e dunque a  $\vec{E}''$ . Quindi, siccome questo boost è trasverso al campo  $\vec{E}''$ , sempre per la (4.4.50) risulta adesso che  $\vec{E}' = \gamma \vec{E}'' = \gamma \vec{E}$ . Ma  $\gamma$ , poiché la velocità che definisce il boost coincide, come abbiamo detto, con quella della particella a  $\tau = 0$  in  $RS$ , è proprio la quantità che abbiamo già chiamato  $A$ . Dunque, siccome nel riferimento tangente l'accelerazione della carica è, per definizione, data da  $\vec{a}_0 = q\vec{E}'/m$  ne segue che  $\vec{a}_0 = qA\vec{E}/m \Rightarrow |\vec{a}_0| = qAE/m \equiv Aa$ .

<sup>20</sup>Ricordiamo che abbiamo posto  $c = 1$ , per cui la condizione  $at \leq 1$ , in realtà, va intesa come  $at/c \leq 1$  e dunque, per esempio, per un elettrone ( $m = 0.911 \times 10^{-30}$  Kg,  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C) in un campo elettrico di  $10$  MV/m (possibile, anche se al limite della attuale tecnologia ...) risulta che questa approssimazione è valida solo per

$$t \leq \frac{c}{a} = \frac{mc}{eE} = \frac{3.0 \times 10^8 \times 0.91 \times 10^{-30}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^7} \approx 1.7 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Si osservi che, in questo tempo, classicamente l'elettrone compie uno spostamento

$$\Delta s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{t}{2} (at) = \frac{c}{2} t \approx 2.5 \text{ cm}$$

infatti risulta

$$x = x_0 + u_0^1 \frac{1}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{A} \right) \cong x_0 + \gamma_0 \beta_{x0} \frac{1}{a} \frac{at}{A} = x_0 + \beta_{x0} t \quad (4.4.60)$$

$$y = y_0 + u_0^2 \frac{1}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{A} \right) \cong y_0 + \gamma_0 \beta_{y0} \frac{1}{a} \frac{at}{A} = y_0 + \beta_{y0} t \quad (4.4.61)$$

$$z \cong z_0 + \frac{A}{a} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A^2} t^2 \right) = z_0 + \frac{A}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{A} t^2 \quad (4.4.62)$$

Asintoticamente per  $t \rightarrow \infty$ , come si è già osservato, il moto tende ad assumere velocità *solo* lungo  $z$  e pari a 1, ovvero pari a  $c$ , anche se, al tempo  $t = 0$ , erano presenti componenti di velocità trasverse.

Riguardo infine alla legge oraria esatta, partendo dalla coordinata  $z$ , nel verso della quale è disposto il campo elettrico, se scegliamo  $z_0 = 0$  nella (4.4.59), risulta

$$z(t) = \frac{1}{a} \sqrt{A^2 + a^2 t^2} \Rightarrow a^2(z^2 - t^2) = A^2 \Rightarrow z^2 - t^2 = \frac{A^2}{a^2} \quad (4.4.63)$$

che è l'equazione di una iperbole equilatera (di cui, nel caso specifico, interessa una sola falda, cioè quella per  $z > 0$ ): per questo motivo, il moto di una carica elettrica in campo elettrico uniforme e costante è detto anche *moto iperbolico*.

Circa il moto della carica nelle direzioni  $x$  e  $y$ , a differenza del caso classico in cui esso è semplicemente un moto uniforme e dunque  $x$  e  $y$  dipendono linearmente dal tempo attraverso le componenti della velocità  $\beta_{x0}$  e  $\beta_{y0}$ , accade che

$$x(t) = x_0 + u_0^1 \frac{1}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{A} \right) = x_0 + \frac{A \beta_{x0}}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{A} \right) \quad (4.4.64)$$

$$y(t) = y_0 + u_0^2 \frac{1}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{A} \right) = y_0 + \frac{A \beta_{y0}}{a} \sinh^{-1} \left( \frac{at}{A} \right) \quad (4.4.65)$$

Ma per  $\xi \rightarrow \infty$  la funzione  $\sinh^{-1}(\xi)$  cresce proporzionalmente a  $\ln(\xi)$ , per cui dalle (4.4.64) e (4.4.65) segue che,  $x(t)$  ed  $y(t)$  divergono logicamente per  $t \rightarrow \infty$ , i.e.  $\propto \ln(t)$ , e non linearmente con  $t$ , come prevederebbe invece la meccanica newtoniana.

---

acquistando così una energia  $\Delta \mathcal{E} = e E \Delta s = 250 \text{ keV}$  ormai confrontabile con la sua energia di massa ( $m = 511 \text{ keV}$ ).

Nell'ambito della Meccanica Relativistica, invece, in questo tempo l'elettrone ha raggiunto un  $\gamma$  pari a

$$\gamma = \sqrt{1 + (at)^2} = \sqrt{2}$$

ovvero la sua energia cinetica è diventata

$$mc^2(\gamma - 1) \approx 0.41 \times 511 \approx 210 \text{ keV}$$

## 4.5 Carica in campo e.m. uniforme e costante

Abbiamo considerato il caso di una carica elettrica posta solo in campo magnetico o in campo elettrico uniformi e costanti. Cerchiamo ora di trattare il caso più generale in cui sono presenti entrambi i campi e ripartiamo per questo dalle equazioni che, nella teoria della Relatività Ristretta, descrivono il moto di una carica in campo elettromagnetico, ovvero

$$\begin{aligned} \frac{dp^\mu}{d\tau} &= q F^{\mu\nu} u_\nu \Leftrightarrow m \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^\mu{}_\nu u^\nu \\ \Leftrightarrow \frac{du^\mu}{d\tau} &= \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu \end{aligned} \quad (4.5.66)$$

Queste costituiscono, evidentemente, un sistema di quattro equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti.

In questo senso, si tratta di un caso particolare di un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dX_i}{d\tau} = M_{ij} X_j \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{d\tau} = M X \quad (4.5.67)$$

dove  $M$  è una matrice reale di rango  $n$ , indipendente dal parametro  $\tau$ .

La soluzione generale della (4.5.67) è semplicemente

$$X(\tau) = e^{\tau M} X(0) \quad (4.5.68)$$

dove il vettore  $X(0)$  di  $\mathbb{R}^n$  fornisce le condizioni iniziali ( $\tau=0$ ).

Torniamo ora al caso che ci interessa, ovvero a quello in cui la matrice  $M$  è proporzionale al tensore di Maxwell

$$(M)_{\mu\nu} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \equiv \frac{q}{m} (F)_{\mu\nu} \quad (4.5.69)$$

mentre il quadrivettore che vogliamo determinare come funzione del tempo proprio  $\tau$  della particella è la sua quadrivelocità. Abbiamo evidentemente che

$$u(\tau) = e^{\tau M} u(0) \quad (4.5.70)$$

Iniziamo osservando che la matrice  $e^{\tau M}$ , la quale "trasforma" la quadrivelocità della particella al tempo  $\tau = 0$  in quella al tempo  $\tau$ , è una matrice del gruppo di Lorentz ortocrono proprio  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Infatti, se poniamo

$$\vec{a} \equiv \frac{q}{m} \vec{E}, \quad \vec{b} \equiv -\frac{q}{m} \vec{B} \quad (4.5.71)$$

accade che

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ a_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.72)$$

e dunque, date le definizioni (2.3.29) dei generatori  $\vec{J}$  delle rotazioni e le definizioni (2.3.37) e (2.3.42) dei generatori  $\vec{K}$  dei boost, risulta

$$M = -i\vec{a} \cdot \vec{K} - i\vec{b} \cdot \vec{J} \quad (4.5.73)$$

e quindi

$$e^{\tau M} = e^{-i\tau(\vec{a} \cdot \vec{K} + \vec{b} \cdot \vec{J})} \quad (4.5.74)$$

che dimostra appunto quanto abbiamo affermato, cioè che  $e^{\tau M} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ . Il significato fisico della matrice  $e^{\tau M}$  è quello per cui, la sua inversa  $e^{-\tau M}$  è la matrice di Lorentz (anche se non unica...) che connette il riferimento assegnato dove, al tempo  $\tau$ , la quadrivelocità vale  $u(\tau)$ , con il riferimento (inerziale) in cui essa ha il valore iniziale  $u(0)$ .

#### 4.5.1 In campo magnetico

Rivediamo allora, per questa via, i due casi già considerati, iniziando ancora dal caso del solo campo magnetico uniforme e costante di intensità  $B$ , diretto lungo l'asse  $z$ .

In questo caso la matrice  $M$  è reale e antisimmetrica e risulta data da

$$M = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \Omega_c \mathcal{A} \quad (4.5.75)$$

dove  $\Omega_c$  è la frequenza di ciclotrone  $\Omega_c = \frac{qB}{m}$ , mentre la matrice  $\mathcal{A}$  è definita direttamente dalla (4.5.75). Abbiamo che

$$\mathcal{A}^2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv -\mathcal{B}; \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}^3 = -\mathcal{A}; \quad \mathcal{A}^4 = \mathcal{B}; \dots \quad (4.5.76)$$

e dunque

$$\begin{aligned} e^{\tau M} &= I + (\tau\Omega_c) \mathcal{A} - \frac{1}{2!} (\tau\Omega_c)^2 \mathcal{B} - \frac{1}{3!} (\tau\Omega_c)^3 \mathcal{A} + \frac{1}{4!} (\tau\Omega_c)^4 \mathcal{B} + \dots = \\ &= I + \mathcal{A} \sin(\Omega_c \tau) + \mathcal{B} [\cos(\Omega_c \tau) - 1] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Omega_c \tau) & \sin(\Omega_c \tau) & 0 \\ 0 & -\sin(\Omega_c \tau) & \cos(\Omega_c \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.77)$$

e quindi, assumendo le condizioni iniziali generiche seguenti

$u(0) = \gamma(1, \beta_\perp \sin \phi, \beta_\perp \cos \phi, \beta_\parallel)$ , ricaviamo

$$u^\mu(\tau) = \gamma(1, \beta_\perp \sin(\Omega_c \tau + \phi), \beta_\perp \cos(\Omega_c \tau + \phi), \beta_\parallel) \quad (4.5.78)$$

ovvero, se scegliamo le condizioni iniziali in modo che per  $\tau = 0$  risulti  $\phi = 0$ , ritroviamo le espressioni ben note per cui

$$\beta_x(\tau) = \beta_{\perp} \sin(\Omega_c \tau) \Rightarrow \beta_x(t) = \beta_{\perp} \sin(\Omega t) \quad (4.5.79)$$

$$\beta_y(\tau) = \beta_{\perp} \cos(\Omega_c \tau) \Rightarrow \beta_y(t) = \beta_{\perp} \cos(\Omega t) \quad (4.5.80)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma \Rightarrow t = \gamma \tau + t_0$ , si è scelto  $t_0 = 0$  e si è fatto uso della frequenza di betatrone, legata alla frequenza di ciclotrone dalla relazione  $\Omega = \Omega_c / \gamma$ .

### 4.5.2 In campo elettrico

Venendo adesso al caso della carica in campo elettrico uniforme e costante, la matrice  $M$  che definisce il sistema di equazioni differenziali è reale e simmetrica e risulta adesso così fatta

$$M = \frac{qE}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{qE}{m} \mathcal{A} \equiv a\mathcal{A} \quad (4.5.81)$$

e accade che

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathcal{B}; \quad \mathcal{A}^3 = \mathcal{A}; \dots \quad (4.5.82)$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} e^{\tau M} &= I + a\tau \mathcal{A} + \frac{1}{2!}(a\tau)^2 \mathcal{B} + \frac{1}{3!}(a\tau)^3 \mathcal{A} + \frac{1}{4!}(a\tau)^4 \mathcal{B} + \dots = \\ &= I + \mathcal{A} \sinh(a\tau) + \mathcal{B} (\cosh(a\tau) - 1) = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(a\tau) & 0 & 0 & \sinh(a\tau) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(a\tau) & 0 & 0 & \cosh(a\tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.83)$$

da cui, scegliendo come condizione iniziale  $u(0) = \gamma_0(1, \beta_{0x}, \beta_{0y}, 0)$  otteniamo il risultato ben noto secondo cui

$$u^{\mu}(\tau) = \gamma_0 (\cosh(a\tau), \beta_{0x}, \beta_{0y}, \sinh(a\tau)) \quad (4.5.84)$$

### 4.5.3 In campo elettrico e magnetico

Nel caso generale di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti, l'equazione da risolvere, come si è visto, è la (4.5.67), ovvero

$$\frac{dX_i}{d\tau} = M X \quad \Rightarrow \quad X(\tau) = e^{\tau M} X(0) \quad (4.5.85)$$

La matrice  $e^{\tau M}$  che risolve l'equazione differenziale non è sempre di facile determinazione. Possiamo semplificarne notevolmente il calcolo se la matrice  $M$  è diagonalizzabile, ovvero se esiste una base di  $\mathbf{C}^n$  fatta da autovettori di  $M$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  (non necessariamente distinti).

In questo caso esisterà una matrice invertibile  $V$  tale che

$$V M V^{-1} = D \quad (4.5.86)$$

dove  $D$  è la matrice diagonale che ha gli autovalori  $\lambda_i$  disposti sulla diagonale principale. Ponendo dunque

$$Y = V X \quad (4.5.87)$$

l'equazione data risulta equivalente a

$$\begin{aligned} V \frac{dX}{d\tau} &= V M X = V M V^{-1} V X \\ &\Rightarrow \frac{dY}{d\tau} = D Y \quad \Rightarrow \quad Y(\tau) = e^{\tau D} Y(0) \end{aligned} \quad (4.5.88)$$

dove la matrice  $e^{\tau D}$ , questa volta, è di facile determinazione perché è anch'essa diagonale e ha come autovalori semplicemente gli esponenziali  $e^{\tau \lambda_i}$ . Quanto poi alla soluzione cercata  $X(\tau)$ , evidentemente abbiamo<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} X(\tau) &= V^{-1} Y(\tau) = V^{-1} e^{\tau D} Y(0) = V^{-1} e^{\tau D} V V^{-1} Y(0) = \\ &= V^{-1} e^{\tau D} V X(0) \end{aligned} \quad (4.5.90)$$

Il risultato mostra che gli elementi della matrice  $V^{-1} e^{\tau D} V = e^{\tau M}$  risultano essere, in generale, una combinazione lineare degli esponenziali  $e^{\tau \lambda_i}$  che sono quindi i termini che danno la dipendenza temporale a tali elementi di matrice.

---

<sup>21</sup>Si osservi che, come deve essere

$$V^{-1} e^{\tau D} V X(0) = e^{\tau V^{-1} D V} X(0) = e^{\tau M} X(0) \quad (4.5.89)$$

Ritornando ora alla nostra equazione

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu_{\cdot\nu} u^\nu \equiv (M)_{\mu\nu} u^\nu \quad (4.5.91)$$

è evidente come, per poter determinare la soluzione generale, il primo passo da fare sia quello di determinare lo spettro degli autovalori di  $M$  che, come evidenziato nella (4.5.72), è data da

$$M_{\mu\nu} = \frac{q}{m} F^\mu_{\cdot\nu} \equiv \frac{q}{m} (F)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ a_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.92)$$

dove abbiamo definito

$$\vec{a} \equiv \frac{q}{m} \vec{E}, \quad \vec{b} \equiv -\frac{q}{m} \vec{B} \quad (4.5.93)$$

Prima di affrontare direttamente il problema della determinazione esplicita degli autovalori di  $M$ , iniziamo osservando che il tensore di Maxwell  $F$ , a cui  $M$  è proporzionale, per cambiamenti di sistema di riferimento, si trasforma nel modo seguente

$$F^\mu_{\cdot\nu} \rightarrow F'^\mu_{\cdot\nu} = \Lambda^\mu_{\cdot\sigma} \Lambda_\nu^{\cdot\omega} F^\sigma_{\cdot\omega} \quad (4.5.94)$$

ovvero, in termini puramente matriciali, per quanto già detto in precedenza riguardo alle matrici di Lorentz, abbiamo

$$\begin{aligned} (F')_{\mu\nu} &= (\Lambda)_{\mu\sigma} (F)_{\sigma\omega} (g\Lambda g)_{\nu\omega} = (\Lambda)_{\mu\sigma} (F)_{\sigma\omega} (g\Lambda g)_{\omega\nu}^t = \\ &= (\Lambda)_{\mu\sigma} (F)_{\sigma\omega} (\Lambda)_{\omega\nu}^{-1} \end{aligned} \quad (4.5.95)$$

la quale mostra come  $F$  e quindi anche  $M$ , per cambiamento di riferimento, si trasformi in modo equivalente a quello legato a una trasformazione di verosimiglianza<sup>22</sup>. Le implicazioni di questo fatto riguardo agli autovalori di  $F$  e dunque anche di  $M$ , sono che essi non dipendono dal sistema di riferimento, e quindi essi possono essere funzioni solo degli invarianti del campo elettromagnetico.

Come è noto, questi invarianti sono solo due, e cioè

$$E^2 - B^2 = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.5.96)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\sigma\omega} F^{\mu\nu} F^{\sigma\omega} \quad (4.5.97)$$

e dunque gli autovalori di  $M$  potranno essere funzioni unicamente di queste due quantità. Inoltre, poiché  $M$  ha traccia nulla, la somma degli autovalori

<sup>22</sup>Le trasformazioni di verosimiglianza sono quelle determinate sulle matrici che descrivono operatori lineari agenti in spazi vettoriali, dai cambiamenti di base.

dovrà essere ancora nulla, ovvero essi dovranno comparire a coppie di segno opposto. Si dimostra<sup>23</sup> che, almeno se  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ , la matrice  $M = \frac{q}{m}F$  è

<sup>23</sup>L'equazione agli autovalori  $\det(M - xI) = 0$ , sviluppando il determinante secondo la prima riga, diventa

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0 \quad (4.5.98)$$

dove

$$\begin{aligned} T_1 &= -x \begin{vmatrix} -x & -b_3 & b_2 \\ b_3 & -x & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & -x \end{vmatrix} = \\ &= -x(-x^3 - b_1b_2b_3 + b_1b_2b_3 - xb_2^2 - xb_1^2 - xb_3^2) \end{aligned} \quad (4.5.99)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= -a_1 \begin{vmatrix} a_1 & -b_3 & b_2 \\ a_2 & -x & -b_1 \\ a_3 & b_1 & -x \end{vmatrix} = \\ &= -a_1(a_1x^2 + b_1b_3a_3 + b_1b_2a_2 + xb_2a_3 + a_1b_1^2 - xa_2b_3) \end{aligned} \quad (4.5.100)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= a_2 \begin{vmatrix} a_1 & -x & b_2 \\ a_2 & b_3 & -b_1 \\ a_3 & -b_2 & -x \end{vmatrix} = \\ &= a_2(-xa_1b_3 + xb_1a_3 - a_2b_2^2 - a_3b_2b_3 - a_1b_1b_2 - a_2x^2) \end{aligned} \quad (4.5.101)$$

$$\begin{aligned} T_4 &= -a_3 \begin{vmatrix} a_1 & -x & -b_3 \\ a_2 & b_3 & -x \\ a_3 & -b_2 & b_1 \end{vmatrix} = \\ &= -a_3(a_1b_1b_3 + a_3x^2 + a_2b_2b_3 + a_3b_3^2 - a_1b_2x + a_2b_1x) \end{aligned} \quad (4.5.102)$$

e dunque l'equazione agli autovalori  $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0$  diventa

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 + x^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + (-a_1^2x^2 - a_1a_3b_1b_3 - a_1a_2b_1b_2 - a_1a_3b_2x - a_1^2b_1^2 + a_1a_2b_3x) + \\ &+ (-a_1a_2b_3x + a_2a_3b_1x - a_2^2b_2^2 - a_2a_3b_2b_3 - a_1a_2b_1b_2 - a_2^2x^2) + \\ &+ (-a_1a_3b_1b_3 - a_3^2x^2 - a_2a_3b_2b_3 - a_3^2b_3^2 + a_1a_3b_2x - a_2a_3b_1x) = \\ &= x^4 + x^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + \\ &+ x(-a_1a_3b_2 + a_1a_2b_3 - a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1) + \\ &+ (-a_1a_3b_1b_3 - a_1a_2b_1b_2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_2a_3b_2b_3 - a_1a_2b_1b_2 - a_1a_3b_1b_3 - a_2a_3b_2b_3 - a_3^2b_3^2) = \\ &= x^4 + x^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + \\ &+ (-2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_2a_3b_2b_3 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2) = \\ &= x^4 - x^2(a^2 - b^2) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned} \quad (4.5.103)$$

dove abbiamo posto

$$a^2 \equiv \left| \frac{q}{m} \vec{E} \right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2; \quad b^2 \equiv \left| -\frac{q}{m} \vec{B} \right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \quad (4.5.104)$$

Si tratta di una equazione biquadratica: ponendo al solito  $y = x^2$ , diventa

$$y^2 - y(a^2 - b^2) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 0 \quad (4.5.105)$$

Il discriminante dell'equazione vale

$$\Delta = (a^2 - b^2)^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (4.5.106)$$

sempre diagonalizzabile e possiede quattro autovalori distinti, due reali e due immaginari puri, dati da

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda \\ \lambda_2 &= +\lambda \\ \lambda_3 &= -\mu \\ \lambda_4 &= +\mu \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda &= i\sqrt{\frac{b^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{2}} \\ \mu &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{2}} \end{aligned} \quad (4.5.109)$$

Le due soluzioni reali danno luogo a un moto iperbolico, mentre le due soluzioni immaginarie danno luogo a un moto cosinusodale: la forma esplicita delle soluzioni sarà determinata più avanti.

Si osservi che i due casi studiati (carica in campo magnetico e carica in campo elettrico) *non* appartengono a questa famiglia in quanto, in entrambi i casi è  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , dato che, nel riferimento considerato, è presente un solo campo (si ricordi che  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  è un invariante di Lorentz ...).

#### 4.5.4 $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ma $E^2 - B^2 \neq 0$

Passiamo adesso a considerare il caso in cui  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  ovvero  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . In questo caso, l'equazione secolare (4.5.103) diviene

$$x^4 - x^2(a^2 - b^2) = 0 \quad (4.5.110)$$

la quale possiede le due soluzioni

$$x^2 = 0; \quad x^2 = a^2 - b^2 \quad (4.5.111)$$

ovvero, abbiamo la soluzione "doppia"  $x = 0$  e le soluzioni  $x_{\pm} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ . Assumendo che  $a^2 - b^2 \neq 0$ , può darsi il caso in cui  $a^2 > b^2$ , nel qual caso le due soluzioni  $x_{\pm}$  sono entrambe reali e danno luogo a un moto iperbolico, oppure può accadere che  $a^2 < b^2$ , nel qual caso le due soluzioni sono immaginarie pure e opposte e danno luogo a un moto cosinusoidale.

In entrambi i casi la matrice  $M$  è diagonalizzabile. Vediamo perché.

Iniziamo assumendo che nel riferimento dato sia  $E^2 > B^2$ , ovvero  $a^2 > b^2$ .

e quindi è certamente positivo.

Procediamo assumendo intanto che  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ , nel qual caso il termine noto dell'equazione (4.5.105) è certamente negativo e quindi le soluzioni nella variabile  $y$ , ovvero in  $x^2$ , sono di segno opposto. Abbiamo

$$y_+ = \frac{(a^2 - b^2) + \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow y_+ \equiv x_-^2 = \frac{(a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{2} \quad (4.5.107)$$

$$y_- = \frac{(a^2 - b^2) - \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow y_- \equiv x_+^2 = -\frac{(b^2 - a^2) + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{2} \quad (4.5.108)$$

con  $y_+ > 0$  da cui due radici reali uguali e opposte e  $y_- < 0$  da cui due radici puramente immaginarie uguali e opposte e dunque anche complesse coniugate.

Resta così dimostrata la (4.5.109).

Si può effettuare una trasformazione di Lorentz che cancella, nel nuovo riferimento, il campo magnetico. Immaginiamo infatti di partire dalla situazione per cui il campo elettrico è diretto lungo l'asse  $x$  mentre quello magnetico è diretto lungo l'asse  $z$  (per ipotesi essi sono ortogonali ...). Un boost lungo  $y$  conduce a

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (4.5.112)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \quad (4.5.113)$$

ed è facile convincersi che, per  $\beta = B/E$ ,  $\vec{B}' = 0$ , mentre  $\vec{E}'$  rimane diretto lungo l'asse  $x$  ma appare, nel nuovo riferimento, di intensità pari a  $\vec{E}' = \sqrt{E^2 - B^2}$ . Nel riferimento definito dal boost di cui sopra è dunque presente solo un campo elettrostatico e quindi il moto sarà unicamente di tipo iperbolico e la matrice  $M'$ , che sarà necessariamente simmetrica poichè definita solo dal campo elettrico, è diagonalizzabile. Siccome  $M$  e  $M'$ , come si è visto, sono legate da una trasformazione di verosimiglianza, anche  $M$  è diagonalizzabile, con gli stessi autovalori di  $M'$ .

In questo riferimento, come abbiamo visto, due componenti spaziali della quadrivelocità sono costanti e corrispondono ai due autovalori nulli. Nel riferimento del laboratorio, ci saranno quindi, in generale, due combinazioni delle componenti della quadrivelocità costanti, legate sempre ai due autovalori nulli.

Venendo all'altro caso in cui  $E^2 < B^2$ , ovvero  $a^2 < b^2$ , si può cancellare nello stesso modo il campo elettrico e avere presente solo il campo magnetico, per cui la dipendenza dal tempo sarà unicamente di tipo cosinusoidale e ci saranno comunque due componenti (o piuttosto due combinazioni delle stesse) che restano costanti.

Ma vediamo adesso in dettaglio quanto abbiamo illustrato sopra.

### 1° caso : $\mathbf{E} > \mathbf{B}$

Iniziamo assumendo che, nel nostro sistema di riferimento  $RS$  sia

$$\vec{E} = E(1, 0, 0); \quad \vec{B} = B(0, 0, 1)$$

con  $E$  e  $B$  quantità positive tali per cui  $E > B$ .

Poniamo al solito

$$a \equiv \frac{q}{m} E, \quad b \equiv -\frac{q}{m} B$$

La matrice  $M$  (cfr.(4.5.92)), nel caso presente, ha la forma seguente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv F_{\cdot\nu}^{\mu} \quad (4.5.114)$$

Consideriamo ora un riferimento  $RS'$ , in moto relativo rispetto al riferimento dato  $RS$  con velocità  $\beta$  lungo l'asse  $y$ . La matrice del gruppo di Lorentz ortocrono proprio che, senza rotazione degli assi, consente di passa da  $RS$  a  $RS'$  è il boost

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5.115)$$

dunque, per quanto si è visto, la matrice  $M'$  (ovvero il tensore di Maxwell  $F'$ ) nel riferimento  $RS'$  è dato da

$$M' = \Lambda M \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a\gamma - b\beta\gamma & 0 & 0 \\ a\gamma - b\beta\gamma & 0 & a\beta\gamma - b\gamma & 0 \\ 0 & b\gamma - a\beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.116)$$

la quale descrive, evidentemente, un campo elettromagnetico costituito da un campo elettrico lungo l'asse  $x$  di intensità pari a

$$a' = a\gamma - b\beta\gamma = \gamma \left( \frac{q}{m} E + \frac{q}{m} B \beta \right) \Rightarrow E' = \gamma(E + \beta B) \quad (4.5.117)$$

e da un campo magnetico lungo l'asse  $z$ , di intensità pari a

$$b' = b\gamma - a\beta\gamma = \gamma \left( -\frac{q}{m} B - \frac{q}{m} E \beta \right) \Rightarrow B' = \gamma(B + \beta E) \quad (4.5.118)$$

Ma noi abbiamo assunto che  $E > B$  e quindi, definendo

$$k \equiv \frac{q}{m} \sqrt{E^2 - B^2} \quad (4.5.119)$$

e ponendo<sup>24</sup>

$$\hat{\beta} = -\frac{B}{E} = \frac{b}{a} \Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - B^2}} = \frac{a}{k} \quad (4.5.120)$$

risulta

$$E' = \hat{\gamma} \left( E - \frac{B^2}{E} \right) = \hat{\gamma} \frac{E^2 - B^2}{E} = \sqrt{E^2 - B^2} = \frac{m}{q} k \quad (4.5.121)$$

$$B' = 0 \quad (4.5.122)$$

Dunque, nel riferimento  $RS'$  la carica si muoverà di semplice moto iperbolico. Al tempo  $\tau = 0$ , però, la particella che assumiamo ferma in  $RS$ , sarà in moto

<sup>24</sup>Ovviamente, la definizione (4.5.120) di  $\beta$  è possibile perché abbiamo assunto che  $E > B$ .

in  $RS'$  e la sua quadrivelocità per  $\tau = 0$  sarà data da

$$u'_0 = \hat{\Lambda}u_0 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} & 0 & -\hat{\beta}\hat{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{\beta}\hat{\gamma} & 0 & \hat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ 0 \\ -\hat{\beta}\hat{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.123)$$

Ma, vista la (4.5.84) e tenendo conto che il campo elettrico è diretto come l'asse  $x$ , possiamo concludere immediatamente che, in  $RS'$ , sarà

$$u'^{\mu}(\tau) = \hat{\gamma} \begin{pmatrix} \cosh k\tau \\ \sinh k\tau \\ -\hat{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.124)$$

e dunque, nel riferimento  $RS$  risulterà

$$\begin{aligned} u^{\mu}(\tau) &= \Lambda^{-1}u'^{\mu}(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} & 0 & \hat{\beta}\hat{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\beta}\hat{\gamma} & 0 & \hat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\gamma} \begin{pmatrix} \cosh k\tau \\ \sinh k\tau \\ -\hat{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^2 \cosh k\tau - \hat{\beta}^2 \hat{\gamma}^2 \\ \hat{\gamma} \sinh k\tau \\ \hat{\beta} \hat{\gamma}^2 \cosh k\tau - \hat{\beta} \hat{\gamma}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.125)$$

ma

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= \hat{\gamma}^2 \cosh k\tau - \hat{\beta}^2 \hat{\gamma}^2 = \hat{\gamma}^2 - \hat{\beta}^2 \hat{\gamma}^2 + \hat{\gamma}^2 (\cosh k\tau - 1) = \\ &= 1 + \hat{\gamma}^2 (\cosh k\tau - 1) = 1 + \frac{a^2}{k^2} (\cosh k\tau - 1) \end{aligned} \quad (4.5.126)$$

$$u^1(\tau) = \hat{\gamma} \sinh k\tau = \frac{a}{k} \sinh k\tau \quad (4.5.127)$$

$$\begin{aligned} u^2(\tau) &= \hat{\beta} \hat{\gamma}^2 \cosh k\tau - \hat{\beta} \hat{\gamma}^2 = \frac{b}{a} \frac{a^2}{k^2} (\cosh k\tau - 1) = \\ &= \frac{ab}{k^2} (\cosh k\tau - 1) \end{aligned} \quad (4.5.128)$$

e dunque, in definitiva

$$u^{\mu}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2}{k^2} (\cosh k\tau - 1) \\ \frac{a}{k} \sinh k\tau \\ \frac{ab}{k^2} (\cosh k\tau - 1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.129)$$

Ovviamente avremmo potuto arrivare a questa soluzione anche senza passare per il cambio di riferimento, integrando l'equazione differenziale data: lo vedremo più avanti.

**2° caso :  $\mathbf{E} < \mathbf{B}$** 

Passiamo adesso a considerare il caso in cui, essendo  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , è  $|\vec{B}| > |\vec{E}|$ .  
Assumiamo di nuovo che

$$\vec{E} = E(1, 0, 0), \quad \vec{B} = B(0, 0, 1) \quad \text{con } B > E \quad (4.5.130)$$

La matrice  $M$  che descrive l'evoluzione temporale della quadrivelocità resta formalmente la stessa di cui alla (4.5.114) e, effettuando un boost di Lorentz con velocità  $\beta$  lungo l'asse  $y$ , essa finisce per assumere ancora la forma di cui alla (4.5.116). Ne segue che, come abbiamo già visto, nel riferimento trasformato  $RS'$  risulta

$$a' \equiv \frac{q}{m} E' = a\gamma - b\beta\gamma = \frac{q}{m}\gamma(E + \beta B) \Rightarrow E' = \gamma(E + \beta B) \quad (4.5.131)$$

$$b' \equiv -\frac{q}{m} B' = b\gamma - a\beta\gamma = -\frac{q}{m}\gamma(B + \beta E) \Rightarrow B' = \gamma(B + \beta E) \quad (4.5.132)$$

A differenza di quanto accadeva nel caso precedente, in cui avevamo assunto  $E > B$ , adesso abbiamo che  $B > E$ : questo significa che l'invariante  $E^2 - B^2$  è negativo e dunque non sarà più possibile trovare un riferimento in cui sia presente solo il campo elettrico ... però potremo trovarne uno in cui è presente solo il campo magnetico ! Scegliamo infatti

$$\tilde{\beta} \equiv -\frac{E}{B} = \frac{a}{b} \Rightarrow \tilde{\gamma} = \frac{B}{\sqrt{B^2 - E^2}} \quad (4.5.133)$$

e definiamo

$$\omega \equiv \frac{q}{m}\sqrt{B^2 - E^2} \Rightarrow \tilde{\gamma} = -\frac{b}{\omega} \quad (4.5.134)$$

Nel riferimento  $RS'$  così individuato, sulla base delle (4.5.131) e (4.5.132), abbiamo

$$E' = \frac{B}{\sqrt{B^2 - E^2}} \left( E - \frac{E}{B} B \right) = 0 \quad (4.5.135)$$

$$B' = \frac{B}{\sqrt{B^2 - E^2}} \left( B - \frac{E}{B} E \right) = \sqrt{B^2 - E^2} = \frac{m}{q}\omega \quad (4.5.136)$$

Dunque, in  $RS'$  è presente solamente un campo magnetico  $\vec{B}'$ , diretto secondo l'asse  $z$ . Per quanto abbiamo visto in precedenza (cfr. (4.5.78)), in questo riferimento la quadrivelocità della carica è data da

$$u'^{\mu}(\tau) = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{\perp} \sin(\omega\tau + \phi) \\ \beta_{\perp} \cos(\omega\tau + \phi) \\ \beta_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (4.5.137)$$

dove  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\perp}^2-\beta_{\parallel}^2}}$  e le velocità  $\beta_{\perp}$  e  $\beta_{\parallel}$ , rispettivamente perpendicolari e parallele al campo magnetico, sono definite insieme alla fase  $\phi$  dalle condizioni iniziali.

Per esempio, se nel riferimento  $RS$  la particella carica è ferma al tempo  $\tau = 0$ , ecco che, come mostra la (4.5.123), in  $RS'$  avremo

$$u'^{\mu}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} \\ 0 \\ -\tilde{\beta}\tilde{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.138)$$

e dunque (si ricordi che  $\tilde{\beta}$  è negativa)

$$\gamma = \tilde{\gamma}; \quad \beta_{\perp} = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}; \quad \beta_{\parallel} = 0; \quad \phi = 0 \quad (4.5.139)$$

per cui, in  $RS'$ , avremo

$$u'^{\mu}(\tau) = \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{\beta} \sin \omega\tau \\ -\tilde{\beta} \cos \omega\tau \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.140)$$

e dunque, ritrasformando all'inverso da  $RS'$  a  $RS$  mediante la matrice  $\Lambda^{-1}$ , risulterà infine che

$$\begin{aligned} u^{\mu}(\tau) &= \Lambda^{-1}u'^{\mu}(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & 0 & \tilde{\beta}\tilde{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\beta}\tilde{\gamma} & 0 & \tilde{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{\beta} \sin \omega\tau \\ -\tilde{\beta} \cos \omega\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}^2 \cos \omega\tau \\ -\tilde{\beta}\tilde{\gamma} \sin \omega\tau \\ \tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2 - \tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2 \cos \omega\tau \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.141)$$

ma

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}^2 \cos \omega\tau &= \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}^2 + \tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}^2(1 - \cos \omega\tau) = 1 + \frac{a^2 b^2}{b^2 \omega^2}(1 - \cos \omega\tau) = \\ &= 1 + \frac{a^2}{\omega^2}(1 - \cos \omega\tau) \end{aligned} \quad (4.5.142)$$

$$-\tilde{\beta}\tilde{\gamma} \sin \omega\tau = -\frac{a-b}{b} \frac{\sin \omega\tau}{\omega} = \frac{a}{\omega} \sin \omega\tau \quad (4.5.143)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2 - \tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2 \cos \omega\tau &= \tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2(1 - \cos \omega\tau) = \frac{a b^2}{b \omega^2}(1 - \cos \omega\tau) = \\ &= \frac{ab}{\omega^2}(1 - \cos \omega\tau) \end{aligned} \quad (4.5.144)$$

e dunque, in conclusione, abbiamo

$$u^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2}{\omega^2}(1 - \cos\omega\tau) \\ \frac{a}{\omega} \sin\omega\tau \\ \frac{ab}{\omega^2}(1 - \cos\omega\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.145)$$

#### 4.5.5 $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ e anche $E^2 - B^2 = 0$

Il caso in cui oltre ad  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  sia anche  $a^2 - b^2 = 0$  richiede una trattazione ad hoc, perché (almeno nel caso non banale) riguarda una situazione nuova in cui la matrice  $M$  non è diagonalizzabile, bensì è nilpotente.

Ripartiamo allora dall'equazione secolare (4.5.103) che, essendo  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  e  $a^2 - b^2 = 0$ , diventa semplicemente

$$x^4 = 0 \quad (4.5.146)$$

la quale ci dice che l'unico autovalore possibile è  $x = 0$ . Se questo autovalore ha molteplicità quattro, ovvero esistono quattro autovettori di  $M$  indipendenti tra loro e corrispondenti a questo autovalore, allora  $M$  è diagonalizzabile con quattro zeri sulla diagonale principale e dunque, evidentemente, risulta  $M = 0$ . Siamo quindi nel caso in cui  $a = b = 0$ , o, in altri termini, nel caso di *assenza* del campo elettromagnetico.

Supponiamo dunque di non trovarci in questo caso banale e assumiamo senz'altro che tanto  $\vec{E}$  che  $\vec{B}$  siano uniformi, costanti e non nulli, tali che

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (4.5.147)$$

$$|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = 0 \quad (4.5.148)$$

Iniziamo osservando che se quanto sopra accade in un riferimento inerziale, allora questo rimane vero in ogni riferimento essendo, quelle condizioni, legate a invarianti del campo elettromagnetico. In particolare, in nessun riferimento, per esempio, uno dei due campi potrà annullarsi ...

Senza perdita di generalità, supponiamo dunque che il campo elettrico sia diretto lungo l'asse  $x$  mentre il campo magnetico sia diretto lungo l'asse  $z$  e che abbiano lo stesso modulo, ovvero

$$\vec{E} = \alpha(1, 0, 0); \quad \vec{B} = \alpha(0, 0, 1) \quad (4.5.149)$$

La matrice  $M$  che entra nella (4.5.92) è adesso data da

$$M = \frac{q\alpha}{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{q\alpha}{m} \mathcal{A} \equiv a \mathcal{A} \quad (4.5.150)$$

e risulta<sup>25</sup>

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.156)$$

per cui abbiamo che

$$e^{\tau a \mathcal{A}} = I + \tau a \mathcal{A} + \frac{1}{2}(\tau a \mathcal{A})^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2 \tau^2}{2} & a\tau & \frac{a^2 \tau^2}{2} & 0 \\ a\tau & 1 & a\tau & 0 \\ -\frac{a^2 \tau^2}{2} & -a\tau & 1 - \frac{a^2 \tau^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5.157)$$

<sup>25</sup>Come si è detto,  $M$  e quindi  $\mathcal{A}$ , non è diagonalizzabile. Vediamo qual è la forma triangolare (teorema di Cayley) che essa assume. Iniziamo cercando gli autovettori di  $\mathcal{A}$  (corrispondenti al suo solo autovalore nullo)

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0 \quad e \quad a + c = 0 \quad (4.5.151)$$

Dunque  $\mathcal{A}$  ammette solo due autovettori, cioè

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.5.152)$$

Abbiamo poi che, se definiamo i vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.153)$$

ecco che risulta

$$\mathcal{A} e_1 = e_2; \quad \mathcal{A} e_2 = v_1 \quad (4.5.154)$$

ma i vettori  $e_1, e_2, v_1, v_2$  sono fra loro indipendenti e dunque costituiscono una base: in questa base l'operatore descritto dalla matrice  $\mathcal{A}$  assume la forma triangolare seguente (teorema di Cayley)

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.155)$$

in cui si evidenziano due sottospazi invarianti generati, rispettivamente, da  $e_1, e_2, v_1$ , e da  $v_2$ .

da cui si ottiene, nel caso, per esempio, in cui la particella sia ferma per  $\tau = 0$ , che la sua quadrivelocità al tempo  $\tau$  risulta data da

$$u^\mu(\tau) = \left( 1 + \frac{a^2\tau^2}{2}, a\tau, -\frac{a^2\tau^2}{2}, 0 \right) \quad (4.5.158)$$

a cui corrisponde una quadriaccelerazione pari a

$$a^\mu(\tau) = (a^2\tau, a, -a^2\tau, 0) \Rightarrow a^\mu a_\mu = -|\vec{a}_N|^2 = -a^2 \equiv -\left(\frac{q\alpha}{m}\right)^2 \quad (4.5.159)$$

e una velocità nel riferimento del Laboratorio data da

$$\vec{\beta}(\tau) = \left( \frac{a\tau}{1 + \frac{a^2\tau^2}{2}}, \frac{-\frac{a^2\tau^2}{2}}{1 + \frac{a^2\tau^2}{2}}, 0 \right) \rightarrow (0, -1, 0) \quad (4.5.160)$$

dove ne abbiamo esplicitamente indicato il limite per  $\tau \rightarrow \infty$ .

Il fatto che  $a^\mu a_\mu = -a^2$  sia indipendente dal tempo proprio  $\tau$  significa che nel riferimento tangente il modulo (non la direzione ...) del campo elettrico (e quindi anche quello del campo magnetico ...) è comunque, a ogni tempo, costante e pari ad  $\alpha$ .

Verifichiamolo direttamente.

Il punto di partenza è che il moto della carica elettrica

- ha come condizione iniziale nel sistema del Laboratorio quella di partire da ferma, ovvero  $u^\mu(0) = (1, 0, 0, 0)$ ;
- il campo elettrico nel riferimento del Laboratorio è  $\vec{E} = \alpha(1, 0, 0)$ ;
- il campo magnetico nel riferimento del Laboratorio è  $\vec{B} = \alpha(0, 0, 1)$

In queste ipotesi, ponendo per comodità di notazione

$$a \equiv \frac{\alpha q}{m}; \quad k \equiv a\tau \quad (4.5.161)$$

abbiamo ricavato una espressione di  $\gamma$  e della velocità della carica nel riferimento del Laboratorio che, in funzione del tempo proprio  $\tau$ , sono date da

$$\gamma(\tau) = 1 + \frac{k^2}{2} \quad (4.5.162)$$

$$\vec{\beta}(\tau) = \left( \frac{k}{1 + \frac{k^2}{2}}, \frac{-\frac{k^2}{2}}{1 + \frac{k^2}{2}}, 0 \right) \equiv \left( \frac{k}{\gamma}, -\frac{k^2}{2\gamma}, 0 \right) \quad (4.5.163)$$

D'altronde, la legge di trasformazione del campo elettrico stabilisce che, in un nuovo riferimento in moto rispetto al Laboratorio con velocità generica  $\vec{\beta}$ , il nuovo campo elettrico valga

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \beta \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \quad (4.5.164)$$

Nel nostro caso, usando per  $\vec{\beta}$  l'espressione (4.5.163), abbiamo

$$\begin{aligned}
 \beta \times \vec{B} &= \alpha \left( -\frac{k^2}{2\gamma}, -\frac{k}{\gamma}, 0 \right) \\
 \Rightarrow \vec{E} + \beta \times \vec{B} &= \alpha \left( 1 - \frac{k^2}{2\gamma}, -\frac{k}{\gamma}, 0 \right) = \\
 &= \frac{\alpha}{\gamma} \left( \gamma - \frac{k^2}{2}, -k, 0 \right) = \frac{\alpha}{\gamma} (1, -k, 0) \\
 \Rightarrow \gamma(\vec{E} + \beta \times \vec{B}) &= \alpha(1, -k, 0) \quad (4.5.165)
 \end{aligned}$$

mentre, essendo  $\vec{\beta} \cdot \vec{E} = \frac{\alpha k}{\gamma}$ , risulta

$$\begin{aligned}
 -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) &= -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \frac{\alpha k}{\gamma} = -\frac{k\gamma\alpha}{\gamma+1} \vec{\beta} = \\
 &= -\frac{k\gamma\alpha}{\gamma+1} \left( \frac{k}{\gamma}, -\frac{k^2}{2\gamma}, 0 \right) = -\frac{k\alpha}{\gamma+1} \left( k, -\frac{k^2}{2}, 0 \right) \quad (4.5.166)
 \end{aligned}$$

Sommando i due termini, abbiamo infine che

$$\vec{E}' = \epsilon \left( 1 - \frac{k^2}{\gamma+1}, -k + \frac{k^3}{2(\gamma+1)}, 0 \right) = \epsilon \left( \frac{4-k^2}{4+k^2}, -\frac{4k}{4+k^2}, 0 \right) \quad (4.5.167)$$

il cui modulo quadro è sempre pari a  $\alpha^2$ , che significa che nel riferimento tangente alla particella il campo elettrico ha sempre la stessa intensità  $\alpha$  e dunque l'accelerazione newtoniana della carica deve avere, come si è visto, modulo costante e uguale al valore assunto per  $\tau = 0$ , quando la carica era ferma nel sistema del Laboratorio, dove l'intensità del campo elettrico è appunto, per ipotesi, pari a  $\alpha$ .

Questo risultato, però, così come abbiamo visto nel caso del moto iperbolico, si può prestare a interpretazioni errate ...

Vediamo quindi di precisare esattamente cosa esso sta affermando.

Nel caso in cui i campi elettrici e magnetici uniformi e costanti siano ortogonali fra loro e abbiano la stessa intensità, accade che il campo elettrico sentito da una carica che si muova sotto l'azione dei campi stessi, ha una intensità, nel riferimento tangente, che non dipende dal tempo.

Questo implica che l'accelerazione newtoniana a cui la carica è sottoposta a causa della presenza dei campi elettromagnetici e dunque anche l'invariante costruito con la quadriaccelerazione, siano indipendenti dal tempo.

Questo, però, non significa necessariamente che l'accelerazione newtoniana coincida sempre, come nel caso che abbiamo descritto sopra, con la quantità  $a \equiv \frac{\alpha q}{m}$ , essendo  $\alpha$  l'intensità del campo elettrico nel sistema del Laboratorio. Domandiamoci infatti quale sarà l'accelerazione newtoniana della carica se, al tempo  $\tau = 0$ , essa non è ferma nel Laboratorio, ma possiede una quadri-velocità  $u^\mu(0) = \gamma_0(1, \vec{\beta}_0)$

Il fatto che  $u(\tau) = e^{\tau a A}$ , vista la (4.5.157), stabilisce che la quadrivelocità della particella carica al tempo  $\tau$  sarà diventata la seguente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u^0(\tau) \\ u^1(\tau) \\ u^2(\tau) \\ u^3(\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2\tau^2}{2} & a\tau & \frac{a^2\tau^2}{2} & 0 \\ a\tau & 1 & a\tau & 0 \\ -\frac{a^2\tau^2}{2} & -a\tau & 1 - \frac{a^2\tau^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{0x} \\ \beta_{0y} \\ \beta_{0z} \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} 1 + \frac{(a\tau)^2}{2} + a\tau\beta_{0x} + \frac{(a\tau)^2}{2}\beta_{0y} \\ a\tau + \beta_{0x} + a\tau\beta_{0y} \\ -\frac{(a\tau)^2}{2} - a\tau\beta_{0x} + \left(1 - \frac{(a\tau)^2}{2}\beta_{0y}\right) \\ \beta_{0z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.168)$$

da cui ricaviamo un'espressione della quadriaccelerazione pari a

$$a^\mu(\tau) = \gamma (a^2\tau + a\beta_{0x} + a^2\tau\beta_{0y}, a + a\beta_{0y}, -a^2\tau - a\beta_x - a^2\tau\beta_{0y}, 0) \quad (4.5.169)$$

$$\Rightarrow a^\mu a_\mu = -\gamma_0^2 a^2 (1 + \beta_{0y})^2 \quad (4.5.170)$$

L'invariante con essa costruito, ovvero il modulo quadro dell'accelerazione newtoniana, è ancora costante, ma, come è evidente, non è più uguale a  $-\left(\frac{q\alpha}{m}\right)^2 \equiv -a^2$ , come nel caso in cui  $u(0) = (1, 0, 0, 0)$ .

Il motivo di questo risultato è che il campo elettrico, nei riferimenti tangente alla carica in moto, adesso non ha modulo  $\alpha$ , bensì  $\gamma_0\alpha(1 + \beta_{0y})$  !

In altre parole, durante il moto della particella, il campo elettrico nel riferimento tangente rimane sì sempre della stessa intensità, ma questa non coincide necessariamente con quella misurata nel Laboratorio, a meno che questo non sia esso stesso, in un qualche momento, un riferimento tangente al moto della carica.

Verifichiamo adesso quanto affermato sopra, ovvero che, partendo dalle nuove condizioni iniziali descritte, l'intensità del campo elettrico nel riferimento tangente al moto della particella per  $\tau = 0$  è appunto pari a  $\gamma_0\alpha(1 + \beta_{0y})$ . Per ipotesi, si ha

$$u^\mu(0) = \gamma_0(1, \vec{\beta}_0); \quad \vec{\beta} = (\beta_{0x}, \beta_{0y}, \beta_{0z}) \quad (4.5.171)$$

$$\vec{E} = \alpha(1, 0, 0); \quad \vec{B} = \alpha(0, 0, 1) \quad (4.5.172)$$

e sappiamo che il campo nel riferimento in moto rispetto al Laboratorio in cui la carica è istantaneamente a riposo per  $\tau = 0$ , è dato dalla ben nota relazione

$$\vec{E}' = \gamma_0(\vec{E} + \vec{\beta}_0 \times \vec{B}) - \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{E})\vec{\beta}_0 \quad (4.5.173)$$

D'altronde

$$\vec{\beta}_0 \times \vec{B} = \alpha(\beta_{0y}, \beta_{0x}, 0) \quad (4.5.174)$$

e dunque

$$\gamma_0(\vec{E} + \vec{\beta}_0 \times \vec{B}) = \gamma_0 \alpha [(1, 0, 0) + (\beta_{0y}, -\beta_{0x}, 0)] \quad (4.5.175)$$

Quanto poi al terzo termine che compare nella (4.5.173), si ha

$$-\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{E}) \vec{\beta}_0 = -\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1} \alpha \beta_{0x} \vec{\beta}_0 \quad (4.5.176)$$

e dunque

$$\vec{E}' = \gamma_0 \alpha \left[ (1, 0, 0) + (\beta_{0y}, -\beta_{0x}, 0) - \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} \beta_{0x} \vec{\beta}_0 \right] \equiv \gamma_0 \alpha \vec{V} \quad (4.5.177)$$

e il modulo quadro del vettore  $\vec{V}$ , definito dalla relazione precedente, vale

$$\begin{aligned} V^2 &= 1 + (\beta_{0y}^2 + \beta_{0x}^2) + \frac{\gamma_0^2}{(\gamma_0 + 1)^2} \beta_{0x}^2 \beta_0^2 + 2\beta_{0y} - 2\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} \beta_{0x}^2 = \\ &= 1 + \beta_{0y}^2 + 2\beta_{0y} + \beta_{0x}^2 \left[ 1 + \frac{\gamma_0^2 \beta_0^2}{(\gamma_0 + 1)^2} - \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} \right] = \\ &= (1 + \beta_{0y})^2 + \beta_{0x}^2 \left[ 1 + \frac{\gamma_0^2 - 1}{(\gamma_0 + 1)^2} - \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} \right] = (1 + \beta_{0y})^2 \quad (4.5.178) \end{aligned}$$

che dimostra, appunto, quanto affermato.

4.5.6  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ 

Rivediamo adesso in dettaglio il caso in cui  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ , quando, evidentemente, poiché  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  è un invariante di Lorentz, non sarà possibile trovare un riferimento in cui uno dei due campi è nullo.

Per concretezza, assumiamo che il campo magnetico  $\vec{B}$  sia diretto come l'asse  $z$  mentre il campo elettrico  $\vec{E}$  giaccia nel piano  $xz$  e risulti

$$\vec{B} = B(0, 0, 1); \quad \vec{E} = E(s, 0, c) \quad \text{con } s^2 + c^2 = 1, \quad c \neq 0 \quad (4.5.179)$$

Se, al solito, definiamo

$$a \equiv \frac{qE}{m}; \quad b \equiv -\frac{qB}{m} \quad (4.5.180)$$

la matrice  $M$  che descrive l'evoluzione temporale della quadrivelocità della particella attraverso l'equazione

$$\frac{du}{d\tau} = M u \quad (4.5.181)$$

è data da (cfr.(4.5.72))

$$M = \begin{pmatrix} 0 & as & 0 & ac \\ as & 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.182)$$

i cui autovalori, per quanto già visto (cfr.(4.5.109)), sono i seguenti

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda \\ \lambda_2 &= +\lambda \\ \lambda_3 &= -\mu \\ \lambda_4 &= +\mu \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda &\equiv i\omega = i\sqrt{\frac{b^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2}}{2}} \\ \mu &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2}}{2}} \end{aligned} \quad (4.5.183)$$

dove  $a^2 - b^2 = \frac{q^2}{m^2}(E^2 - B^2)$ ,  $abc = -\frac{q^2}{m^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})$  e  $\omega, \mu$  sono quantità reali strettamente positive.

Veniamo ora alla determinazione degli autovettori a essi corrispondenti. Cerchiamoli della forma

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.5.184)$$

Se dunque  $\sigma$  è l'autovalore considerato, il suo autovettore  $V$  deve soddisfare l'equazione matriciale

$$MV = \sigma V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & as & 0 & ac \\ as & 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.5.185)$$

ovvero deve accadere che

$$x \cdot as + z \cdot ac = \sigma \quad (4.5.186)$$

$$as - y \cdot b = x \cdot \sigma \quad (4.5.187)$$

$$x \cdot b = y \cdot \sigma \quad (4.5.188)$$

$$ac = z \cdot \sigma \quad (4.5.189)$$

Dall'equazione (4.5.189) ricaviamo immediatamente che

$$z = \frac{ac}{\sigma} \quad (4.5.190)$$

Sostituendo questo risultato nella (4.5.186), ricaviamo

$$x as + \frac{a^2 c^2}{\sigma} = \sigma \Rightarrow x as = \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma} \Rightarrow x = \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma as} \quad (4.5.191)$$

e infine, sostituendo nella (4.5.188), si ha<sup>26</sup>

$$b \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma as} = \sigma y \Rightarrow y = b \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma^2 as} \quad (4.5.192)$$

e dunque

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma} \\ b \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma^2 as} \\ \frac{ac}{\sigma} \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} \sigma^2 as \\ \sigma(\sigma^2 - a^2 c^2) \\ b(\sigma^2 - a^2 c^2) \\ \sigma a^2 cs \end{pmatrix} \quad (4.5.193)$$

dove siamo passati dalla prima alla seconda espressione di  $V$  moltiplicando per  $\sigma^2 as$ , in modo da eliminare i denominatori (gli autovettori sono indeterminati a meno di una costante moltiplicativa non nulla ...).

Ma veniamo adesso ad esplicitare i quattro autovettori corrispondenti, rispettivamente a  $\lambda_{1,2}$  e  $\mu_{1,2}$ , ricordando che sono indeterminati, per esempio, a meno del segno.

<sup>26</sup>Riguardo all'equazione (4.5.187) che non abbiamo utilizzato per determinare le componenti dell'autovettore, se  $\sigma$  è un autovalore, essa è automaticamente soddisfatta. Partendo dalla (4.5.187) abbiamo infatti

$$\begin{aligned} 0 &= as - by - \sigma x = as - b^2 \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{\sigma^2 as} - \frac{\sigma^2 - a^2 c^2}{as} = \frac{\sigma^2 a^2 s^2 - b^2(\sigma^2 - a^2 c^2) - \sigma^2(\sigma^2 - a^2 c^2)}{\sigma^2 as} = \\ &= \frac{\sigma^2 a^2 s^2 - b^2 \sigma^2 + a^2 b^2 c^2 - \sigma^4 + a^2 c^2 \sigma^2}{\sigma^2 as} = \frac{-\sigma^4 + a^2 \sigma^2 (s^2 + c^2) - b^2 \sigma^2 + a^2 b^2 c^2}{\sigma^2 as} = \\ &= \frac{-\sigma^4 + a^2 \sigma^2 - b^2 \sigma^2 + a^2 b^2 c^2}{\sigma^2 as} = - \frac{\sigma^4 + \sigma^2 (b^2 - a^2) - a^2 b^2 c^2}{\sigma^2 as} \end{aligned}$$

ovvero otteniamo che l'autovalore  $\sigma$  deve soddisfare l'equazione

$$\sigma^4 + \sigma^2 (b^2 - a^2) - a^2 b^2 c^2 = 0$$

che è appunto l'equazione agli autovalori che già avevamo ottenuto ...

In corrispondenza all'autovalore  $\lambda_1 = -i\omega$  scegliamo

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\omega^2 as \\ i\omega(\omega^2 + a^2 c^2) \\ -b(\omega^2 + a^2 c^2) \\ -i\omega a^2 cs \end{pmatrix} \quad (4.5.194)$$

In corrispondenza all'autovalore  $\lambda_2 = i\omega$  scegliamo

$$V_2 = \begin{pmatrix} \omega^2 as \\ i\omega(\omega^2 + a^2 c^2) \\ b(\omega^2 + a^2 c^2) \\ -i\omega a^2 cs \end{pmatrix} \quad (4.5.195)$$

In corrispondenza all'autovalore  $\lambda_3 = -\mu$  scegliamo

$$V_3 = \begin{pmatrix} -\mu^2 as \\ \mu(\mu^2 - a^2 c^2) \\ -b(\mu^2 - a^2 c^2) \\ \mu a^2 cs \end{pmatrix} \quad (4.5.196)$$

E infine, in corrispondenza all'autovalore  $\lambda_4 = \mu$  scegliamo

$$V_4 = \begin{pmatrix} \mu^2 as \\ \mu(\mu^2 - a^2 c^2) \\ b(\mu^2 - a^2 c^2) \\ \mu a^2 cs \end{pmatrix} \quad (4.5.197)$$

Avendo ottenuto l'espressione degli autovalori di  $M$  nella base delle componenti della quadrivelocità, possiamo adesso definire la matrice  $A$  che stabilisce il cambiamento di base verso quella fatta dagli autovettori di  $M$ .

Come è noto, questa matrice è definita dagli elementi seguenti

$$A = \begin{pmatrix} (V_1)_1 & (V_2)_1 & (V_3)_1 & (V_4)_1 \\ (V_1)_2 & (V_2)_2 & (V_3)_2 & (V_4)_2 \\ (V_1)_3 & (V_2)_3 & (V_3)_3 & (V_4)_3 \\ (V_1)_4 & (V_2)_4 & (V_3)_4 & (V_4)_4 \end{pmatrix} \quad (4.5.198)$$

ed è tale per cui

$$A^{-1} M A = D \quad \Leftrightarrow \quad M = A D A^{-1} \quad (4.5.199)$$

dove  $D$  è la matrice diagonale definita dai quattro autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  della matrice  $M$ . Quanto all'evoluzione temporale, abbiamo

$$u(\tau) = e^{\tau M} u(0) = e^{\tau A D A^{-1}} u(0) = A e^{\tau D} A^{-1} U(0) \equiv A e^{\tau D} Y \quad (4.5.200)$$

dove abbiamo ridefinito il vettore delle condizioni iniziali, ponendo

$$Y \equiv A^{-1} u(0) \quad (4.5.201)$$

Ma la matrice  $e^{\tau D}$  è anch'essa diagonale, con autovalori  $e^{\tau\lambda_i}$  e quindi abbiamo che

$$e^{\tau D} Y = \begin{pmatrix} e^{\tau\lambda_1} Y_1 \\ e^{\tau\lambda_2} Y_2 \\ e^{\tau\lambda_3} Y_3 \\ e^{\tau\lambda_4} Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\tau\omega} Y_1 \\ e^{i\tau\omega} Y_2 \\ e^{-\tau\mu} Y_3 \\ e^{\tau\mu} Y_4 \end{pmatrix} \quad (4.5.202)$$

e dunque risulta

$$u(\tau) = \begin{pmatrix} (V_1)_1 e^{-i\tau\omega} Y_1 + (V_2)_1 e^{i\tau\omega} Y_2 + (V_3)_1 e^{-\tau\mu} Y_3 + (V_4)_1 e^{\tau\mu} Y_4 \\ (V_1)_2 e^{-i\tau\omega} Y_1 + (V_2)_2 e^{i\tau\omega} Y_2 + (V_3)_2 e^{-\tau\mu} Y_3 + (V_4)_2 e^{\tau\mu} Y_4 \\ (V_1)_3 e^{-i\tau\omega} Y_1 + (V_2)_3 e^{i\tau\omega} Y_2 + (V_3)_3 e^{-\tau\mu} Y_3 + (V_4)_3 e^{\tau\mu} Y_4 \\ (V_1)_4 e^{-i\tau\omega} Y_1 + (V_2)_4 e^{i\tau\omega} Y_2 + (V_3)_4 e^{-\tau\mu} Y_3 + (V_4)_4 e^{\tau\mu} Y_4 \end{pmatrix} \quad (4.5.203)$$

A questo punto, determinando la matrice  $A^{-1}$  si può stabilire la forma esplicita del vettore  $Y = A^{-1}u(0)$  per una qualsiasi condizione iniziale data.

Va detto, però, che il calcolo di  $A^{-1}$  è, in generale, piuttosto laborioso ...

Cerchiamo dunque di procedere nel caso particolare in cui si operi, al tempo  $\tau = 0$ , nel riferimento tangente alla particella carica, ovvero nel riferimento dove essa è istantaneamente ferma. Abbiamo quindi

$$u(0) \equiv u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.204)$$

e dunque le quantità  $Y_i$  devono essere tali per cui

$$\begin{pmatrix} (V_1)_1 Y_1 + (V_2)_1 Y_2 + (V_3)_1 Y_3 + (V_4)_1 Y_4 \\ (V_1)_2 Y_1 + (V_2)_2 Y_2 + (V_3)_2 Y_3 + (V_4)_2 Y_4 \\ (V_1)_3 Y_1 + (V_2)_3 Y_2 + (V_3)_3 Y_3 + (V_4)_3 Y_4 \\ (V_1)_4 Y_1 + (V_2)_4 Y_2 + (V_3)_4 Y_3 + (V_4)_4 Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.205)$$

ovvero deve essere

$$u_0^0 = 1 = -\omega^2 a s Y_1 + \omega^2 a s Y_2 - \mu^2 a s Y_3 + \mu^2 a s Y_4 \quad (4.5.206)$$

$$u_0^1 = 0 = i\omega(\omega^2 + a^2 c^2) Y_1 + i\omega(\omega^2 + a^2 c^2) Y_2 + \mu(\mu^2 - a^2 c^2) Y_3 + \mu(\mu^2 - a^2 c^2) Y_4 \quad (4.5.207)$$

$$u_0^2 = 0 = -b(\omega^2 + a^2 c^2) Y_1 + b(\omega^2 + a^2 c^2) Y_2 - b(\mu^2 - a^2 c^2) Y_3 + b(\mu^2 - a^2 c^2) Y_4 \quad (4.5.208)$$

$$u_0^3 = 0 = -i\omega a^2 c s Y_1 - i\omega a^2 c s Y_2 + \mu a^2 c s Y_3 + \mu a^2 c s Y_4 \quad (4.5.209)$$

Iniziamo considerando le due equazioni (4.5.207) e (4.5.209)

$$\begin{cases} i\omega(\omega^2 + a^2 c^2)(Y_1 + Y_2) + \mu(\mu^2 - a^2 c^2)(Y_3 + Y_4) = 0 \\ -i\omega a^2 c s (Y_1 + Y_2) + \mu a^2 c s (Y_3 + Y_4) = 0 \end{cases} \quad (4.5.210)$$

Esse ci dicono, evidentemente, che

$$Y_1 + Y_2 = 0; \quad Y_3 + Y_4 = 0 \quad (4.5.211)$$

Sostituendo allora  $Y_1 = -Y_2$  e  $Y_3 = -Y_4$  nelle equazioni (4.5.206) e (4.5.208), otteniamo il seguente sistema lineare di due equazioni nelle due incognite  $Y_2$  e  $Y_4$

$$\begin{cases} \omega^2 as Y_2 + \omega^2 as Y_2 + \mu^2 as Y_4 + \mu^2 as Y_4 = 1 \\ b(\omega^2 + a^2 c^2) Y_2 + b(\omega^2 + a^2 c^2) Y_2 + b(\mu^2 - a^2 c^2) Y_4 + b(\mu^2 - a^2 c^2) Y_4 = 0 \end{cases} \quad (4.5.212)$$

ovvero

$$\begin{cases} 2\omega^2 as Y_2 + 2\mu^2 as Y_4 = 1 \\ 2b(\omega^2 + a^2 c^2) Y_2 + 2b(\mu^2 - a^2 c^2) Y_4 = 0 \end{cases} \quad (4.5.213)$$

da cui

$$\begin{cases} \omega^2 Y_2 + \mu^2 Y_4 = \frac{1}{2as} \\ (\omega^2 + a^2 c^2) Y_2 + (\mu^2 - a^2 c^2) Y_4 = 0 \end{cases} \quad (4.5.214)$$

Il determinante di Cramer vale

$$Det = \omega^2(\mu^2 - a^2 c^2) - \mu^2(\omega^2 + a^2 c^2) = -a^2 c^2(\omega^2 + \mu^2) \quad (4.5.215)$$

e abbiamo infine che

$$Y_2 = \frac{\frac{1}{2as}(\mu^2 - a^2 c^2)}{-a^2 c^2(\omega^2 + \mu^2)} = -\frac{\mu^2 - a^2 c^2}{2a^3 c^2 s(\omega^2 + \mu^2)} \quad (4.5.216)$$

$$Y_4 = \frac{-\frac{1}{2as}(\omega^2 + a^2 c^2)}{-a^2 c^2(\omega^2 + \mu^2)} = \frac{\omega^2 + a^2 c^2}{2a^3 c^2 s(\omega^2 + \mu^2)} \quad (4.5.217)$$

Prima di procedere oltre conviene osservare intanto che

$$\mu^2 \omega^2 = \frac{1}{4} [(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 c^2 - (a^2 - b^2)^2] = a^2 b^2 c^2 \quad (4.5.218)$$

Inoltre abbiamo

- $\omega^2(a^2 c^2 - \mu^2) = a^2 c^2(\omega^2 - b^2)$ , infatti

$$\begin{aligned} \omega^2(a^2 c^2 - \mu^2) - a^2 c^2(\omega^2 - b^2) &= \omega^2 a^2 c^2 - \omega^2 \mu^2 - a^2 c^2 \omega^2 + a^2 b^2 c^2 = \\ &= -\omega^2 \mu^2 + a^2 b^2 c^2 = 0 \end{aligned}$$

- $\mu^2(\omega^2 + a^2 c^2) = a^2 c^2(\mu^2 + b^2)$  infatti

$$\begin{aligned} \mu^2(\omega^2 + a^2 c^2) - a^2 c^2(\mu^2 + b^2) &= \mu^2 \omega^2 + \mu^2 a^2 c^2 - a^2 c^2 \mu^2 - a^2 c^2 b^2 = \\ &= \mu^2 \omega^2 - a^2 b^2 c^2 = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} Y_2 &= -Y_1 = -\frac{\mu^2 - a^2c^2}{2a^3c^2s(\omega^2 + \mu^2)} = \frac{a^2c^2 - \mu^2}{a^2c^2} \frac{1}{2as(\omega^2 + \mu^2)} = \\ &= \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2} \frac{1}{2as(\omega^2 + \mu^2)} = \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\omega^2} \end{aligned} \quad (4.5.219)$$

$$\begin{aligned} Y_4 &= -Y_3 = \frac{\omega^2 + a^2c^2}{2a^3c^2s(\omega^2 + \mu^2)} = \frac{\omega^2 + a^2c^2}{a^2c^2} \frac{1}{2as(\omega^2 + \mu^2)} = \\ &= \frac{\mu^2 + b^2}{\mu^2} \frac{2}{2as(\omega^2 + \mu^2)} = \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\mu^2} \end{aligned} \quad (4.5.220)$$

Avendo esplicitato il quadrivettore  $Y$  che corrisponde alle condizioni iniziali scelte (particella in quiete per  $\tau = 0$ ), siamo ora in grado, finalmente, di determinare le componenti della quadrivelocità in funzione di  $\tau$  stesso. Abbiamo

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= (V_1)_1 Y_1 e^{-i\omega\tau} + (V_2)_1 Y_2 e^{i\omega\tau} + (V_3)_1 Y_3 e^{-\mu\tau} + (V_4)_1 Y_4 e^{\mu\tau} = \\ &= -\omega^2 as Y_1 e^{-i\omega\tau} + \omega^2 as Y_2 e^{i\omega\tau} - \mu^2 as Y_3 e^{-\mu\tau} + \mu^2 as Y_4 e^{\mu\tau} = \\ &= \omega^2 as Y_2 (e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}) + \mu^2 as Y_4 (e^{-\mu\tau} + e^{\mu\tau}) = \\ &= \omega^2 as \frac{1}{2as\omega^2} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} 2 \cos \omega\tau + \mu^2 as \frac{1}{2as\mu^2} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} 2 \cosh \mu\tau = \\ &= \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \end{aligned} \quad (4.5.221)$$

$$\begin{aligned} u^1(\tau) &= i\omega(\omega^2 + a^2c^2) Y_1 e^{-i\omega\tau} + i\omega(\omega^2 + a^2c^2) Y_2 e^{i\omega\tau} + \mu(\mu^2 - a^2c^2) Y_3 e^{-\mu\tau} + \\ &+ \mu(\mu^2 - a^2c^2) Y_4 e^{\mu\tau} = \\ &= i\omega(\omega^2 + a^2c^2) Y_2 (-e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}) + \mu(\mu^2 - a^2c^2) Y_4 (e^{\mu\tau} - e^{-\mu\tau}) = \\ &= i\omega(\omega^2 + a^2c^2) Y_2 2i \sin \omega\tau + \mu(\mu^2 - a^2c^2) Y_4 2 \sinh \mu\tau = \\ &= -2\omega(\omega^2 + a^2c^2) \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\omega^2} \sin \omega\tau + 2\mu(\mu^2 - a^2c^2) \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\mu^2} \sinh \mu\tau = \\ &= \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2c^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2c^2}{as\omega} \sin \omega\tau \end{aligned} \quad (4.5.222)$$

$$\begin{aligned} u^2(\tau) &= -b(\omega^2 + a^2c^2) e^{-i\omega\tau} Y_1 + b(\omega^2 + a^2c^2) e^{i\omega\tau} Y_2 - b(\mu^2 - a^2c^2) e^{-\mu\tau} Y_3 + \\ &+ b(\mu^2 - a^2c^2) e^{\mu\tau} Y_4 = \\ &= b(\omega^2 + a^2c^2) Y_2 (e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}) + b(\mu^2 - a^2c^2) Y_4 (e^{-\mu\tau} + e^{\mu\tau}) = \\ &= b(\omega^2 + a^2c^2) Y_2 2 \cos \omega\tau + b(\mu^2 - a^2c^2) Y_4 2 \cosh \mu\tau = \\ &= b(\omega^2 + a^2c^2) \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\omega^2} 2 \cos \omega\tau + b(\mu^2 - a^2c^2) \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\mu^2} 2 \cosh \mu\tau \end{aligned}$$

ma abbiamo in precedenza dimostrato che

$$\omega^2 \mu^2 = a^2 b^2 c^2 \quad (4.5.223)$$

$$\omega^2 + a^2 c^2 = \frac{a^2 c^2 (\mu^2 + b^2)}{\mu^2} \quad (4.5.224)$$

$$\mu^2 - a^2 c^2 = -\frac{a^2 c^2 (\omega^2 - b^2)}{\omega^2} \quad (4.5.225)$$

per cui, sostituendo, otteniamo

$$\begin{aligned} u^2(\tau) &= b \frac{a^2 c^2 (\mu^2 + b^2)}{\mu^2} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{as\omega^2} \cos \omega\tau - \\ &- b \frac{a^2 c^2 (\omega^2 - b^2)}{\omega^2} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{as\mu^2} \cosh \mu\tau = \\ &= \frac{ba^2 c^2}{as\omega^2 \mu^2} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) = \\ &= \frac{ba^2 c^2}{as a^2 b^2 c^2} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) = \\ &= \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \quad (4.5.226) \end{aligned}$$

Quanto, infine, a  $u^3(\tau)$ , risulta

$$\begin{aligned} u^3(\tau) &= -i\omega a^2 cs e^{-i\omega\tau} Y_1 - i\omega a^2 cs e^{i\omega\tau} Y_2 + \mu a^2 cs e^{-\mu\tau} Y_3 + \mu a^2 cs e^{\mu\tau} Y_4 = \\ &= -i\omega a^2 cs Y_2 (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) + \mu a^2 cs Y_4 (e^{\mu\tau} - e^{-\mu\tau}) = \\ &= -i\omega a^2 cs \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\omega^2} 2i \sin \omega\tau + \mu a^2 cs \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{1}{2as\mu^2} 2 \sinh \mu\tau = \\ &= \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau \quad (4.5.227) \end{aligned}$$

Dunque, in conclusione, data la condizione iniziale scelta (particella ferma per  $\tau = 0$ ), abbiamo

$$u^0(\tau) = \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \quad (4.5.228)$$

$$u^1(\tau) = \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2 c^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2 c^2}{as\omega} \sin \omega\tau \quad (4.5.229)$$

$$u^2(\tau) = \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \quad (4.5.230)$$

$$u^3(\tau) = \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau \quad (4.5.231)$$

Possiamo vedere adesso come dipende dal tempo proprio  $\tau$  l'energia totale relativistica  $E(\tau) = p^0(\tau)$  della particella. Poiché  $p^0(\tau) = m u^0(\tau)$ , abbiamo

$$p^0(\tau) = m \left\{ \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \right\} \quad (4.5.232)$$

e, al primo ordine perturbativo significativo, a meno di termini in  $\tau^4$ , risulta

$$\begin{aligned} p^0(\tau) &= \frac{m}{\omega^2 + \mu^2} \left\{ (\omega^2 - b^2) \left[ 1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{2} \right] + (\mu^2 + b^2) \left[ 1 + \frac{\mu^2 \tau^2}{2} \right] \right\} = \\ &= \frac{m}{\omega^2 + \mu^2} \left\{ \omega^2 - \frac{\omega^4 \tau^2}{2} - b^2 + b^2 \frac{\omega^2 \tau^2}{2} + \mu^2 + \frac{\mu^4 \tau^2}{2} + b^2 + b^2 \frac{\mu^2 \tau^2}{2} \right\} = \\ &= m - \frac{m}{\omega^2 + \mu^2} \left\{ -\omega^4 \frac{\tau^2}{2} + b^2 \omega^2 \frac{\tau^2}{2} + \mu^4 \frac{\tau^2}{2} + \mu^2 b^2 \frac{\tau^2}{2} \right\} = \\ &= m + \frac{m}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\tau^2}{2} [-\omega^4 + \mu^4 + b^2 \omega^2 + b^2 \mu^2] = \\ &= m + \frac{m}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\tau^2}{2} [(\mu^2 + \omega^2)(\mu^2 - \omega^2) + b^2(\omega^2 + \mu^2)] = \\ &= m + m \frac{\tau^2}{2} (\mu^2 - \omega^2 + b^2) = m + \frac{1}{2} m (a\tau)^2 \end{aligned} \quad (4.5.233)$$

dove<sup>27</sup> abbiamo usato il fatto che

$$\mu^2 - \omega^2 = a^2 - b^2 \quad (4.5.234)$$

Risulta immediato che, come doveva essere, il termine  $\frac{1}{2}m(a\tau)^2$  che compare nella (4.5.233), è semplicemente il termine cinetico acquisito dalla carica inizialmente ferma, a causa dell'accelerazione dovuta al campo elettrico.

Come si è premesso sopra, il risultato ottenuto è approssimato e l'approssimazione è lecita, ovviamente, finché sia  $\omega\tau \ll 1$  che  $\mu\tau \ll 1$  e, in ogni caso, per tempi  $\tau$  tali che  $a\tau \ll c$ .

Per esempio, nel caso di un elettrone ( $q = 4.8 \times 10^{-10} esu$ ;  $m = 9.1 \times 10^{-28} g$ ) in un campo elettrico di  $3000 V/cm$ , ovvero di  $10 StatVolt/cm$ , la condizione sulla velocità  $\frac{a\tau}{c} \ll 1$  implica che il risultato di cui sopra sarà valido solo se

$$\tau \ll \frac{c}{a} = \frac{cm}{qE} \approx \frac{3. \times 10^{10} \cdot 9.1 \times 10^{-28}}{4.8 \times 10^{-10} \cdot 10} \approx 5.7 \times 10^{-9} s \quad (4.5.235)$$

<sup>27</sup> Può essere utile ricordare a questo punto che stiamo operando nel sistema di unità di misura *cgs es* in cui si è posto anche  $c = 1$ . La quantità  $a\tau \equiv \frac{qE}{m}\tau$ , come pure le quantità  $\omega\tau$  e  $\mu\tau$  sono, naturalmente, adimensionali. Volendo riportarle alle unità solite del sistema *cgs*, occorre dividerle per la velocità della luce e quindi usare piuttosto le quantità  $\frac{a\tau}{c}$ ,  $\frac{\omega\tau}{c}$  e  $\frac{\mu\tau}{c}$ .

Verifichiamo adesso la continuità delle soluzioni (4.5.228)-(4.5.231) rispetto al limite per  $c \rightarrow 0$  ovvero per  $\vec{E} \cdot \vec{B} \rightarrow 0$ . Per poter fare il confronto con il caso diretto (4.5.130), assumeremo che  $s \rightarrow 1$  (l'altra possibilità, dovendo essere  $c^2 + s^2 = 1$ , sarebbe  $s = -1$ ).

Iniziamo assumendo che  $a^2 > b^2$ .

Se  $c \rightarrow 0$  accade che  $\omega \rightarrow 0$  e  $\mu \rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} \equiv k$  per cui abbiamo

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{b^2}{k^2} + \frac{k^2 + b^2}{k^2} \cosh k\tau = -\frac{b^2}{k^2} + \frac{a^2}{k^2} \cosh k\tau = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{k^2} - \frac{a^2}{k^2} + \frac{a^2}{k^2} \cosh k\tau = 1 + \frac{a^2}{k^2} (\cosh k\tau - 1) \end{aligned} \quad (4.5.236)$$

$$\begin{aligned} u^1(\tau) &= \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2 c^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2 c^2}{as\omega} \sin \omega\tau \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{k^2 + b^2}{k^2} \frac{k^2}{ak} \sinh k\tau - \frac{-b^2}{k^2} \cdot 0 = \frac{a^2}{ak} \sinh k\tau = \frac{a}{k} \sinh k\tau \end{aligned} \quad (4.5.237)$$

$$\begin{aligned} u^2(\tau) &= \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{ab} \frac{(k^2 + b^2)(-b^2)}{k^2} (1 - \cosh k\tau) = \frac{-a^2 b^2}{abk^2} (1 - \cosh k\tau) = \\ &= -\frac{ab}{k^2} (1 - \cosh k\tau) \end{aligned} \quad (4.5.238)$$

$$\begin{aligned} u^3(\tau) &= \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.5.239)$$

in accordo con il risultato (4.5.129).

Passiamo ora a considerare il caso in cui  $b^2 > a^2$ .

Se  $c \rightarrow 0$ , adesso accade che  $\mu \rightarrow 0$  mentre  $\omega \rightarrow \sqrt{b^2 - a^2}$ .

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
 u^0(\tau) &= \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \quad \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{-a^2}{\omega^2} \cos \omega\tau + \frac{b^2}{\omega^2} \cdot 1 = \frac{b^2}{\omega^2} - \frac{a^2}{\omega^2} \cos \omega\tau = \frac{b^2}{\omega^2} - \frac{a^2}{\omega^2} + \frac{a^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega\tau) \\
 &= 1 + \frac{a^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega\tau) \tag{4.5.240}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^1(\tau) &= \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2 c^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2 c^2}{as\omega} \sin \omega\tau \quad \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{b^2}{\omega^2} (\mu^2 - a^2 c^2) \frac{\sinh \mu\tau}{as\mu} - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2} \frac{\omega^2}{a\omega} \sin \omega\tau = \\
 &= 0 + \frac{a^2}{\omega^2} \frac{\omega^2}{a\omega} \sin \omega\tau = \frac{a}{\omega} \sin \omega\tau \tag{4.5.241}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^2(\tau) &= \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \quad \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{1}{ab} \frac{(b^2) \cdot (-a^2)}{\omega^2} (\cos \omega\tau - 1) = -\frac{ab}{\omega^2} (\cos \omega\tau - 1) = \\
 &= \frac{ab}{\omega^2} (\cos \omega\tau) \tag{4.5.242}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^3(\tau) &= \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau \quad \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{ac}{\omega} \frac{-a^2}{\omega^2} \sin \omega\tau + ac \frac{b^2}{\omega^2} \frac{\sinh \mu\tau}{\mu} \quad \rightarrow \\
 &\rightarrow 0 \tag{4.5.243}
 \end{aligned}$$

in accordo con il risultato (4.5.145).

$$\vec{E} \parallel \vec{B}$$

Un caso certamente interessante è quello in cui il campo elettrico  $\vec{E}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  sono paralleli.

Nella situazione che abbiamo illustrato fino ad ora, questo corrisponde al caso in cui  $c = 1$  e quindi  $s = 0$ , ovvero

$$\vec{E} = E(0, 0, 1); \quad \vec{B} = B(0, 0, 1); \quad E, B \neq 0 \quad (4.5.244)$$

In questo caso risulta

$$\begin{aligned} 2\omega^2 &= b^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = b^2 - a^2 + a^2 + b^2 = 2b^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega^2 &= b^2 \end{aligned} \quad (4.5.245)$$

$$\begin{aligned} 2\mu^2 &= a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu^2 &= a^2 \end{aligned} \quad (4.5.246)$$

e dunque, sempre assumendo la condizione iniziale per cui la particella risulta ferma al tempo  $\tau = 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{b^2 + a^2} \cosh \mu\tau = \cosh \mu\tau \end{aligned} \quad (4.5.247)$$

$$\begin{aligned} u^1(\tau) &= \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2}{as\omega} \sin \omega\tau = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{b^2 + a^2} \frac{a^2 - a^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{b^2 - b^2}{as\omega} \frac{b^2 + a^2}{b^2 + a^2} \sin \omega\tau = 0 \end{aligned} \quad (4.5.248)$$

$$\begin{aligned} u^2(\tau) &= \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) = \\ &= \frac{1}{abs} \frac{(a^2 + b^2)(b^2 - b^2)}{b^2 + a^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) = 0 \end{aligned} \quad (4.5.249)$$

$$\begin{aligned} u^3(\tau) &= \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau = \\ &= -\frac{a}{b} \frac{b^2 - b^2}{b^2 + a^2} \sin \omega\tau + \frac{a}{a} \frac{a^2 + b^2}{b^2 + a^2} \sinh \mu\tau = \sinh \mu\tau \end{aligned} \quad (4.5.250)$$

Come si vede, data la particolare condizione iniziale assunta, il moto<sup>28</sup> avviene solo lungo l'asse  $z$  ed è un moto iperbolico che non è modificato dal campo magnetico, anch'esso diretto lungo  $z$ . Ovviamente, cambiando le condizioni iniziali, questo aspetto del risultato non resta vero !

---

<sup>28</sup>Nel calcolo di  $u^1(\tau)$  abbiamo posto a zero i termini  $\frac{\mu^2 - a^2}{as\mu}$  e  $\frac{\omega^2 - b^2}{as\omega}$  e lo stesso lo abbiamo fatto nel calcolo di  $u^2(\tau)$  per il termine  $\frac{\omega^2 - b^2}{abs}$  perché, quando  $c \rightarrow 1$  accade che  $\mu^2 \rightarrow a^2$  e  $\omega^2 \rightarrow b^2$ . Però, nel limite in cui  $c \rightarrow 1$ , accade che  $s \rightarrow 0$ , quindi le quantità precedenti vanno considerate con maggior attenzione visto che hanno  $s$  al denominatore. Iniziamo dal primo termine. Si ha

$$\begin{aligned} \mu^2 - a^2 &= \frac{a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2}}{2} - a^2 = \frac{-a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 + 4a^2b^2(c^2 - 1)}}{2} = \\ &= \frac{-(a^2 + b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2s^2}}{2} = \frac{-(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)\sqrt{1 - \frac{4a^2b^2s^2}{(a^2 + b^2)^2}}}{2} \end{aligned} \quad (4.5.251)$$

Se  $s \ll 1$ , abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} \mu^2 - a^2 &\approx \frac{-(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)[1 - \frac{1}{2}\frac{4a^2b^2s^2}{(a^2 + b^2)^2} + \dots]}{2} = -\frac{a^2b^2s^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu^2 - a^2}{as\mu} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{ab^2s}{(a^2 + b^2)\mu} = 0 \end{aligned} \quad (4.5.252)$$

che è quanto avevamo assunto nel calcolo di  $u^1$ .

Gli altri due termini sono entrambi proporzionali, attraverso quantità non singolari, al termine  $\frac{\omega^2 - b^2}{s}$  il cui numeratore e denominatore si annullano quando  $c \rightarrow 1$  e  $s \rightarrow 0$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 - b^2}{s} &= \frac{b^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2}}{2s} = \frac{-a^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4a^2b^2c^2}}{2s} = \\ &= \frac{-(a^2 + b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2s^2}}{2s} = \frac{-(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)\sqrt{1 - \frac{4a^2b^2s^2}{(a^2 + b^2)^2}}}{2s} \end{aligned} \quad (4.5.253)$$

che, per  $s \ll 1$ , diventa

$$\frac{\omega^2 - b^2}{s} \approx \frac{-\frac{1}{2}\frac{4a^2b^2s^2}{a^2 + b^2}}{2s} = -\frac{a^2b^2s}{a^2 + b^2} \quad (4.5.254)$$

che, naturalmente, si annulla quando  $s \rightarrow 0$ .

$$E \ll B$$

Questa situazione, in cui  $E \ll B$  è molto frequente nella pratica, infatti ricordiamo che mentre un campo magnetico di 1 *gauss* non è per nulla eccezionale (il doppio di quello della Terra), un campo elettrico di 1 *StatVolt/cm* equivale già a un campo di tutto rispetto di 30000 *V/m* ...

Abbiamo visto che, quanto agli autovalori della matrice  $M$ , in generale si ha

$$\begin{aligned} 2\omega^2 &= (b^2 - a^2) + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2} = \\ &= (b^2 - a^2) + (b^2 - a^2) \sqrt{1 + \frac{4a^2b^2c^2}{(b^2 - a^2)^2}} \end{aligned} \quad (4.5.255)$$

$$\begin{aligned} 2\mu^2 &= (a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2} = \\ &= (a^2 - b^2) + (b^2 - a^2) \sqrt{1 + \frac{4a^2b^2c^2}{(b^2 - a^2)^2}} \end{aligned} \quad (4.5.256)$$

Nel caso che ci interessa, in cui  $E \ll B$ , è utile introdurre il parametro adimensionale

$$\epsilon = \frac{E}{B} = \left| \frac{a}{b} \right| \quad (4.5.257)$$

Abbiamo dunque

$$2\omega^2 = (b^2 - a^2) + (b^2 - a^2) \sqrt{1 + \frac{4\epsilon^2c^2}{(1 - \epsilon^2)^2}} \quad (4.5.258)$$

$$2\mu^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - a^2) \sqrt{1 + \frac{4\epsilon^2c^2}{(1 - \epsilon^2)^2}} \quad (4.5.259)$$

Sviluppando la radice quadrata nel parametro  $\epsilon$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{4\epsilon^2c^2}{(1 - \epsilon^2)^2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{4\epsilon^2c^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \right] - \frac{1}{8} \left[ \frac{4\epsilon^2c^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \right]^2 + \dots \approx \\ &\approx 1 + 2\epsilon^2c^2(1 + 2\epsilon^2) - 2\epsilon^4c^4 = 1 + 2c^2\epsilon^2 + 2c^2\epsilon^4(2 - c^2) = \\ &= 1 + 2c^2\epsilon^2 + 2c^2\epsilon^4(1 + c^2 + s^2 - c^2) = \\ &\approx 1 + 2c^2\epsilon^2 + 2c^2(1 + s^2)\epsilon^4 \end{aligned} \quad (4.5.260)$$

Ne segue quindi che<sup>29</sup>

$$\begin{aligned}
2\omega^2 &\approx (b^2 - a^2) + (b^2 - a^2)[1 + 2c^2\epsilon^2 + 2c^2(1 + s^2)\epsilon^4] = \\
&= 2b^2(1 - \epsilon^2) + b^2(1 - \epsilon^2)[2c^2\epsilon^2 + 2c^2(1 + s^2)\epsilon^4] = \\
&\approx 2b^2(1 - \epsilon^2) + 2b^2c^2\epsilon^2[1 + (1 + s^2)\epsilon^2] - b^2\epsilon^2 2c^2\epsilon^2 = \\
&\approx 2b^2 - 2b^2\epsilon^2(1 - c^2) + 2b^2c^2\epsilon^4[-1 + 1 + s^2] \Rightarrow \\
\Rightarrow \omega^2 &\approx b^2 - b^2\epsilon^2s^2 + b^2\epsilon^4c^2s^2 = b^2(1 - \epsilon^2s^2 + \epsilon^4c^2s^2) \quad (4.5.261)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega \approx b \left(1 - \frac{\epsilon^2s^2}{2}\right) \quad (4.5.262)$$

$$\begin{aligned}
2\mu^2 &\approx (a^2 - b^2) + (b^2 - a^2)[1 + 2c^2\epsilon^2 + 2c^2(1 + s^2)\epsilon^4] = \\
&= b^2(1 - \epsilon^2)2\epsilon^2c^2[1 + (1 + s^2)\epsilon^2] = \\
&= 2b^2c^2\epsilon^2[1 + (1 + s^2)\epsilon^2] - 2b^2c^2\epsilon^4 = \\
&= 2b^2c^2\epsilon^2 + 2b^2c^2\epsilon^2[(1 + s^2) - 1]\epsilon^2 = 2b^2c^2\epsilon^2 + 2b^2c^2s^2\epsilon^4 \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu^2 &\approx b^2c^2\epsilon^2(1 + s^2\epsilon^2) \quad (4.5.263)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu \approx bc\epsilon \left(1 + \frac{\epsilon^2s^2}{2}\right) = ac \left(1 + \frac{\epsilon^2s^2}{2}\right) \quad (4.5.264)$$

D'altronde, come si è visto nel caso generale, assunta la condizione iniziale di particella ferma per  $\tau = 0$ , abbiamo visto che le componenti della quadrivelocità sono date da

$$u^0(\tau) = \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \quad (4.5.265)$$

$$u^1(\tau) = \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2c^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2c^2}{as\omega} \sin \omega\tau \quad (4.5.266)$$

$$u^2(\tau) = \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \quad (4.5.267)$$

$$u^3(\tau) = \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau \quad (4.5.268)$$

Valutiamo dunque, alla luce delle approssimazioni fatte, i coefficienti che moltiplicano le funzioni trigonometriche o iperboliche che compaiono nelle

<sup>29</sup>Gli sviluppi sono troncati a meno di termini  $O(\epsilon^6)$ ; inoltre si ricordi che  $b^2 - a^2 = b^2(1 - \epsilon^2)$  e che  $c^2 + s^2 = 1$ .

(4.5.265)-(4.5.268). Al primo ordine significativo nel parametro  $\epsilon$  abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} &\approx \frac{b^2(1 - \epsilon^2 s^2 + \epsilon^4 c^2 s^2 - 1)}{b^2(1 - \epsilon^2 s^2 + \epsilon^4 c^2 s^2 + c^2 \epsilon^2 + c^2 s^2 \epsilon^4)} = \\ &= \frac{-\epsilon^2 s^2(1 - \epsilon^2 c^2)}{1 - \epsilon^2 s^2 + \epsilon^4 c^2 s^2 + c^2 \epsilon^2 + c^2 s^2 \epsilon^4} \approx -\epsilon^2 s^2 \end{aligned} \quad (4.5.269)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} &\approx \frac{b^2(\epsilon^2 c^2(1 + \epsilon^2 s^2) + 1)}{b^2(1 - \epsilon^2 s^2 + \epsilon^4 c^2 s^2 + c^2 \epsilon^2 + c^2 s^2 \epsilon^4)} \approx \\ &\approx \frac{1 + \epsilon^2 c^2}{1 + \epsilon^2 c^2 - \epsilon^2 s^2} \approx (1 + \epsilon^2 c^2)(1 - \epsilon^2 c^2 + \epsilon^2 s^2) \approx \\ &\approx 1 + \epsilon^2 s^2 \end{aligned} \quad (4.5.270)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2 c^2}{a s \mu} &\approx \frac{b^2 c^2 \epsilon^2 + b^2}{b^2(1 - \epsilon^2 s^2) + b^2 c^2 \epsilon^2} \frac{b^2 c^2 \epsilon^2(1 + s^2 \epsilon^2) - b^2 c^2 \epsilon^2}{b \epsilon s b c \epsilon(1 + \frac{s^2 \epsilon^2}{2})} \approx \\ &\approx \frac{1 + \epsilon^2 c^2}{1 + \epsilon^2 c^2 - \epsilon^2 s^2} \frac{b^2 c^2 s^2 \epsilon^4}{b^2 s c \epsilon^2} \approx (1 + \epsilon^2 s^2) s c \epsilon^2 \approx s c \epsilon^2 \end{aligned} \quad (4.5.271)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2 c^2}{a s \omega} &\approx \frac{b^2(1 - \epsilon^2 s^2 - 1)}{b^2(1 - \epsilon^2 s^2 + \epsilon^2 c^2)} \frac{b^2(1 - \epsilon^2 s^2) + b^2 \epsilon^2 c^2}{b \epsilon s b(1 - \frac{\epsilon^2 s^2}{2})} \approx \\ &\approx \frac{-\epsilon^2 s^2}{\epsilon s} = -\epsilon s \end{aligned} \quad (4.5.272)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 - b^2}{a b s} &\approx (1 + \epsilon^2 s^2) \frac{b^2(1 - \epsilon^2 s^2) - b^2}{b \epsilon b s} = \\ &\approx (1 + \epsilon^2 s^2) \frac{-\epsilon^2 s^2}{\epsilon s} = -\epsilon s \end{aligned} \quad (4.5.273)$$

$$\frac{a c}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \approx \frac{b \epsilon c}{b(1 + \frac{\epsilon^2 s^2}{2})} (-\epsilon^2 s^2) \approx -\epsilon^3 c s^2 \quad (4.5.274)$$

$$\begin{aligned} \frac{a c}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} &\approx \frac{b c \epsilon}{b c \epsilon(1 + \frac{\epsilon^2 s^2}{2})} (1 + \epsilon^2 s^2) \approx (1 + \epsilon^2 s^2)(1 - \frac{\epsilon^2 s^2}{2}) \approx \\ &\approx 1 + \frac{\epsilon^2 s^2}{2} \end{aligned} \quad (4.5.275)$$

e dunque possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
 u^0(\tau) &= \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cos \omega\tau + \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \cosh \mu\tau \approx \\
 &\approx -\epsilon^2 s^2 \cos \omega\tau + (1 + \epsilon^2 s^2) \cosh \mu\tau \\
 &\rightarrow \cosh \mu\tau
 \end{aligned} \tag{4.5.276}$$

$$\begin{aligned}
 u^1(\tau) &= \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\mu^2 - a^2 c^2}{as\mu} \sinh \mu\tau - \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \frac{\omega^2 + a^2 c^2}{as\omega} \sin \omega\tau \approx \\
 &\approx s c \epsilon^2 \sinh \mu\tau + \epsilon s \sin \omega\tau \\
 &\rightarrow \epsilon s \sin \omega\tau
 \end{aligned} \tag{4.5.277}$$

$$\begin{aligned}
 u^2(\tau) &= \frac{1}{abs} \frac{(\mu^2 + b^2)(\omega^2 - b^2)}{\omega^2 + \mu^2} (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \approx \\
 &\approx -\epsilon s (\cos \omega\tau - \cosh \mu\tau) \\
 &\rightarrow \epsilon s (\cosh \mu\tau - \cos \omega\tau)
 \end{aligned} \tag{4.5.278}$$

$$\begin{aligned}
 u^3(\tau) &= \frac{ac}{\omega} \frac{\omega^2 - b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sin \omega\tau + \frac{ac}{\mu} \frac{\mu^2 + b^2}{\omega^2 + \mu^2} \sinh \mu\tau \approx \\
 &\approx -\epsilon^3 c s^2 \sin \omega\tau + \left(1 + \frac{\epsilon^2 s^2}{2}\right) \sinh \mu\tau \\
 &\rightarrow \sinh \mu\tau
 \end{aligned} \tag{4.5.279}$$

Questo risultato è stato ottenuto nell'ipotesi che  $|\frac{a}{b}| \ll 1$  ovvero che  $E \ll B$ . È interessante, allora, vedere che cosa succede sulla scala temporale per cui  $\mu\tau \ll 1$ , che corrisponde alla situazione non relativistica ( $u^0 \approx 1$ ,  $\tau \approx t$ ). Abbiamo ( $\mu \approx ac$ )

$$u(\tau) \approx \left(1, \frac{as}{b} \sin \omega t, \frac{as}{b} (1 - \cos \omega t), a c t\right) \tag{4.5.280}$$

Questo risultato mostra che solo lungo l'asse  $z$ , cioè lungo la direzione del campo magnetico, il moto della carica è uniformemente accelerato con accelerazione  $\frac{qE}{m}c$ . Nel piano  $xy$ , nonostante sia presente la componente del campo elettrico  $Es$  lungo l'asse  $x$ , il moto è circolare uniforme, con frequenza angolare  $\omega \approx b$  e raggio

$$R = \frac{as}{b^2} = \frac{mE}{qB^2} s \tag{4.5.281}$$

Questo è il tipo di moto che segue, per esempio, un fotoelettrone all'interno di un fototubo immerso in campo magnetico<sup>30</sup> intenso, il quale, come è noto, spiralizza strettamente intorno alle linee del campo magnetico<sup>31</sup>.

---

<sup>30</sup>Se assumiamo, per esempio, una componente dell'intensità del campo elettrico nella direzione ortogonale a quella del campo magnetico pari a  $300V/cm = 1StatVolt/cm$  e una intensità del campo magnetico diretto lungo l'asse  $z$  pari a  $1000 Gauss$ , allora intanto è vero che  $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{1000} \ll 1$ . Poi si ha (si ricordi che noi abbiamo posto la velocità della luce uguale all'unità e che sia  $\mu$  come  $\omega$  sono, dimensionalmente, inversi di un tempo, mentre, evidentemente, se siamo nel *cgses*,  $\frac{qE}{m}$ ,  $\frac{qB}{m}$  sono entrambi, dimensionalmente, una accelerazione, quindi occorre dividere per la velocità della luce  $\hat{c}$  ...)

$$\begin{aligned}\mu &\approx a c \leq a = \frac{eE}{m\hat{c}} \approx 1.6 * 10^7 sec^{-1} \\ \omega &\approx b = \frac{eB}{m\hat{c}} \approx 1.6 * 10^{10} sec^{-1}\end{aligned}$$

da collegare con il tempo necessario al fotoelettrone per arrivare dal fotocatodo al primo dinodo ( $\Delta x \approx 1cm$ ), i.e.

$$\Delta t \approx \sqrt{2\Delta x \frac{m}{eE}} \approx 2. * 10^{-9} sec$$

per cui

$$\begin{aligned}\mu\Delta t &\approx 1.6 * 10^7 \cdot 2. * 10^{-9} = 3.2 * 10^{-2} \ll 1 \\ \omega\Delta t &\approx 1.6 * 10^{10} \cdot 2. * 10^{-9} = 32\end{aligned}\tag{4.5.282}$$

la quale, sulla base di quanto visto sopra, ci consente di concludere che la traiettoria dell'elettrone è un'elica a passo variabile, avente come asse la direzione del campo magnetico, e raggio la quantità fissa

$$R = \frac{as}{b^2} \hat{c} \leq \frac{a}{b} \frac{\hat{c}}{b} = \frac{1}{1000} \frac{3. * 10^{10}}{1.6 * 10^{10}} \approx 10^{-3} cm$$

<sup>31</sup>Il risultato (4.5.280) è ottenibile classicamente partendo semplicemente dalla forza di Lorentz: basta infatti ripetere il conto classico avendo cura di imporre adesso la presenza lungo l'asse  $z$  di una componente di accelerazione pari a  $qE c/m \equiv a c$ . Risulta allora

$$\begin{aligned}\beta_x &= a c t \\ \beta_y &= \frac{as}{b} (1 - \cos bt) \\ \beta_z &= \frac{as}{b} \sin bt\end{aligned}\tag{4.5.283}$$

Questo risultato è indipendente dalla relazione fra  $a$  e  $b$  e per questo esso è del tutto *errato* se  $a/b > 1$ , eccetto quando  $bt \ll 1$ .

## 4.6 L'irraggiamento di una carica accelerata

Partiamo dalle equazioni di Maxwell. Come ben noto, nella loro forma originale non covariante, esse stabiliscono<sup>32</sup> che



Figura 4.3: *James Clerk Maxwell (1831-1879)*

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad (4.6.284)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.6.285)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.6.286)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.6.287)$$

Introducendo il quadripotenziale

$$A^\mu \equiv (V, \vec{A}) \quad (4.6.288)$$

dove  $V$  e  $\vec{A}$  sono, rispettivamente, gli ordinari potenziali scalare e vettoriale dell'elettrodinamica, e definendo il tensore elettromagnetico secondo la

---

<sup>32</sup>Operiamo nel sistema *cgs es.*

(4.2.10), cioè ponendo

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.289)
 \end{aligned}$$

ecco che, nella *gauge* di Lorentz, dove

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.6.290)$$

le equazioni inomogenee (4.6.284) e (4.6.287) possono essere compendiate nell'equazione relativisticamente covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (4.6.291)$$

avendo definito

$$J^\mu \equiv (c\rho, \vec{J}) \quad (4.6.292)$$

Quanto poi alle equazioni omogenee nei campi (4.6.285) e (4.6.286), esse si ottengono attraverso il tensore duale  $\hat{F}$  di quello elettromagnetico  $F$ , definito come

$$\hat{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\sigma\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.293)$$

dove il tensore completamente antisimmetrico a quattro indici  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$  è definito al solito, in modo che valga 1 sulle permutazioni pari di 0, 1, 2, 3, valga -1 su quelle dispari e sia nullo su tutte le altre. Risulta infatti

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\
 \operatorname{div} \vec{B} = 0
 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.6.294)$$

Ma torniamo adesso all'equazione inomogenea delle onde, cioè alla equazione

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \Leftrightarrow \quad \square A^\nu(x) = \frac{4\pi}{c} J^\nu(x) \quad (4.6.295)$$

dove il simbolo  $\square$  sta a indicare l'operatore differenziale di D'Alembert, scalare di Lorentz, definito nel modo consueto, ovvero come



Figura 4.4: Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \quad (4.6.296)$$

Evidentemente, essendo l'equazione (4.6.295) lineare e disomogenea, la sua soluzione generale è fatta da una soluzione particolare a cui è sommata una generica soluzione dell'equazione omogenea, cioè un'onda elettromagnetica qualsiasi.

Una soluzione particolare della (4.6.295) può essere ottenuta con la tecnica della funzione  $\Delta(x, y)$ , detta *di Green*, definita in modo tale che

$$\square_x \Delta(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (4.6.297)$$

dove, naturalmente,  $\delta^4(x - y) \equiv \delta(x^0 - y^0) \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ .

In questo modo, la soluzione particolare della (4.6.295) può essere scritta come

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y D(x, y) J^\mu(y) \quad (4.6.298)$$

Ma, in assenza di condizioni al contorno, la funzione  $\Delta$  potrà dipendere solo dalla differenza  $x - y$ , ovvero

$$\Delta(x, y) = \Delta(x - y, 0) \equiv D(x - y) \quad (4.6.299)$$

e la condizione di Green (4.6.297) diventa dunque

$$\square D(x) = \delta^4(x) \quad (4.6.300)$$

Per ottenere la forma esplicita della  $D(x)$ , è opportuno introdurre la trasformata di Fourier<sup>33</sup>  $\tilde{D}(k)$  che, per definizione, è definita come<sup>34</sup>

$$\tilde{D}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d^4x D(x) e^{ik \cdot x} \Leftrightarrow D(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d^4k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot x} \quad (4.6.301)$$

Ricordando che

$$\delta(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k e^{-k \cdot x} \quad (4.6.302)$$

sostituendo la (4.6.301) e (4.6.302) nella (4.6.300), otteniamo

$$-(k \cdot k) \tilde{D}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \quad (4.6.303)$$

ovvero

$$\tilde{D}(k) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{k \cdot k} \quad (4.6.304)$$

e quindi

$$D(x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot x}}{k \cdot k} \quad (4.6.305)$$

L'integrando della (4.6.305), però, è singolare poichè  $k \cdot k \equiv (k^0)^2 - |\vec{k}|^2$ , per cui l'integrale in questione, in realtà, non è definito finché non si fornisce la procedura per trattare la singolarità e vedremo tra un momento come fare.

Iniziamo dunque integrando in  $dk^0 = dk_0$ . Si ha

$$D(x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \hat{k}^2} \quad (4.6.306)$$

dove, per comodità di notazione, abbiamo posto  $\hat{k} \equiv |\vec{k}|$ .  
Per valutare l'integrale

$$\int dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \hat{k}^2} \quad (4.6.307)$$

<sup>33</sup>In realtà la funzione  $D(x)$  non è una funzione bensì è una distribuzione temperata di Schwartz, ed è in questo senso che ne cerchiamo la trasformata di Fourier.

<sup>34</sup>Per non appesantire le notazioni, dati due quadri-vettori  $a^\mu$  e  $b^\nu$ , indicheremo il loro prodotto scalare con  $a \cdot b$ , equivalente dunque a scrivere  $a^\mu b_\mu$ .

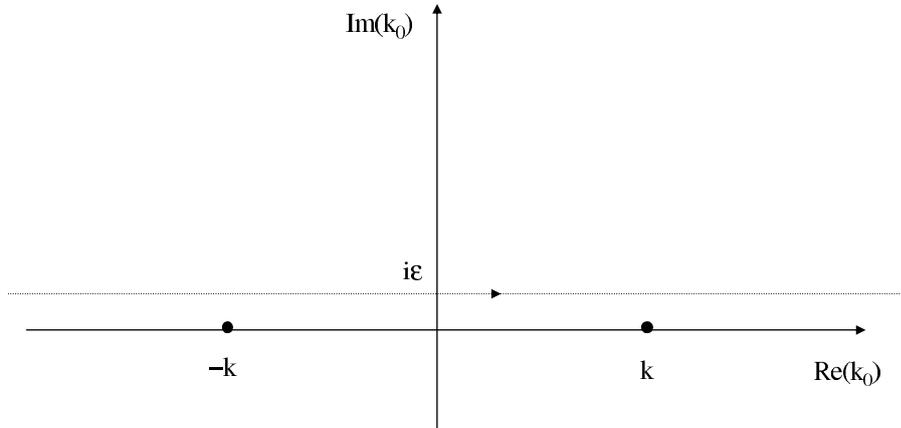


Figura 4.5: Percorso di integrazione per definire la funzione di Green  $D_r(z)$ .

trattiamo  $k_0$  come se fosse una variabile complessa, dandogli una parte immaginaria  $i\epsilon$ , che poi manderemo a zero ...

A seconda del segno della parte immaginaria, troveremo funzioni di Green differenti: questo non deve meravigliare perché la funzione di Green consente di determinare una soluzione particolare dell'equazione inhomogena, che, come ben sappiamo, non è unica !

Assumiamo  $\epsilon > 0$ . La funzione integranda  $\frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \hat{k}^2}$  ha due poli semplici in  $k^0 = \pm \hat{k}$  ed è analitica in tutto il resto del piano complesso.

Se  $x_0 < 0$  allora l'esponente  $-ik_0 x_0$  ha la parte reale negativa nel semipiano superiore, dunque, chiudendo il percorso di integrazione all'infinito nel semipiano superiore, è

$$x_0 < 0 : \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} dk^0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \hat{k}^2} = 0 \quad (4.6.308)$$

visto che la funzione è analitica in tutto il dominio contenuto nel contorno di integrazione.

Invece, se  $x_0 > 0$ , allora occorre chiudere il cammino di integrazione nel semipiano inferiore, dove, adesso, la funzione si annulla esponenzialmente all'infinito. Il percorso di integrazione racchiude ora i due poli, per cui, per

il teorema dei residui delle funzioni analitiche, risulta

$$\begin{aligned}
x_0 > 0 \quad : \quad & \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \hat{k}^2} = -2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \hat{k}^2} \right) \\
& = -2\pi i \left( \frac{e^{-i\hat{k}x_0}}{+2\hat{k}} + \frac{e^{i\hat{k}x_0}}{-2\hat{k}} \right) = 2\pi i \left( \frac{2i \sin \hat{k}x_0}{2\hat{k}} \right) \\
& = -\frac{2\pi}{\hat{k}} \sin \hat{k}x_0 \tag{4.6.309}
\end{aligned}$$

Chiameremo  $D_r(x)$  la funzione di Green così individuata.

Per definizione, dunque

$$\begin{aligned}
D_r(x) & = \frac{\Theta(x_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\hat{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \sin \hat{k}x_0 = \\
& = \frac{\Theta(x_0)}{(2\pi)^3} \int \hat{k}^2 d\hat{k} d(-\cos\theta) d\phi \frac{1}{\hat{k}} e^{i\hat{k}R \cos\theta} \sin \hat{k}x_0 = \\
& = \frac{\Theta(x_0)}{(2\pi)^2} \int \hat{k} d\hat{k} \sin \hat{k}x_0 \frac{-e^{i\hat{k}R} + e^{-i\hat{k}R}}{-i\hat{k}R} = \frac{\Theta(x_0)}{(2\pi)^2} \int \hat{k} d\hat{k} \sin \hat{k}x_0 \frac{2i \sin \hat{k}R}{i\hat{k}R} = \\
& = \frac{\Theta(x_0)}{2R\pi^2} \int_0^{+\infty} d\hat{k} \sin \hat{k}x_0 \sin \hat{k}R \tag{4.6.310}
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto  $\vec{k} \cdot \vec{x} \equiv \hat{k}R \cos\theta$ , essendo  $\theta$  l'angolo fra i due vettori  $\vec{k}$  (variabile di integrazione) e  $\vec{x}$ . D'altronde

$$\begin{aligned}
\sin \hat{k}x_0 \sin \hat{k}R & = \frac{e^{i\hat{k}x_0} - e^{-i\hat{k}x_0}}{2i} \frac{e^{i\hat{k}R} - e^{-i\hat{k}R}}{2i} = \\
& = -\frac{1}{4} \left[ e^{i\hat{k}(x_0+R)} - e^{i\hat{k}(x_0-R)} - e^{-i\hat{k}(x_0-R)} + e^{-i\hat{k}(x_0+R)} \right] \tag{4.6.311}
\end{aligned}$$

da cui si ricava che (notare il "raddoppio" del dominio di integrazione ...!)

$$\int_0^{+\infty} d\hat{k} \sin \hat{k}x_0 \sin \hat{k}R = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{k} \left[ e^{i\hat{k}(x_0+R)} - e^{i\hat{k}(x_0-R)} \right] \tag{4.6.312}$$

e dunque che

$$\begin{aligned}
D_r(x) & = \frac{\Theta(x_0)}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{k} \left[ e^{i\hat{k}(z_0-R)} - e^{i\hat{k}(z_0+R)} \right] \\
& = \frac{\Theta(x_0)}{8\pi^2 R} 2\pi \left[ \delta(z_0 - R) - \delta(z_0 + R) \right] \tag{4.6.313}
\end{aligned}$$

Però, data la presenza della funzione  $\Theta(x_0)$ , solo la prima delta potrà contribuire, per cui possiamo concludere che

$$D_r(x) = \frac{\Theta(x_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - R) \tag{4.6.314}$$

L'espressione ottenuta può essere messa in forma covariante<sup>35</sup>, osservando che

$$\delta(x \cdot x) = \delta(x_0^2 - R^2) = \delta[(x_0 - R)(x_0 + R)] = \frac{\delta(x_0 - R)}{2R} + \frac{\delta(x_0 + R)}{2R} \quad (4.6.315)$$

e dunque

$$\Theta(x_0) \delta(x \cdot x) = \Theta(z_0) \frac{\delta(x_0 - R)}{2R} \quad (4.6.316)$$

per cui, infine, risulta

$$D_r(x) = \frac{\Theta(x_0)}{4\pi R} 2R \delta(x \cdot x) = \frac{1}{2\pi} \Theta(x_0) \delta(x \cdot x) \quad (4.6.317)$$

Questa funzione di Green è detta *ritardata* per i motivi che vedremo fra poco.

Se fossimo partiti con l'integrazione in  $dk_0$  nel piano complesso avendo preso  $i\epsilon < 0$ , avremmo ottenuto la funzione di Green che è detta *anticipata*, così fatta

$$D_a(x) = \frac{\Theta(-x_0)}{4\pi R} \delta(x_0 + R) = \frac{1}{2\pi} \Theta(-x_0) \delta(x \cdot x) \quad (4.6.318)$$

Ma veniamo ora al quadripotenziale  $A^\mu$  prodotto da una carica elettrica puntiforme  $e$  in moto, nel nostro sistema di riferimento, secondo una legge oraria a priori qualsiasi  $\vec{r}(t)$ . Le densità di carica e di corrente che descrivono questa situazione sono, evidentemente, le seguenti

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad (4.6.319)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = e \vec{v}(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad (4.6.320)$$

Se dunque  $x = (t, \vec{x})$  è un punto generico dello spazio-tempo mentre la quadriposizione della carica, come funzione del suo tempo proprio è data da  $r(\tau) \equiv (t(\tau), \vec{r}(\tau))$ , allora le due densità di cui sopra possono essere scritte in forma covariante nel modo seguente

$$J^\mu(x) = e c \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^4(x - r(\tau)) \quad (4.6.321)$$

<sup>35</sup>Ricordiamo che se  $x_0 = R$ , siamo sul cono luce e dunque  $\Theta(x_0)$ , che vale 1 se  $z_0 > 0$  e zero altrimenti, è una funzione invariante sotto il gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

Infatti, ricordando che  $w^\mu = c(\gamma, \gamma \vec{\beta})$ , si ha

$$\begin{aligned} J^0(x) &= e c \int d\tau c\gamma(\tau) \delta(ct - ct(\tau)) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(\tau)) \\ &= e c \int d(ct) \delta(ct - ct(\tau)) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(\tau)) = e c \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(\tau)) \\ &\equiv c\rho \end{aligned} \quad (4.6.322)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}(x) &= e c \int d\tau c\gamma(\tau) \vec{\beta}(\tau) \delta(ct - ct(\tau)) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(\tau)) \\ &= e \int d(ct) \vec{v}(t) \delta(ct - ct(\tau)) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(\tau)) = \\ &\equiv e \vec{v}(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}(\tau)) = \vec{J}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (4.6.323)$$

Ne segue, quindi, che il quadripotenziale ritardato, prodotto dalla carica in moto nel generico punto  $x$ , per la (4.6.298), è dato da

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y D_r(x - y) J^\mu(y) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y D_r(x - y) e c \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^4(y - r(\tau)) = \\ &= 4\pi e \int d\tau u^\mu(\tau) D_r(x - r(\tau)) \end{aligned} \quad (4.6.324)$$

ovvero, usando la (4.6.317), abbiamo

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= 4\pi e \int d\tau u^\mu(\tau) D_r(x - r(\tau)) = \\ &= 4\pi e \int d\tau u^\mu(\tau) \Theta(t - t(\tau)) \delta[(x - r(\tau)) \cdot (x - r(\tau))] \frac{1}{2\pi} = \\ &= 2e \int d\tau u^\mu(\tau) \Theta(t - t(\tau)) \delta[(x - r(\tau)) \cdot (x - r(\tau))] \end{aligned} \quad (4.6.325)$$

Per valutare l'integrale in questione, di nuovo, occorre cercare, come funzioni della variabile di integrazione  $\tau$ , le radici dell'equazione

$$(x - r(\tau)) \cdot (x - r(\tau)) = 0 \Leftrightarrow [x - r(\tau)]^\mu [x - r(\tau)]_\mu = 0 \quad (4.6.326)$$

I tempi  $\tau_0$  per cui c'è contributo all'integrale (4.6.325) sono, evidentemente, solo quelli per cui

- il quadrivettore  $[x - r(\tau)]^\mu$  si trova sul cono luce;
- $t > t(\tau_0)$ , data la presenza della funzione  $\Theta(t - t(\tau))$  nell'integrando.

L'insieme di queste due condizioni è detta *condizione causale di cono luce*. Siccome la linea d'universo della carica in moto, in assi  $(r, t)$  è monotona crescente con pendenza  $> 1 (= \frac{1}{\beta})$ , essa ha solo due intersezioni con il cono luce

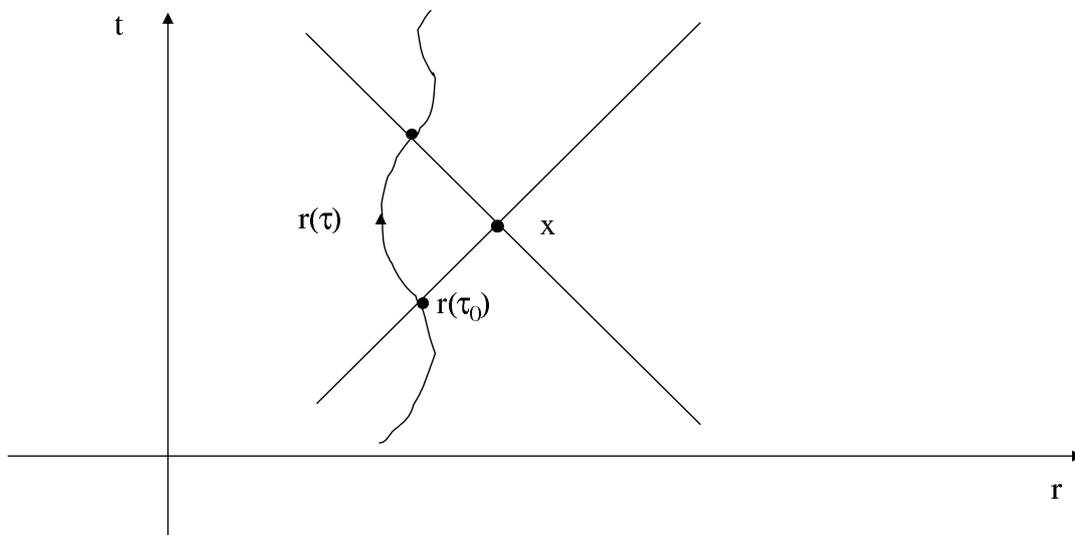


Figura 4.6: Traiettoria della carica e la condizione causale di cono luce.

con vertice nel generico evento  $x = (t, \vec{x})$ , una nel passato dell'evento stesso e una nel suo futuro. I contributi al potenziale in  $x$  provengono solo dalla quadriposizione della carica che si trova sul cono luce con vertice nel punto di osservazione, nel *passato* di  $x$  (principio di causalità). Se avessimo scelto come funzione di Green quella che abbiamo chiamato *anticipata*, avremmo trovato l'altro contributo, proveniente dal futuro di  $x$  e questa è appunto la ragione per cui abbiamo chiamato *ritardata* la  $D_r$  e *anticipata* la  $D_a$ .

Per valutare l'integrale (4.6.325), al solito, occorre ricordare che<sup>36</sup>

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \right|} \quad (4.6.327)$$

dove gli  $x_i$  sono definiti dalla condizione di zero della funzione  $f$ , cioè

$$\forall x_i : f(x_i) = 0$$

Nel nostro caso, occorre dunque calcolare la derivata

$$\frac{d}{d\tau} [(x - r(\tau)) \cdot (x - r(\tau))] = -2[x - r(\tau)]_\mu u^\mu(\tau) \quad (4.6.328)$$

<sup>36</sup>La (4.6.327) presuppone che la funzione  $f$  abbia derivata prima non nulla in tutte le sue radici  $x_i$ , ovvero che  $f(x - x_i)$  dipenda sempre linearmente dalla differenza  $x - x_i$ , in un opportuno intorno di ogni radice.

nel punto  $\tau = \tau_0$  che soddisfa la *condizione causale di cono luce*.  
Risulta così che

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= 2e \int d\tau u^\mu(\tau) \Theta[t - t(\tau)] \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{2[x - r(\tau)]_\nu u^\nu(\tau)} \\ &= e \frac{u^\mu(\tau_0)}{[x - r(\tau_0)]_\nu u^\nu(\tau_0)} \end{aligned} \quad (4.6.329)$$

e questi sono i potenziali di Liénard e Wiechert in forma covariante.

Osserviamo che la *condizione causale di cono luce* implica che, se, per comodità, definiamo

$$\vec{R}(\tau_0) \equiv \vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(\tau_0) \equiv R \vec{n} \quad (4.6.330)$$

allora

$$c[t - t(\tau_0)] = |\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)| \equiv R \Leftrightarrow x - r(\tau_0) \equiv (R, R\vec{n}) = R(1, \vec{n}) \quad (4.6.331)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau_0) [x - r(\tau_0)]_\mu &= c\gamma(\tau_0) [t - t(\tau_0)] - c\gamma(\tau_0) \vec{\beta}(\tau_0) [\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)] \\ &= c\gamma R - c\gamma \vec{\beta} \cdot \vec{n} R = c\gamma R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \end{aligned} \quad (4.6.332)$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo ommesso di indicare la dipendenza della grandezze  $R$ ,  $\vec{n}$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  da  $\tau_0$ .

Ricordando che il quadripotenziale  $A^\mu(x)$  è legato ai consueti potenziali scalare  $\Phi(x)$  e vettoriale  $\vec{A}(x)$  dalla relazione

$$A^\mu(x) = (\Phi(x), \vec{A}(x)) \quad (4.6.333)$$

possiamo così giungere alla espressione più consueta dei potenziali stessi: si ha

$$\Phi(x) \equiv \Phi(\vec{x}, t) = \left[ \frac{ec\gamma}{c\gamma R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right]_{rit} = \frac{e}{[R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})]_{rit}} \quad (4.6.334)$$

$$\vec{A}(x) \equiv \vec{A}(\vec{x}, t) = \left[ \frac{ec\gamma \vec{\beta}}{c\gamma R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right]_{rit} = \frac{e \vec{v}}{c [R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})]_{rit}} = \vec{\beta} \Phi(x) \quad (4.6.335)$$

dove, per chiarezza, abbiamo indicato esplicitamente che le grandezze  $R$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\gamma$  devono essere calcolate al tempo ritardato  $t(\tau_0)$ , definito in modo implicito dalla relazione

$$t(\tau_0) = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)|}{c} \Leftrightarrow t = t(\tau_0) + \frac{|\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)|}{c} \quad (4.6.336)$$

### Il caso particolare dell'accelerazione nulla

E' interessante, alla luce di quanto ottenuto, riprendere il caso in cui la carica, nel riferimento del Laboratorio  $RL$  in cui si studia il problema, si muova di moto rettilineo e uniforme con velocità costante, che indicheremo con  $\vec{\beta}$ .

Per quanto già visto, sarà

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\equiv \Phi(\vec{x}, t) = \frac{e}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})} \\ \vec{A}(x) &\equiv \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{\beta}\Phi(t, \vec{x})\end{aligned}\quad (4.6.337)$$

dove  $\tau_0$  è il tempo proprio della carica per cui il quadrivettore  $(x - r(\tau_0))$  risulta essere light-like e

$$R\vec{n} \equiv \vec{x} - \vec{r}(\tau_0) \quad (4.6.338)$$

Iniziamo osservando che, nel caso in cui risulti  $\vec{\beta} = 0$  e la carica risulti quindi ferma nel punto  $\vec{P}$  di coordinate  $\vec{r}_0$ , evidentemente avremo che

$$R = |\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)| = |\vec{x} - \vec{r}_0|; \quad \vec{n} = \frac{\vec{x} - \vec{r}_0}{|\vec{x} - \vec{r}_0|} \quad (4.6.339)$$

con  $R$  e  $\vec{n}$  ovviamente entrambi indipendenti dal tempo.

Si ritrovano così i risultati ben noti per i potenziali  $\Phi$  e  $\vec{A}$ , ovvero

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{e}{R} = \frac{e}{|\vec{x} - \vec{r}_0|}; \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (4.6.340)$$

e dunque, quanto ad  $A^\mu(x)$ , la sua espressione in  $RL$ , dove la carica è ferma, sarà la seguente

$$A^\mu(x) = \left( \Phi_0(x), \vec{A}_0(x) \right) = \frac{e}{|\vec{x} - \vec{r}_0|} (1, \vec{0}) \quad (4.6.341)$$

Ma cambiamo adesso punto di osservazione e poniamoci in un altro sistema di riferimento inerziale  $RS$ , in moto rispetto a  $RL$  con velocità  $-\vec{\beta} \equiv -\beta \vec{n}$ . In  $RS$ , evidentemente, la carica apparirà animata di velocità uniforme e costante  $\vec{\beta}$ , per cui i potenziali saranno espressi dalle (4.6.337).

D'altronde, per cambiamenti di riferimento, il quadripotenziale  $A^\mu$  si trasforma come un campo quadrivettoriale, ovvero accade che

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu; \quad A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \quad (4.6.342)$$

dove abbiamo implicitamente assunto che i due riferimenti abbiano origini spazio-temporali coincidenti<sup>37</sup>.

<sup>37</sup>Ricordiamo che, se gli assi sono non ruotati, la trasformazione di Lorentz che manda da  $RS$  a  $RS'$ , in accordo con la (2.3.48), è la seguente

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta n_x & \gamma\beta n_y & \gamma\beta n_z \\ \gamma\beta n_x & 1 + (\gamma - 1)n_x^2 & (\gamma - 1)n_x n_y & (\gamma - 1)n_x n_z \\ \gamma\beta n_y & (\gamma - 1)n_y n_x & 1 + (\gamma - 1)n_y^2 & (\gamma - 1)n_y n_z \\ \gamma\beta n_z & (\gamma - 1)n_z n_x & (\gamma - 1)n_z n_y & 1 + (\gamma - 1)n_z^2 \end{pmatrix} \quad (4.6.343)$$

Però, mentre nel calcolo che abbiamo fatto è presente la nozione di *tempo ritardato*, nel caso delle trasformazioni di Lorentz questo concetto è assente. Verifichiamo che le due strade risultano in perfetto accordo fra loro.

Per minimizzare le complicazioni formali ma senza che ci sia perdita di generalità, assumiamo che in  $RS$ , la carica si muova lungo l'asse  $x$ , nel suo verso positivo e dunque che sia

$$\vec{\beta} = \beta \vec{n} = \beta(1, 0, 0) \quad (4.6.344)$$

Assumiamo quindi che il punto  $\vec{P}$  dove vogliamo determinare il quadripotenziale, sia fermo in  $RS$  e scegliamo l'origine del tempo  $t$  in modo che, per  $t = 0$ , la carica si trovi alla minima distanza  $b$  da  $\vec{P}$ .

Definiamo quindi le direzioni degli assi  $y$  e  $z$  e l'origine di  $RS$  (dove si trova la carica al tempo  $t = 0$ ) in modo che, quanto al punto "potenziato", si abbia

$$\vec{P} = (0, 0, b) \quad \Rightarrow \quad P = (t, 0, 0, b) \quad (4.6.345)$$

Consideriamo ora la quadriposizione  $r(\tau)$  della carica.

Dato il moto rettilineo e uniforme della stessa, in termini del suo tempo proprio  $\tau$ , questa quadriposizione sarà data da

$$r(\tau) = (t(\tau), \vec{r}(\tau)) = (\gamma\tau, \vec{\beta}\gamma\tau) = \gamma\tau(1, \beta, 0, 0) \quad (4.6.346)$$

Per determinare i potenziali in  $P$  occorre imporre la condizione causale di cono luce e dunque che il quadrivettore  $P - r(\tau_0)$  sia light-like. Abbiamo

$$P - r(\tau) = (t, 0, 0, b) - \gamma\tau(1, \beta, 0, 0) = (t - \gamma\tau, -\beta\gamma\tau, 0, b) \quad (4.6.347)$$

Deve dunque aversi che

$$(t - \gamma\tau_0)^2 - (\beta^2\gamma^2\tau_0^2 + b^2) = 0; \quad \text{con } t - \gamma\tau_0 \geq 0 \quad (4.6.348)$$

L'equazione di secondo grado fornisce

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 + \gamma^2\tau_0^2 - 2t\gamma\tau_0 - \beta^2\gamma^2\tau_0^2 - b^2 = \gamma^2\tau_0^2(1 - \beta^2) - 2t\gamma\tau_0 + t^2 - b^2 = \\ &= \tau_0^2 - 2t\gamma\tau_0 + (t^2 - b^2) \end{aligned} \quad (4.6.349)$$

il cui discriminante  $\Delta$  vale

$$\Delta = 4t^2\gamma^2 - 4(t^2 - b^2) = 4t^2(\gamma^2 - 1) + 4b^2 = 4[\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2] \quad (4.6.350)$$

e dunque

$$\tau_{\pm} = \frac{2\gamma t \pm 2\sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2}}{2} = \gamma t \pm \sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2} \quad (4.6.351)$$

Potendo accettare per  $\tau_0$  solo la soluzione causale per cui  $t - \gamma\tau_0 \geq 0$ , possiamo concludere infine che

$$\tau_0 = \gamma t - \sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2} \quad (4.6.352)$$

Riprendiamo ora l'espressione del potenziale scalare di cui alla (4.6.337). Abbiamo

$$\Phi(t, \vec{P}) = \frac{e}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} = \frac{e}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \quad (4.6.353)$$

dove la determinazione di  $\tau_0$  è tale per cui risulta

$$(t - \gamma\tau_0, -\beta\gamma\tau_0, 0, b) \equiv (R, \vec{R}) \quad (4.6.354)$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} &= t - \gamma\tau_0 - \beta(-\beta\gamma\tau_0) = t - \gamma\tau_0 + \beta^2\gamma\tau_0 = \\ &= t - \gamma\tau_0(1 - \beta^2) = t - \frac{\tau_0}{\gamma} = t - t + \frac{\sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2}}{\gamma} = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2}}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.6.355)$$

per cui risulta

$$\Phi(t, 0, 0, b) = \frac{e\gamma}{\sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2}} \quad (4.6.356)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, 0, 0, b) &= \vec{\beta} \Phi(t, 0, 0, b) = \frac{e\vec{\beta}\gamma}{\sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2}} = \\ &= \frac{e\beta\gamma}{\sqrt{\gamma^2 t^2 \beta^2 + b^2}} (1, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.6.357)$$

Fin qui abbiamo assunto, fra l'altro, che il punto potenziato avesse solo la coordinata non nulla lungo l'asse  $z$ . Anche allo scopo di rendere possibile il calcolo, per differenziazione dei potenziali  $\Phi$  e  $\vec{A}$ , dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , ricaviamo ora l'espressione del quadripotenziale nel caso generico in cui  $\vec{P} = (x, y, z)$ . Assumeremo di nuovo che la quadriposizione della carica sia data dalla (4.6.346) ovvero che essa si muova in  $RS$  con velocità costante lungo  $x$ . Il quadrivettore  $P - r(\tau)$  assume adesso la forma seguente

$$\begin{aligned} P - r(\tau) &= (t, \vec{P}) - \gamma\tau(1, \vec{\beta}) = (t, x, y, z) - (\gamma\tau, \beta\gamma\tau, 0, 0) = \\ &= (t - \gamma\tau, x - \beta\gamma\tau, y, z) \end{aligned} \quad (4.6.358)$$

e la condizione causale sul cono luce diviene

$$(t - \gamma\tau_0)^2 - [(x - \beta\gamma\tau_0)^2 + y^2 + z^2] = 0 \quad (4.6.359)$$

ovvero

$$0 = t^2 + \gamma^2 \tau_0^2 - 2t\gamma\tau_0 - (x^2 + y^2 + z^2) - \beta^2 \gamma^2 \tau_0^2 + 2\beta\gamma x\tau_0 \quad (4.6.360)$$

Ponendo per comodità  $P^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$  abbiamo adesso

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - P^2 - 2\tau_0 \gamma t - 2\tau_0 \beta \gamma x + \tau_0^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = \\ &= t^2 - P^2 - 2\tau_0 \gamma (t - \beta x) + \tau_0^2 \end{aligned} \quad (4.6.361)$$

e dunque l'equazione di secondo grado da risolvere adesso è la seguente

$$\tau_0^2 - 2\tau_0 \gamma (t - \beta x) + (t^2 - P^2) = 0 \quad (4.6.362)$$

il cui discriminante vale

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\gamma^2 (t - \beta x)^2 - 4(t^2 - P^2) = 4\gamma^2 (t^2 + \beta^2 x^2 - 2t\beta x) - 4t^2 + 4P^2 = \\ &= 4P^2 + 4t^2 (\gamma^2 - 1) + 4\gamma^2 \beta^2 x^2 - 8\gamma^2 t\beta x = \\ &= 4P^2 + 4t^2 \beta^2 \gamma^2 + 4\gamma^2 \beta^2 x^2 - 8\gamma^2 t\beta x = 4P^2 + 4\gamma^2 (t^2 \beta^2 + \beta^2 x^2 - 2t\beta x) = \\ &= 4P^2 + 4\gamma^2 (\beta^2 x^2 - 2t\beta x + t^2 + t^2 \beta^2 - t^2) = 4P^2 + 4\gamma^2 (t - \beta x)^2 - 4\gamma^2 t^2 (1 - \beta^2) = \\ &= 4\gamma^2 (t - \beta x)^2 + 4P^2 - 4t^2 \end{aligned} \quad (4.6.363)$$

e dunque, per le considerazioni già fatte circa il segno della soluzione da scegliere, abbiamo infine

$$\tau_0 = \gamma(t - \beta x) - \sqrt{\gamma^2 (t - \beta x)^2 - t^2 + P^2} \quad (4.6.364)$$

da cui ricaviamo che, in questo caso, il quadrivettore light-like  $(R, \vec{R})$  di interesse è

$$(R, \vec{R}) = (t - \gamma\tau_0, x - \beta\gamma\tau_0, y, z) \quad (4.6.365)$$

e dunque il denominatore che compare nell'espressione dei potenziali vale

$$\begin{aligned} R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} &= (t - \gamma\tau_0) - \beta(x - \beta\gamma\tau_0) = (t - \beta x) - \gamma\tau_0 + \gamma\beta^2 \tau_0 = \\ &= (t - \beta x) - \frac{\tau_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{\gamma^2 (t - \beta x)^2 - t^2 + P^2}}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.6.366)$$

da cui si ottiene infine che

$$\Phi(t, x, y, z) = \frac{e\gamma}{\sqrt{\gamma^2 (t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.6.367)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, x, y, z) &= \vec{\beta} \Phi(t, x, y, z) = \frac{e\vec{\beta}\gamma}{\sqrt{\gamma^2 (t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{e\beta\gamma}{\sqrt{\gamma^2 (t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2}} (1, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.6.368)$$

Questi risultati, evidentemente, sono stati ottenuti usando la strada dei potenziali ritardati.

Verifichiamo adesso che se, usando l'opportuno boost di Lorentz, andiamo a vedere come appaiono questi potenziali nel riferimento dove la carica è a riposo, ritroviamo il risultato statico ben noto, a dimostrazione della coerenza interna delle previsioni della Relatività Speciale almeno in questo ambito.

Poiché la legge di moto della carica in  $RS$  dà luogo alla quadriposizione

$$r(\tau) = (\gamma\tau, \beta\gamma\tau, 0, 0) \quad (4.6.369)$$

dove  $\tau$ , tempo proprio della carica, coincide con il tempo del riferimento del laboratorio  $RL$  dove la carica stessa è in quiete.

Il boost di Lorentz  $\Lambda$  che trasforma quadrivettori da  $RS$  a  $RL$  è evidentemente il seguente

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6.370)$$

Se dunque indichiamo con  $X$  la quadriposizione in  $RS$  dove abbiamo determinato i quadripotenziali e con  $X'$  la sua corrispondente in  $RL$ , ovvero

$$\text{in } RS : X \equiv (t, x, y, z) \equiv (t, \vec{X}) \rightarrow \text{in } RL : X' \equiv (t', \vec{X}') \equiv \Lambda X \quad (4.6.371)$$

la legge di trasformazione del quadripotenziale fornisce

$$\text{in } RS : A^\mu(X) \rightarrow \text{in } RL : A'^\mu(X') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(X) \quad (4.6.372)$$

Nel caso che stiamo considerando è

$$A^\mu(X) = \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.373)$$

$$\text{dove } \Phi(X) \equiv \Phi(t, x, y, z) = \frac{e\gamma}{\sqrt{\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.6.374)$$

e quindi la trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  da  $RS$  a  $RL$ , quanto al quadripotenziale, asserisce che

$$\begin{aligned} A'^\mu(X') &= \Lambda^\mu_\nu A^\nu(X) = \Phi(X) \begin{pmatrix} \gamma - \beta^2\gamma \\ -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e}{\sqrt{\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.375)$$

E' quanto dovevamo aspettarci ?

Ricordiamo che la carica in  $RL$  è ferma nell'origine, infatti

$$\Lambda r(\tau) = (\tau, 0, 0, 0) \quad (4.6.376)$$

e dunque, se  $\hat{X} \equiv (\hat{t}, \vec{\hat{X}})$  è una quadripozione generica in  $RL$ , dobbiamo aspettarci che risulti

$$\hat{A}^\mu(\hat{X}) = \frac{e}{|\vec{\hat{X}}|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.377)$$

ovvero che il quadripotenziale sia fatto unicamente dal termine scalare e questo sia quello "elettrostatico" con carica nell'origine.

Nel nostro caso, in cui  $X' = \Lambda X$ , abbiamo che

$$X' = \Lambda X = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t - \beta\gamma x \\ -\beta\gamma t + \gamma x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.6.378)$$

e il termine "elettrostatico" corrispondente (con carica nell'origine), ovviamente è

$$\hat{\Phi}(X') = \frac{e}{\sqrt{(-\beta\gamma t + \gamma x)^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.6.379)$$

Il confronto con il risultato (4.6.375) ci consente di concludere che le due espressioni del potenziale scalare (e quindi del potenziale tout-court ...) coincidono se e solo se vale l'uguaglianza fra i due denominatori, cioè

$$\sqrt{\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-\beta\gamma t + \gamma x)^2 + y^2 + z^2} \quad (4.6.380)$$

Determiniamo dunque la differenza  $D$  degli argomenti delle due radici: si ha

$$\begin{aligned} D &= \gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2 - [(-\beta\gamma t + \gamma x)^2 + y^2 + z^2] = \\ &= \gamma^2 t^2 + \beta^2 \gamma^2 x^2 - 2\beta\gamma^2 t x - t^2 + x^2 - \beta^2 \gamma^2 t^2 - \gamma^2 x^2 + 2\beta\gamma^2 t x = \\ &= t^2(\gamma^2 - 1 - \beta^2 \gamma^2) + x^2(\beta^2 \gamma^2 + 1 - \gamma^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.6.381)$$

Resta così dimostrata la coerenza interna delle previsioni della Relatività Speciale riguardo alla valutazione e alla trasformazione del quadripotenziale da un riferimento inerziale a un altro.

Riprendendo ora i potenziali (4.6.367) e (4.6.368) possiamo determinare da questi le espressioni dei campi elettrici e magnetici, ricordando che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (4.6.382)$$

ovvero, essendo  $\vec{\beta}$  una costante

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial t}\Phi \quad (4.6.383)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\beta}\Phi) = -\vec{\beta} \wedge \vec{\nabla}\Phi \quad (4.6.384)$$

Utilizzando le espressioni<sup>38</sup> (4.6.386)-(4.6.389) delle derivate del potenziale scalare, per il campo elettrico si ottiene

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}(\beta_x\Phi) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \\ &= e\gamma^3 [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} ((x - t\beta) - \beta^2(x - t\beta)) = \\ &= e\gamma [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (x - \beta t) \end{aligned} \quad (4.6.390)$$

$$E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}(\beta_y\Phi) = e\gamma y [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (4.6.391)$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}(\beta_z\Phi) = e\gamma z [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (4.6.392)$$

<sup>38</sup>Per comodità, riscriviamo il potenziale scalare  $\Phi$  nella forma seguente

$$\Phi(t, x, y, z) = e\gamma [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.6.385)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= e\gamma \left(-\frac{1}{2}\right) [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (2x + 2\gamma^2(t - \beta x)(-\beta)) = \\ &= -e\gamma [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (x - \gamma^2 t\beta + \gamma^2 x\beta^2) = \\ &= -e\gamma [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (\gamma^2 x - \gamma^2 t\beta) = \\ &= -e\gamma^3 [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (x - t\beta) \end{aligned} \quad (4.6.386)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -e\gamma y [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (4.6.387)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -e\gamma z [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (4.6.388)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= e\gamma \left(-\frac{1}{2}\right) [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (-2t + 2\gamma^2(t - \beta x)) = \\ &= -e\gamma [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (\gamma^2 t - t - \gamma^2 \beta x) = \\ &= -e\gamma [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (-\gamma^2 \beta x + \gamma^2 \beta^2 t) = \\ &= -e\gamma^3 \beta [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (-x + t\beta) = \\ &= e\gamma^3 \beta [\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} (x - t\beta) \end{aligned} \quad (4.6.389)$$

ovvero

$$\vec{E}(t, x, y, z) = \frac{e\gamma}{[\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} (x - \beta t, y, z) \quad (4.6.393)$$

Analogamente, per il campo magnetico abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, x, y, z) &= -\vec{\beta} \wedge \vec{\nabla}\Phi = \left( 0, \beta \frac{\partial\Phi}{\partial z}, -\beta \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{e\beta\gamma}{[\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} (0, z, -y) \end{aligned} \quad (4.6.394)$$

Si osservi in particolare che

- i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , in ogni quadriposizione  $(t, x, y, z)$ , sono comunque ortogonali fra loro;
- fissato  $t$ , l'andamento di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  all'infinito spaziale, è di tipo  $r^{-2}$ , come il campo elettrostatico.

Quando  $x = \beta t$ , la carica ha, nel riferimento  $RS$ , la stessa coordinata  $x$  del punto  $P$  dove cerchiamo i campi. La simmetria di parità ci garantisce, come in effetti segue dalla formula (4.6.393), che  $E_x = 0$ .

Quanto alle altre componenti, trasverse alla velocità, essendo

$$\begin{aligned} &\gamma^2(t - \beta x)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(t - \beta^2 t)^2 - t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \gamma^2 t^2 \frac{1}{\gamma^4} - t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) + x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= t^2(1 - \beta^2 - 1) + x^2 + y^2 + z^2 = -\beta^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= -x^2 + x^2 + y^2 + z^2 = y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (4.6.395)$$

e dunque

$$\vec{E}(t, \beta t, y, z) = \frac{e\gamma}{[y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} (0, y, z) \quad (4.6.396)$$

$$\vec{B}(t, \beta t, y, z) = \frac{e\beta\gamma}{[y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} (0, z, -y) \quad (4.6.397)$$

Entrambi i campi trasversi risultano "amplificati" del fattore  $\gamma$  rispetto al valore che assumerebbero nel caso di bassa velocità della carica.

### I campi elettromagnetici nel caso di moto vario della carica

Torniamo ora al caso da cui eravamo partiti, ovvero a quello di una carica elettrica che si muove di moto qualsiasi, per la quale abbiamo visto che i potenziali a cui essa dà origine sono i potenziali di Liénard e Wiechert di cui alle (4.6.334) e (4.6.335).

Venendo ai campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , essi possono naturalmente essere valutati a partire dal quadripotenziale, attraverso il consueto tensore elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.398)$$

Però, al posto di effettuare le derivate delle funzioni (4.6.334) e (4.6.335), risulta più semplice ripartire dall'integrale (4.6.325) che definisce il quadripotenziale

$$A^\mu(x) = 2e \int d\tau u^\mu(\tau) \Theta[t - t(\tau)] \delta[(x - r(\tau)) \cdot (x - r(\tau))] \quad (4.6.399)$$

perché le derivate rispetto alle coordinate spazio-temporali  $x \equiv (x^\mu)$  del punto di osservazione operano direttamente sugli argomenti sia della funzione  $\Theta$  che della funzione  $\delta$  e sono di più semplice valutazione.

Dobbiamo quindi valutare

$$\partial^\mu A^\nu(x) = 2e \int d\tau u^\nu(\tau) \partial^\mu \{ \Theta[t - t(\tau)] \delta[(x - r(\tau))^\alpha \cdot (x - r(\tau))_\alpha] \} \quad (4.6.400)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \{ \Theta[t - t(\tau)] \delta[(x - r(\tau))^\alpha \cdot (x - r(\tau))_\alpha] \} = \\ & = \{ \partial^\mu \Theta[t - t(\tau)] \} \delta[(x - r(\tau))^\alpha \cdot (x - r(\tau))_\alpha] + \\ & + \Theta[t - t(\tau)] \partial^\mu \{ \delta[(x - r(\tau))^\alpha \cdot (x - r(\tau))_\alpha] \} \end{aligned}$$

e riguardo al primo addendo, chiaramente possiamo subito concludere che

$$\partial^\mu \Theta[t - t(\tau)] = 0 \quad \text{se } \mu = 1, 2, 3 \quad (4.6.401)$$

Quanto poi alla derivata rispetto al tempo, abbiamo

$$\partial^0 \Theta[t - t(\tau)] \equiv \frac{\partial}{\partial t} \Theta[t - t(\tau)] = \delta[t - t(\tau)] \quad (4.6.402)$$

e dunque

$$\begin{aligned} & \{ \partial^0 \Theta[t - t(\tau)] \} \delta[(x - r(\tau))^\alpha \cdot (x - r(\tau))_\alpha] = \\ & = \delta[t - t(\tau)] \delta[(t - t(\tau))^2 - |\vec{x} - \vec{r}(\tau)|^2] \end{aligned} \quad (4.6.403)$$

La prima delta impone  $t = t(\tau)$  mentre la seconda, anche in virtù della prima, richiede che  $\vec{x} = \vec{r}(\tau)$ , ovvero il termine considerato può dare un contributo solo nella posizione e al momento in cui la carica passa per il punto di osservazione. Prescindendo quindi da questa situazione singolare, possiamo concludere che l'unico termine da tenere in considerazione per il calcolo dei campi è il secondo, ovvero che

$$\partial^\mu A^\nu(x) = 2e \int d\tau u^\nu(\tau) \Theta[t - t(\tau)] \partial^\mu \{ \delta[(x - r(\tau))^\alpha \cdot (x - r(\tau))_\alpha] \} \quad (4.6.404)$$

Indichiamo ora per comodità con  $f(\tau)$  l'argomento della  $\delta$ , cioè

$$f(\tau) \equiv [x - r(\tau)]^\alpha [x - r(\tau)]_\alpha \quad (4.6.405)$$

e veniamo alla questione della derivata<sup>39</sup> della  $\delta$ .

Osserviamo intanto che, attraverso le regole usuali della derivazione, si ha

$$\begin{aligned} \partial^\mu \delta[f] &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta[f] = \frac{d\delta[f]}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \cdot \frac{d\tau}{df} \cdot \frac{d\delta[f]}{d\tau} = \\ &= \partial^\mu f \frac{1}{\frac{df}{d\tau}} \frac{d\delta[f]}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.6.409)$$

Nel nostro caso, vista la (4.6.405), risulta allora

$$\partial^\mu f = 2[x - r(\tau)]^\mu \quad (4.6.410)$$

$$\frac{df}{d\tau} = -2[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau) \quad (4.6.411)$$

per cui, per la (4.6.409), otteniamo

$$\partial^\mu \delta[f] = - \frac{[x - r(\tau)]^\mu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \frac{d}{d\tau} \delta[f] \quad (4.6.412)$$

<sup>39</sup>Ricordiamo dalla teoria delle distribuzioni temperate di Schwartz che risulta

$$\int dx \frac{d\delta(x)}{dx} F(x) = - \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=0} \Leftrightarrow \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x) \frac{d}{dx} \quad (4.6.406)$$

Ma, per poter applicare questa regola, occorre che la variabile di differenziazione della  $\delta$  e quella di integrazione siano le stesse. Invece non è necessario che l'argomento della delta sia proprio la variabile  $x$ , bensì può esserlo una qualsiasi sua funzione (regolare) e risulta ancora

$$\frac{d\delta(f(x))}{dx} = -\delta(f(x)) \frac{d}{dx} \quad (4.6.407)$$

La dimostrazione procede formalmente nel modo seguente (integrazione per parti)

$$\int dx \frac{d\delta(f(x))}{dx} F(x) = \int dx \frac{d}{dx} (\delta(f(x)) F(x)) - \int dx \delta(f(x)) \frac{dF}{dx} \quad (4.6.408)$$

e il primo integrale è nullo perché la funzione  $F(x)$  è nulla all'infinito.

e quindi abbiamo

$$\partial^\mu A^\nu(x) = -2e \int d\tau u^\nu(\tau) \Theta[t - t(\tau)] \frac{[x - r(\tau)]^\mu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \frac{d}{d\tau} \delta[f] \quad (4.6.413)$$

ovvero, usando la (4.6.406), risulta infine

$$\partial^\mu A^\nu(x) = 2e \int d\tau \Theta[t - t(\tau)] \delta[f(\tau)] \frac{d}{d\tau} \left[ u^\nu(\tau) \frac{[x - r(\tau)]^\mu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \right] \quad (4.6.414)$$

dove abbiamo usato il fatto già osservato in precedenza, secondo cui la derivata della  $\Theta$ , comunque, non dà contributo.

In modo più esplicito, usando la definizione (4.6.405) della funzione  $f(\tau)$  che descrive l'argomento della delta, abbiamo

$$\begin{aligned} \partial^\mu A^\nu(x) &= 2e \int d\tau \Theta[t - t(\tau)] \delta[[x - r(\tau)]^\alpha [x - r(\tau)]_\alpha] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{d}{d\tau} \left[ u^\nu(\tau) \frac{[x - r(\tau)]^\mu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \right] \end{aligned} \quad (4.6.415)$$

Risulta adesso chiaro come l'integrale (4.6.415) sia formalmente lo stesso dell'integrale (4.6.399), che definisce il quadripotenziale, pur di effettuare la sostituzione

$$u^\mu(\tau) \rightarrow \frac{d}{d\tau} \left[ u^\nu(\tau) \frac{[x - r(\tau)]^\mu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \right] \quad (4.6.416)$$

per cui, ripetendo quanto già fatto per l'integrazione dell'espressione (4.6.399), otteniamo infine che

$$\partial^\mu A^\nu(x) = \frac{e}{[x - r(\tau_0)]^\alpha u_\alpha(\tau_0)} \cdot \frac{d}{d\tau} \left[ u^\nu(\tau) \frac{[x - r(\tau)]^\mu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \right]_{\tau=\tau_0} \quad (4.6.417)$$

e dunque, finalmente, possiamo scrivere il tensore elettromagnetico nel modo seguente:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = \\ &= \frac{e}{[x - r(\tau_0)]^\alpha u_\alpha(\tau_0)} \cdot \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{u^\nu(\tau)[x - r(\tau)]^\mu - u^\mu(\tau)[x - r(\tau)]^\nu}{[x - r(\tau)]^\alpha u_\alpha(\tau)} \right]_{\tau=\tau_0} \end{aligned} \quad (4.6.418)$$

ovvero, se definiamo, per comodità di notazione, il seguente quadrivettore

$$q \equiv x - r(\tau_0) \quad (4.6.419)$$

risulta, omettendo per semplicità, di riportare che le varie grandezze cinematiche dipendono da  $\tau_0$ , che il tensore elettromagnetico è pari a

$$F^{\mu\nu} \equiv \frac{e}{q \cdot u} \left\{ \frac{(q \cdot u) [-u^\mu u^\nu + q^\mu a^\nu + u^\nu u^\mu - q^\nu a^\mu] - (q^\mu u^\nu - q^\nu u^\mu) (-c^2 + q \cdot a)}{(q \cdot u)^2} \right\}$$

dove si è usato il fatto che

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(q \cdot u) &= \frac{d}{d\tau} [(x - r(\tau))^\alpha u_\alpha] = -u^\alpha u_\alpha + (x - r(\tau))^\alpha a_\alpha = \\ &= -c^2 + q \cdot a \end{aligned} \quad (4.6.420)$$

Facendo le opportune semplificazioni, si ha infine che

$$F^{\mu\nu} \equiv \frac{e}{q \cdot u} \left\{ \frac{(q \cdot u) [q^\mu a^\nu - q^\nu a^\mu] - (q^\mu u^\nu - q^\nu u^\mu) (-c^2 + q \cdot a)}{(q \cdot u)^2} \right\} \quad (4.6.421)$$

che è l'espressione del tensore elettromagnetico prodotto da una carica in moto, covariante a vista.

Risulta utile, comunque, esprimere i campi anche in modo che, pur non essendo covariante a vista, dipenda esplicitamente dalla velocità e dalla accelerazione della carica stessa nel riferimento assegnato.

Ricordiamo a questo proposito che, per la *condizione causale di cono luce*, è

$$q = x - r(\tau_0) = R(1, \vec{n}) \quad (4.6.422)$$

mentre

$$u(\tau) = \gamma(\tau) c (1, \vec{\beta}(\tau)) \quad (4.6.423)$$

Risulta altresì che

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \quad (4.6.424)$$

$$\frac{d\vec{\beta} \gamma}{d\tau} = \vec{\beta} \frac{d\gamma}{d\tau} + \gamma \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} = \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{d\vec{\beta}}{dt} \quad (4.6.425)$$

per cui si ha

$$a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau} = c \left( \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}), \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \quad (4.6.426)$$

Ne segue quindi che, per la (4.6.422) e la (4.6.423), è

$$q \cdot u = R \gamma c (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \quad (4.6.427)$$

mentre, per la (4.6.422) e la (4.6.426), risulta

$$\begin{aligned} q \cdot a &= R c \left[ \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \vec{n} \left( \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} + \gamma^2 \dot{\vec{\beta}} \right) \right] = \\ &= R c \left[ \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \gamma^2 \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (4.6.428)$$

per cui, volendo calcolare, per esempio, l'espressione del campo elettrico, ricordando che  $F^{0i} = -E^i$  si ha, dalla (4.6.421), che

$$\begin{aligned}
-\vec{E} &= \frac{e}{(q \cdot u)^3} \{ (q \cdot u)[q^0 \vec{a} - a^0 \vec{q}] - (q \cdot a - c^2)(q^0 \vec{u} - u^0 \vec{q}) \} = \\
&= \frac{e}{R^3 \gamma^3 c^3 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \left\{ R \gamma c (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) R [\vec{a} - \vec{n} a^0] - (R a^0 - R \vec{n} \cdot \vec{a} - c^2) R c \gamma (\vec{\beta} - \vec{n}) \right\} = \\
&= \frac{e}{R^3 \gamma^3 c^3 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \left\{ R^2 \gamma c \left[ (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})(\vec{a} - \vec{n} a^0) - (a^0 - \vec{n} \cdot \vec{a})(\vec{\beta} - \vec{n}) \right] + R c^3 \gamma (\vec{\beta} - \vec{n}) \right\} = \\
&= \frac{e(\vec{\beta} - \vec{n})}{R^2 \gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} + \frac{e}{R \gamma^2 c^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \left\{ (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})(\vec{a} - a^0 \vec{n}) - (a^0 - \vec{n} \cdot \vec{a})(\vec{\beta} - \vec{n}) \right\}
\end{aligned}$$

Consideriamo il termine nella parentesi graffa: si ha

$$\begin{aligned}
&(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})(\vec{a} - a^0 \vec{n}) - (a^0 - \vec{n} \cdot \vec{a})(\vec{\beta} - \vec{n}) = \\
&= c(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \left[ \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} + \gamma^2 \dot{\vec{\beta}} - \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{n} \right] - \\
&- c \left[ \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \gamma^2 (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right] (\vec{\beta} - \vec{n}) = \\
&= \gamma^2 c \left\{ (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \left[ \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} - \vec{n}) + \dot{\vec{\beta}} \right] - (\vec{\beta} - \vec{n}) \left[ \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) - (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n}) \right] \right\} = \\
&= \gamma^2 c \left\{ (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} - \vec{n}) + (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \dot{\vec{\beta}} \right\} + \\
&+ \gamma^2 c \left\{ -(\vec{\beta} - \vec{n}) \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) + (\vec{\beta} - \vec{n}) (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n}) \right\} = \\
&= \gamma^2 c \left\{ (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \dot{\vec{\beta}} + (\vec{\beta} - \vec{n}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right\}
\end{aligned}$$

ma per la proprietà generale del prodotto vettore, per cui

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

è immediato che

$$(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \dot{\vec{\beta}} + (\vec{\beta} - \vec{n}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = \vec{n} \times [(\vec{\beta} - \vec{n}) \times \dot{\vec{\beta}}] \quad (4.6.429)$$

per cui, sostituendo, risulta infine che (si ricordi che  $F^{0i} = -E^i \dots$ )

$$\vec{E} = \left[ \frac{e(\vec{n} - \vec{\beta})}{R^2 \gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right]_{rit} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right]_{rit} \quad (4.6.430)$$

Procedendo in modo analogo per il campo magnetico, si trova che

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \quad (4.6.431)$$

L'irraggiamento è descritto unicamente dalle componenti dei campi che si annullano all'infinito come  $1/R$ , le sole che possono dar luogo a un flusso del

vettore di Poynting che abbia limite diverso da zero all'infinito.

Come si vede allora dalla (4.6.430), se non c'è accelerazione non c'è nemmeno irraggiamento, in accordo con il principio di relatività. Infatti, in assenza di accelerazione, esiste un riferimento inerziale in cui la carica è costantemente a riposo e in esso, evidentemente, essa crea solo un campo elettrico statico e dunque un quadrimpulso irraggiato identicamente nullo nel tempo. In ogni altro riferimento inerziale, il quadrimpulso irraggiato resta nullo (le trasformazioni di Lorentz sono lineari ...) e dunque, finché il  $\vec{\beta}$  della carica è costante, non può esistere irraggiamento!

Veniamo ora al caso in cui c'è accelerazione. Se ci poniamo nel riferimento tangente alla particella, ovvero dove la sua velocità è istantaneamente nulla, per quanto sopra detto, il campo di radiazione vale

$$\vec{E}_{rad} = \frac{e}{c} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \quad (4.6.432)$$

$$\vec{B}_{rad} = \vec{n} \times \vec{E} \quad (4.6.433)$$

e dunque

$$\vec{S}_{rad} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{rad}|^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \frac{e^2}{R^2 c^2} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2 \vec{n} \quad (4.6.434)$$

Ovvero, se prendiamo la direzione di  $\dot{\vec{\beta}}$  come direzione dell'asse  $z$ , allora la potenza irraggiata all'infinito nell'angolo solido  $d\Omega$ , in questo riferimento, vale

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= (\vec{S}_{rad} \cdot \vec{n}) R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2 d\Omega = \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (4.6.435)$$

dove  $\vec{a}$  è l'accelerazione a cui è soggetta la carica, nel riferimento tangente. Risulta

$$|\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})|^2 = |\vec{n} a \cos\theta - \vec{a}|^2 = a^2 \cos^2\theta - 2a \cos\theta a \cos\theta + a^2 = a^2 \sin^2\theta$$

per cui la distribuzione di potenza irraggiata da una carica accelerata nel riferimento tangente (in cui essa è istantaneamente ferma) è data da

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{a}|^2 \sin^2\theta \quad (4.6.436)$$

che è l'espressione classica di Larmor.

## 4.7 Irraggiamento in un acceleratore

Una carica elettrica in moto accelerato irraggia energia elettromagnetica e l'energia irraggiata, nel riferimento tangente (sistema *cgs es*), risulta distribuita nel modo seguente (distribuzione di Larmor)

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt d\Omega} = \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{a}|^2 \sin^2\theta \quad (4.7.437)$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra il vettore accelerazione e la direzione di propagazione della radiazione emessa.

Integrando sull'angolo solido, è immediato provare che a questa distribuzione corrisponde una potenza totale irraggiata<sup>40</sup>  $\mathcal{P}$  pari a

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left| \frac{d\vec{p}'}{dt} \right|^2 \quad (4.7.439)$$

Questa espressione classica, di Larmor, come abbiamo detto, è valida nel riferimento tangente alla particella, cioè nel riferimento inerziale  $RS$  in cui la velocità della carica è istantaneamente nulla.

In questo riferimento, fra  $t$  e  $t + dt$ , dal punto di coordinate  $\vec{X} = (X_i)$ , dove si trova momentaneamente ferma la carica per tutto il tempo compreso fra  $t$  e  $t + dt$ , viene emesso, sotto forma elettromagnetica, un quadrimpulso pari a

$$(dW, \vec{0}) \equiv (\mathcal{P} dt, \vec{0}) \quad (4.7.440)$$

essendo nulla la parte spaziale, vista la simmetria della distribuzione della potenza irraggiata (4.7.437), ovvero visto che

$$\int_0^\pi \sin^2\theta (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi = \vec{0} \quad (4.7.441)$$

Supponiamo ora di osservare questo processo da un altro riferimento inerziale  $RS'$ , in moto relativo rispetto a quello tangente e sia  $\Lambda^\mu_\nu$  la matrice di Lorentz che connette i due riferimenti. Evidentemente il quadrimpulso emesso in  $RS'$  fra  $t'$  e  $t' + dt'$  è legato al precedente dalla relazione

$$(dW', d\vec{p}') = dW (\Lambda^0_0, \Lambda^i_0) \quad (4.7.442)$$

Abbiamo allora che la potenza elettromagnetica emessa in  $RS'$  fra  $t'$  e  $t' + dt'$  vale

$$\mathcal{P}' = \frac{\Lambda^0_0 dW}{dt'} \quad (4.7.443)$$

<sup>40</sup>Risulta infatti

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2\theta d\phi \sin\theta d\theta &= 2\pi \int_1^{-1} (1 - \cos^2\theta) d(-\cos\theta) = 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) = \\ &= 2\pi \left[ 2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3} 4\pi \end{aligned} \quad (4.7.438)$$

ma

$$t' = \Lambda_{.0}^0 t + \Lambda_{.i}^0 X_i \quad (4.7.444)$$

e quindi

$$dt' = \Lambda_{.0}^0 dt \quad (4.7.445)$$

essendo  $\vec{X}_i$  costante, poiché fra  $t$  e  $t + dt$ , la carica è in quiete. Dunque

$$\mathcal{P}' = \frac{\Lambda_{.0}^0 dW}{\Lambda_{.0}^0 dt} = \mathcal{P} \quad (4.7.446)$$

cioè la potenza elettromagnetica emessa per irraggiamento da una carica elettrica accelerata è uno scalare per trasformazioni di Lorentz.

Vediamo allora di riscrivere l'espressione (4.7.439) in modo che sia scalare *a vista*. Il problema, dunque, è quello di costruire uno scalare che, nel limite in cui  $\beta \rightarrow 0$ , coincida con l'espressione di Larmor.

In generale questo scalare dovrà

- essere costruito a partire da variabili cinematiche della carica;
- non coinvolgere derivate di ordine superiore della velocità, visto che i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  non contengono che  $\vec{\beta}$  e  $\dot{\vec{\beta}}$ ;
- non dipendere dalla posizione della carica.

Ne segue quindi che lo scalare cercato potrà dipendere solo dalla quadri-velocità  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  e dalla quadriaccelerazione  $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ .

D'altronde il quadripulso della carica in moto è proporzionale alla quadri-velocità attraverso la massa, infatti

$$p^\mu = m u^\mu$$

per cui la potenza irraggiata  $\mathcal{P}$  potrà dipendere solo da uno scalare costruito a partire dai quadri-vettori  $p^\mu$  e  $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ , ovvero potrà dipendere solo dagli scalari  $p^\mu p_\mu$ ,  $\frac{dp^\mu}{d\tau} p_\mu$ ,  $\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}$ . Ma il primo invariante è indipendente dalla velocità e dalla accelerazione della particella, essendo semplicemente il quadrato della sua massa, mentre il secondo, come sappiamo, è identicamente nullo.

Ne segue che la potenza  $\mathcal{P}$  potrà dipendere solo dal terzo invariante.

D'altronde abbiamo già visto che  $a^\mu a_\mu$  coincide con l'opposto del modulo quadro dell'accelerazione della particella vista nel riferimento tangente

$$a^\mu a_\mu = -|\vec{a}|^2|_{rif. tang.} \quad (4.7.447)$$

e dunque la generalizzazione cercata dell'espressione della potenza di Larmor irraggiata da una carica accelerata non può essere che

$$\mathcal{P} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \quad (4.7.448)$$

valida, quindi, in ogni riferimento inerziale.

Volendo riscriverla in termini di  $\vec{\beta}$  e di  $\dot{\vec{\beta}}$ , ovvero delle variabili cinematiche della particella nel sistema del Laboratorio, occorre esprimere  $\frac{dp^\mu}{d\tau}$  in termini di queste variabili. Si ha

$$p^\mu = (mc\gamma, mc\gamma\vec{\beta}) \quad (4.7.449)$$

e dunque

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = mc \left( \frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{\beta}) \right) \quad (4.7.450)$$

Risulta

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\tau} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \left( -\frac{1}{2} \right) (1 - \beta^2)^{-3/2} \left( -2\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) = \\ &= \gamma^4 \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \end{aligned} \quad (4.7.451)$$

mentre è

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{\beta}) &= \gamma \frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta}) = \gamma \vec{\beta} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \\ &= \gamma^4 \left( \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} + \gamma^2 \dot{\vec{\beta}} \end{aligned} \quad (4.7.452)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} &= m^2 c^2 \left[ \gamma^8 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - \gamma^8 \beta^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - 2\gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - \gamma^4 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \right] = \\ &= m^2 c^2 \left[ \gamma^8 (1 - \beta^2) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - 2\gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - \gamma^4 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.7.453)$$

ma

$$\gamma^8 (1 - \beta^2) = \gamma^6 \quad (4.7.454)$$

dunque

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = -m^2 c^2 \left[ \gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 + \gamma^4 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \right] \quad (4.7.455)$$

che, evidentemente, è sempre una quantità negativa, come deve essere visto che la potenza irraggiata  $\mathcal{P}$  è comunque positiva !

Siccome vale la seguente ben nota identità vettoriale

$$|\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}|^2 = \beta^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \quad (4.7.456)$$

ne segue che

$$\begin{aligned}\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} &= -m^2 c^2 \gamma^4 \left[ \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 + \gamma^2 \left( \beta^2 \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 - \left| \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \right) \right] = \\ &= -m^2 c^2 \gamma^4 \left[ \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 (1 + \beta^2 \gamma^2) - \gamma^2 \left| \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \right] \quad (4.7.457)\end{aligned}$$

Ma  $1 + \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2$ , quindi, finalmente, possiamo scrivere

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = -m^2 c^2 \gamma^6 \left[ \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 - \left| \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \right] \quad (4.7.458)$$

e dunque, sostituendo nella (4.7.448), si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} m^2 c^2 \gamma^6 \left[ \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 - \left| \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \right] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left[ \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 - \left| \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \right] \quad (4.7.459)\end{aligned}$$

che è valida in ogni riferimento inerziale e fu ottenuta, per la prima volta, da Liénard nel 1898, partendo direttamente dall'espressione dei campi.

Vediamo adesso di specializzare il risultato ottenuto in alcuni casi particolari, di interesse nel campo delle macchine acceleratrici.

- Acceleratore lineare.

Il primo acceleratore lineare (per ioni  $Na^+$  e  $K^+$ ) fu costruito da Rolf Wideroe, nel 1928.

In linea di principio, un acceleratore lineare è fatto da un insieme di elettrodi cilindrici, cavi, con l'asse allineato fra loro, fra i quali viene applicata una  $ddp$  a radiofrequenza. La frequenza è scelta in modo che la carica veda sempre un campo elettrico accelerante fra due elettrodi successivi (e questo sia decelerante solo quando la carica si trova all'interno dell'elettrodo cavo, quindi in zona a potenziale sostanzialmente costante). Finché la particella è non relativistica poi, per tener conto dell'aumento di velocità, gli elettrodi sono costruiti via via di lunghezza maggiore ...

Nel caso di un acceleratore lineare ideale in cui il campo elettrico sia uniforme e costante (situazione non molto diversa da quella reale, nella zona compresa fra gli elettrodi ...), evidentemente  $\vec{\beta}$  e  $\dot{\vec{\beta}}$  saranno paralleli, dunque la potenza irradiata da una carica durante la fase di accelerazione, in tal caso, varrà

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \quad (4.7.460)$$

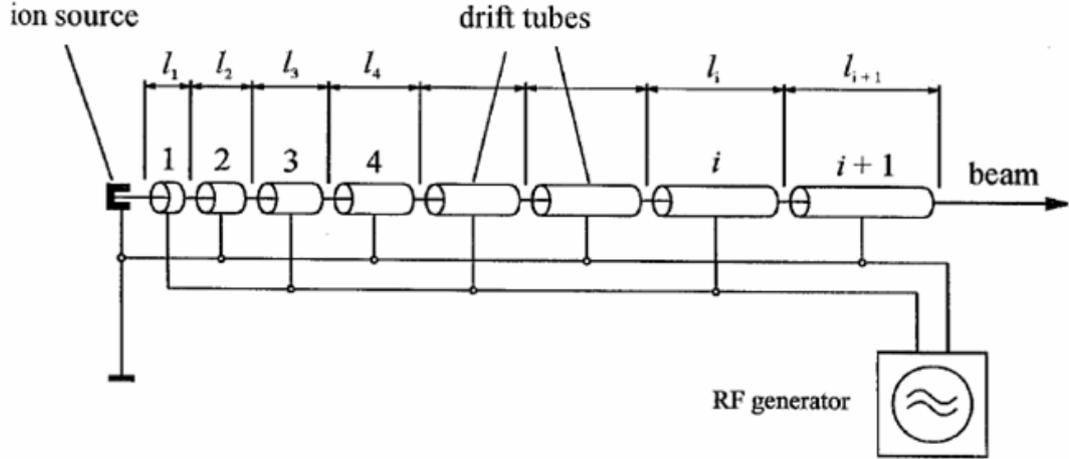


Figura 4.7: Schema di principio di un acceleratore lineare

D'altronde, se  $\vec{k}$  è il versore dell'asse  $z$ , lungo cui supporremo che venga accelerata la carica, risulta

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{k} \frac{d}{dt}(m c \gamma \beta) = m c \vec{k} \left[ \beta \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{d\beta}{dt} \right] = m c \vec{k} \left[ \beta \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\beta}{dt} \right] = \\ &= m c \gamma \vec{k} \frac{d\beta}{dt} [1 + \beta^2 \gamma^2] = m c \gamma^3 \dot{\beta} \vec{k} \end{aligned} \quad (4.7.461)$$

e dunque

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \frac{1}{m^2 c^2} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 \quad (4.7.462)$$

coincidente, formalmente, con l'espressione non relativistica<sup>41</sup>.

Facciamo ora un'applicazione numerica. Supponiamo di considerare un elettrone che, partendo da fermo, viene accelerato in un campo elettrico di intensità costante pari a  $E = 10 \text{ MV/m}$ , per una distanza  $D = 10 \text{ Km}$ .

<sup>41</sup>Si noti comunque che, nonostante l'identità formale, il significato dei simboli è differente, visto che, nella meccanica newtoniana  $\vec{p} = m\vec{v}$  mentre in quella relativistica, e dunque anche nella (4.7.462),  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$  !



Figura 4.8: *SLAC: Acceleratore lineare di Stanford (2 miglia)*

Abbiamo già visto che, posto  $a \equiv \frac{|e|E}{m}$ , nel caso di partenza da fermo e contando il tempo proprio dall'istante di partenza, risulta<sup>42</sup>

$$u^0(\tau) \equiv c\gamma(\tau) = c \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \quad (4.7.463)$$

$$u^3(\tau) \equiv c\beta(\tau)\gamma(\tau) = c \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \quad (4.7.464)$$

ovvero, scegliendo l'origine del tempo  $t$  nel riferimento del laboratorio in modo che risulti  $t = 0$  quando  $\tau = 0$ , si ha

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\tau) = \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \Rightarrow t = \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \quad (4.7.465)$$

<sup>42</sup>Usiamo qui il sistema *cgs es*: questo è il motivo per cui scriviamo l'argomento delle funzioni iperboliche come  $a\tau/c$ .

Va infine osservato che, essendo la carica dell'elettrone negativa, il moto avviene nel verso opposto a quello del campo elettrico ...

Ma essendo<sup>43</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &\equiv u^3(\tau) = c \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \\ \Rightarrow z &= \frac{c^2}{a} \left( \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - 1 \right) = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.7.467)$$

dove si è scelta l'origine degli assi in modo che risulti  $z = 0$  per  $t = \tau = 0$ , ovvero si è posta l'origine dell'asse  $z$  proprio all'ingresso dell'acceleratore. Dunque, se  $L$  è la lunghezza della macchina, il tempo di accelerazione  $T$  (nel riferimento del Laboratorio) è dato dalla relazione

$$\begin{aligned} L &= \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{aT}{c}\right)^2} - 1 \right] \Rightarrow \left[ \frac{aL}{c^2} + 1 \right]^2 = 1 + \left(\frac{aT}{c}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{aT}{c}\right)^2 &= \left(\frac{aL}{c^2}\right)^2 + 2 \frac{aL}{c^2} \Rightarrow T^2 = \frac{L^2}{c^2} + \frac{2L}{a} \\ \Rightarrow T &= \frac{L}{c} \sqrt{1 + \frac{2c^2}{aL}} \end{aligned} \quad (4.7.468)$$

ma, se poniamo

$$\hat{\gamma} \equiv \frac{\mathcal{E}_{max}}{m c^2} \quad (4.7.469)$$

dove  $\mathcal{E}_{max}$  è l'energia totale relativistica della carica all'uscita dell'acceleratore<sup>44</sup>, allora essendo

$$\hat{\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{aT}{c}\right)^2} \Rightarrow \hat{\gamma} = 1 + \frac{aL}{c^2} \quad (4.7.471)$$

risulta che

$$\frac{1}{2} \frac{aL}{c^2} = \frac{\hat{\gamma} - 1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{2c^2}{aL} = 1 + \frac{2}{\hat{\gamma} - 1} = \frac{\hat{\gamma} + 1}{\hat{\gamma} - 1} \quad (4.7.472)$$

---

<sup>43</sup>Si osservi che

$$z = \frac{c^2}{a} \left( ch\left(\frac{a\tau}{c}\right) - 1 \right) = \frac{c^2}{a} [\gamma(\tau) - 1] = \frac{m c^2}{qE} [\gamma(\tau) - 1] \Rightarrow q E z = m c^2 [\gamma(\tau) - 1] \quad (4.7.466)$$

<sup>44</sup>Per la (4.7.466), nel caso considerato risulta

$$\hat{\gamma} - 1 = \frac{q E L}{m c^2} = \frac{10^7 \times 10^4 eV}{0.511 MeV} \approx 2. \times 10^5 \quad (4.7.470)$$

ed esso, evidentemente, tende ad 1 nel limite ultrarelativistico, cioè quando  $\hat{\gamma} \gg 1$ , per cui, in questo caso, il tempo di permanenza  $T$  della carica nell'acceleratore lineare è, con ottima approssimazione, dato proprio da

$$T \approx \frac{L}{c} \quad (4.7.473)$$

Nel caso da noi considerato, questo significa

$$T = \frac{10^4}{3 \cdot 10^8} \approx 33 \mu s \quad (4.7.474)$$

Ma allora, siccome la potenza irradiata, come abbiamo visto, è uno scalare e nel riferimento tangente essa è costante<sup>45</sup> e vale

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left| \frac{e\vec{E}}{m} \right|^2 \quad (4.7.476)$$

l'energia irradiata dalla carica durante tutta la fase di accelerazione è

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{eE}{m} \right)^2 \cdot \frac{L}{c} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{L} \left( \frac{eEL}{mc^2} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{L} (\hat{\gamma} - 1)^2 \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{L} \hat{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (4.7.477)$$

che, nel caso considerato, data la (4.7.470), essendo  $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$  e  $L = 10^6 \text{ cm}$ , diventa

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \frac{2}{3} \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{10^6} (2 \cdot 10^5)^2 \approx 6.14 \times 10^{-15} \text{ erg} = 6.14 \times 10^{-22} \text{ J} = \\ &= \frac{6.14 \times 10^{-22}}{1.6 \times 10^{-19}} \approx 3.8 \times 10^{-3} \text{ eV} = 3.8 \text{ meV} \end{aligned} \quad (4.7.478)$$

ovvero, nell'acceleratore lineare, anche nel caso di elettroni, con i campi elettrici attualmente disponibili, la perdita di energia per irraggiamento durante la fase di accelerazione rimane del tutto irrilevante.

---

<sup>45</sup>Ricordiamo che il campo elettrico  $\vec{E}$  è invariante per trasformazioni di Lorentz tali per cui  $\vec{\beta} \parallel \vec{E}$ . Ne segue che il campo elettrico visto dalla carica ha un'intensità che è sempre uguale a quella presente nel sistema del laboratorio, dato che, avendo assunto la partenza da fermo, il moto iperbolico della carica nell'acceleratore avviene con  $\vec{\beta} \parallel \vec{E}$  (anche se in versi opposti ...).

Nel caso considerato, quindi, quanto all'accelerazione nel riferimento tangente, abbiamo sempre

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^7}{0.91 \times 10^{-30}} \approx 1.8 \times 10^{18} \text{ m/s}^2 = 1.8 \times 10^{20} \text{ cm/s}^2 \quad (4.7.475)$$



pio, le cariche hanno raggiunto il *plateau* di accelerazione all'interno della macchina. Risulta evidentemente che, in ogni tratto *bending* è

$$\left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 - \left| \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 = \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 - \beta^2 \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 = \gamma^{-2} \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \quad (4.7.479)$$

e dunque

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \gamma^{-2} \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^4 \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \quad (4.7.480)$$

D'altronde, se  $R$  è il raggio della macchina,

$$\left| c \dot{\vec{\beta}} \right| = \left| \dot{\vec{v}} \right| = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2 \beta^2}{R} \Rightarrow \left| \dot{\vec{\beta}} \right| = c \frac{\beta^2}{R} \quad (4.7.481)$$

per cui risulta

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^4 \frac{c^2 \beta^4}{R^2} = \frac{2}{3} e^2 c \gamma^4 \frac{\beta^4}{R^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{c^2 \beta^2 \gamma^2}{R} \right)^2 \quad (4.7.482)$$

da cui segue infine che l'energia perduta in un giro da una particella ultra-relativistica ( $\gamma \gg 1$  e dunque  $\beta \approx 1$ ) vale

$$\Delta \mathcal{E}_{giro} = \mathcal{P} \frac{2\pi R}{\beta c} = \frac{4\pi}{3} e^2 \gamma^4 \frac{\beta^3}{R} \approx \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} \gamma^4 \quad (4.7.483)$$

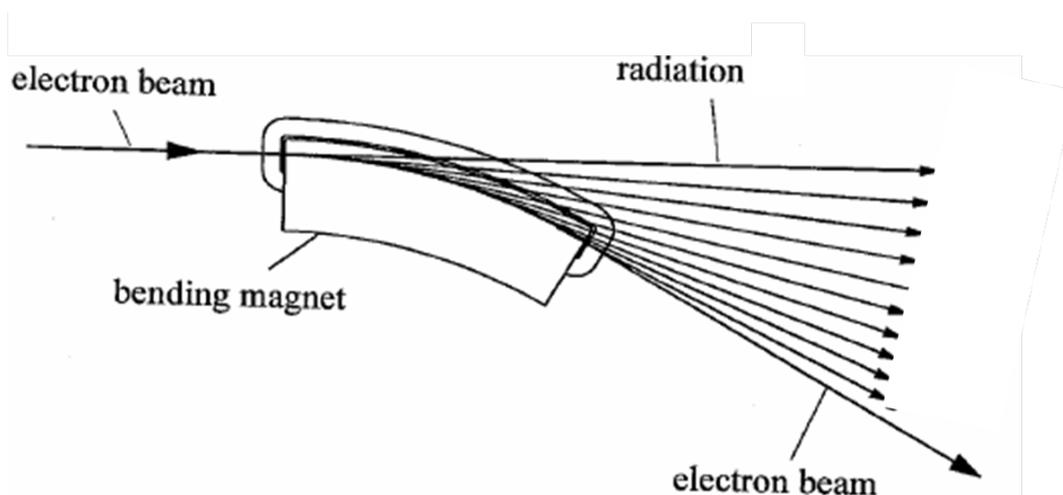


Figura 4.10: *Emissione di radiazione di Sincrotrone*

Per esempio, nel caso del *LEP*, che aveva  $2.8 \text{ Km}$  di raggio e dove un elettrone raggiungeva l'energia di  $50 \text{ GeV}$ , ovvero un  $\gamma \approx 10^5$  si aveva

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{\text{giro}} &= \frac{4\pi}{3} (4.8 \times 10^{-10})^2 (10^5)^4 \frac{1}{2.8 \times 10^5} = \frac{4\pi}{3 \times 2.8} (4.8)^2 10^{-20} 10^{20} 10^{-5} \approx \\ &\approx 3.2 \times 10^{-4} \text{ erg} = 3.2 \times 10^{-4} \frac{10^{-7}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} \approx \\ &\approx 2. \times 10^8 \text{ eV} = 0.2 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (4.7.484)$$

che diventò 20 volte tanto, allorché, con le cavità acceleratrici superconduttrici, si arrivò ad una energia di poco maggiore a  $100 \text{ GeV}$  !

Come si vede, nel caso dell'acceleratore circolare, la perdita di energia per *radiazione di sincrotrone* è tutt'altro che trascurabile e, nel caso degli elettroni, limita ormai l'energia finale intorno ai  $100 \text{ GeV}$ . Siccome l'energia irraggiata per giro dipende da  $\gamma^4$ , a parità di raggio della macchina, la radiazione emessa dagli elettroni del *LEP fase 1* ( $50 \text{ GeV}$ ) verrebbe emessa da protoni solo nel momento in cui essi raggiungessero l'energia di  $100 \text{ TeV}$  (ammesso che si sapesse tenerli su quell'orbita, ovvero che si sapessero costruire magneti da circa  $120 \text{ Tesla}$  !).

Da dove nasce l'enorme differenza nella quantità di energia irraggiata fra il caso dell'acceleratore lineare e quello dell'acceleratore circolare?

Naturalmente, anche per l'acceleratore circolare la potenza irraggiata  $\mathcal{P}$  è uno scalare di Lorentz, per cui possiamo calcolare l'energia irraggiata in un giro moltiplicando la potenza  $\mathcal{P}$  calcolata nel riferimento tangente, per il periodo di rivoluzione  $T$  che, nel caso del *LEP*, era di circa  $100 \mu\text{s}$ , essendo la sua circonferenza di  $27 \text{ Km}$ .

Il punto è che, nel caso dell'acceleratore circolare, l'accelerazione nel riferimento tangente è mostruosamente grande, infatti essa vale  $a = \frac{qE'}{m}$  dove  $E'$  è l'intensità del campo elettrico visto nel riferimento tangente che, nella zona *bending*, per la legge di trasformazione del campo elettromagnetico, essendo  $\vec{\beta} \perp \vec{B}$  vale (sistema *cgs es*)

$$E' = \beta \gamma B \quad (4.7.485)$$

e dunque, data la (4.7.487), risulta<sup>46</sup>

$$a = \frac{eB \beta \gamma}{m} = \frac{eB \beta^2}{\gamma \beta m c^2} c^2 \gamma^2 = \frac{eB \beta^2}{p_{\perp} c} c^2 \gamma^2 = \frac{c^2 \beta^2 \gamma^2}{R} \quad (4.7.490)$$

<sup>46</sup>L'energia perduta per giro, in termini dell'accelerazione nel riferimento tangente, risulta essere

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{giro}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{eB \beta \gamma}{m} \right)^2 \frac{2\pi R}{c \beta} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^4} \left( \frac{eB}{m} \right)^2 \beta \gamma^2 R \quad (4.7.486)$$

Ma la relazione per cui  $R = \frac{p_{\perp}}{qB}$ , valida nel *SI*, nel sistema *cgs es* diventa

$$R = \frac{p_{\perp} c}{qB} \quad (4.7.487)$$

coerentemente con il fatto che, in questo sistema di unità di misura,  $qB$  ha le dimensioni

che, nel *LEP* ( $R = 2800\text{ m}$ ), per un elettrone da  $50\text{ GeV}$ , valeva

$$a = \frac{(3. \times 10^{10})^2 \cdot (10^5)^2}{2.8 \times 10^5} \approx 3. \times 10^{25} \text{ cm/s}^2 \quad (4.7.491)$$

da confrontare con quanto ottenuto nel caso dell'acceleratore lineare, dove l'accelerazione (4.7.475) risulta di ben *cinque* ordini di grandezza inferiore !

---

di una forza ... per cui si ha

$$eB = \frac{pc}{R} = \frac{mc^2 \gamma \beta}{R} \quad (4.7.488)$$

riottenendo così l'andamento di cui alla (4.7.483) per la perdita di energia per giro

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{giro}} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^4} \left( \frac{\beta \gamma c^2}{R} \right)^2 \beta^2 \gamma^2 R = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} \beta^3 \gamma^4 \quad (4.7.489)$$

## 4.8 Una nota di colore ...

Prima di lasciare l'argomento degli acceleratori, vale senz'altro la pena ricordare il contributo italiano dato allo sviluppo dei *colliders*, senza i quali tanta fisica non sarebbe stata possibile.

Fin dai primi anni '50, l'INFN aveva voluto dotarsi di un elettrosincrotrone da  $1000\text{ MeV}$ , che fu il motivo per cui nacquero i Laboratori Nazionali di Frascati. Esso era da poco entrato in funzione (febbraio 1959), che già si parlava della macchina che avrebbe dovuto seguirlo. In questa discussione si inserì Bruno Touscheck, che era un fisico teorico di Roma la Sapienza.

Egli si appassionò al problema e, rispolverando un'idea di Rolf Wideroe, propose una macchina fatta da un solo anello in cui circolavano in versi opposti

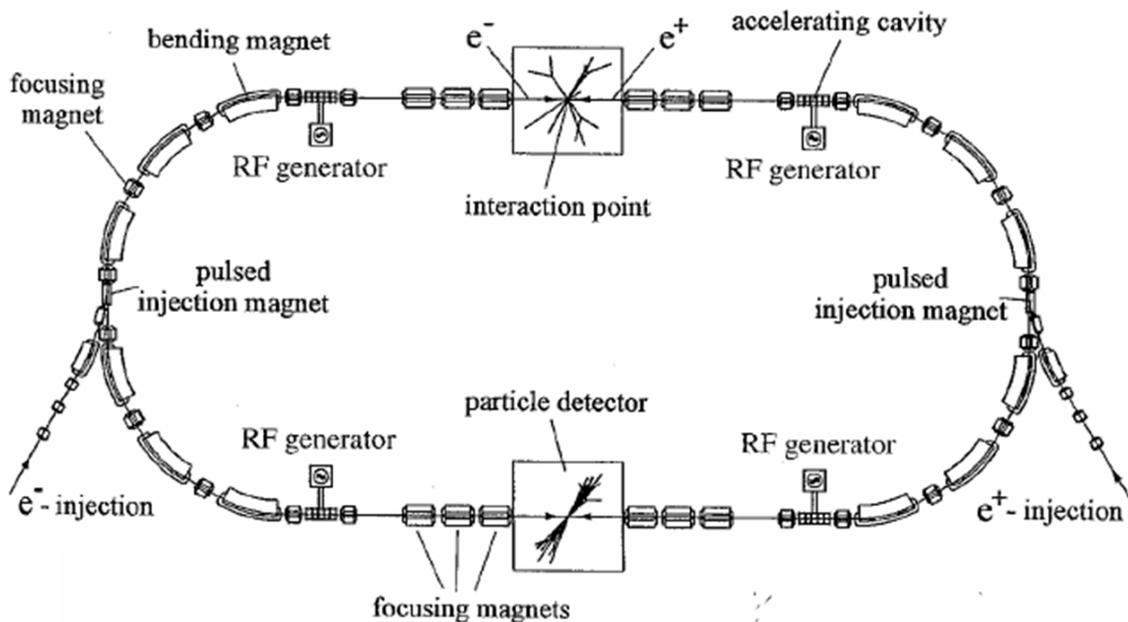


Figura 4.11: *Principio di funzionamento di un collider a elettroni e positroni*

elettroni e positroni, per scontrarsi quindi frontalmente e "depositare tutta la loro energia nel vuoto" nel modo più elegante ed efficiente possibile.

L'idea era bella, ma avrebbe funzionato ?

Fu deciso di iniziare con un piccolo prototipo, un Anello di Accumulazione (*AdA*, appunto!) che avrebbe dovuto avere un diametro di  $1.5\text{ m}$  ed accelerare  $e^+$  ed  $e^-$  fino ad una energia di  $250\text{ MeV}$ .

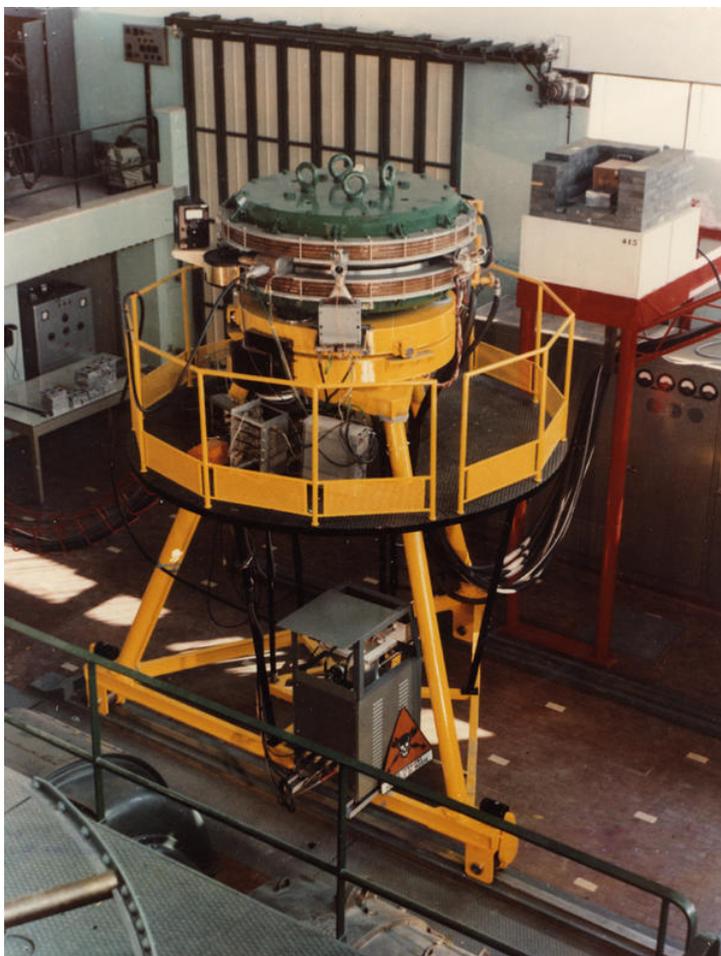


Figura 4.12: *L'anello di accumulazione AdA*

L'hamburger magnetico, come lo chiamava Touscheck, funzionò e dimostrò così pienamente la fattibilità di macchine a fasci collidenti. Si passò quindi alla progettazzazione di *Adone*, una macchina dove l'energia dei due fasci di elettroni e positroni doveva salire fino a  $1.5 \text{ GeV}$ .

Purtroppo alcune vicissitudini del CNEN nel 1963 (il CNEN partecipava finanziariamente al progetto) ritardarono la realizzazione della macchina, che si concluse nel 1967, mentre i primi fasci iniziarono a circolarvi nel 1969.

Come abbiamo già avuto modo di dire, purtroppo la energia disponibile della macchina era solo di  $100 \text{ MeV}$  sotto la soglia di produzione della  $J/\psi$ , un mesone fatto da una coppia di  $c$  e  $\bar{c}$  che confermò il modello a quark, nell'ambito del quale Glashow Iliopoulos e Maiani avevano introdotto questo quark per spiegare l'inesistenza di correnti neutre tra quarks di diverse

famiglie. Frascati purtroppo mancò la scoperta, realizzata, lo ricordiamo, dal gruppo<sup>47</sup> di C.C. Ting all'AGS di Brookhaven (in collisioni su Berillio di protoni da 28 GeV) e dal gruppo<sup>48</sup> di B. Richter al collider  $e^+e^-$  SPEAR di SLAC.

Comunque, appena trapelò la notizia, "tirando il collo" alla macchina, anche Adone<sup>49</sup> a Frascati riuscì, nel giro di un giorno, a confermare la scoperta.

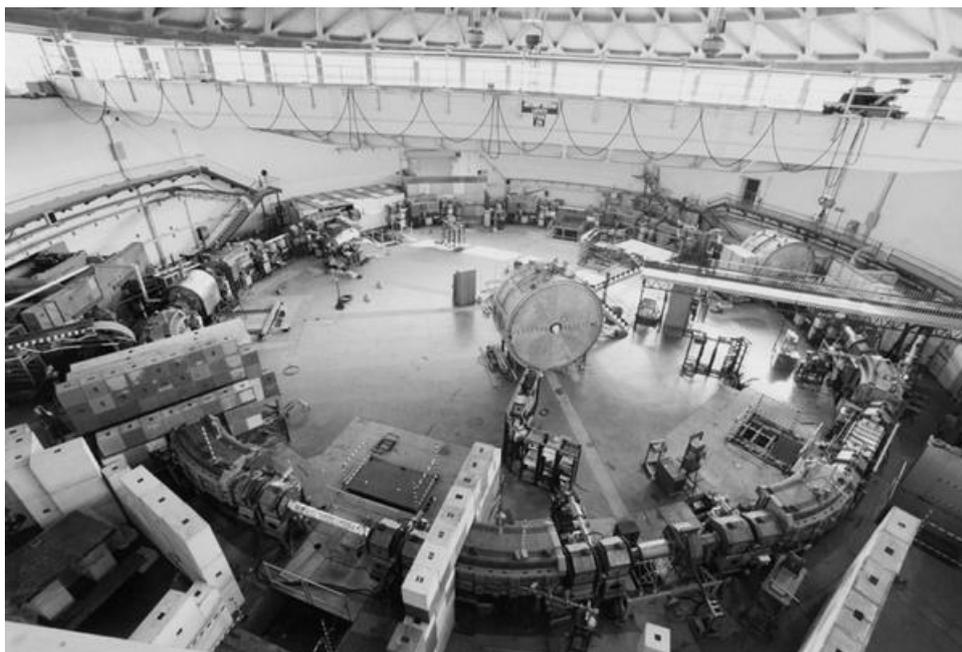


Figura 4.13: Acceleratore Adone di Frascati

---

<sup>47</sup>Aubert et al.: *Experimental observation of a heavy particle J*  
Phys. Rev. Lett. 33, 1404 (1974)

<sup>48</sup>Augustin et al.: *Discovery of a narrow resonance in  $e^+ e^-$  annihilation*  
Phys. Rev. Lett. 33, 1406 (1974)

<sup>49</sup>C. Bacci et al.: *Preliminary result of Frascati (ADONE) on the nature of a new 3.1 GeV particle produced in  $e^+ e^-$  annihilation*  
Phys. Rev. Lett. 33, 1408 (1974)

## Capitolo 5

# Effetto Cerenkov

### 5.1 Teoria classica

Una particella di carica  $e$  e massa  $m$  che si muove con velocità costante  $\vec{v}$  nel vuoto, coerentemente con le equazioni di Maxwell e il principio di relatività ristretta, come sappiamo, non irraggia alcuna energia elettromagnetica.

Ma che succede se, invece, il moto avviene in un mezzo materiale?

Consideriamo, per esempio, un elettrone che si muove con velocità costante  $v$  lungo l'asse  $z$ , attraverso un mezzo dielettrico di indice di rifrazione  $n$ . Il campo generato dall'elettrone può essere visto come il risultato della sovrapposizione di onde sferiche, dovute al potenziale ritardato, che sono continuamente emesse dall'elettrone in moto, le quali si propagano con velocità  $c/n$ , a causa della polarizzabilità del mezzo.

E' facile rendersi conto che tutte queste onde emesse saranno in fase fra loro solo lungo la direzione inclinata di un angolo  $\theta$  con l'asse  $z$  se e solo se  $v$ ,  $n$  e  $\theta$  soddisfano la condizione

$$\frac{c}{n} = v \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\beta n} \quad (5.1.1)$$

dove  $\beta$ , al solito, sta per  $v/c$ .

Mentre ci sarà da attendersi, quindi, radiazione emessa nella direzione  $\theta$  individuata<sup>1</sup> dalla (5.1.1), nelle altre direzioni l'interferenza delle varie onde produrrà verosimilmente un risultato globalmente nullo.

---

<sup>1</sup>Evidentemente la condizione (5.1.1) potrà essere soddisfatta solo se  $\beta n > 1$ , ovvero solo in mezzi materiali in cui  $n > 1$  e per particelle sufficientemente veloci !

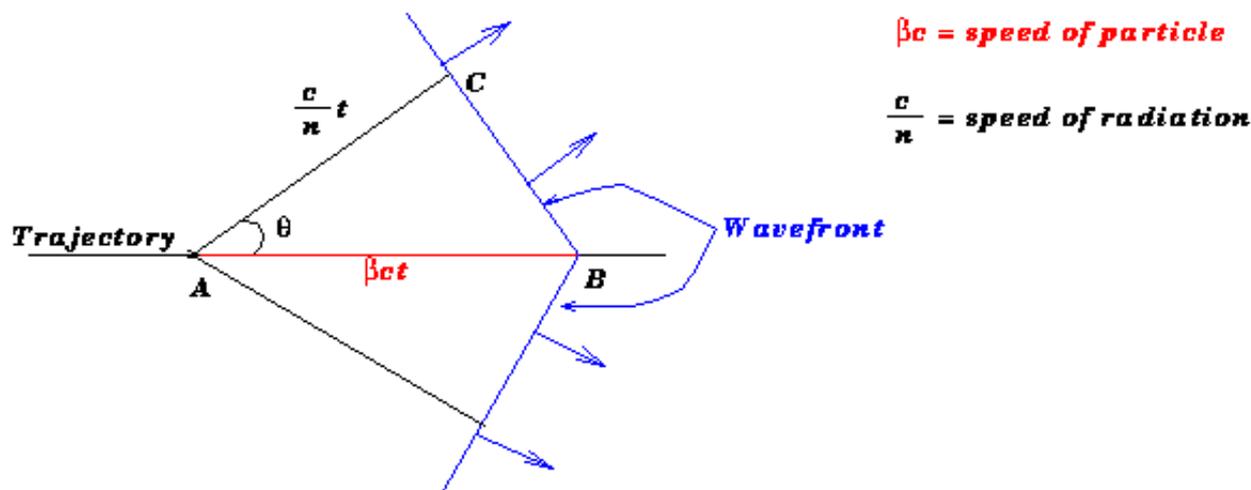


Figura 5.1: Moto della particella ( $AB$ ) e del fronte del suo campo ( $BC$ )

Questo è quanto realmente accade e la radiazione altamente direzionale che viene emessa in queste condizioni è la cosiddetta *radiazione Cerenkov*<sup>2</sup>, di cui riporteremo adesso di seguito la teoria<sup>3</sup> classica.

Come sappiamo dalla Fisica Generale, le equazioni di Maxwell in un mezzo materiale si scrivono nel modo seguente (sistema *c.g.s. es*)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

dove il vettore  $\vec{D}$  e il vettore  $\vec{H}$  sono definiti dalle relazioni

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad (5.1.3)$$

essendo  $\vec{P}$  e  $\vec{M}$ , rispettivamente, le densità di polarizzazione elettrica e magnetica.

<sup>2</sup>Pavel A. Cerenkov: C.R. Acad. Sci. URSS 8, 451 (1934).

Pavel A. Cerenkov: *Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light*, Phys. Rev. 52, 378 (1937)

Per questa scoperta, Cerenkov insieme ai teorici Frank e Tamm che ne spiegarono l'origine, ebbero il Nobel nel 1958.

<sup>3</sup>I. Frank, Ig. Tamm: *Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter*, C.R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)

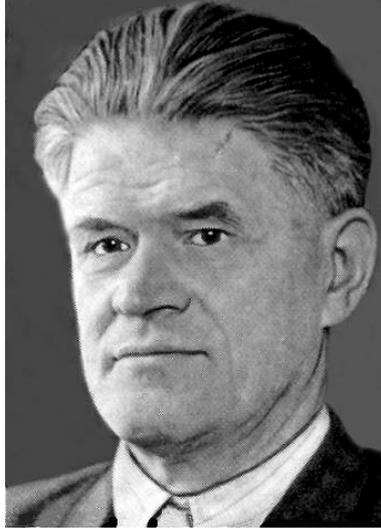


Figura 5.2: *Pavel Aleksejevic Cerenkov (1904-1990)*

D'altronde, in un mezzo omogeneo e isotropo e per campi deboli, ovvero quando le polarizzazioni elettrica e magnetica risultano lineari nei campi, si ha

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.1.4)$$

dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica (relativa) del mezzo considerato e  $\mu$  la sua permeabilità magnetica (relativa).

Partendo ora dall'equazione omogenea (la stessa che in vuoto...)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

possiamo concludere, come sappiamo, che esisterà un opportuno campo vettoriale  $\vec{A}$  (potenziale vettore), definito a meno del gradiente di una qualsiasi funzione scalare delle coordinate e del tempo, tale che

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (5.1.5)$$

Sostituendo allora nell'altra equazione omogenea, anch'essa non mutata rispetto alla propagazione in vuoto, si ottiene

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.1.6)$$

e quindi, come nel caso del vuoto, ne segue che esisterà una opportuna funzione scalare  $\Phi$  (potenziale scalare), definita a meno di una qualsiasi funzione

del tempo, tale che

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \Phi \equiv -\vec{\nabla} \Phi \quad (5.1.7)$$

Sostituendo nell'equazione relativa alla divergenza di  $\vec{D}$ , per un mezzo omogeneo (tale quindi che  $\epsilon$  non dipenda dalle coordinate) e isotropo, otteniamo

$$4\pi \rho = \text{div}(\epsilon \vec{E}) = \epsilon \text{div } \vec{E} = \epsilon \text{div} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \right) \quad (5.1.8)$$

ovvero<sup>4</sup>

$$-\epsilon \nabla^2 \Phi - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \text{div } \vec{A}}{\partial t} = 4\pi \rho \quad (5.1.9)$$

Siccome il potenziale vettore  $\vec{A}$  è definito a meno di un gradiente, possiamo fissare la *gauge* generalizzando quella di Lorentz e imponendo adesso che

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \text{div } \vec{A} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.10)$$

dove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo in cui il campo elettromagnetico si sta propagando, definito attraverso la consueta relazione

$$n \equiv \sqrt{\epsilon \mu} \quad (5.1.11)$$

In questa gauge, l'equazione (5.1.9) diviene infine

$$-\epsilon \nabla^2 \Phi - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 4\pi \rho \Rightarrow \epsilon \left[ \nabla^2 \Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] = -4\pi \rho \quad (5.1.12)$$

Analogamente, partendo dall'equazione non omogenea relativa alla rotazione di  $H$ , sempre nell'ipotesi di un mezzo omogeneo e isotropo e quindi che  $\mu$  non dipenda dalle coordinate, abbiamo

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\Rightarrow \text{rot} \left( \text{rot } \vec{A} \right) = \frac{4\pi \mu}{c} \vec{J} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

e, poiché per un qualunque campo vettoriale vale l'identità

$$\text{rot} \left( \text{rot } \vec{A} \right) \equiv -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left( \text{div } \vec{A} \right) \quad (5.1.14)$$

<sup>4</sup>Le derivate parziali rispetto al tempo e alle coordinate spaziali, ovviamente, commutano fra loro ...

ecco che risulta

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{A}) &= \frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} - \frac{n^2}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} + \vec{\nabla} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

ovvero, data la gauge (5.1.10), si ha

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} \quad (5.1.16)$$

Concludendo, dunque, le equazioni di Maxwell per i potenziali in un mezzo omogeneo e isotropo, nella gauge di Lorentz modificata (5.1.10), sono le seguenti

$$\nabla^2 \Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (5.1.17)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} \quad (5.1.18)$$

dove  $\rho$  e  $\vec{J}$  sono, rispettivamente, la densità di carica e la densità di corrente di *conduzione*.

Nel caso che ci interessa, cioè quello di una carica  $e$  in moto con velocità costante  $\vec{v}$ , scelte senza perdita di generalità le origini degli assi e del tempo in modo che per  $t = 0$  la carica sia nell'origine, risulta evidentemente che

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta^3(\vec{x} - \vec{v} t) \quad (5.1.19)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{v} \rho(\vec{x}, t) \quad (5.1.20)$$

per cui l'equazione (5.1.18) diviene

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \cdot \frac{n^2}{c} \vec{v} \quad (5.1.21)$$

e il confronto con la (5.1.17), essendo  $\frac{n^2}{c} \vec{v}$  ovviamente una costante, conduce a cercare il potenziale vettore  $\vec{A}$  in modo che risulti

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = n^2 \vec{\beta} \Phi(\vec{x}, t) \quad (5.1.22)$$

Nel seguito, ci limiteremo quindi a studiare solo l'equazione (5.1.17) per il potenziale scalare, a cui occorre aggiungere la condizione di Lorentz (5.1.10) per  $\vec{A}$ , la quale implica che

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \operatorname{div} \left( n^2 \frac{\vec{v}}{c} \Phi \right) + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Siccome sia  $\epsilon$  che  $\mu$  e quindi  $n$ , in un mezzo omogeneo e isotropo, dipendono comunque, in generale, dalla frequenza, è opportuno studiare l'equazione (5.1.17) nel dominio delle frequenze e questo corrisponde a studiarne piuttosto la trasformata di Fourier<sup>5</sup>.

Indicando allora con  $\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}(\vec{x}, \omega)$  la trasformata di Fourier rispetto alla coordinata temporale del potenziale scalare  $\Phi \equiv \Phi(\vec{x}, t)$ , data la linearità dell'equazione (5.1.17), deve evidentemente valere la seguente equazione

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \hat{\Phi} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \hat{\rho} \quad (5.1.26)$$

dove, in accordo con la definizione (5.1.25), abbiamo posto

$$\hat{\Phi}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \Phi(\vec{x}, t) e^{-i\omega t} \quad (5.1.27)$$

$$\hat{\rho}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \rho(\vec{x}, t) e^{-i\omega t} \quad (5.1.28)$$

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier  $\hat{\rho}$  della distribuzione di carica, assumendo senza perdita di generalità che la particella viaggi lungo la direzione positiva dell'asse  $z$ , ovvero che sia

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta^3(\vec{x} - \vec{v} t) = e \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) \quad (5.1.29)$$

risulta che

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \rho(\vec{x}, t) e^{-i\omega t} = \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \delta(x) \delta(y) \int dt e^{-i\omega t} \delta(z - vt) = \\ &= \frac{e}{v\sqrt{2\pi}} \delta(x) \delta(y) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Essendo evidentemente il problema dotato di simmetria cilindrica<sup>6</sup>, possiamo riscrivere la  $\hat{\rho}$  nel modo seguente

$$\hat{\rho}(r, z, \phi, \omega) = \frac{e}{v\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.34)$$

<sup>5</sup>Ricordiamo che se  $f = f(t)$  è una funzione sommabile secondo Lebesgue (integrabile in modulo), allora essa può essere scritta (a parte, al più, un'infinità numerabile di punti) nel modo seguente

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \quad (5.1.24)$$

dove  $\hat{f}(\omega)$  è la trasformata di Fourier della funzione  $f$  data, definita come

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt f(t) e^{-i\omega t} \quad (5.1.25)$$

<sup>6</sup>Osserviamo infatti che

$$\delta(x) \delta(y) dx dy = \frac{\delta(r)}{2\pi r} r dr d\phi \quad (5.1.31)$$

e quindi l'equazione da risolvere per  $\hat{\Phi}$  diventa adesso la seguente

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \hat{\Phi} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \frac{e}{v\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{-i\frac{\omega z}{v}} = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{r} e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.35)$$

Ricordiamo adesso che il laplaciano in coordinate cilindriche si scrive nel modo seguente

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (5.1.36)$$

e quindi la (5.1.35) diventa

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \hat{\Phi} = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{r} e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.37)$$

Come ogni equazione differenziale lineare non omogenea, la soluzione generale sarà la somma di una soluzione particolare con una qualsiasi funzione dello spazio vettoriale lineare delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Vista la simmetria del problema e la struttura del termine non omogeneo, cerchiamo la soluzione particolare della forma seguente

$$\hat{\Phi} = u(r) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.38)$$

Sostituendo nella (5.1.37), si ottiene allora per la funzione  $u$  la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 u + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.39)$$

Ponendo dunque

$$s^2 \equiv -\frac{\omega^2}{v^2} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2} (n^2 \beta^2 - 1) \equiv -\sigma^2 \quad (5.1.40)$$

infatti, data una qualsiasi funzione continua nel piano  $x, y$ , risulta dalla definizione che

$$\int dx dy f(x, y) \delta(x) \delta(y) = f(0, 0) \quad (5.1.32)$$

ed è altresì

$$f(0, 0) = \int F(r, \phi) \frac{\delta(r)}{2\pi r} r dr d\phi \quad (5.1.33)$$

dove

$$F(r, \phi) \equiv f(r \cos \phi, r \sin \phi)$$

risulta

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + s^2 u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.41)$$

Per risolvere questa equazione differenziale, cominciamo distinguendo il caso di basse velocità ( $\beta n < 1$ ) da quello di alte velocità ( $\beta n > 1$ ).

Per basse velocità della particella carica avremo che

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (n^2 \beta^2 - 1) \equiv -\sigma^2 < 0 \quad (5.1.42)$$

per cui l'equazione da risolvere diventa piuttosto

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \sigma^2 u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.43)$$

dove  $\sigma^2$  è ovviamente positivo. Poniamo allora  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$  ed effettuiamo il seguente cambiamento di variabile

$$R = \sigma r \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{dR}{\sigma} \quad (5.1.44)$$

Il primo membro dell'equazione (5.1.43) diventa allora il seguente

$$\sigma^2 \frac{d^2u}{dR^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{du}{dR} - \sigma^2 u \quad (5.1.45)$$

mentre, usando il fatto che  $\delta(x/\alpha) = \alpha \delta(x)$ , è evidente che

$$\frac{\delta(r)}{r} = \frac{\sigma}{R} \delta(R/\sigma) = \sigma^2 \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.46)$$

per cui, semplificando, ecco che l'equazione per la funzione  $u$  nella nuova variabile  $R$  diventa, in definitiva, la seguente

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.47)$$

A parte il punto  $R = 0$ , altrove la funzione  $u$  soddisfa l'equazione di Bessel *modificata* che, ricordiamo, è la seguente

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dW}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) W = 0 \quad (5.1.48)$$

dove  $m$  è un numero reale qualsiasi (nel nostro caso,  $m = 0$ ).

Soluzioni indipendenti dell'equazione di Bessel modificata sono le funzioni

$I_m(x)$  e  $K_m(x)$ , legate alle soluzioni dell'equazione di Bessel ordinaria<sup>7</sup> dalle relazioni

$$I_m(z) \equiv e^{-\frac{1}{2}im\pi} J_m(ze^{\frac{i\pi}{2}}), \quad (-\pi < \arg z \leq \pi/2) \quad (5.1.56)$$

$$I_m(z) \equiv e^{\frac{3}{2}im\pi} J_m(ze^{-\frac{3i\pi}{2}}), \quad (\pi/2 < \arg z \leq \pi) \quad (5.1.57)$$

$$K_m(z) \equiv \frac{i\pi}{2} e^{\frac{1}{2}im\pi} H_m^{(1)}(ze^{\frac{i\pi}{2}}) \quad (-\pi < \arg z \leq \pi/2) \quad (5.1.58)$$

$$K_m(z) \equiv -\frac{i\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}im\pi} H_m^{(2)}(ze^{-\frac{i\pi}{2}}) \quad (\pi/2 < \arg z \leq \pi) \quad (5.1.59)$$

Queste funzioni, per  $x$  reale e nel caso particolare che ci interessa in cui  $m = 0$ , sono evidentemente tali che

$$I_0(x) = J_0(ix); \quad K_0(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix) \quad (5.1.60)$$

La funzione  $u(R)$  sarà quindi, a priori, per  $R \neq 0$ , una combinazione lineare delle funzioni  $I_0$  e  $K_0$ , tale da soddisfare<sup>8</sup> la condizione al contorno

<sup>7</sup>Ricordiamo che l'equazione di Bessel ordinaria ha la forma seguente

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dW}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) W = 0 \quad (5.1.49)$$

dove  $m$  è un numero reale qualsiasi. Sue soluzioni sono le funzioni di Bessel di prima specie  $J_{\pm m}(x)$ , quelle di seconda specie  $Y_m(x)$ , talvolta chiamate anche funzioni di Weber, e quelle di terza specie, o funzioni di Hankel, non indipendenti fra loro ...

Risulta infatti (dove è inteso che si usa l'espressione limite se  $m$  è intero)

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \quad (5.1.50)$$

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x); \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x) \quad (5.1.51)$$

Asintoticamente, per  $x \rightarrow \infty$ , si ha

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad Y_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.1.52)$$

$$H_m^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad H_m^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (5.1.53)$$

mentre, per  $x \rightarrow 0$ , risulta

$$J_m(z) \approx \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^m}{\Gamma(m+1)}, \quad m \neq -1, -2, -3, \dots \quad (5.1.54)$$

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x; \quad Y_m(x) \approx -\frac{1}{\pi} \Gamma(m) \left(\frac{1}{2}x\right)^{-m} \quad (5.1.55)$$

<sup>8</sup>Frank e Tamm, nel loro articolo già citato, per esplicitare la soluzione, usano l'argomento seguente. Nell'equazione (5.1.47) di partenza

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - u \equiv \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dU}{dR} \right) - u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.61)$$

descritta dalla presenza della delta all'origine.

Per esplicitare la funzione  $u(R)$  procediamo usando un'analogia ben nota. Consideriamo il problema del potenziale elettrostatico  $V(\vec{r})$  prodotto nello spazio da un filo carico, con distribuzione statica di carica che dipende cosinusoidalmente dalla coordinata  $z$ , cioè tale che

$$\rho(x, y, z) = \lambda \delta(x) \delta(y) \cos \alpha z \quad (5.1.67)$$

dove  $\lambda$  è l'ampiezza della densità lineare di carica mentre  $\alpha^{-1}$  è la sua "lunghezza d'onda". Dall'elettrostatica sappiamo che

$$\nabla^2 V = -4\pi \rho \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -4\pi \lambda \delta(x) \delta(y) \cos \alpha z \quad (5.1.68)$$

Trattandosi di una equazione lineare a coefficienti reali, possiamo sostituirla con

$$\nabla^2 V = -4\pi \lambda \delta(x) \delta(y) e^{i\alpha z} \quad (5.1.69)$$

ricordando che dovremo poi prendere la parte reale della soluzione.

Poichè il problema ha simmetria cilindrica intorno all'asse  $z$ , passiamo a coordinate cilindriche, ovvero consideriamo l'equazione

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \lambda \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{i\alpha z} \quad (5.1.70)$$

iniziano regolarizzando la delta attraverso la sostituzione seguente

$$\frac{\delta(R)}{2\pi R} \longrightarrow f(R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \rho_0^2} & \text{se } R < \rho_0 \\ 0 & \text{se } R > \rho_0 \end{cases} \quad (5.1.62)$$

Integrando l'equazione così ottenuta sulla superficie del cerchio di raggio  $\rho_0$  e passando poi al limite per  $\rho_0 \rightarrow 0$ , ricordando che le funzioni di Bessel soddisfano la relazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} x W(x) = 0 \quad (5.1.63)$$

concludono che deve aversi

$$\lim_{R \rightarrow 0} R \frac{du}{dR} = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \quad (5.1.64)$$

D'altronde risulta

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} R \frac{dH_0^{(1),(2)}(iR)}{dR} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{dH_0^{(1),(2)}(x)}{dx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{dJ_0(x)}{dx} \pm i \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{dN_0(x)}{dx} = 0 \pm i \frac{2}{\pi} \end{aligned} \quad (5.1.65)$$

e quindi ne concludono finalmente che deve risultare

$$u(R) = i \frac{\pi}{2} \frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(1)}(iR) = i \frac{\pi e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(1)}(i\sigma r) \quad (5.1.66)$$

dove abbiamo usato la solita sostituzione  $\delta(x)\delta(y) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}$ .

Per ragioni di simmetria, il potenziale  $V$  non dipenderà, evidentemente, dall'angolo azimutale  $\phi$ : data poi la forma del termine noto, cerchiamone una soluzione del tipo seguente:

$$V(r, z) = u(r) e^{i\alpha z} \quad (5.1.71)$$

In questo caso, la funzione  $u(r)$  dovrà soddisfare l'equazione

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \alpha^2 u = -2\lambda \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.72)$$

ovvero, con la solita sostituzione

$$R = \alpha r \quad (5.1.73)$$

effettuando la derivata, si ha

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - u = -2\lambda \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.74)$$

che è appunto un'equazione dello stesso tipo di quella che stavamo considerando nel problema dell'emissione Cerenkov.

Ma in questo caso, la soluzione è ben nota !

Sappiamo infatti dall'elettrostatica che

$$V(\vec{x}) = \int d^3 y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.75)$$

ovvero

$$V(r, \phi, z) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\cos \alpha \xi}{\sqrt{r^2 + (\xi - z)^2}} \quad (5.1.76)$$

Effettuiamo allora il cambiamento di variabile

$$\xi - z = r \eta \quad \Rightarrow \quad d\xi = r d\eta \quad (5.1.77)$$

e si ha

$$\begin{aligned} V = V(r, \phi, z) &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} r d\eta \frac{\cos(\alpha z + \alpha r \eta)}{r \sqrt{1 + \eta^2}} \\ &= \lambda \cos \alpha z \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \frac{\cos(\alpha r \eta)}{\sqrt{1 + \eta^2}} - \lambda \sin \alpha z \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \frac{\sin(\alpha r \eta)}{\sqrt{1 + \eta^2}} \end{aligned} \quad (5.1.78)$$

Il secondo integrale, evidentemente, è nullo perchè la funzione integranda è dispari, dunque, ricordando che risulta

$$K_0(x) = \int_0^{+\infty} dt \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1 + t^2}} \quad x > 0 \quad (5.1.79)$$

concludiamo che il potenziale cercato sarà così fatto

$$V(r, \phi, z) = \lambda \cos(\alpha z) 2K_0(\alpha r) \quad (5.1.80)$$

Confrontando questo risultato con la (5.1.71), ne segue allora che la soluzione  $u(R)$  dell'equazione

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - u = -2\lambda \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.81)$$

deve essere appunto la funzione

$$u(R) = 2\lambda K_0(R) \equiv 2\lambda \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(iR) \quad (5.1.82)$$

Possiamo ritornare adesso al caso che ci interessa, dove l'equazione per la  $u$  era la (5.1.47), ovvero

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.83)$$

Evidentemente, in accordo con il risultato (5.1.66) di Frank e Tamm, si avrà

$$u(R) = i \frac{\pi}{2} \frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(1)}(iR) = i \frac{\pi e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(1)}(i\sigma r) \quad (5.1.84)$$

da cui, per la (5.1.38), ricaviamo che l'espressione per la trasformata di Fourier temporale del potenziale scalare è la seguente

$$\hat{\Phi} = i \frac{\pi e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(1)}(i\sigma r) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.85)$$

e quindi, facendo l'antitrasformata di Fourier della  $\hat{\Phi}$ , abbiamo infine che il potenziale scalare ha la seguente espressione

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{\Phi} e^{i\omega t} = \frac{i\pi e}{2\pi v} \int d\omega \frac{1}{\epsilon} H_0^{(1)}(i\sigma r) e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} = \\ &= \frac{ie}{2v} \int d\omega \frac{1}{\epsilon} H_0^{(1)}(i\sigma r) e^{i\omega(t-\frac{z}{v})} \end{aligned} \quad (5.1.86)$$

da cui, per la (5.1.22), otteniamo altresì che per il potenziale vettore<sup>9</sup> si ha

$$\vec{A} = \epsilon\mu \frac{\vec{v}}{c} \Phi = \frac{ie}{2c} \vec{k} \int d\omega \mu H_0^{(1)}(i\sigma r) e^{i\omega(t-\frac{z}{v})} \quad (5.1.89)$$

dove abbiamo indicato con  $\vec{k}$  il versore di propagazione della particella, definito appunto come

$$\vec{k} \equiv \frac{\vec{v}}{v} \quad (5.1.90)$$

Osserviamo adesso che per grandi valori di  $r$ , quando  $\sigma r \gg 1$ , siccome per la (5.1.53) risulta

$$H_0^{(1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\frac{\pi}{4})} \quad (5.1.91)$$

ecco che avremo

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(i\sigma r) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi i\sigma r}} e^{i(i\sigma r)} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma r}} \frac{1}{\sqrt{e^{i\pi/2}}} e^{-\sigma r} e^{-i\pi/4} = \\ &= e^{-i\pi/2} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma r}} e^{-\sigma r} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma r}} e^{-\sigma r} \end{aligned} \quad (5.1.92)$$

Questo significa che i potenziali e dunque i campi decresceranno esponenzialmente dall'asse del moto, per cui non c'è da aspettarsi alcun irraggiamento per basse velocità (stiamo qui considerando fenomeni coerenti, che non hanno dunque nulla che fare, per esempio, con la radiazione di bremsstrahlung, etc ...).

Il risultato cambia completamente nel caso di alte velocità della particella carica, tali che, nel dominio di frequenze considerato, risulti  $\beta n > 1$ .

L'equazione radiale, come abbiamo già visto, diventa allora

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + s^2 u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.93)$$

---

<sup>9</sup>Verifichiamo per completezza che i potenziali  $\Phi$  ed  $\vec{A}$  così ottenuti, soddisfano effettivamente la gauge di Lorentz (5.1.10) la quale, come visto sopra, nel caso presente, è diventata, per il solo potenziale scalare, la condizione che segue

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \text{div} \left( n^2 \frac{\vec{v}}{c} \Phi \right) + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (5.1.87)$$

Si ha infatti, data la (5.1.86), che, per ogni componente di Fourier, risulta

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = v \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = v \cdot \left( -\frac{i\omega}{v} \right) \Phi + i\omega \Phi = 0 \quad (5.1.88)$$

dove adesso

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 n^2 - 1) > 0 \quad (5.1.94)$$

Facendo la solita sostituzione

$$R = s r \quad (s > 0) \quad (5.1.95)$$

otteniamo l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} + u = -\frac{2e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.96)$$

che, per  $R \neq 0$ , coincide adesso con l'equazione di Bessel ordinaria per  $m = 0$ .

Per risolvere l'equazione in questione, l'analogia che stavolta possiamo usare è quella con un filo infinito uniformemente carico, in cui la densità di carica dipenda però cosinusoidalmente dal tempo

$$\rho = \lambda \delta(x) \delta(y) e^{i\omega t} \quad (5.1.97)$$

Per il potenziale scalare generato da questa distribuzione, avremo

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi \rho = \lambda \delta(x) \delta(y) e^{i\omega t} \quad (5.1.98)$$

Il problema ha, di nuovo, simmetria cilindrica ed è evidente che, per simmetria, il potenziale  $V$  non potrà dipendere né dall'angolo azimutale  $\phi$  né dalla coordinata  $z$ , ma solo dalla coordinata radiale  $r$  e dal tempo.

Cercando allora il potenziale  $V$  della forma seguente

$$V = u(r) e^{i\omega t} \quad (5.1.99)$$

abbiamo che la funzione  $u$  deve soddisfare l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} u = -4\pi \lambda \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.100)$$

ovvero, ponendo  $R = \frac{\omega}{c} r$ ,  $u$  deve soddisfare l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} + u = -4\pi \lambda \frac{\delta(R)}{R} \quad (5.1.101)$$

Questa equazione, che formalmente è come quella che dobbiamo risolvere per il potenziale di una particella "veloce" in un mezzo materiale, descrive onde cilindriche intorno all'asse  $z$ , aventi pulsazione  $\omega$ . La soluzione uscente<sup>10</sup> è

$$u(r)_{out} = -i\pi \lambda H_0^{(2)}(\omega r/c) \quad (5.1.105)$$

<sup>10</sup>Infatti, per grandi valori di  $r$ , risulta

$$H_0^{(2)}(\omega r/c) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \omega r/c}} e^{-i\omega r/c} e^{i\pi/4} \quad (5.1.102)$$

mentre quella entrante è la sua complessa coniugata, cioè

$$u(r)_{in} = i\pi \lambda H_0^{(1)}(\omega r/c) \quad (5.1.106)$$

Ritornando dunque al nostro problema iniziale e scegliendo, per ragioni fisiche, la soluzione uscente, ecco che possiamo scrivere

$$u(r) = -i\pi \frac{e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(2)}(sr) \quad (5.1.107)$$

Come si vede, rispetto alla bassa velocità, nella soluzione è cambiato sia l'argomento della funzione di Hankel che è adesso reale, mentre prima era immaginario puro, come le funzioni di Hankel stesse, che si sono scambiate<sup>11</sup> fra loro.

Risulta allora

$$\hat{\Phi} = -i\pi \frac{e}{\epsilon v \sqrt{2\pi}} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.108)$$

$$\hat{A} = \epsilon \mu \frac{\vec{v}}{c} \hat{\Phi} \quad (5.1.109)$$

per cui abbiamo infine che

$$\begin{aligned} \Phi(r, \phi, z) &= -i\pi \frac{e}{v \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\epsilon} e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} = \\ &= -\frac{ie}{v} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\epsilon} e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \end{aligned} \quad (5.1.110)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, \phi, z) &= -\frac{ie}{v} \frac{\vec{v}}{c} \int_0^{+\infty} d\omega \epsilon \mu \frac{1}{\epsilon} e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} = \\ &= -\frac{ie}{c} \vec{k} \int_0^{+\infty} d\omega \mu e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \end{aligned} \quad (5.1.111)$$

dove  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  è il versore dell'asse  $z$ , asse lungo il quale avviene il moto della particella.

Visto il ruolo che gioca nella soluzione (5.1.110) e (5.1.111) la funzione

$$f = e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \quad (5.1.112)$$

e dunque

$$V \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \omega r/c}} e^{i\pi/4} e^{-i\omega r/c} e^{i\omega t} \quad (5.1.103)$$

Evidentemente quindi le superfici di fase costante sono descritte dall'equazione

$$\omega t - \omega r/c = cost \quad (5.1.104)$$

che, al crescere di  $t$ , si muovono nel verso positivo di  $r$ , descrivendo appunto onde uscenti.

<sup>11</sup>Ricordiamo che, per argomenti reali,  $H_0^{(1)}(x) = [H_0^{(2)}(x)]^*$ , come è evidente dalla definizione (5.1.51).

vediamo che forma essa assume per grandi valori di  $r$ , cioè in zona asintotica. Per quanto già detto circa la forma asintotica delle funzioni di Hankel, evidentemente, si avrà

$$f \approx e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} \sqrt{\frac{2}{\pi sr}} e^{-i(sr-\pi/4)} \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi sr}} e^{-i\chi} \quad (5.1.113)$$

dove abbiamo introdotto la fase  $\chi$ , definita come

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \frac{\pi}{4} + \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - sr = \frac{\pi}{4} + \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \frac{\omega}{v} r \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega}{v} \left( z + r \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (5.1.114)$$

Raccogliendo ancora  $\beta n$  e definendo l'angolo Cerenkov  $\theta_c$  nel modo seguente

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_c = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} \quad (5.1.115)$$

risulta

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega \beta n}{v} (z \cos \theta_c + r \sin \theta_c) = \\ &= \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega n}{c} (z \cos \theta_c + r \sin \theta_c) \end{aligned} \quad (5.1.116)$$

e questa fase è, evidentemente, quella di un'onda che si propaga con velocità

$$w = \frac{c}{n} \quad (5.1.117)$$

nella direzione  $(\cos \theta_c, \sin \theta_c)$  del piano  $(z, r)$  !

Volendo adesso determinare quantitativamente l'energia elettromagnetica così irraggiata, consideriamo una superficie cilindrica centrata intorno alla traiettoria della particella, di raggio  $r$  e lunghezza  $L$  e quindi integriamo nel tempo il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale della superficie cilindrica, facendo tendere poi  $r \rightarrow \infty$ . L'energia irraggiata sarà dunque

$$W = 2\pi r L \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]_r \quad (5.1.118)$$

dove i campi sono ovviamente reali e se, come nel nostro caso, vogliamo mantenere la loro forma complessa, allora avremo

$$W = 2\pi r L \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{c}{8\pi} [\vec{E} \times \vec{H}^*]_r \quad (5.1.119)$$

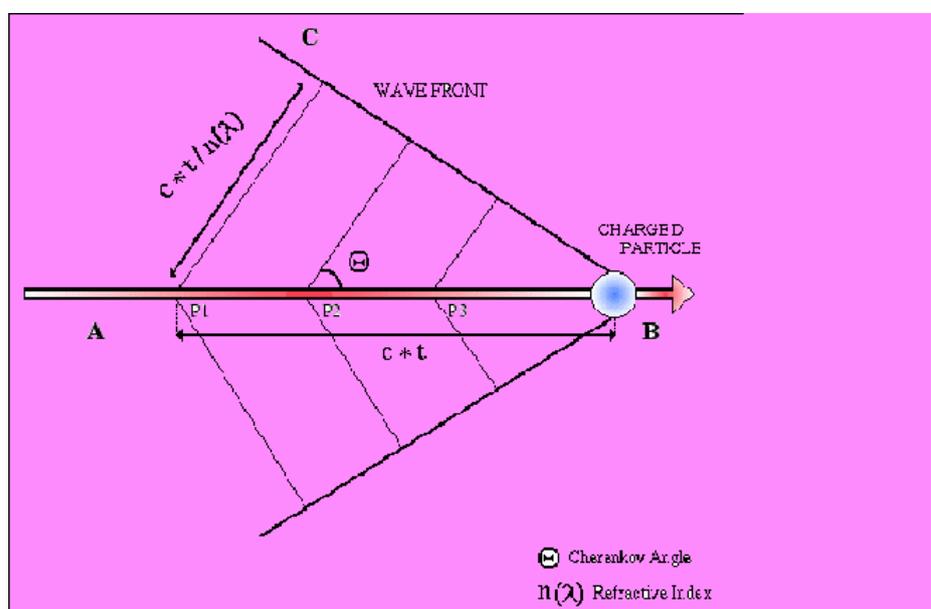


Figura 5.3: Caratteristiche direzionali dell'emissione Cerenkov

Occupiamoci dunque di valutare la componente radiale del vettore di Poynting. Ricordiamo a questo proposito che, in coordinate cilindriche, i tre versori della terna destrorsa sono  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ , per cui risulta

$$[\vec{E} \times \vec{H}^*]_r = E_\phi H_z^* - E_z H_\phi^* \quad (5.1.120)$$

Volendo calcolare i campi, dobbiamo ripartire, ovviamente, dalle equazioni

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \quad (5.1.121)$$

per cui, ricordando che il gradiente in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$  si scrive nel modo seguente

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.1.122)$$

poiché il potenziale vettore  $\vec{A}$  ha solo la componente  $z$  (ricordiamo infatti che esso è proporzionale al potenziale scalare attraverso un termine lineare nella velocità  $\vec{v}$  della particella che, per definizione, ha quindi solo la componente  $z$ ) risulta

$$\vec{E} = \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\phi + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \vec{e}_z \quad (5.1.123)$$

e siccome  $\Phi$ , come sappiamo, non dipende dall'angolo azimutale, in definitiva risulta<sup>12</sup>

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \vec{e}_r - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \vec{e}_z \quad (5.1.124)$$

Veniamo adesso al campo magnetico e partiamo dall'espressione del rotore di un campo vettoriale in coordinate cilindriche. Risulta

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (5.1.125)$$

Di nuovo, avendo il potenziale vettore solo la componente  $z$  ed essendo questa indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$ , risulta

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \nabla \times \vec{A} = - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_\phi \quad (5.1.126)$$

Ne segue dunque che la componente radiale del vettore di Poynting di cui alla (5.1.120), si riduce a

$$[\vec{E} \times \vec{H}^*]_r = - E_z H_\phi^* \quad (5.1.127)$$

Iniziamo dunque valutando  $E_z$ . Dalle (5.1.110) e (5.1.111) si ricava

$$\begin{aligned} E_z &= - \frac{\partial}{\partial z} \left[ - \frac{ie}{v} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\epsilon} e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ - \frac{ie}{c} \int_0^{+\infty} d\omega \mu e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \right] = \\ &= \int_0^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \left[ \frac{ie}{v\epsilon} \frac{-i\omega}{v} + \frac{ie}{c^2} i\omega \mu \right] \\ &= e \int_0^{+\infty} \omega d\omega \mu e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \left( \frac{1}{v^2 \epsilon \mu} - \frac{1}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (5.1.128)$$

ovvero

$$E_z = \frac{e}{c^2} \int_0^{+\infty} \omega d\omega \mu e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \left( \frac{1}{\beta^2 n^2} - 1 \right) \quad (5.1.129)$$

che, in zona asintotica, diviene evidentemente

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{e}{c^2} \int_0^{+\infty} \omega d\omega \mu e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} \left( \frac{1}{\beta^2 n^2} - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{\pi sr}} e^{-i(sr - \pi/4)} = \\ &= \frac{e}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^{+\infty} \omega d\omega \mu e^{i\chi} \left( \frac{1}{\beta^2 n^2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (5.1.130)$$

<sup>12</sup>Questo risultato implica altresì che la radiazione Cerenkov sia polarizzata linearmente, con il campo elettrico nel piano individuato dalla direzione di propagazione dell'onda e da quella di moto della particella carica.

dove la fase  $\chi$  è quella che abbiamo definito attraverso la (5.1.116), ovvero

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega}{v} \left( z + r \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega}{w} (z \cos \theta_c + r \sin \theta_c)\end{aligned}\quad (5.1.131)$$

Passiamo adesso a calcolare  $H_\phi$ . Dalla (5.1.126), otteniamo

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ -\frac{ie}{c} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\mu} e^{i\omega t} H_0^{(2)}(sr) e^{-i\frac{\omega z}{v}} \right] \quad (5.1.132)$$

che, in zona asintotica, diviene

$$\begin{aligned}H_\phi &= \frac{ie}{c} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\mu} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} \sqrt{\frac{2}{\pi sr}} e^{-isr+i\pi/4} = \\ &= \frac{ie}{c} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\mu} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} e^{-isr+i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{sr^3}} - is \frac{1}{\sqrt{sr}} \right]\end{aligned}\quad (5.1.133)$$

Ma il primo termine nella parentesi quadra diminuisce con  $r$  più rapidamente del secondo, per cui potremo trascurarlo e scrivere finalmente

$$\begin{aligned}H_\phi &= \frac{ie}{c} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\mu} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} e^{-isr+i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -is \frac{1}{\sqrt{sr}} \right] = \\ &= \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\mu} \sqrt{s} e^{i\chi}\end{aligned}\quad (5.1.134)$$

Avendo ottenuto le due componenti che ci interessavano del campo elettrico e di quello magnetico, possiamo passare a valutare la quantità (5.1.127), cioè

$$[\vec{E} \times \vec{H}^*]_r = -E_z H_\phi^* \quad (5.1.135)$$

Risulta, per la (5.1.130) e la (5.1.131)

$$\begin{aligned}[\vec{E} \times \vec{H}^*]_r &= \\ &= -\frac{e}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^{+\infty} \omega d\omega \mu e^{i\chi} \left( \frac{1}{\beta^2 n^2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \\ &\cdot \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{1}{\mu'} \sqrt{s'} e^{-i\chi'} = \\ &= \frac{e^2}{c^3} \frac{2}{\pi r} \int_0^{+\infty} \omega d\omega \mu e^{i\chi} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{1}{\mu'} \sqrt{s'} e^{-i\chi'}\end{aligned}\quad (5.1.136)$$

Volendo determinare l'energia irradiata, come abbiamo già detto, occorre calcolare, secondo la (5.1.119), la quantità

$$W = 2\pi r L \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{c}{8\pi} [\vec{E} \times \vec{H}^*]_r \quad (5.1.137)$$

Il tempo entra soltanto nelle fasi  $\chi$  e  $\chi'$ , per cui l'integrale temporale si riduce a calcolare l'integrale

$$\int dt e^{i(\omega-\omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (5.1.138)$$

per cui, sostituendo questa espressione nella (5.1.137) ed effettuando quindi l'integrazione sulla  $\delta(\omega - \omega')$ , abbiamo infine che

$$\begin{aligned} W &= 2\pi r L \frac{c}{8\pi} \frac{e^2}{c^3} \frac{2}{\pi r} 2\pi \int_0^{+\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) = \\ &= L \frac{e^2}{c^2} \int_0^{+\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \end{aligned} \quad (5.1.139)$$

Questo significa che l'energia emessa dalla particella nel mezzo materiale per unità di lunghezza e per unità di frequenza vale, evidentemente

$$\frac{d^2 W}{dL d\omega} = \frac{e^2}{c^2} \omega \sin^2 \theta_c \quad (5.1.140)$$

Dividendo questa quantità per  $\hbar\omega$ , possiamo ottenere il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e di frequenza, che vale quindi

$$\frac{d^2 N}{dL d\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{d^2 W}{dL d\omega} = \frac{e^2}{\hbar c^2} \sin^2 \theta_c = \frac{\alpha}{c} \sin^2 \theta_c \quad (5.1.141)$$

dove abbiamo fatto uso della definizione della costante di struttura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (5.1.142)$$

Volendo infine il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e per unità di energia, basta dividere l'espressione trovata ancora per  $\hbar$  e si ha infine

$$\frac{d^2 N}{dL dE} = \frac{d^2 N}{dL d(\hbar\omega)} = \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_c \quad (5.1.143)$$

## Capitolo 6

# Appendix: Generalità

### 6.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ( $1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$ ,  $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ )

$$\begin{array}{ll} \text{carica dell'elettrone} & e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues} \\ \text{massa dell'elettrone} & m = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g} \\ \text{costante di Planck} & \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} \\ \text{velocità della luce} & c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s} \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito come

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA ngstrom};$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (e i suoi multipli), legato al sistema *cgs* e *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli  $\frac{eV}{c^2}$  e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre  $c = 1$ , scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità  $\frac{eV}{c}$  e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità  $v$ , possiede un impulso<sup>1</sup>

$$p = mv = mc\beta = 0.511\beta \frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

e la costante di struttura fina  $\alpha$  è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (6.1.2)$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (*SI*) e in quello di Heaviside-Lorentz (*HL*) risulta<sup>2</sup>

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \quad (6.1.4)$$

Ricordiamo infine che, sempre nel *SI*, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10 <sup>24</sup>	yotta	Y	10 <sup>-1</sup>	deci	d
10 <sup>21</sup>	zetta	Z	10 <sup>-2</sup>	centi	c
10 <sup>18</sup>	exa	E	10 <sup>-3</sup>	milli	m
10 <sup>15</sup>	peta	P	10 <sup>-6</sup>	micro	μ
10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-12</sup>	pico	p
10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>3</sup>	kilo	k	10 <sup>-18</sup>	atto	a
10 <sup>2</sup>	hecto	h	10 <sup>-21</sup>	zepto	z
10 <sup>1</sup>	deka	da	10 <sup>-24</sup>	yocto	y

<sup>1</sup>Se  $\beta \equiv v/c \approx 1$ , allora, in realtà, come è dimostrato nel testo,  $p = mc\gamma\beta$ , dove  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

<sup>2</sup>Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per  $\sqrt{4\pi}$ , e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= \rho; & \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

In particolare,  $q_{HL} = \sqrt{4\pi}q_{cgs}$ , da cui, se  $\hbar = c = 1$ , ne segue che  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ .

## 6.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci ( $\alpha, \beta, \dots$ ) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italiani ( $i, j, \dots$ ) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico  $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$  è tale che

$$\delta^{00} = +1 \quad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \quad (6.2.5)$$

e il prodotto scalare di due quadrivettori  $p$  e  $q$  è indicato semplicemente con il simbolo  $pq$ , oppure  $(pq)$ , se il simbolo senza parentesi può dar luogo a errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \quad (6.2.6)$$

Dato un quadrivettore  $p$ , rappresenteremo poi con  $p^2$  la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (pp) = p^\mu p_\mu \quad (6.2.7)$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (6.2.8)$$