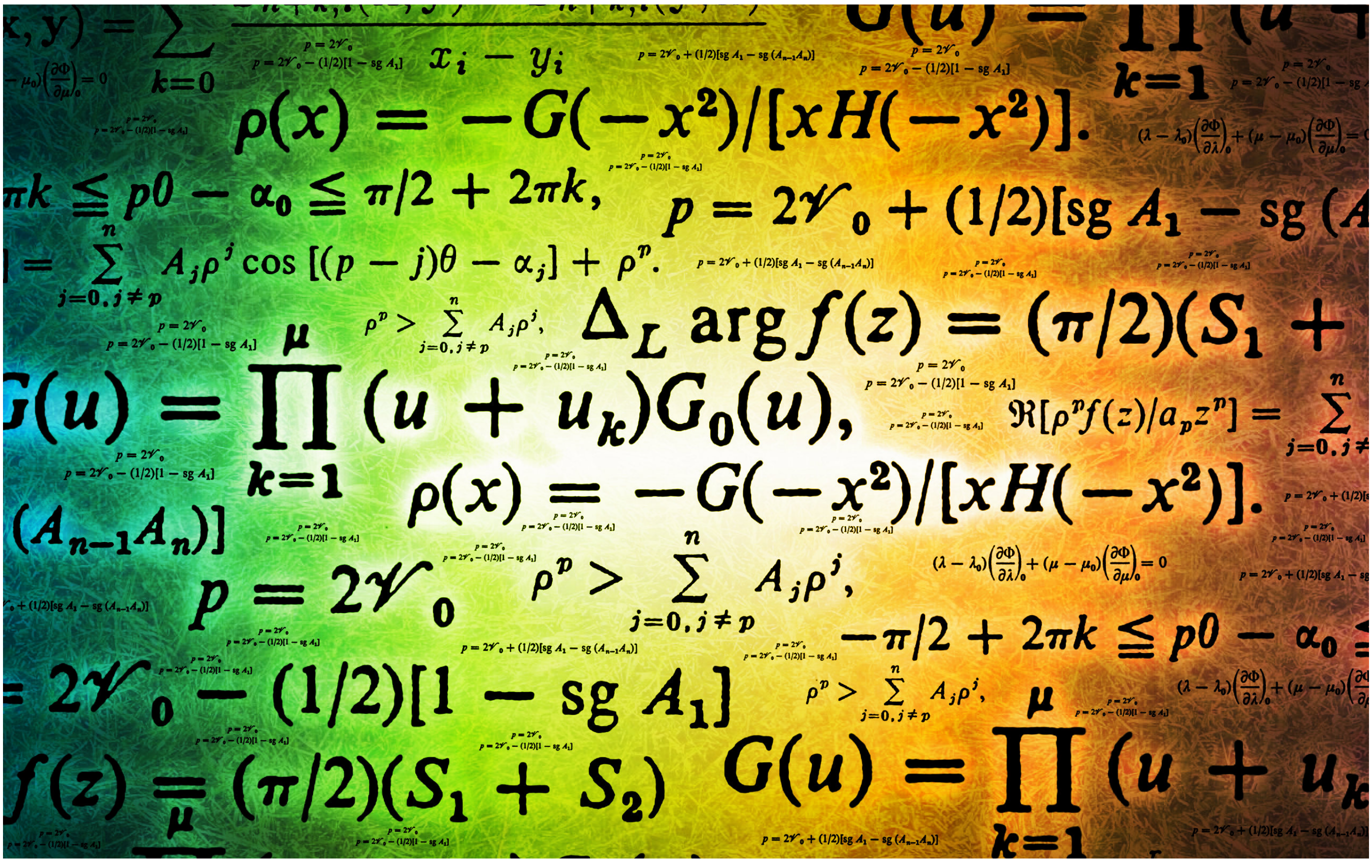
Fisica Moderna

Vol. I

Un po' di matematica ...
Seconda Parte

E. Iacopini

15 marzo 2024



E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.
Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623)

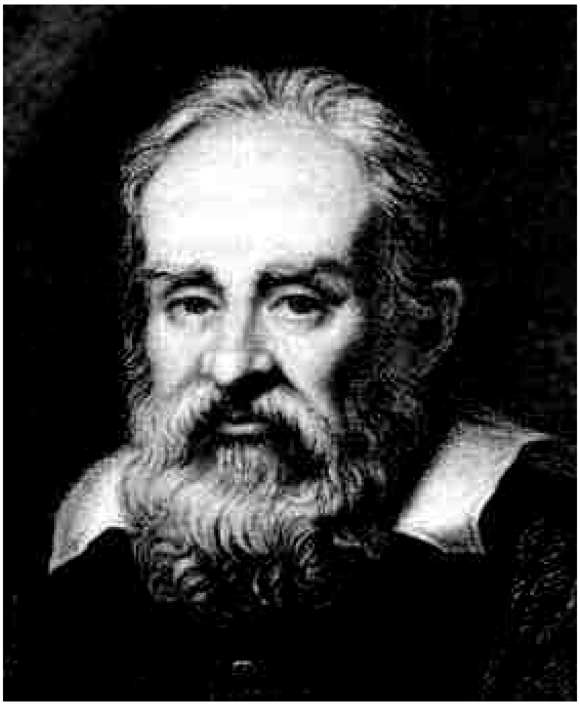


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

Principali simboli usati:

$\mathbb{N}$: insieme (gruppo) dei numeri interi non negativi
$\mathbb{Z}$: insieme (gruppo) dei numeri interi relativi
$\mathbb{Q}$: insieme (gruppo) dei numeri razionali
$\mathbb{R}$: insieme (gruppo) dei numeri reali
$\mathbb{C}$: insieme (gruppo) dei numeri complessi
$\mathcal{Q}$: insieme (gruppo) dei quaternioni
$\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$: gruppo e sottogruppo generico
$\mathbb{K}$: kernel di un omomorfismo fra gruppi
$\mathbb{I}$: immagine di un gruppo secondo un omomorfismo
$\mathbb{A}$: anello
$\mathcal{A}$: algebra generica
$\mathcal{K}$: campo o corpo
$\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$: spazi vettoriali
$\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$: spazio e sottospazio topologico
$\mathcal{M}$: spazio metrico
$\mathcal{H}$: spazio di Hilbert
$\mathbf{v}, \mathbf{w}$: generici elementi di uno spazio vettoriale
$\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j$: elementi di una base di uno spazio vettoriale

Indice

Capitolo 1

Alcune rappresentazioni rilevanti

Introduzione

In questa *Seconda Parte* del volume dedicato a nozioni di Matematica ci occuperemo ancora di rappresentazioni di gruppi, in particolare del gruppo di Lorentz; ma anche di alcuni aspetti interessanti relativi alla teoria delle matrici.

1.1 Rappresentazioni finite di $SO(n)$ e $SO(n,m)$

Il gruppo delle rotazioni in tre dimensioni è il gruppo $SO(3)$, mentre il gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ha la struttura di $SO(1,3)$: da qui l'interesse per le rappresentazioni dei gruppi $SO(n)$ e $SO(n,m)$, per le quali risulta particolarmente rilevante la struttura di algebra di Clifford.

SO(n)

Ricordiamo che $SO(n)$ é il gruppo ortogonale speciale delle matrici reali $n \times n$, cioé

$$\begin{aligned} A \in SO(n) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ A \cdot A^t = I; \quad det\, A = +1 \right\} \\ &\Rightarrow \quad A^t = A^{-1} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Queste matrici costituiscono la falda connessa con l'identità delle rotazioni in n dimensioni e si possono rappresentare in forma esponenziale, per esempio, nel modo seguente

$$A = e^{iH} \tag{1.1.2}$$

dove H è una opportuna matrice $n \times n$ immaginaria pura, tale che

$$\begin{array}{rclcll} Tr(H) & = & 0 & & & (det(A) = 1 \Leftrightarrow Tr(H) = 0) \\ H^t & = & -H & \Leftrightarrow & H = H^+ & (A^t = A^{-1} \Leftrightarrow H^t = -H) \end{array}$$

Una possibile base per le matrici H può essere senz'altro la seguente (qui e nel seguito, fino a diverso avviso, la δ è quella di Kronecker e la posizione degli indici in alto o in basso è quindi irrilevante)

$$\left(H^{ij}\right)_{ab} = -i\left(\delta^i_a\, \delta^j_b - \delta^i_b\, \delta^j_a\right) \tag{1.1.3}$$

dove, evidentemente, $H^{ij} = -H^{ji}$ e la dimensione della base è $n(n-1)/2$. In questo modo possiamo parametrizzare gli elementi $A \in SO(n)$ nel modo seguente

$$A = e^{\frac{i}{2}\,\omega_{ij}\, H^{ij}} \tag{1.1.4}$$

dove ω_{ij} è una opportuna matrice reale antisimmetrica in cui sono, appunto, "organizzati" i parametri reali che servono per descrivere, nella base data, gli elementi del gruppo.

Venendo adesso all'algebra di Lie di $SO(n)$, si ha

$$\begin{aligned}
\left[H^{ij},\, H^{kl}\right]_{ab} &= \left(H^{ij}\right)_{ac}\left(H^{kl}\right)_{cb} - \left(H^{kl}\right)_{ac}\left(H^{ij}\right)_{cb} = \\
&= (-i)^2\left\{\left(\delta^i_a\delta^j_c - \delta^i_c\delta^j_a\right)\left(\delta^k_c\delta^l_b - \delta^k_b\delta^l_c\right) - \left(\delta^k_a\delta^l_c - \delta^k_c\delta^l_a\right)\left(\delta^i_c\delta^j_b - \delta^i_b\delta^j_c\right)\right\} = \\
&= (-i)^2\left\{\delta^i_a\delta^l_b\delta_{jk} - \delta^i_a\delta^k_b\delta_{jl} - \delta^j_a\delta^l_b\delta_{ik} + \delta^j_a\delta^k_b\delta_{il} - \left(\delta^k_a\delta^j_b\delta_{il} - \delta^k_a\delta^i_b\delta_{jl} - \delta^l_a\delta^j_b\delta_{ik} + \delta^l_a\delta^i_b\delta_{kj}\right)\right\} = \\
&= (-i)^2\left\{\delta_{jk}\left(\delta^i_a\delta^l_b - \delta^l_a\delta^i_b\right) - \delta_{jl}\left(\delta^i_a\delta^k_b - \delta^k_a\delta^i_b\right) - \delta_{ik}\left(\delta^j_a\delta^l_b - \delta^l_a\delta^j_b\right) + \delta_{il}\left(\delta^j_a\delta^k_b - \delta^k_a\delta^j_b\right)\right\} = \\
&= -i\left\{\delta_{jk}\left(H^{il}\right)_{ab} - \delta_{jl}\left(H^{ik}\right)_{ab} - \delta_{ik}\left(H^{jl}\right)_{ab} + \delta_{il}\left(H^{jk}\right)_{ab}\right\} = \\
&= i\left\{\delta_{jk}\,H^{li} + \delta_{jl}\,H^{ik} + \delta_{ik}\,H^{jl} + \delta_{il}\,H^{kj}\right\}_{ab} \\
&\Rightarrow \left[H^{ij},\, H^{kl}\right] = i\left\{\delta^{ik}\,H^{jl} + \delta^{jl}\,H^{ik} - \delta^{il}\,H^{jk} - \delta^{jk}\,H^{il}\right\} \qquad (1.1.5)
\end{aligned}$$

Supponiamo adesso che sia dato uno spazio lineare sul corpo complesso generato da n operatori indipendenti Γ_i che ne costituiscono quindi una base. Supponiamo inoltre che questi operatori definiscano *un'algebra di Clifford* attraverso la relazione

$$\{\Gamma_i,\, \Gamma_j\} = 2\,\delta_{ij}\, I \qquad i,j = 1, ..., n \qquad (1.1.6)$$

dove I è l'identità nell'algebra definita dagli operatori Γ mentre la δ è, di nuovo, la delta di Kronecker.

Vogliamo dimostrare che, in questo caso

- è definita in modo naturale una rappresentazione $S = S(G)$ del gruppo $SO(n)$ i cui generatori sono gli $n \times (n-1)/2$ operatori così definiti

$$M^{ij} \equiv M_{ij} = \frac{-i}{4}\,[\Gamma_i,\, \Gamma_j] \equiv -M^{ji} \qquad (1.1.7)$$

- gli operatori Γ_i si trasformano sotto $S(G)$ secondo la rappresentazione vettoriale, ovvero, qualunque sia $G \in SO(n)$, risulta

$$S(G)\ \Gamma_i\ S^{-1}(G) = G_{ji}\,\Gamma_j \qquad (1.1.8)$$

Allo scopo di provare queste due affermazioni, iniziamo dimostrando che

$$[M_{ij},\, \Gamma_k] \quad = \quad -i\,(\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik}) \qquad (1.1.9)$$

Risulta infatti

$$[M_{ij},\, \Gamma_k] = \frac{-i}{4}\,[[\Gamma_i,\, \Gamma_j]\,,\, \Gamma_k] \equiv \frac{-i}{4}\,\{[\Gamma_i\,\Gamma_j,\, \Gamma_k] - [\Gamma_j\,\Gamma_i,\, \Gamma_k]\,\} \quad (1.1.10)$$

D'altronde ricordiamo che, in generale, risulta

$$[A\,B,\,C] = A\,[B,\,C] + [A,\,C]\,B \tag{1.1.11}$$

e dunque

$$[M_{ij},\,\Gamma_k] = \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\,[\Gamma_j,\,\Gamma_k] + [\Gamma_i,\,\Gamma_k]\,\Gamma_j - \Gamma_j\,[\Gamma_i,\,\Gamma_k] - [\Gamma_j,\,\Gamma_k]\,\Gamma_i\} \tag{1.1.12}$$

D'altronde, sempre in generale, è

$$\begin{aligned}
[A,\,B] &\equiv A\,B - B\,A = A\,B + B\,A - 2\,B\,A = \{A,\,B\} - 2\,B\,A && (1.1.13)\\
&\equiv A\,B - B\,A = 2\,A\,B - A\,B - B\,A = 2\,A\,B - \{A,\,B\} && (1.1.14)
\end{aligned}$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,\Gamma_k] &= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\,(\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_j) + (-\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_i\Gamma_k)\,\Gamma_j +\\
&- \Gamma_j\,(\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_i) - (-\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k)\,\Gamma_i\} =\\
&= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j - \{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\Gamma_j + 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j +\\
&- \Gamma_j\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i + \{\Gamma_j,\,\Gamma_k\}\Gamma_i - 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i\} =\\
&= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} + \{\Gamma_j,\,\Gamma_k\}\Gamma_i - \{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\Gamma_j - \Gamma_j\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\} && (1.1.15)
\end{aligned}$$

Usando ora il fatto che $\{\Gamma_i,\,\Gamma_j\} = 2\,\delta_{ij}\,I$, otteniamo infine che

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,\Gamma_k] &= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i 2\,\delta_{jk} + 2\,\delta_{jk}\Gamma_i - 2\,\delta_{ik}\Gamma_j - \Gamma_j 2\,\delta_{ik}\} = \frac{-i}{4}\,\{4\,\Gamma_i\,\delta_{jk} - 4\,\Gamma_j\,\delta_{ik}\} =\\
&= -i\,(\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik}) && (1.1.16)
\end{aligned}$$

che è appunto la (1.1.9).
Questo risultato ci consente adesso di ricavare il commutatore fra gli operatori M_{ij} e quindi di verificare che essi effettivamente soddisfano l'algebra di Lie di $SO(n)$ di cui alla (1.1.5). Abbiamo

$$[M_{ij},\,M_{kl}] = \frac{-i}{4}\,[M_{ij},\,[\Gamma_k,\,\Gamma_l]] = \frac{-i}{4}\,\{[M_{ij},\,\Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\,\Gamma_l\Gamma_k]\} \tag{1.1.17}$$

ma di nuovo possiamo usare l'identità $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ e quindi si ha

$$
\begin{aligned}
[M_{ij},\, M_{kl}] = {} & \frac{-i}{4}\,\{[M_{ij},\,\Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\,\Gamma_l\Gamma_k]\} = \\
= {} & \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_k[M_{ij},\,\Gamma_l] + [M_{ij},\,\Gamma_k]\Gamma_l - \Gamma_l[M_{ij},\,\Gamma_k] - [M_{ij},\,\Gamma_l]\Gamma_k\} = \\
= {} & \frac{(-i)^2}{4}\,\{\Gamma_k(\Gamma_i\,\delta_{jl} - \Gamma_j\,\delta_{il}) + (\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik})\Gamma_l - \Gamma_l(\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik}) - (\Gamma_i\,\delta_{jl} - \Gamma_j\,\delta_{il})\Gamma_k\} = \\
= {} & \frac{(-i)^2}{4}\,\{\delta_{jl}\Gamma_k\Gamma_i - \delta_{il}\Gamma_k\Gamma_j + \delta_{jk}\Gamma_i\Gamma_l - \delta_{ik}\Gamma_j\Gamma_l - \delta_{jk}\Gamma_l\Gamma_i + \delta_{ik}\Gamma_l\Gamma_j - \delta_{jl}\Gamma_i\Gamma_k + \delta_{il}\Gamma_j\Gamma_k\} = \\
= {} & \frac{(-i)^2}{4}\,\{-\delta_{ik}(\Gamma_j\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_j) - \delta_{jl}(\Gamma_i\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_i) + \delta_{il}(\Gamma_j\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_j) + \delta_{jk}(\Gamma_i\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_i)\} = \\
= {} & -i\,\{-\delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jl}M_{ik} + \delta_{il}M_{jk} + \delta_{jk}M_{il}\} = \\
= {} & i\,\{\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{jl}M_{ik} - \delta_{il}M_{jk} - \delta_{jk}M_{il}\}
\end{aligned}
\tag{1.1.18}
$$

la quale dimostra appunto che le matrici $n-$dimensionali M_{ij} di cui alla (1.1.7) soddisfano le regole di commutazione (1.1.5) dei generatori canonici di $SO(n)$ e dunque ne definiscono una rappresentazione $n-$dimensionale.

Vediamo adesso come questa rappresentazione induca effettivamente, sulle Γ_i stesse, la rappresentazione vettoriale di $SO(n)$, cioè sia tale per cui

$$S(G)\,\Gamma_i\,S^{-1}(G) = (G^{-1})_{ij}\,\Gamma_j \tag{1.1.19}$$

Dimostriamo questo punto per una trasformazione G infinitesima, in cui quindi risulti

$$
\begin{aligned}
S(G) &\approx I + \frac{i}{2}\omega_{ab}M_{ab} && (1.1.20)\\
S^{-1}(G) &\approx I - \frac{i}{2}\omega_{cd}M_{cd} && (1.1.21)\\
G^{-1} &\approx I - \frac{i}{2}\omega_{ef}H^{ef} && (1.1.22)
\end{aligned}
$$

Evidentemente, in questa approssimazione al primo ordine nella matrice dei parametri ω_{ab}, il primo membro della (1.1.19) diviene

$$
\begin{aligned}
S(G)\,\Gamma_i\,S^{-1}(G) \approx {} & \Gamma_i + \frac{i}{2}\omega_{ab}M_{ab}\,\Gamma_i - \frac{i}{2}\,\omega_{cd}\,\Gamma_i\,M_{cd} = \\
= {} & \Gamma_i + \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\,[M_{ab}\,,\Gamma_i] = \Gamma_i + \frac{i}{2}\omega_{ab}\,\cdot(-i)\,(\Gamma_a\,\delta_{ib} - \Gamma_b\,\delta_{ia}) = \\
= {} & \Gamma_i + \frac{1}{2}\,(\omega_{ab}\Gamma_a\delta_{ib} - \omega_{ab}\Gamma_b\delta_{ia}) = \Gamma_i - \omega_{ib}\Gamma_b
\end{aligned}
\tag{1.1.23}
$$

Quanto al secondo membro della (1.1.19), abbiamo[1]

$$\begin{aligned}(G^{-1})_{ij}\,\Gamma_j &= \left(\delta_{ij} - \frac{i}{2}\omega_{ab}(H^{ab})_{ij}\right)\Gamma_j = \Gamma_i - \frac{i}{2}\omega_{ab}\cdot(-i)\left(\delta_i^a\delta_j^b - \delta_j^a\delta_i^b\right)\Gamma_j = \\ &= \Gamma_i - \left(\frac{1}{2}\omega_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{ji}\right)\Gamma_j = \Gamma_i - \omega_{ij}\Gamma_j \qquad (1.1.24)\end{aligned}$$

la quale, per trasformazioni infinitesime, prova appunto, insieme alla (1.1.23), la (1.1.19): questo risultato, data la struttura analitica di gruppo, è poi estendibile direttamente anche alle trasformazioni finite.

[1]Si ricordi che, salvo diverso avviso, la posizione degli indici nella delta di Knonecker è irrilevante !

$\mathbf{SO(n,m)}$

Consideriamo adesso il caso in cui l'algebra di Clifford abbia invece la struttura seguente:

$$\{\Gamma_i,\,\Gamma_j\} = 2\,g_{ij}\,I \qquad i,j = 1,....,N = n+m \tag{1.1.25}$$

dove g è una matrice hermitiana opportuna che, senza perdita di generalità, possiamo assumere sia diagonale e dunque sia reale e nulla fuori della diagonale principale.

Possiamo, evidentemente, definire ancora gli operatori

$$M_{ij} \equiv \frac{-i}{4}\,[\Gamma_i,\,\Gamma_j] \equiv -M_{ji} \tag{1.1.26}$$

ed è facile rendersi conto che, ripetendo i calcoli svolti sopra, questi operatori sono tali per cui[2]

$$[M_{ij},\,\Gamma_k] \;=\; -i\,(\Gamma_i\,g_{jk} - \Gamma_j\,g_{ik}) \tag{1.1.29}$$

e dunque abbiamo altresì che[3]

$$[M_{ij},\,M_{kl}] \;=\; i\,\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\} \tag{1.1.31}$$

Assumeremo che $det(g) \neq 0$ e quindi che tutti i termini (diagonali) che definiscono g siano non nulli. In questo caso, *rinormalizzando* le Γ_i nel modo seguente

$$\hat{\Gamma}_i \equiv \Gamma_i\,\frac{1}{\sqrt{|g_{ii}|}} \tag{1.1.32}$$

[2]Infatti

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,\Gamma_k] &= \frac{-i}{4}\,[[\Gamma_i,\,\Gamma_j]\,,\,\Gamma_k] = \frac{-i}{4}\,\{[\Gamma_i\,\Gamma_j,\,\Gamma_k] - [\Gamma_j\,\Gamma_i,\,\Gamma_k]\,\} = \\
&= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\,[\Gamma_j,\,\Gamma_k] + [\Gamma_i,\,\Gamma_k]\,\Gamma_j - \Gamma_j\,[\Gamma_i,\,\Gamma_k] - [\Gamma_j,\,\Gamma_k]\,\Gamma_i\} = \\
&= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\,(\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_j) + (-\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_i\Gamma_k)\,\Gamma_j + \\
&- \Gamma_j\,(\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_i) - (-\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k)\,\Gamma_i\} = \\
&= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j - \{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\Gamma_j + 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j + \\
&- \Gamma_j\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i + \{\Gamma_j,\,\Gamma_k\}\Gamma_i - 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i\} = \\
&= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} + \{\Gamma_j,\,\Gamma_k\}\Gamma_i - \{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\Gamma_j - \Gamma_j\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\}
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

ed usando la relazione $\{\Gamma_i,\,\Gamma_j\} = 2\,g_{ij}\,I$, otteniamo infine appunto che

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,\Gamma_k] &= \frac{-i}{4}\,\{\Gamma_i 2\,g_{jk} + 2\,g_{jk}\Gamma_i - 2\,g_{ik}\Gamma_j - \Gamma_j 2\,g_{ik}\} = \frac{-i}{4}\,\{4\,\Gamma_i\,g_{jk} - 4\,\Gamma_j\,g_{ik}\} = \\
&= -i\,(\Gamma_i\,g_{jk} - \Gamma_j\,g_{ik})
\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

[3]Infatti, essendo $[M_{ij},\,M_{kl}] = \frac{-i}{4}\,[M_{ij},\,[\Gamma_k,\,\Gamma_l]] = \frac{-i}{4}\,\{[M_{ij},\,\Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\,\Gamma_l\Gamma_k]\}\,,$

abbiamo che i termini (diagonali) della nuova matrice $\hat{g}$ valgono tutti ± 1, i.e. $\hat{g}^2 = I$: assumeremo altresì che i primi $n < N$ termini diagonali di g valgano $+1$ mentre i successivi $m \equiv N - n > 0$ termini valgano -1.
Siccome effettuando questa rinormalizzazione e questo riordino non introduciamo alcuna perdita di generalità, da ora in avanti ci porremo sempre in questa ipotesi. Per non appesantire le notazioni, continueremo comunque a usare i simboli Γ_i e g al posto, rispettivamente, di $\hat{\Gamma}_i$ e $\hat{g}$.

Ci chiediamo adesso quale è il gruppo di Lie per cui gli operatori M_{ij} di cui sopra costituiscono una rappresentazione dei suoi generatori.

Consideriamo il gruppo $SO(n,m)$: esso, per definizione, è fatto dalla falda[4] connessa con l'identità del gruppo delle matrici reali $(n+m) \times (n+m)$ le quali lasciano invariante la forma quadratica

$$x^i \, g_{ij} \, x^j \tag{1.1.33}$$

dove g è appunto il tensore diagonale che ha i primi n elementi uguali a $+1$ e i seguenti m elementi uguali a -1, mentre (x^i) è un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^N$.
Se indichiamo con G il generico elemento (matrice) del gruppo e poniamo

$$G^a_{.b} \equiv (G)_{ab} \tag{1.1.34}$$

allora la condizione (1.1.33), evidentemente, richiede che

$$x^i \, g_{ij} \, x^j = G^i_{.a} \, x^a \;\; g_{ij} \;\; G^j_{.b} \, x^b \;\;\Leftrightarrow\;\; G^t \, g \, G = g \Leftrightarrow \;\; G^{-1} = g \, G^t \, g \tag{1.1.35}$$

da cui segue, in generale, che gli elementi del gruppo definito dalla (1.1.33) hanno $det(G) = \pm 1$. Quelli che appartengono alla falda connessa con l'identità e quindi gli elementi di $SO(n,m)$ non possono, però, che avere $det(G) = 1$.

evidentemente si ha

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\, M_{kl}] = \frac{-i}{4} & \{[M_{ij},\, \Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\, \Gamma_l\Gamma_k]\} = \\
= \;\; & \frac{-i}{4} \{\Gamma_k[M_{ij},\, \Gamma_l] + [M_{ij},\, \Gamma_k]\Gamma_l - \Gamma_l[M_{ij},\, \Gamma_k] - [M_{ij},\, \Gamma_l]\Gamma_k\} = \\
= \;\; & \frac{(-i)^2}{4} \{\Gamma_k(\Gamma_i \, g_{jl} - \Gamma_j \, g_{il}) + (\Gamma_i \, g_{jk} - \Gamma_j \, g_{ik})\Gamma_l - \Gamma_l(\Gamma_i \, g_{jk} - \Gamma_j \, g_{ik}) - (\Gamma_i \, g_{jl} - \Gamma_j \, g_{il})\Gamma_k\} = \\
= \;\; & \frac{(-i)^2}{4} \{g_{jl}\Gamma_k\Gamma_i - g_{il}\Gamma_k\Gamma_j + g_{jk}\Gamma_i\Gamma_l - g_{ik}\Gamma_j\Gamma_l - g_{jk}\Gamma_l\Gamma_i + g_{ik}\Gamma_l\Gamma_j - g_{jl}\Gamma_i\Gamma_k + g_{il}\Gamma_j\Gamma_k\} = \\
= \;\; & \frac{(-i)^2}{4} \{-g_{ik}(\Gamma_j\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_j) - g_{jl}(\Gamma_i\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_i) + g_{il}(\Gamma_j\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_j) + g_{jk}(\Gamma_i\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_i)\} = \\
= \;\; & i\,\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\}
\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

[4]Dal punto di vista topologico, in generale il gruppo $\mathcal{G}$ delle matrici reali $(n+m) \times (n+m)$ che soddisfano la condizione (1.1.33) è fatto da quattro falde, ciascuna connessa ma tra loro sconnesse, due con determinante $+1$ e due con determinante -1. Per definizione, $SO(n,m)$ è il sottogruppo di $\mathcal{G}$ che coincide con la sua falda connessa che contiene l'identità (le altre falde, ovviamente, non possedendo l'identità, non hanno la struttura gruppale ...).

Le matrici di $SO(n,m)$ possono essere poste in forma esponenziale, scrivendo

$$G = e^{iJ} \tag{1.1.36}$$

dove la generica matrice J è immaginaria pura (dovendo G essere reale ...) e, data la (1.1.35), deve altresì essere tale che (usiamo il fatto che $g^2 = I$ ...)

$$G^{-1} = g\,G^t\,g \;\;\Leftrightarrow\;\; e^{-iJ} = g\,e^{i\,J^t}\,g = e^{i\,g\,J^t\,g} \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J^t\,g = -J \tag{1.1.37}$$

ovvero

$$(g\,J\,g)^+ = J \tag{1.1.38}$$

essendo g simmetrica reale e J immaginaria pura.
Una base[5] per le matrici J di cui alla (1.1.38) è la seguente

$$\left(J^{ij}\right)^a_{.b} = -i\left(g^{ia}\delta^j_b - g^{ja}\delta^i_b\right) \equiv -i\left(\delta^{ia}\delta^j_b - \delta^{ja}\delta^i_b\right) \tag{1.1.43}$$

dove δ^i_k è il consueto simbolo[6] di Knonecker mentre $\delta^{ia} \equiv g^{ia}$.
Poiché la base $\left(J^{ij}\right)$ è evidentemente antisimmetrica[7] negli indici (i,j), la generica matrice del gruppo $SO(n,m)$ può essere scritta come

$$G = e^{iJ} = e^{\frac{i}{2}\,\omega_{ij}\,J^{ij}} \tag{1.1.45}$$

[5] Osserviamo infatti che la condizione $g\,J^t\,g = -J$ implica che la matrice $g\,J$, immaginaria pura, sia anche antisimmetrica, infatti

$$g\,J^t\,g = -J \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J\,g = -J^t \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J = -J^t\,g \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J = -\,(g\,J)^t \tag{1.1.39}$$

Ma noi sappiamo già che una base per le matrici immaginarie antisimmetriche di ordine N è fatta dalle matrici H così definite

$$\left(H^{ij}\right)_{ab} = -i\left(\delta^i_a\,\delta^j_b - \delta^i_b\,\delta^j_a\right) \tag{1.1.40}$$

dove gli indici $a, b, i \neq j$ vanno da 1 ad N. E' allora immediato che, posto

$$\left(J^{ij}\right) \equiv g\,\left(H^{ij}\right) \tag{1.1.41}$$

le matrici $\left(J^{ij}\right)$ così definite costituiscono certamente una base per le matrici J stesse, ed esse coincidono, evidentemente, con quelle definite attraverso la (1.1.43), infatti abbiamo

$$\left(J^{ij}\right)^a_{.b} = g^{ak}\,\left(H^{ij}\right)_{kb} = -i\,g^{ak}\left(\delta^i_k\delta^j_b - \delta^i_b\delta^j_k\right) = -i\left(g^{ia}\delta^j_b - g^{ja}\delta^i_b\right) \tag{1.1.42}$$

[6] In quanto segue, la posizione degli indici <u>è</u> rilevante.
Usando la regola secondo cui il tensore metrico g alza o abbassa gli indici matriciali/tensoriali, il tensore metrico viene anche scritto infatti come

$$g^{ji} \equiv g^{ij} = g^{ik}\,\delta^j_k = \delta^{ij} = \delta^{ji}; \qquad g_{ij} \equiv g_{ji} = \delta^k_i\,g_{kj} = \delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{1.1.44}$$

[7] Non si confonda l'antisimmetria insita nella descrizione degli elementi della base attraverso la parametrizzazione con gli indici (ij) con le proprietà delle matrici J stesse, per le quali abbiamo visto che solo gJ è antisimmetrica (ma non J) !

dove, posto $N \equiv n + m$, la matrice reale e antisimmetrica ω definisce gli $N(N-1)/2$ parametri reali che individuano il generico elemento G del gruppo.
La struttura di algebra di Lie di $SO(n,m)$ è quindi definita univocamente dalle regole di commutazione delle matrici J^{ij} definite dalla (1.1.43), che rivestono, evidentemente, anche il ruolo di generatori della rappresentazione "base" del gruppo stesso. Risulta

$$\begin{aligned}
&\left[J^{ij},\, J^{kl}\right]_{ab} = \left(J^{ij}\, J^{kl}\right)_{ab} - \left(J^{kl}\, J^{ij}\right)_{ab} = \left(J^{ij}\right)^{a}_{.\,c}\left(J^{kl}\right)^{c}_{.\,b} - \left(J^{kl}\right)^{a}_{.\,c}\left(J^{ij}\right)^{c}_{.\,b} = \\
&= (-i)^2 \left\{\left(g^{ia}\delta^j_c - g^{ja}\delta^i_c\right)\left(g^{kc}\delta^l_b - g^{lc}\delta^k_b\right) - \left(g^{ka}\delta^l_c - g^{la}\delta^k_c\right)\left(g^{ic}\delta^j_b - g^{jc}\delta^i_b\right)\right\} = \\
&= (-i)^2 \left\{g^{ia}g^{kj}\,\delta^l_b - g^{ia}g^{lj}\,\delta^k_b - g^{ja}g^{ik}\,\delta^l_b + g^{ja}g^{li}\,\delta^k_b - \right.\\
&\left. - \left(g^{ka}g^{il}\,\delta^j_b - g^{ka}g^{jl}\,\delta^i_b - g^{la}g^{ik}\,\delta^j_b + g^{la}g^{kj}\,\delta^i_b\right)\right\} = \\
&= (-i)^2 \left\{g^{ik}\left(-g^{ja}\,\delta^l_b + g^{la}\,\delta^j_b\right) + g^{jl}\left(-g^{ia}\,\delta^k_b + g^{ka}\,\delta^i_b\right) - \right.\\
&\left. - g^{il}\left(-g^{ja}\,\delta^k_b + g^{ka}\,\delta^j_b\right) - g^{jk}\left(-g^{ia}\,\delta^l_b + g^{la}\,\delta^i_b\right)\right\} = \\
&= (-i)^2 \left\{g^{ik}\,(-i)\left(J^{jl}\right)^a_{.b} + g^{jl}\,(-i)\left(J^{ik}\right)^a_{.b} - g^{il}\,(-i)\left(J^{jk}\right)^a_{.b} - g^{jk}\,(-i)\left(J^{il}\right)^a_{.b}\right\} = \\
&= i\left(g^{ik}\,J^{jl} + g^{jl}\,J^{ik} - g^{il}\,J^{jk} - g^{jk}\,J^{il}\right)^a_{.b}
\end{aligned} \tag{1.1.46}$$

la quale mostra come l'algebra di Lie di $SO(n,m)$ definita attraverso gli operatori J^{ij} sia in effetti la stessa[8] di cui alla (1.1.31).
Possiamo quindi concludere affermando senz'altro che gli operatori M_{ij}, introdotti attraverso le Γ_i mediante la (1.1.26), definiscono una rappresentazione reale di $SO(n,m)$ a valori nello spazio vettoriale di dimensione $N \equiv n+m$

[8] A stretto rigore, nella (1.1.31)

$$[M_{ij},\, M_{kl}] \;\; = \;\; i\,\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\} \tag{1.1.47}$$

gli indici che individuano i generatori sono tutti covarianti (in basso...) mentre nella (1.1.46) sono controvarianti (in alto). Questo, però, non è una reale differenza, infatti, facendo semplicemente uso del tensore metrico, abbiamo che il primo membro della (1.1.47) diventa

$$g^{ai}\, g^{bj}\, g^{ck}\, g^{dl}\;\; [M_{ij},\, M_{kl}] \equiv \left[M^{ab},\, M^{cd}\right] \tag{1.1.48}$$

e, quanto al secondo membro, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&i\,\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\}\;\; g^{ai}\, g^{bj}\, g^{ck}\, g^{dl} = \\
&= i\left\{g_{ik}\, M_{jl}\, g^{ai}\, g^{bj}\, g^{ck}\, g^{dl} + g_{jl}\, M_{ik}\, g^{ai}\, g^{bj}\, g^{ck}\, g^{dl}\right.\\
&\qquad \left. - g_{il}\, M_{jk}\, g^{ai}\, g^{bj}\, g^{ck}\, g^{dl} - g_{jk}\, M_{il}\, g^{ai}\, g^{bj}\, g^{ck}\, g^{dl}\right\} = \\
&= i\left\{M^{bd}\,\delta^a_k\, g^{ck} + M^{ac}\,\delta^b_l\, g^{dl} - M^{bc}\,\delta^a_l\, g^{dl} - M^{ad}\,\delta^b_k\, g^{ck}\right\} = \\
&= i\left\{g^{ac}\, M^{bd} + g^{bd}\, M^{ac} - g^{ad}\, M^{bc} - g^{bc}\, M^{ad}\right\}
\end{aligned} \tag{1.1.49}$$

dove operano le Γ_i stesse, le quali definiscono il tensore metrico g attraverso la struttura di algebra di Clifford (1.1.25).
Formalmente la rappresentazione in questione è così definita

$$S(G) = e^{\frac{i}{2}\,\omega_{ij}M^{ij}} \tag{1.1.51}$$

essendo, per definizione

$$M^{ij} = g^{ai}\,g^{bj}\,M_{ab} = g^{ai}\,g^{bj}\,\frac{-i}{4}\,[\Gamma_a,\,\Gamma_b] \equiv \frac{-i}{4}\,\left[\Gamma^i,\,\Gamma^j\right] \tag{1.1.52}$$

Questa rappresentazione, definita dalla (1.1.51), induce in modo canonico, nello spazio operatoriale generato dalle Γ, una rappresentazione vettoriale, infatti

$$S(G)\,\Gamma^i\,S^{-1}(G) = (G^{-1})^i_{.j}\,\Gamma^j \;\;\Leftrightarrow\;\; S^{-1}(G)\,\Gamma^i\,S(G) = G^i_{.j}\,\Gamma^j \tag{1.1.53}$$

La dimostrazione di questo risultato ricalca esattamente quanto visto nel caso di $SO(n)$. Si considerano trasformazioni infinitesime e si sviluppa al primo ordine nella matrice dei parametri ω: risulta che, quanto al primo membro della (1.1.53), abbiamo

$$\begin{aligned} S(G)\,\Gamma^i\,S^{-1}(G) &\approx \Gamma^i + \frac{i}{2}\,\omega_{ab}M^{ab}\,\Gamma^i - \frac{i}{2}\,\omega_{cd}\,\Gamma^i\,M^{cd} = \\ &= \Gamma^i + \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\left[M^{ab}\,,\Gamma^i\right] = \Gamma^i + \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\,\cdot(-i)\left(\Gamma^a\,g^{bi} - \Gamma^b\,g^{ai}\right) = \\ &= \Gamma^i + \frac{1}{2}\left(\omega_{ab}\Gamma^a g^{bi} - \omega_{ab}\Gamma^b g^{ai}\right) = \\ &= \Gamma^i + \frac{1}{2}\left(-\omega_{ba}\Gamma^a g^{bi} - \omega_{ab}\Gamma^b g^{ai}\right) = \\ &= \Gamma^i - \frac{1}{2}\left(\omega^i_{.a}\,\Gamma^a + \omega^i_{.b}\,\Gamma^b\right) = \Gamma^i - \omega^i_{.a}\Gamma^a \end{aligned} \tag{1.1.54}$$

dove si è usato il fatto che la matrice ω_{ij} è antisimmetrica.
Circa il secondo membro della (1.1.53), abbiamo altresì che risulta

$$\begin{aligned} (G^{-1})^i_{.j}\,\Gamma^j &= \left(\delta^i_j - \frac{i}{2}\omega_{ab}(J^{ab})^i_{.j}\right)\Gamma^j = \Gamma^i - \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\cdot(-i)\left(g^{ai}\delta^b_j - g^{bi}\delta^a_j\right)\Gamma^j = \\ &= \Gamma^i - \frac{1}{2}\,\omega_{ab}\,g^{ai}\,\delta^b_j\,\Gamma^j - \frac{1}{2}\,\omega_{ba}\,g^{bi}\,\delta^a_j\,\Gamma^j = \Gamma^i - \omega^i_{.a}\,\Gamma^a \end{aligned} \tag{1.1.55}$$

la quale, insieme alla (1.1.54), prova appunto la (1.1.53) almeno per trasformazioni infinitesime: la struttura analitica del gruppo ne consente poi l'estensione anche alle trasformazioni finite.

---

e dunque, in definitiva

$$\left[M^{ab},\,M^{cd}\right] = i\left\{g^{ac}\,M^{bd} + g^{bd}\,M^{ac} - g^{ad}\,M^{bc} - g^{bc}\,M^{ad}\right\} \tag{1.1.50}$$

1.2 Parametrizzazione del gruppo di Lorentz

In questo paragrafo ci occuperemo della parametrizzazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ come gruppo di Lie.
Partiamo dal fatto che una trasformazione infinitesima del gruppo di Lorentz avrà, in generale, la struttura seguente

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu} \approx \delta^{\mu}_{\cdot\,\nu} + \epsilon^{\mu}_{\cdot\,\nu} \tag{1.2.56}$$

dove il primo termine descrive la trasformazione identica mentre la matrice reale ϵ sarà fatta da elementi infinitesimi. La condizione per cui

$$\Lambda^t \; g \; \Lambda = g \tag{1.2.57}$$

che garantisce alla trasformazione (1.2.56) di conservare il ds^2, implica che[9]

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} &= (\Lambda^t)_{\mu\alpha} \; g_{\alpha\beta} \; (\Lambda)_{\beta\nu} = (\Lambda)_{\alpha\mu} \; g_{\alpha\beta} \; (\Lambda)_{\beta\nu} \approx \\ &\approx (\delta^{\alpha}_{\cdot\,\mu} + \epsilon^{\alpha}_{\cdot\,\mu}) \; g_{\alpha\beta} \; (\delta^{\beta}_{\cdot\,\nu} + \epsilon^{\beta}_{\cdot\,\nu}) = (\delta_{\beta\mu} + \epsilon_{\beta\mu})(\delta^{\beta}_{\cdot\,\nu} + \epsilon^{\beta}_{\cdot\,\nu}) = \\ &= \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{1.2.58}$$

ovvero la matrice $\epsilon_{\mu\nu}$ deve essere reale e antisimmetrica negli indici di Lorentz, per cui essa deve necessariamente possedere la struttura seguente

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \eta_2 & \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ \eta_3 & -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \epsilon^{\mu}_{\cdot\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ -\eta_1 & 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\eta_2 & -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ -\eta_3 & \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.59}$$

Il fatto che essa sia reale 4×4 e antisimmetrica implica che essa sia individuabile attraverso i sei parametri reali indipendenti che abbiamo sopra indicato, rispettivamente, con (η_i) ed (ϕ_i). Questi parametri possono venire descritti, a loro volta, attraverso una matrice antisimmetrica 4×4, che indicheremo con $\omega_{\alpha\beta}$, in modo che risulti[10]

$$\epsilon^{\mu}_{\cdot\nu} \equiv \frac{i}{2} \; \omega_{\alpha\beta} \left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\cdot\nu} \tag{1.2.60}$$

[9]Indicheremo gli elementi del tensore metrico sia con il simbolo $g^{\mu\nu}$ che anche con il simbolo $\delta^{\mu\nu}$, riservando il simbolo δ^{μ}_{ν} per gli elementi dell'identità.
Quando poi vorremo prescindere dalla convenzione controvariante/covariante sugli indici per usare semplicemente la convenzione matriciale consueta, scriveremo il simbolo che rappresenta la matrice in questione fra parentesi tonda, cioè $(\Lambda)_{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu}$.

[10]Si noti la distinzione, a priori, fra gli indici di Lorentz che indichiamo con (μ, ν) e gli indici che servono invece a descrivere lo spazio del parametri, che indichiamo con (α, β).

dove la matrice $\left(J^{\alpha\beta}\right) \equiv -\left(J^{\beta\alpha}\right)$, fissati α e β, risulta essere una matrice 4×4 immaginaria pura, tale che $\left(J^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}$ è antisimmetrica sia negli indici (α, β) che negli indici di Lorentz (μ, ν).
Volendo, per semplicità, identificare la matrice infinitesima ω con la matrice ϵ, questo richiede di porre semplicemente (cfr.(1.1.43))

$$\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{.\nu} \equiv -i\left(\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right) \tag{1.2.61}$$

e infatti[11]

$$\epsilon^{\mu}_{.\nu} = \frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{.\nu} = -\frac{i^2}{2}\left(\omega^{\mu}_{.\nu} - \omega^{;\mu}_{\nu}\right) = \omega^{\mu}_{.\nu} \tag{1.2.62}$$

Quanto, poi, alla forma "finita" delle trasformazioni di Lorentz, dalla teoria dei gruppi di Lie e da quanto precede possiamo concludere che la loro parametrizzazione deve[12] essere la seguente

$$\Lambda^{\mu}_{.\,\nu} = e^{\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{.\,\nu}} \tag{1.2.63}$$

dove, adesso, la matrice $\omega_{\alpha\beta}$ è fatta da elementi (reali) $finiti$.

Venendo alle regole di commutazione dei generatori $J^{\alpha\beta}$ del gruppo di Lorentz, cioè alle quantità $\left[J^{\alpha\beta},\, J^{\rho\sigma}\right]$, esse sono facilmente determinabili a partire dalla definizione (1.2.61). Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\left[J^{\alpha\beta},\, J^{\rho\sigma}\right]^{\mu}_{.\nu} &= (J^{\alpha\beta})^{\mu}_{.\tau}(J^{\rho\sigma})^{\tau}_{.\,\nu} - (J^{\rho\sigma})^{\mu}_{.\tau}(J^{\alpha\beta})^{\tau}_{.\,\nu} = \\
&= (-i)^2\left\{(\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\tau} - \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\tau})(\delta^{\rho\tau}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\sigma\tau}\delta^{\rho}_{\nu}) - (\delta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\tau} - \delta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\tau})(\delta^{\alpha\tau}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\beta\tau}\delta^{\alpha}_{\nu})\right\} \\
&= (-i)^2\left\{\left[\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\sigma}\delta^{\rho}_{\nu} - \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha\sigma}\delta^{\rho}_{\nu}\right]\right. \\
&\quad \left. - \left[\delta^{\rho\mu}\delta^{\sigma\alpha}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\rho\mu}\delta^{\sigma\beta}\delta^{\alpha}_{\nu} - \delta^{\sigma\mu}\delta^{\rho\alpha}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\sigma\mu}\delta^{\rho\beta}\delta^{\alpha}_{\nu}\right]\right\} = \\
&= (-i)^2\left\{\delta^{\alpha\rho}\left(-\delta^{\beta\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\sigma\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\right) + \delta^{\beta\sigma}\left(-\delta^{\alpha\mu}\delta^{\rho}_{\nu} + \delta^{\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)\right. \\
&\quad \left. -\delta^{\alpha\sigma}\left(-\delta^{\beta\mu}\delta^{\rho}_{\nu} + \delta^{\rho\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\right) - \delta^{\beta\rho}\left(-\delta^{\alpha\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\sigma\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)\right\} = \\
&= i\left\{\delta^{\alpha\rho}(J^{\beta\sigma})^{\mu}_{.\,\nu} + \delta^{\beta\sigma}(J^{\alpha\rho})^{\mu}_{.\,\nu} - \delta^{\alpha\sigma}(J^{\beta\rho})^{\mu}_{.\,\nu} - \delta^{\beta\rho}(J^{\alpha\sigma})^{\mu}_{.\,\nu}\right\}
\end{aligned} \tag{1.2.64}$$

---

[11] Si ricordi che, per ipotesi

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

e quindi, moltiplicando entrambi i membri per $\delta^{\rho\mu}$, abbiamo

$$\omega^{\rho}_{.\nu} \equiv \delta^{\rho\mu}\,\omega_{\mu\nu} = -\delta^{\rho\mu}\,\omega_{\nu\mu} \equiv -\omega^{;\rho}_{\nu}$$

[12] Ricordiamo che stiamo parlando del gruppo di Lorentz ortocrono proprio, cioè del gruppo delle matrici Λ che, oltre a soddisfare la condizione (1.2.57), hanno anche determinante $+1$ e $\Lambda^{0}_{.0} \geq +1$. Questa è la parte del gruppo connessa con l'identità: la forma analitica della (1.2.63) garantisce che le matrici così rappresentate non possono che soddisfare anche le altre due condizioni aggiuntive sopra descritte.

da cui ne segue che l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz è la seguente

$$\left[J^{\alpha\beta},\, J^{\rho\sigma}\right] = i\left\{\delta^{\alpha\rho}\, J^{\beta\sigma} + \delta^{\beta\sigma}\, J^{\alpha\rho} - \delta^{\alpha\sigma}\, J^{\beta\rho} - \delta^{\beta\rho}\, J^{\alpha\sigma}\right\} \tag{1.2.65}$$

Passiamo adesso a esplicitare la forma delle sei matrici J indipendenti. Per ragioni che saranno chiare in seguito, è opportuno dividere queste sei matrici in due insiemi di tre, cioè $\vec{L} \equiv (J_1,\, J_2,\, J_3)$, $\vec{K} \equiv (K_1,\, K_2,\, K_3)$ secondo le definizioni seguenti

$$(L_1,\, L_2,\, L_3) \;\equiv\; -(J^{23},\, J^{31},\, J^{12}) \quad\Leftrightarrow\quad L_i \equiv \frac{-1}{2}\,\epsilon_{ijk}\, J^{jk} \tag{1.2.66}$$

$$(K_1,\, K_2,\, K_3) \;\equiv\; -(J^{01},\, J^{02},\, J^{03}) \quad\Leftrightarrow\quad K_i \equiv J^{i0} \tag{1.2.67}$$

In base alle regole di commutazione (1.2.65), risulta[13] allora che

$$[L_i,\, L_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\, L_k \tag{1.2.73}$$

$$[L_i,\, K_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\, K_k \tag{1.2.74}$$

$$[K_i,\, K_j] \;=\; -i\,\epsilon_{ijk}\, L_k \tag{1.2.75}$$

---

[13] Abbiamo infatti che (si ricordi che $\delta^{00} = 1$ mentre per $a, b = 1, 2, 3$ si ha $\delta^{ab} = -\delta^a_b ...$)

$$\begin{aligned}[L_i,\, L_j] &= \frac{1}{4}\,\epsilon_{iab}\,\epsilon_{jcd}\left[J^{ab},\, J^{cd}\right] = \frac{1}{4}\,\epsilon_{iab}\,\epsilon_{jcd}\left\{i\left[\delta^{ac}J^{bd} + \delta^{bd}J^{ac} - \delta^{ad}J^{bc} - \delta^{bc}J^{ad}\right]\right\} = \\ &= \frac{-i}{4}\left[\epsilon_{icb}\,\epsilon_{jcd}\,J^{bd} + \epsilon_{iad}\,\epsilon_{jcb}\,J^{ac} - \epsilon_{idb}\,\epsilon_{jcd}\,J^{bc} - \epsilon_{iac}\,\epsilon_{jcd}\,J^{ad}\right] \end{aligned} \tag{1.2.68}$$

dove abbiamo appunto usato il fatto che, trattandosi di indici spaziali, risulta che $\delta^{ab} \equiv g^{ab} = -\delta^a_b$. Nell'espressione precedente (1.2.68), i due tensori antisimmetrici a tre indici che vengono moltiplicati fra loro hanno sempre un indice comune che, essendo un indice di somma e quindi muto, chiameremo nel seguito con lo stesso nome, i.e. lo indicheremo con k; inoltre useremo le proprietà di antisimmetria dei tensori per dare ai vari addendi una struttura simile. In questo modo, si ha (nell'espressione che segue, le delta sono quelle di Kronecker; inoltre si ricordi che le J^{ab} sono antisimmetriche anche negli indici (a, b) ...)

$$\begin{aligned}[L_i,\, L_j] &= \frac{-i}{4}\left[\epsilon_{ikb}\,\epsilon_{jkd}\,J^{bd} + \epsilon_{ika}\,\epsilon_{jkc}\,J^{ac} + \epsilon_{ikb}\,\epsilon_{jkc}\,J^{bc} + \epsilon_{ika}\,\epsilon_{jkd}\,J^{ad}\right] = -i\epsilon_{ika}\,\epsilon_{jkb}\,J^{ab} = \\ &= -i\,(\delta_{ij}\,\delta_{ab} - \delta_{ib}\,\delta_{aj})\;J^{ab} = i\,J^{ji} = -i\,J^{ij} = i\,\epsilon_{ijk}\frac{-1}{2}\epsilon_{kab}J^{ab} \equiv i\,\epsilon_{ijk}\,L_k \end{aligned} \tag{1.2.69}$$

che dimostra appunto la (1.2.73).

Vediamo adesso, esplicitamente, la forma di queste matrici: quanto alle matrici L_j, abbiamo

$$(L_1)^\alpha_\beta \equiv -\left(J^{23}\right)^\alpha_{.\,\beta} \equiv i\left(\delta^{2\alpha}\,\delta^3_\beta - \delta^{3\alpha}\,\delta^2_\beta\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.76)$$

$$(L_2)^\alpha_\beta \equiv \left(J^{13}\right)^\alpha_{.\,\beta} \equiv -i\left(\delta^{1\alpha}\,\delta^3_\beta - \delta^{3\alpha}\,\delta^1_\beta\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.77)$$

$$(L_3)^\alpha_\beta \equiv -\left(J^{12}\right)^\alpha_{.\,\beta} \equiv i\left(\delta^{1\alpha}\,\delta^2_\beta - \delta^{2\alpha}\,\delta^1_\beta\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.78)$$

mentre, quanto alle matrici K_k, esse hanno la forma seguente:

$$K_1 \equiv \left(J^{10}\right)^\mu_{.\,\nu} \equiv -i\left(\delta^{1\mu}\,\delta^0_\nu - \delta^{0\mu}\,\delta^1_\nu\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.79)$$

e similmente

$$K_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.80)$$

Passiamo adesso alla dimostrazione della (1.2.74): si ha (si ricordi che $\delta^{a0} = 0$; $\delta^{ab} = -\delta^a_b$)

$$\begin{aligned} [L_i,\, K_j] &= \frac{-1}{2}\,\epsilon_{iab}\left[J^{ab},\, J^{j0}\right] = \frac{-i}{2}\,\epsilon_{iab}\left\{\delta^{aj}\,J^{b0} + \delta^{b0}\,J^{aj} - \delta^{a0}\,J^{bj} - \delta^{bj}\,J^{a0}\right\} \\ &= \frac{i}{2}\,\epsilon_{iab}\left\{\delta^a_j\,J^{b0} - \delta^b_j\,J^{a0}\right\} = \frac{i}{2}\,\epsilon_{ijb}\,J^{b0} - \frac{i}{2}\,\epsilon_{iaj}\,J^{a0} = \\ &= i\,\epsilon_{ijk}\,J^{k0} = i\,\epsilon_{ijk}\,K_k \end{aligned} \quad (1.2.70)$$

Infine, quanto alla (1.2.75), la dimostrazione esplicita è la seguente

$$\begin{aligned} [K_i,\, K_j] &= \left[J^{i0},\, J^{j0}\right] = i\left\{\delta^{ij}\,J^{00} + \delta^{00}\,J^{ij} - \delta^{i0}\,J^{0j} - \delta^{0j}\,J^{i0}\right\} = \\ &= i\,\delta^{00}\,J^{ij} = -i\,\epsilon_{ijk}\,L_k \end{aligned} \quad (1.2.71)$$

dove abbiamo usato sia il fatto che $\delta^{00} = 1$, come pure che

$$L_k \equiv \frac{-1}{2}\,\epsilon_{kab}\,J^{ab} \quad \Leftrightarrow \quad J^{ab} = J_{ab} = -\epsilon_{abi}\,L_i \quad (1.2.72)$$

Le matrici L_j costituiscono una rappresentazione dei generatori del gruppo delle rotazioni[14], di cui, una parametrizzazione è la seguente

$$\Lambda_R = e^{i\,\vec{\phi}\cdot\vec{L}} \tag{1.2.81}$$

Si tratta di una rappresentazione riducibile, fatta dalla somma diretta della rappresentazione scalare ($j = 0$) agente sulla coordinata temporale (invariante), con la rappresentazione vettoriale ($j = 1$), che descrive l'azione degli elementi del gruppo sulle coordinate spaziali.
Non insisteremo oltre su questo aspetto, visto che abbiamo già trattato in dettaglio le rappresentazioni di $SU2$.

Venendo, invece, alle matrici $\vec{K}$, esse sono i generatori dei boost, ovvero delle matrici di Lorentz che, senza rotazione degli assi, descrivono la legge di trasformazione delle coordinate spazio-temporali fra due sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo e uniforme.
Come esempio, iniziamo considerando un boost[15] lungo l'asse z con velocità v. Risulta

$$B_z(v) \equiv= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\,\eta & 0 & 0 & -sh\,\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sh\,\eta & 0 & 0 & ch\,\eta \end{pmatrix} \tag{1.2.82}$$

dove abbiamo posto

$$\eta \equiv th^{-1}(\beta) \Rightarrow \beta = th\,\eta = \frac{sh\,\eta}{ch\,\eta} \Rightarrow \gamma = ch\,\eta \tag{1.2.83}$$

E' facile verificare allora che risulta

$$B_z(v) = e^{i\,\eta\,K_3} \tag{1.2.84}$$

Infatti, se definiamo la matrice reale $A \equiv iK_3$, abbiamo

$$\begin{aligned} A \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow\; (A)^{2n} = A^2;\; (A)^{2n+1} = A \end{aligned} \tag{1.2.85}$$

[14] E' ovvio, infatti che le trasformazioni Λ che agiscono solo sugli indici spaziali lasciando invariata la componente temporale, conservano la distanza euclidea ovvero la quantità $dx^2 + dy^2 + dz^2$ e dunque, siccome la componente temporale non viene alterata, anche il ds^2 ...

[15] Stiamo assumendo che si tratti, comunque, di una trasformazione passiva.
Secondo questa ipotesi, il secondo riferimento, nel quale siamo trasformati dal boost, si muove rispetto al primo nel verso positivo dell'asse z. Quindi, un punto che sia fermo nel primo sistema di riferimento, è visto muoversi, nel secondo riferimento, nel verso opposto a quello dell'asse z ...

e dunque

$$\begin{aligned} e^{i\,\eta\,K_3} &= e^{\eta A} = I + \eta\, A + \frac{1}{2!}\eta^2 A^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 A^3 + \frac{1}{4}\eta^4 A^4 + ... = \\ &= I + A\left(\frac{\eta}{1!} + \frac{\eta^3}{3!} + ...\right) + A^2\left(\frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + ...\right) = \\ &= I + A\, sh\,\eta + A^2(ch\,\eta - 1) \equiv B_z(v) \qquad (1.2.86) \end{aligned}$$

Nel caso di un boost che descrive, senza rotazione degli assi, la legge di trasformazione fra due riferimenti in moto relativo con velocità costante qualsiasi $\vec{v}$, ecco che posto $\vec{n} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ed $\eta \equiv th^{-1}(|\vec{v}|)$, risulta

$$B(\vec{v}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}} \qquad (1.2.87)$$

ovvero

$$B(\vec{v}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}} = e^{i\eta\, n_i\, K_i} \equiv e^{i\eta_i\, K_i} = e^{\frac{i}{2}\eta_i\,(J^{0i} - J^{i0})} \qquad (1.2.88)$$

da cui ne segue che la matrice dei parametri ω di cui alla (1.2.63), per un generico boost ha la forma seguente

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2.89)$$

Infatti, data la (1.2.89), risulta immediato che

$$\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\, J^{\mu\nu} = i\,\omega_{j0}\, J^{j0} = i\,\eta_j\, K_j \qquad (1.2.90)$$

A differenza dei generatori L_i che formano un'algebra di Lie chiusa che è quella, appunto, del gruppo delle rotazioni, sottogruppo del gruppo di Lorentz, i generatori dei boost K_i *non* formano un'algebra di Lie chiusa[16].

[16]Una conseguenza di questo fatto è che un loop di boosts che riporti al riferimento di partenza produce una rotazione del riferimento finale rispetto a quello iniziale. Per rendersene conto, consideriamo due trasformazioni infinitesime secondo l'asse x ed y, rispettivamente. Risulta

$$\begin{aligned} & e^{iaK_1}\, e^{ibK_2}\, e^{-iaK_1}\, e^{-ibK_2} \approx (I + iaK_1)(I + ibK_2)(I - iaK_1)(I - ibK_2) = \\ = \;& (I + iaK_1)(I - iaK_1)(I + ibK_2)(I - ibK_2) + (I + iaK_1)\,[(I + ibK_2), (I - iaK_1)]\,(I - ibK_2) \end{aligned}$$

Il primo addendo è effettivamente la trasformazione identica, ma il secondo non è nullo e, sempre al primo ordine in a e b, esso vale

$$\begin{aligned} (I + iaK_1)\,[(I + ibK_2), (I - iaK_1)]\,(I - ibK_2) &\approx [(I + ibK_2), (I - iaK_1)] = \\ &= ab\,[(K_2, K_1] = i\,ab\,L_3 \qquad (1.2.91) \end{aligned}$$

cioè descrive una rotazione infinitesima intorno all'asse z.
I boost, infatti, *non* formano un sottogruppo del gruppo di Lorentz !

1.3 Il gruppo di Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$ e $SL(2,\mathbb{C})$

Il gruppo di ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è il gruppo $SL(2,\mathbb{C})$, costituito dalle matrici complesse 2×2, aventi determinante $+1$.
Inizieremo osservando che ogni matrice $A \in SL(2,\mathbb{C})$ può sempre essere scritta come prodotto[17] di una matrice hermitiana H avente traccia positiva e una matrice unitaria U, entrambe con determinante $+1$, quindi entrambe appartenenti a $SL(2,\mathbb{C})$, ovvero

$$A = H\,U \tag{1.3.99}$$

con

$$H \in SL(2,\mathbb{C}),\;\; H = H^\dagger, Tr(H) > 0, \qquad U \in SL(2,\mathbb{C}),\;\; U^{-1} = U^\dagger \tag{1.3.100}$$

Le matrici unitarie $U \in SL(2,\mathbb{C})$ costituiscono il ben noto sottogruppo $SU(2)$, il cui generico elemento, come sappiamo, si può scrivere come

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \qquad 0 \le \theta \le 4\pi;\;\; |\vec{n}| = 1 \tag{1.3.101}$$

[17]Infatti supponiamo che $A \in SL(2,\mathbb{C})$ e consideriamo la matrice $A\,A^\dagger$: evidentemente essa è hermitiana e definisce una forma quadratica positiva per cui è diagonalizzabile con una matrice unitaria opportuna P, e i suoi autovalori sono tutti strettamente positivi

$$P\,(A\,A^\dagger)\,P^\dagger = \mathcal{D} \qquad \Rightarrow \qquad (A\,A^\dagger) = P^\dagger \mathcal{D}\,P \tag{1.3.92}$$

Siccome la matrice diagonale $\mathcal{D}$ ha solo autovalori positivi, si può definire la matrice diagonale D, fatta dalle sue radici quadrate positive, in modo che

$$\mathcal{D} = D^2, \qquad\qquad Tr(D) > 0 \tag{1.3.93}$$

Chiaramente, dovendo essere $det(D)^2 = det(\mathcal{D}) = 1$, D ha determinante $+1$.
Poniamo allora

$$H \equiv P^\dagger\,D\,P \tag{1.3.94}$$

E' evidente dalla sua definizione che H è hermitiana, ha determinante $+1$ e traccia positiva. Dimostriamo che la matrice $H^{-1}\,A \equiv P^\dagger\,D^{-1}\,P\,A$, che ha evidentemente determinante $+1$, è unitaria. Infatti

$$(H^{-1}\,A)^\dagger = A^\dagger\,P^\dagger\,D^{-1}\,P \tag{1.3.95}$$

e risulta

$$(H^{-1}\,A)^\dagger\,(H^{-1}\,A) = A^\dagger\,P^\dagger\,D^{-1}\,P\;P^\dagger\,D^{-1}\,P\,A = A^\dagger\,P^\dagger\,D^{-2}\,P\,A \equiv A^\dagger\left(P^\dagger D^{-2}\,P\right)A \tag{1.3.96}$$

ma

$$P^\dagger\,D^{-2}\,P = P^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}\,P = (A\,A^\dagger)^{-1} = (A^\dagger)^{-1}\,A^{-1} \tag{1.3.97}$$

per cui

$$(H^{-1}\,A)^\dagger\,(H^{-1}\,A) = A^\dagger\left((A^\dagger)^{-1}\,A^{-1}\right)A = \left(A^\dagger(a^\dagger)^{-1}\right)\left(A^{-1}\,A\right) = I \tag{1.3.98}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Le matrici hermitiane $H \in SL(2,\mathbb{C})$ invece *non* costituiscono un sottogruppo perchè non sono stabili sotto il prodotto[18]. Si tratta di matrici che sono, evidentemente, diagonalizzabili con una matrice unitaria e dunque attraverso una matrice opportuna $U \in SU(2)$.
Siccome quelle che ci interessano hanno traccia positiva e determinante $+1$, la loro forma diagonale sarà comunque la seguente

$$U^{-1}\, H\, U = D = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \rho \geq 1 \tag{1.3.102}$$

Poniamo allora

$$ln\, \rho \equiv \frac{\eta}{2} \tag{1.3.103}$$

ne risulta che

$$D = \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} = e^{\frac{\eta}{2}\,\sigma_z} \tag{1.3.104}$$

dove σ_z è la consueta terza matrice di Pauli, l'unica in forma diagonale.
La matrice H sarà quindi tale che

$$H = U\, D\, U^{-1} = U\, e^{\frac{\eta}{2}\,\sigma_z}\, U^{-1} = e^{\frac{\eta}{2} U \sigma_z U^{-1}} \tag{1.3.105}$$

Ma U è una matrice di $SU(2)$ che rappresenterà quindi una opportuna rotazione R, per cui avremo che

$$U\, \sigma_z\, U^{-1} = R_{3i}\, \sigma_i \tag{1.3.106}$$

D'altronde le righe della matrice R, essendo essa ortogonale, sono tali che $\sum_i (R_{3i})^2 = 1$ e dunque definiscono in modo naturale il seguente versore $\vec{k}$

$$\vec{k} \equiv (R_{31},\, R_{32},\, R_{33}) \tag{1.3.107}$$

per cui abbiamo infine che

$$H = e^{\frac{\eta}{2}\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma}} \tag{1.3.108}$$

Questo dimostra che, in effetti, il generico elemento A di $SL(2,\mathbb{C})$ può essere messo sempre nella forma

$$A = e^{\frac{\eta}{2}\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma}}\; e^{i\frac{\theta}{2}\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \tag{1.3.109}$$

dove $\vec{k}$ e $\vec{n}$ sono versori opportuni, mentre $0 \leq \theta \leq 4\pi$ e $0 \leq \eta < +\infty$ sono parametri reali.

[18] Il prodotto di due matrici hermitiane, in generale, non è hermitiano a meno che le due matrici non commutino fra loro.

Per renderci conto che $SL(2,\mathbb{C})$ costituisce il ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, cominciamo con l'osservare che, data la fattorizzazione (1.3.109), esso ha una struttura analitica simile a quella di $SU(2)$ e in particolare si tratta di un gruppo di Lie semplicemente connesso[19]. Dunque, per dimostrare che è il ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, basta dimostrare che esiste un omomorfismo da $SL(2,\mathbb{C})$ in $\mathcal{L}_+^\uparrow$, che diviene isomorfismo in tutto un intorno dell'identità, ovvero che i due gruppi hanno la stessa algebra di Lie.
A questo scopo, iniziamo mettendo in corrispondenza i punti dello spazio-tempo R^4 di Minkowski con gli elementi $\mathcal{C}(x^\mu)$ dello spazio vettoriale $\mathcal{H}^{(2)}$

Figura 1.1: *Hermann Minkowski (1864-1909)*

sul corpo reale fatto dalle matrici hermitiane 2×2. Poniamo per questo

$$(x^\mu) \equiv (x^0, \vec{x}) \to \mathcal{X} \equiv \mathcal{C}(x^\mu) \equiv x^\mu\, \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (1.3.110)$$

dove σ_0 è l'identità mentre le σ_i sono le matrici di Pauli, ovvero

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.111)$$

La corrispondenza $\mathcal{C}$ definita dalla (1.3.110) è invertibile e risulta

$$(x^\mu) \equiv \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\, Tr(\mathcal{X}\, \sigma_\mu) \quad (1.3.112)$$

[19]A differenza di $SU(2)$, il gruppo $SL(2,\mathbb{C})$ non è compatto, proprio perchè il parametro η di cui sopra può assumere un qualunque valore reale e quindi l'insieme dei parametri reali che descrivono gli elementi del gruppo non è compatto in R^n.

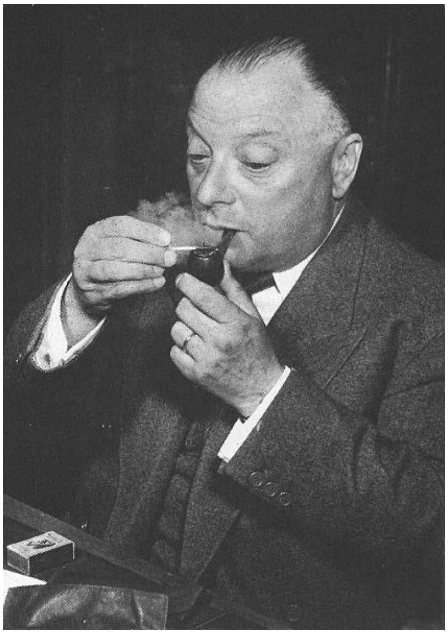


Figura 1.2: *Wolfang Pauli (1900-1958)*

Si noti che l'invariante di Lorentz s^2 associato a x^μ, data la (1.3.110), risulta semplicemente dato da

$$s^2 \equiv x^\mu x_\mu = det(\mathcal{X}) \tag{1.3.113}$$

Se A è un qualunque elemento di $SL(2,\mathbb{C})$, consideriamo la trasformazione lineare $\mathcal{T}_A$ dallo spazio vettoriale $\mathcal{H}^{(2)}$ in sé, definita come

$$\mathcal{X} \to \mathcal{X}' = \mathcal{T}_A(\mathcal{X}) \equiv A\,\mathcal{X}\,A^\dagger \tag{1.3.114}$$

E' immediato che $\mathcal{T}$ definisce una rappresentazione di $SL(2,\mathbb{C})$ nello spazio delle trasformazioni lineari di $\mathcal{H}^{(2)}$ in sè, infatti

$$\mathcal{T}_A\mathcal{T}_B = \mathcal{T}_{AB}$$

Siccome $det(A) = 1$, questa trasformazione è tale per cui le due matrici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ hanno lo stesso determinante, ovvero, l'invariante di Lorentz associato al quadrivettore $(x')^\mu$ definito partire da $\mathcal{X}'$ attraverso la (1.3.112), ovvero

$$x'^\mu = \frac{1}{2}\,Tr(\mathcal{X}'\,\sigma_\mu)$$

ha lo stesso valore di quello associato al quadrivettore di partenza (x^μ) e dunque i due quadrivettori sono legati necessariamente da una opportuna trasformazione Λ_A del gruppo di Lorentz. Risulta

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= \frac{1}{2}Tr(\mathcal{X}'\,\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(A\,\mathcal{X}\,A^\dagger\;\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(A\,x^\nu\sigma_\nu\,A^\dagger\;\sigma_\mu) = \\ &= x^\nu\;\frac{1}{2}Tr(A\,\sigma_\nu\,A^\dagger\;\sigma_\mu) \\ &\Rightarrow\;\; (\Lambda_A)^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{1}{2}Tr(A\,\sigma_\nu\,A^\dagger\;\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu\,A\,\sigma_\nu\,A^\dagger) \end{aligned} \tag{1.3.115}$$

e dunque

$$A \to \Lambda_A : (\Lambda_A)^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu\,A\,\sigma_\nu\,A^\dagger) \tag{1.3.116}$$

ovvero abbiamo

$$A \to \Lambda_A = \mathcal{C}^{-1}\;\mathcal{T}_A\;\mathcal{C} \tag{1.3.117}$$

la quale, unita alle considerazioni precedenti, mostra che la corrispondenza sopra definita fra gli elementi del gruppo $SL(2,\mathbb{C})$ e quelli del gruppo di Lorentz ha le caratteristiche di un omomorfismo, cioè esso rispetta il prodotto di composizione interna.
Vogliamo dimostrare che Λ_A è un elemento del gruppo ortocrono proprio.
Per questo, ricordiamo che ogni elemento di $SL(2,\mathbb{C})$ è individuato da due vettori, $\theta\vec{n}$ e $\eta\vec{k}$ che descrivono, rispettivamente, la parte hermitiana e quella unitaria della decomposizione di A. Fissato allora un qualunque elemento $A \in SL(2,\mathbb{C})$, si può definire una famiglia $\{A(t), t \in [0,1]\}$ di elementi di $SL(2,\mathbb{C})$, che, in funzione di un parametro t, consente di passare con continuità dall'elemento identico ad A. Per definizione poniamo

$$A(t) \equiv e^{\frac{t\,\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}\,e^{i\,\frac{t\,\theta}{2}\;\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \qquad \Rightarrow \qquad A(0) = I; \qquad A(1) = A \tag{1.3.118}$$

Evidentemente, se indichiamo con $\Lambda(t)$ la matrice di Lorentz corrispondente alla $A(t)$ secondo la (1.3.116), questa risulta essere una funzione analitica del parametro t, tale che $\Lambda(0) = I$, $\Lambda(1) = \Lambda_A$.
Ma abbiamo già osservato che le matrici del gruppo di Lorentz hanno determinante pari a $+1$ oppure -1: siccome per $t = 0$ il determinante è ovviamente pari a $+1$, per l'analiticità di cui sopra, non può che rimanere tale per ogni t e dunque deve essere $det(\Lambda_A) = +1$.
Analogamente, per quanto riguarda Λ_A^{00}, poichè si è già visto che questa quantità o è non inferiore a $+1$ oppure è non superiore a -1 e poichè per $t = 0$ essa è pari a $+1$ e dipende da t in modo analitico, deve restare positiva anche per $t = 1$, cioè per Λ_a.
Dunque $\Lambda_A \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Evidentemente, secondo la (1.3.116), risulta anche che

$$\Lambda_A = \Lambda_{-A} \tag{1.3.119}$$

Questo significa che l'applicazione (1.3.116) definita da $SL(2,\mathbb{C})$ in $\mathcal{L}_+^\uparrow$ non è iniettiva. E' invece suriettiva: ogni elemento di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ risulta immagine di un opportuno elemento di $SL(2,\mathbb{C})$ (anzi, di due). Localmente, il mapping è 1 a 1, ovvero un intorno opportuno dell'identità di $SL(2,\mathbb{C})$ va in un intorno dell'identità di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ e viceversa: questo garantisce che i due gruppi abbiano la stessa algebra di Lie.
Per questi motivi, il gruppo $SL(2,\mathbb{C})$, che non è compatto ma è semplicemente connesso, costituisce appunto il ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Riguardo all'identità fra le due algebre di Lie osserviamo che, così come il generico elemento di $SL(2,\mathbb{C})$ può essere scritto come

$$e^{i\frac{\eta}{2}\vec{k}\cdot(-i\vec{\sigma})}\, e^{i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \tag{1.3.120}$$

analogamente abbiamo visto che il generico elemento di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ può essere scritto come

$$e^{i\eta\vec{k}\cdot\vec{K}}\, e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{L}} \tag{1.3.121}$$

ed effettivamente l'algebra di Lie generata da $\left\{\vec{L},\vec{K}\right\}$ risulta isomorfa a quella generata da $\left\{\frac{1}{2}\vec{\sigma}, -\frac{i}{2}\vec{\sigma}\right\}$.

A questo stesso risultato si può arrivare anche deteminando direttamente la corrispondenza fra le trasformazioni infinitesime di $SL(2,\mathbb{C})$ come parametrizzate dalla (1.3.120) e le loro corrispondenti in $\mathcal{L}_+^\uparrow$, secondo la parametrizzazione consueta (1.3.121).
Iniziamo dalle trasformazioni infinitesime del tipo $A = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$, ovvero dagli elementi di $SU(2)$ in $SL(2,\mathbb{C})$. In generale abbiamo visto che la corrispondenza delle matrici di $SL(2,\mathbb{C})$ con le trasformazioni del gruppo di Lorentz è data dalla relazione

$$(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\nu} \equiv (\Lambda_A)^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{1}{2}\,Tr(\sigma_\mu\, A\, \sigma_\nu\, A^\dagger) \tag{1.3.122}$$

dunque, nel caso di trasformazioni infinitesime, al primo ordine nel parametro di sviluppo θ, si ha

$$A \approx I + i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \;\;\Rightarrow\;\; (\Lambda)^{\mu}_{\cdot\nu} \approx \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\,\left(I + i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\,\sigma_\nu\,\left(I - i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\right] \tag{1.3.123}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$.
Sempre al primo ordine in θ, abbiamo dunque che

$$\begin{aligned}(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\nu} \;&\approx\; \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\mu\, i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sigma_\nu - \sigma_\mu\sigma_\nu\, i\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right] = \\ &=\; \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\sigma_\nu\right] + i\,\frac{\theta}{4}Tr\left[\sigma_\mu\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sigma_\nu\right] - i\,\frac{\theta}{4}Tr\left[\sigma_\mu\,\sigma_\nu\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right] \end{aligned} \tag{1.3.124}$$

D'altronde il termine $\frac{1}{2}\, Tr\,[\sigma_\mu \sigma_\nu]$ è semplicemente l'identità del gruppo di Lorentz, per cui risulta

$$\Lambda^\mu_{.\,\nu} - \delta^\mu_\nu \quad \approx \quad i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_\mu\, \sigma_j\, \sigma_\nu] - i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_\mu\, \sigma_\nu\, \sigma_j] \qquad (1.3.125)$$

Osserviamo adesso che se uno dei due indici di Lorentz è quello temporale, allora poiché σ_0 è l'identità, i due termini al secondo membro della (1.3.125) si cancellano, per cui gli unici valori non nulli della matrice infinitesima $\Lambda^\mu_{.\,\nu} - \delta^\mu_\nu$ possono essere solo quelli in cui entrambi gli indici di Lorentz sono di tipo spazio. In questo caso risulta

$$\Lambda^l_{.\,k} - \delta^l_k \quad \approx \quad i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_l\, \sigma_j\, \sigma_k] - i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_l\, \sigma_k\, \sigma_j] \qquad (1.3.126)$$

Ma nel caso di indici spaziali, risulta

$$Tr\,[\sigma_l\, \sigma_j\, \sigma_k] = 2i\, \epsilon_{ljk} \qquad (1.3.127)$$

dunque, usando le ben note proprietà cicliche del tensore ϵ_{abc}, abbiamo infine che

$$\Lambda^l_{.\,k} - \delta^l_k \quad \approx \quad i\,\frac{\theta}{4} n_j\, 2i\, \epsilon_{ljk} - i\,\frac{\theta}{4} n_j\, 2i\, \epsilon_{jlk} = i\theta\, n_j\, (-i\epsilon_{jlk}) = i\theta\, n_j\, (L_j)^l_{.\,k} \quad (1.3.128)$$

dove $\vec{L}$ sono proprio i consueti generatori delle rotazioni.

Venendo adesso alle trasformazioni del tipo $A = e^{\frac{\eta}{2}\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}$ (che non costituiscono un sottogruppo di $SL(2,\mathbb{C})$ ...), abbiamo che quelle infinitesime sono tali che

$$\begin{aligned} A \quad &\approx \quad I + \frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \;\Rightarrow\; (\Lambda)^\mu_{.\,\nu} \approx \frac{1}{2}\, Tr\left[\sigma_\mu \left(I + \frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\right)\sigma_\nu \left(I + \frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\right)\right] \\ &\Rightarrow\; \Lambda^\mu_{.\,\nu} - \delta^\mu_\nu \approx \frac{\eta}{4}\, k_j\, Tr\,[\sigma_\mu\, \sigma_j\, \sigma_\nu] + \frac{\eta}{4}\, k_j\, Tr\,[\sigma_\mu\, \sigma_\nu\, \sigma_j] \qquad (1.3.129) \end{aligned}$$

e in questo caso, proprio per gli stessi argomenti usati in precedenza, gli elementi della matrice infinitesima $\Lambda^\mu_{.\,\nu} - \delta^\mu_\nu$ sono nulli quando sono entrambi di tipo spaziale o entrambi di tipo temporale. I soli elementi che possono essere non nulli sono quelli per cui $\mu = 0$ oppure $\nu = 0$ (ma non entrambi). In quel caso, per le proprietà della traccia (è il caso in cui una delle due matrici con indice μ o ν è la matrice identica), la matrice è simmetrica. Risulta in definitiva che

$$\Lambda^0_{.\,\nu} - \delta^0_\nu \approx \frac{\eta}{2}\, k_j\, Tr\,[\sigma_j\, \sigma_\nu] = \eta\; k_j\, \delta^j_\nu = i\eta\, k_j (K_j)^0_{.\,\nu} \qquad (1.3.130)$$

dove $\vec{K}$ sono i consueti generatori dei boost.

1.4 Ancora sulle rappresentazioni di $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Come abbiamo visto, gli elementi del gruppo di Lorentz ortocrono proprio si possono parametrizzare nel modo seguente

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu}} \tag{1.4.131}$$

dove le matrici (generatori) J sono così definite

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\cdot\,\beta} = -i\left(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}\right) \tag{1.4.132}$$

e risulta

$$\mathbf{L} = -\left(J^{23},\, J^{31},\, J^{12}\right); \qquad \mathbf{K} = -\left(J^{01},\, J^{02},\, J^{03}\right) \tag{1.4.133}$$

Se estendiamo l'algebra[20] di Lie al campo complesso e poniamo

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{L} + i\mathbf{K}}{2} \tag{1.4.134}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{L} - i\mathbf{K}}{2} \tag{1.4.135}$$

allora, in termini di questi operatori, abbiamo

$$\begin{aligned}
[A_m, A_n] &= i\,\epsilon_{mnk}\,A_k \\
[B_m, B_n] &= i\,\epsilon_{mnk}\,B_k \\
[A_m, B_n] &= 0
\end{aligned}$$

ovvero $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ definiscono un'algebra[21] che è la somma diretta di due algebre di Lie di $SU2$, indipendenti tra loro, tali che

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} + \mathbf{B}; \qquad i\mathbf{K} = \mathbf{A} - \mathbf{B}; \tag{1.4.136}$$

Se la rappresentazione di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è irriducibile, poiché $|\mathbf{A}|^2$ e $|\mathbf{B}|^2$ commutano sia con gli operatori A_j che con gli operatori B_j, commutano con tutti i generatori L_j e K_j della rappresentazione di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, per cui, per il lemma di Schur, $|\mathbf{A}|^2$ e $|\mathbf{B}|^2$ sono necessariamente multipli dell'identità.
Il loro autovalore sarà, rispettivamente, della forma $s_A(s_A+1)$ e $s_B(s_B+1)$ con s_A e s_B interi o semidispari non negativi opportuni in quanto $|\mathbf{A}|^2$ e $|\mathbf{B}|^2$ sono invarianti associati a rappresentazioni di $SU2$.
Una base dello spazio dove agisce la rappresentazione data sarà quindi del tipo

$$|s_a,\, s_{a3} > |s_b,\, s_{b3} > \tag{1.4.137}$$

[20]Deve essere chiaro che questa generalizzazione al campo complesso, però, ci conduce fuori dall'algebra di Lie del gruppo !
[21]Come puntualizzato prima, quest'algebra *non* è quella del gruppo di Lorentz, bensì l'una definisce univocamente l'altra e viceversa.

ovvero lo spazio vettoriale sede della rappresentazione irriducibile[22] di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ avrà la struttura del prodotto diretto dei due spazi vettoriali individuati, rispettivamente, da s_A e s_B indicato con il simbolo $(s_A,\, s_B)$, di dimensione $(2s_A+1)(2s_B+1)$.

Supponiamo ora che J_j siano i generatori di una rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ di spin s. A partire da questa, posto $\mathbf{L}=(L_1,L_2,L_3)$, possiamo definire le due seguenti rappresentazioni di $\mathcal{L}_+^\uparrow$:

$$a)\quad \mathbf{L}=\mathbf{J};\quad i\mathbf{K}=\mathbf{J}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}=\mathbf{J};\quad \mathbf{B}=0 \tag{1.4.138}$$

$$b)\quad \mathbf{L}=\mathbf{J};\quad i\mathbf{K}=-\mathbf{J}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}=0;\quad \mathbf{B}=\mathbf{J} \tag{1.4.139}$$

e, per quanto detto sopra, è facile concludere che la rappresentazione $a)$ è della forma $(s,0)$ mentre la rappresentazione $b)$ è della forma $(0,s)$.

Poiché i generatori $\mathbf{J}\equiv\vec{J}$ possono sempre essere scelti in modo che siano hermitiani, nei due casi avremo[23]

$$\mathcal{R}_a(\Lambda) = e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{L}+i\vec{\eta}\cdot\vec{K}} = e^{(i\vec{\phi}+\vec{\eta})\cdot\vec{J}} \tag{1.4.140}$$

$$\mathcal{R}_b(\Lambda) = e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{L}+i\vec{\eta}\cdot\vec{K}} = e^{(i\vec{\phi}-\vec{\eta})\cdot\vec{J}} \tag{1.4.141}$$

da cui

$$\mathcal{R}_a^+(\Lambda) = e^{(-i\vec{\phi}+\vec{\eta})\cdot\vec{J}} = \mathcal{R}_b^{-1}(\Lambda) \tag{1.4.142}$$

Prendiamo adesso come esempio la rappresentazione dei generatori di $SU(2)$ definita dalle matrici di rotazione in tre dimensioni, ovvero

$$(J_i)_{jk} = -i\,\epsilon_{ijk} \tag{1.4.143}$$

Una generica rotazione R, sia nel caso $a)$ che $b)$, sarà quindi tale che

$$R(\vec{\phi}) = e^{i\phi\vec{n}\cdot\vec{J}} = e^{\phi Q} \tag{1.4.144}$$

dove si è posto $\vec{\phi}\equiv\phi\,\vec{n}$ e $Q\equiv i\,\vec{n}\cdot\vec{J}$, essendo $\vec{n}$ un versore. Risulta dunque

$$Q_{jk} = i\,n_l\,(J_l)_{jk} = n_l\,\epsilon_{ljk} \tag{1.4.145}$$

[22]Riguardo all'unitarietà, dato che $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono hermitiani in quanto ciascuno generatori di una rappresentazione unitaria di $SU2$, essendo la rappresentazione $\mathcal{R}$ del gruppo tale che

$$\mathcal{R}(\Lambda) = e^{i\vec{\Phi}\vec{L}}\,e^{i\vec{\alpha}\vec{K}} = e^{i\vec{\Phi}(\vec{A}+\vec{B})}\,e^{\vec{\alpha}(\vec{A}-\vec{B})}$$

$\mathcal{R}(\Lambda)$ potrà essere unitaria solo per le trasformazioni che corrispondono a elementi del gruppo di Lorentz per cui $\vec{\alpha}=0$, ovvero solo per le rotazioni, visto che $e^{\vec{\alpha}(\vec{A}-\vec{B})}$ è un operatore certamente hermitiano ma non unitario.

[23]Indichiamo con $\mathcal{R}_a(\Lambda)$ e $\mathcal{R}_b(\Lambda)$ l'immagine della matrice Λ del gruppo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ definita rispettivamente dalla rappresentazione di tipo $a)$ e di tipo $b)$.

da cui abbiamo che

$$\begin{aligned} \left(Q^2\right)_{ab} &= Q_{as}Q_{sb} = n_l\,\epsilon_{las}\;n_m\,\epsilon_{msb} = -n_l\,n_m\,\epsilon_{las}\,\epsilon_{mbs} = \\ &= -n_l\,n_m\,\left(\delta_{lm}\delta_{ab} - \delta_{lb}\delta_{am}\right) = -\delta_{ab} + n_a\,n_b \end{aligned} \tag{1.4.146}$$

Continuando, risulta allora

$$\begin{aligned} \left(Q^3\right)_{ab} &= Q^2_{as}Q_{sb} = \left(-\delta_{as} + n_a\,n_s\right) n_m\,\epsilon_{msb} = \\ &= -n_m\,\epsilon_{mab} + n_a\,n_s\,n_m\,\epsilon_{msb} = -(Q)_{ab} \end{aligned} \tag{1.4.147}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R(\vec{\phi}) &= e^{\phi Q} = I + \phi Q + \frac{\phi^2}{2!}Q^2 + \frac{\phi^3}{3!}Q^3 + \frac{\phi^4}{4!}Q^4 + ... = \\ &= I + \phi Q + \frac{\phi^2}{2!}Q^2 - \frac{\phi^3}{3!}Q - \frac{\phi^4}{4!}Q^2 + ... \end{aligned} \tag{1.4.148}$$

Se poniamo adesso

$$(N)_{ab} \equiv n_a\,n_b \quad \Rightarrow \quad Q^2 = N - I \quad \Rightarrow \quad -Q^2 = I - N \tag{1.4.149}$$

ecco che possiamo riscrivere la rotazione come

$$\begin{aligned} R(\vec{\phi}) &= (I-N) + N + \phi Q - \frac{\phi^2}{2!}(I-N) - \frac{\phi^3}{3!}Q + \frac{\phi^4}{4!}(I-N) + ... = \\ &= N + (I-N)\left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + ...\right) + Q\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + ...\right) = \\ &= N + (I-N)\,cos\phi + Q\,sin\phi \end{aligned} \tag{1.4.150}$$

Definiamo ora come in $a)$

$$\vec{K} = -i\,\vec{J} \quad \Rightarrow \quad (K_i)_{jm} = -\epsilon_{ijm} \tag{1.4.151}$$

Riguardo ai boost definiti da questi generatori, evidentemente risulta

$$B(\vec{\eta}) \equiv B(\eta\,\vec{n}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}} \equiv e^{\eta\,T} \tag{1.4.152}$$

dove abbiamo definito

$$T \equiv i\vec{n}\cdot\vec{K} = i\vec{n}\cdot(-i\vec{J}) = \vec{n}\cdot\vec{J} = -iQ \tag{1.4.153}$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned} B(\vec{\eta}) &= I + \eta\,T + \frac{\eta^2}{2!}\,T^2 + \frac{\eta^3}{3!}\,T^3 + \frac{\eta^4}{4!}\,T^4 + ... = \\ &= I + \eta\,(-iQ) - \frac{\eta^2}{2!}\,Q^2 - i\frac{\eta^3}{3!}\,Q^3 + \frac{\eta^4}{4!}\,Q^4 + ... = \\ &= I + \eta\,(-iQ) - \frac{\eta^2}{2!}\,Q^2 + i\frac{\eta^3}{3!}\,Q - \frac{\eta^4}{4!}\,Q^2 + ... = \\ &= I - Q^2\left(\frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + ...\right) - iQ\left(\eta + \frac{\eta^3}{3!} + ...\right) = \\ &= N + (I-N)\,ch\eta - iQ\,sh\eta \end{aligned} \tag{1.4.154}$$

ovvero, in termini dei consueti parametri β e γ legati alla rapidità η dalle ben note relazioni

$$ch\,\eta = \gamma; \qquad sh\,\eta = \beta\gamma \tag{1.4.155}$$

abbiamo

$$B(\vec{\eta}) \;=\; N + (I-N)\gamma - iQ\,\beta\gamma \tag{1.4.156}$$

In particolare, mentre $R(\phi)$ risulta essere una matrice reale, $B(\vec{\eta})$ non lo è.

Se avessimo posto $\vec{K} = i\vec{J}$ (caso b)), avremmo ovviamente trovato

$$B(\vec{\eta}) \;=\; N + (I-N)\gamma + iQ\,\beta\gamma \tag{1.4.157}$$

ovvero il risultato "riflesso", definito dalla trasformazione $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$.

Ma torniamo di nuovo alla definizione delle matrici **A** e **B** e costruiamo esplicitamente, per prima cosa, gli invarianti a esse associati. Si ha

$$\mathbf{A}^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 + i\mathbf{L}\cdot\mathbf{K} + i\mathbf{K}\cdot\mathbf{L}\right) \tag{1.4.158}$$

$$\mathbf{B}^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 - i\mathbf{L}\cdot\mathbf{K} - i\mathbf{K}\cdot\mathbf{L}\right) \tag{1.4.159}$$

D'altronde sappiamo che, qualunque sia $j = 1,\,2,\,3$

$$[L_j, K_j] = 0 \tag{1.4.160}$$

dunque

$$\mathbf{A}^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 + 2i\mathbf{L}\cdot\mathbf{K}\right) \tag{1.4.161}$$

$$\mathbf{B}^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 - 2i\mathbf{L}\cdot\mathbf{K}\right) \tag{1.4.162}$$

Valutiamo quindi la quantità $\mathbf{L}\cdot\mathbf{K}$. Si ha

$$\begin{aligned}
(\mathbf{L}\cdot\mathbf{K})^{\alpha}_{.\,\beta} &= \frac{-1}{2}\epsilon_{jab}\left(J^{ab}\,(-1)J0j\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{jab}\left(J^{ab}\right)^{\alpha}_{.\,\gamma}\left(J^{0j}\right)^{\gamma}_{.\,\beta} = \\
&= \frac{(-i)^2}{2}\epsilon_{jab}\left(\delta^{a\alpha}\,\delta^{b}_{\gamma} - \delta^{b\alpha}\,\delta^{a}_{\gamma}\right)\left(\delta^{0\gamma}\,\delta^{j}_{\beta} - \delta^{j\gamma}\,\delta^{0}_{\beta}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{jab}\left(\delta^{a\alpha}\,\delta^{0b}\,\delta^{j}_{\beta} - \delta^{a\alpha}\,\delta^{jb}\,\delta^{0}_{\beta} - \delta^{b\alpha}\,\delta^{a0}\,\delta^{j}_{\beta} + \delta^{b\alpha}\,\delta^{aj}\,\delta^{0}_{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{1.4.163}$$

Poiché gli indici italici j, a, b vanno da 1 a 3, il primo e il terzo termine dell'espressione precedente sono nulli per cui abbiamo

$$(\mathbf{L}\cdot\mathbf{K})^{\alpha}_{.\,\beta} \;=\; -\frac{1}{2}\epsilon_{jab}\left(-\delta^{a\alpha}\,\delta^{jb}\,\delta^{0}_{\beta}\right) - \frac{1}{2}\epsilon_{jab}\left(\delta^{b\alpha}\,\delta^{aj}\,\delta^{0}_{\beta}\right) \equiv 0 \tag{1.4.164}$$

dove il risultato nullo dipende dal fatto che la contrazione del tensore antisimmetrico ϵ_{jab} con il tensore simmetrico δ^{jb} o con δ^{ja} dà ovviamente un risultato nullo. Possiamo quindi concludere che

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2\right) = \mathbf{B}^2 \tag{1.4.165}$$

Veniamo ora al calcolo esplicito dei due termini $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{K}^2$. Si ha

$$\left(\mathbf{L}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \left(\frac{-1}{2}\,\epsilon_{jab}J^{ab}\right)^{\alpha}_{.\,\gamma}\left(\frac{-1}{2}\,\epsilon_{jcd}J^{cd}\right)^{\gamma}_{.\,\beta} \tag{1.4.166}$$

dove gli indici greci α, β, γ vanno, al solito, da 0 a 3, mentre gli indici latini j, a, b, c, d vanno da 1 a 3. Si ha

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{L}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} &= \frac{1}{4}\,\epsilon_{jab}\,\epsilon_{jcd}\left(J^{ab}\right)^{\alpha}_{.\,\gamma}\left(J^{cd}\right)^{\gamma}_{.\,\beta} = \frac{1}{4}\left(\delta_{ac}\,\delta_{bd} - \delta_{ad}\,\delta_{bc}\right)\left(J^{ab}J^{cd}\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \\
&= \frac{1}{4}\left(J^{ab}J^{ab} - J^{ab}J^{ba}\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \frac{1}{2}\left(J^{ab}J^{ab}\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \\
&= \frac{1}{2}\left(J^{ab}\right)^{\alpha}_{.\,\gamma}\left(J^{ab}\right)^{\gamma}_{.\,\beta} = \frac{(-i)^2}{2}\left(\delta^{a\alpha}\,\delta^{b}_{\gamma} - \delta^{b\alpha}\,\delta^{a}_{\gamma}\right)\left(\delta^{a\gamma}\,\delta^{b}_{\beta} - \delta^{b\gamma}\,\delta^{a}_{\beta}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\delta^{a\alpha}\,\delta^{ab}\,\delta^{b}_{\beta} - \delta^{a\alpha}\,\delta^{bb}\,\delta^{a}_{\beta} - \delta^{b\alpha}\,\delta^{aa}\,\delta^{b}_{\beta} + \delta^{b\alpha}\,\delta^{ab}\,\delta^{a}_{\beta}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\delta^{a\alpha}\,\delta^{a}_{\beta} - \delta^{a\alpha}(-3)\delta^{a}_{\beta} - \delta^{b\alpha}(-3)\delta^{b}_{\beta} - \delta^{a\alpha}\,\delta^{a}_{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{1.4.167}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\delta^{ab} = g^{ab}$ e vale -1 quando $a = b$. Dunque

$$\left(\mathbf{L}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \frac{1}{2}\delta^{a\alpha}\,\delta^{a}_{\beta}(1 - 3 - 3 + 1) = -2\,\delta^{a\alpha}\,\delta^{a}_{\beta} \tag{1.4.168}$$

che, se gli indici α o β sono nulli, esso vale zero, mentre se si tratta di indici spaziali esso vale $+2$ ($\delta^{a\alpha} = -1...$); dunque

$$\left(\mathbf{L}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = 2\,I - 2\,\delta^{0\alpha}\,\delta_{0\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.4.169}$$

A questo risultato potevamo, naturalmente, giungere anche direttamente, osservando che

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.170}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.171}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.172}$$

Veniamo ora a valutare $\mathbf{K}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} &= (K_j)^{\alpha}_{.\,\gamma}\,(K_j)^{\gamma}_{.\,\beta} = \left(J^{j0}\right)^{\alpha}_{.\,\gamma}\left(J^{j0}\right)^{\gamma}_{.\,\beta} = (-i)^2\left(\delta^{j\alpha}\,\delta^0_\gamma - \delta^{0\alpha}\,\delta^j_\gamma\right)\left(\delta^{j\gamma}\,\delta^0_\beta - \delta^{0\gamma}\,\delta^j_\beta\right) = \\ &= -\left(\delta^{j\alpha}\,\delta^{0j}\,\delta^0_\beta - \delta^{j\alpha}\,\delta^{00}\,\delta^j_\beta - \delta^{0\alpha}\,\delta^{jj}\,\delta^0_\beta + \delta^{0\alpha}\,\delta^{j0}\,\delta^j_\beta\right) \end{aligned} \tag{1.4.173}$$

Poiché gli indici latini assumono valori fra 1 e 3, il primo e l'ultimo addendo nella relazione precedente sono nulli, e dunque

$$\left(\mathbf{K}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = \delta^{j\alpha}\,\delta^{00}\,\delta^j_\beta + \delta^{0\alpha}\,\delta^{jj}\,\delta^0_\beta = -3\delta^{0\alpha}\,\delta^0_\beta - \delta^\alpha_j\,\delta^j_\beta \tag{1.4.174}$$

la quale è una matrice diagonale che, se $\alpha = \beta = 0$ vale -3, mentre, se $\alpha = \beta = 1, 2$ oppure 3, vale -1, ovvero

$$\left(\mathbf{K}^2\right)^{\alpha}_{.\,\beta} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I - 2\,\delta^{0\alpha}\,\delta_{0\beta} \tag{1.4.175}$$

a cui potevamo, di nuovo, giungere anche direttamente essendo

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K_1^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.176}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K_2^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.177}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K_3^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.178}$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2\right) = \frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \left[-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right\} = \\
&= \frac{3}{4} I
\end{aligned} \tag{1.4.179}
$$

Questo risultato dimostra che i generatori **A** e **B** definiti sopra, individuano entrambi una rappresentazione di $SU(2)$ di spin $1/2$, ovvero possiamo concludere che la rappresentazione consueta del gruppo di Lorentz ortocrono proprio fatta dalle matrici reali 4×4 con determinante $+1$, che lasciano invarianti il ds^2, ha la struttura del prodotto diretto $(s_A, s_B) = (1/2, 1/2)$ nel senso che abbiamo visto prima.

Veniamo adesso alla forma esplicita degli operatori **A** e **B**. Risulta

$$
A_1 \equiv \frac{1}{2}(L_1 + iK_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.180}
$$

$$
A_2 \equiv \frac{1}{2}(L_2 + iK_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.181}
$$

$$
A_3 \equiv \frac{1}{2}(L_3 + iK_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.182}
$$

$$
B_1 \equiv \frac{1}{2}(L_1 - iK_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.183}
$$

$$
B_2 \equiv \frac{1}{2}(L_2 - iK_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.184}
$$

$$
B_3 \equiv \frac{1}{2}(L_3 - iK_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.185}
$$

E' facile verificare che, qualunque sia l'indice j risulta che $(A_j)^2 = (B_j)^2 = \frac{1}{4}\, I$ e quindi, come abbiamo già dimostrato esplicitamente, che $A_j A_j = B_j B_j = \frac{3}{4}\, I$.
Ma occupiamoci adesso degli autovalori/autovettori di A_3.
L'equazione agli autovalori è

$$det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -x & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & -x & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = 0 \tag{1.4.186}$$

Sviluppando secondo la prima riga, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= -x(-x^3 + x/4) + \frac{1}{2}(-x^2/2 + 1/8) = x^4 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} = x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} = \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \end{aligned} \tag{1.4.187}$$

ovvero le radici sono doppie e valgono $x = \pm\frac{1}{2}$. Quanto agli autovettori normalizzati, una possibile scelta per quelli corrispondenti all'autovalore $+1/2$ è la seguente

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.188}$$

mentre, per quanto riguarda l'autovalore $-1/2$, possiamo scegliere

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.189}$$

Venendo ora a B_3 anche questo ha autovalori $\pm 1/2$, ciascuno "doppio" e quanto agli autovettori per l'autovalore $+1/2$ possiamo scegliere

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.190}$$

mentre per gli autovettori corrispondenti all'autovalore $-1/2$ possiamo scegliere

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.191}$$

Come si vede sia A_3 che B_3 possono essere diagonalizzati nella stessa base, come è naturale che sia, visto che commutano.
Definiamo allora questa base comune, per esempio, nel modo seguente:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \; u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \; u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.192}$$

ovvero

$$u_1 = v_3 = w_1; \quad u_2 = v_1 = w_3; \quad u_3 = v_2 = w_2; \quad u_4 = v_4 = w_4 \tag{1.4.193}$$

In questa base u_i abbiamo che

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4.194}$$

Come si vede, per esempio lo spazio generato da (u_1, u_4) corrisponde al sottospazio degli autovettori di A_3 corrispondenti all'autovalore $-1/2$, ma B_3 li differenzia. Analogamente se prendiamo lo spazio generato da u_2, u_3, corrispondente al sottospazio degli autovettori di A_3 corrispondenti all'autovalore $+1/2$, sono differenziati dagli autovalori di B_3.
Una base più espressiva può essere la seguente

$$e_1 = u_3; \quad e_2 = u_2; \quad e_3 = u_1; \quad e_4 = u_4 \tag{1.4.195}$$

in cui risulta

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4.196}$$

la quale mostra in modo evidente come la rappresentazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio da cui siamo partiti sia appunto del tipo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Queste basi, comunque, danno luogo a combinazioni complesse delle coordinate spaziali e temporali, riflettendo l'estensione complessa dell'algebra di Lie che ci ha fatto uscire dalla struttura analitica propria del gruppo (le algebre di Lie sono sul corpo reale).

1.5 La rappresentazione spinoriale

Una importante rappresentazione del gruppo di Lorentz è quella spinoriale $S(\Lambda)$, la quale descrive le proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz delle soluzioni dell'equazioni di Dirac.
Ricordiamo che l'equazione di Dirac nasce dall'idea di avere una equazione del primo ordine nelle derivate parziali spazio-temporali ∂_μ, la quale garantisca comunque alle soluzioni di soddisfare anche l'equazione di Klein-Gordon, che è l'equazione relativistica "necessaria" per una qualsiasi particella libera di massa m.
Occorre quindi che l'operatore di Dirac $\not{D} \equiv i\,\gamma^\mu \partial_\mu$ sia tale per cui

$$(\not{D})^2 = -\Box \equiv -\partial^\mu \partial_\mu \tag{1.5.197}$$

in modo che, se ψ soddisfa l'equazione $(\not{D} - m)\psi = 0$ e quindi anche l'equazione $(\not{D} + m)(\not{D} - m)\psi = 0$, se vale la (1.5.197), essa soddisfi appunto anche l'equazione di Klein-Gordon $(\Box + m^2)\psi = 0$.
Ma affinché possa essere soddisfatta la (1.5.197) occorre e basta che sia verificata la condizione

$$\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu} \cdot I \tag{1.5.198}$$

la quale, come sappiamo, definisce una struttura di algebra di Clifford[24,25].

Per quanto visto precedentemente (cfr.(1.1.26) e (1.1.51)), siamo dunque in grado di definire una rappresentazione S del gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (ovvero di $SO(1,3)$) attraverso i generatori

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{4i}\,[\gamma^\mu,\, \gamma^\nu] \Leftrightarrow S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \tag{1.5.200}$$

Questa rappresentazione viene talvolta indicata, equivalentemente, anche come

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} = e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]} \equiv e^{\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{1.5.201}$$

dove il tensore $\sigma^{\mu\nu}$ è definito come

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{1.5.202}$$

La rappresentazione $S(\Lambda)$ definita dalla (1.5.201) è la *rappresentazione spinoriale*, la quale caratterizza la legge di trasformazione del campo di Dirac sotto il gruppo di Lorentz, tale appunto per cui risulta

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi(\Lambda x + a) \tag{1.5.203}$$

[24] H. Giorgi: *Lie algebras in particle physics*, Westview Press, Boulder, Colorado 1999.
[25] La rappresentazione delle matrici γ^μ che useremo à quella di Pauli-Dirac, cioè

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.199}$$

Per quanto già visto (cfr.(1.1.53)), la $S(\Lambda)$ agisce sulle matrici γ^μ attraverso la rappresentazione vettoriale del gruppo, cioè abbiamo che

$$S(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\nu}\,\gamma^\nu \;\;\Leftrightarrow\;\; S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) = (\Lambda)^\mu_{\cdot\nu}\,\gamma^\nu \qquad (1.5.204)$$

Vediamo adesso alcune altre proprietà interessanti della rappresentazione spinoriale:

- essa *non* è una rappresentazione unitaria (coerentemente con il fatto che si tratta di una rappresentazione non banale di dimensione finita di un gruppo non compatto ...), infatti essa[26] è tale per cui

$$\begin{aligned} &S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0\,S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^0 \Leftrightarrow S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0\,S(\Lambda^{-1})\,\gamma^0 \\ &\Leftrightarrow \gamma^0\,S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) \end{aligned} \qquad (1.5.208)$$

- per una rotazione[27] $R(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{L}}$ definita dal vettore $\vec{\theta} \equiv \theta\,\vec{n}$, risulta

$$S(\vec{\theta}) = e^{\frac{i}{2}\,\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}} = cos(\theta/2)\,I + i(\vec{n}\cdot\vec{\Sigma})\,sin(\theta/2) \qquad (1.5.211)$$

  dove

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad (1.5.212)$$

[26] Dalla definizione (1.5.201) della $S(\Lambda)$ abbiamo infatti che

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]} \Rightarrow S(\Lambda)^\dagger = e^{\left(\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right)^\dagger} \qquad (1.5.205)$$

ma $\omega_{\mu\nu}$ è la matrice dei coefficienti che, essendo reale, non è alterata dall'aggiunzione (si osservi a questo proposito che l'aggiunzione è fatta rispetto agli indici spinoriali, i quali non hanno nulla a che vedere con gli indici della matrice dei coefficienti ...); mentre risulta

$$([\gamma^\mu,\gamma^\nu])^\dagger = [\gamma^{\nu\dagger},\gamma^{\mu\dagger}] \qquad (1.5.206)$$

per cui, ricordando che $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, ne segue che

$$\begin{aligned} S(\Lambda)^\dagger &= e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}\gamma^0[\gamma^\nu,\gamma^\mu]\gamma^0} = \gamma^0\,e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\nu,\gamma^\mu]}\,\gamma^0 = \gamma^0\,e^{-\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}\,\gamma^0 = \\ &= \gamma^0\,S(\Lambda^{-1})\,\gamma^0 = \gamma^0\,S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^0 \end{aligned} \qquad (1.5.207)$$

[27] Dalla definizione (1.2.66) abbiamo infatti che i generatori delle rotazioni sono definiti, in termini dei generatori del gruppo di Lorentz, come

$$\mathbf{L} = -(J^{23}, J^{31}, J^{12}) \equiv \vec{L} \qquad (1.5.209)$$

Usando allora la definizione (1.5.201) di $J^{\mu\nu}$ relativa alla rappresentazione spinoriale, è immediato dimostrare che

$$\vec{L} = \frac{1}{2}\,\vec{\Sigma} \qquad (1.5.210)$$

dove $\vec{\Sigma}$ è data appunto dalla (1.5.212).

- per un boost $B(\vec{v}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}}$, definito dalla velocità $\vec{v} = v\,\vec{n} = th(\eta)\,\vec{n}$ dove $0 \leq v \leq 1$ ed η è la rapidità del boost ($0 \leq \eta \equiv th^{-1}(v) \leq +\infty$), risulta[28]

$$S(\vec{v}) = e^{-\frac{1}{2}\,\eta\,\vec{n}\cdot\vec{\alpha}} = ch(\eta/2)\,I - (\vec{n}\cdot\vec{\alpha})\,sh(\eta/2) \tag{1.5.215}$$

  dove abbiamo definito

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.216}$$

- siccome la matrice $\gamma_5 \equiv i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ anticommuta con tutte del γ^μ, essa commuta con $\sigma_{\mu\nu}$ ed è quindi scalare per trasformazioni di Lorentz, ovvero risulta

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma_5\,S(\Lambda) = \gamma_5 \tag{1.5.217}$$

A partire dai generatori **L** e **K** delle rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz si possono costruire, come abbiamo visto, gli operatori

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\mathbf{L} + i\mathbf{K}}{2}; \qquad \mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{L} - i\mathbf{K}}{2} \tag{1.5.218}$$

che costituiscono, separatamente, una rappresentazione dei generatori di $SU2$. Riguardo alla rappresentazione spinoriale, osserviamo immediatamente che essa *non* può essere irriducibile proprio perché la matrice γ_5 commuta con le $\sigma^{\mu\nu}$ e dunque commuta sia con **L** che con **K** senza però essere multipla dell'identità. Gli autovalori di γ_5 sono ± 1, e quindi dobbiamo aspettarci che siano proprio i proiettori chirali a individuare i sottospazi lasciati invarianti dalla rappresentazione spinoriale.
In altre parole, la rappresentazione spinoriale risulterà essere la somma diretta di due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz, ciascuna definita nei sottospazi individuati dai proiettori chirali. Ognuna di queste rappresentazioni sarà, a sua volta, definita da un opportuno valore di $(s_1,\, s_2)$, legato

[28] Dalla definizione (1.2.67) abbiamo infatti che i generatori dei boost sono definiti, in termini dei generatori $J^{\mu\nu}$ del gruppo di Lorentz, come

$$\mathbf{K} = -(J^{01}, J^{02}, J^{03}) \equiv \vec{K} \tag{1.5.213}$$

Usando allora, di nuovo, la definizione (1.5.201) di $J^{\mu\nu}$ relativa alla rappresentazione spinoriale, è immediato dimostrare che risulta

$$\vec{K} = \frac{i}{2}\,\vec{\alpha} \tag{1.5.214}$$

dove $\vec{\alpha}$ è data appunto dalla (1.5.216).
Siccome $(\vec{n}\cdot\vec{\alpha})^2 = I$, segue immediatamente la (1.5.215).

alle rappresentazioni di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ in quegli stessi sottospazi invarianti. Per capire la forma di queste rappresentazioni, iniziamo esplicitando la forma degli operatori **A** e **B**.
Nella rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ, si ha

$$\mathbf{A} \equiv \vec{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & -\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \vec{\sigma} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} \equiv \vec{B} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1.5.219}$$

mentre, riguardo ai proiettori chirali, è

$$\chi_L = \frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}; \qquad \chi_R = \frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \tag{1.5.220}$$

per cui risulta immediato che

$$\chi_L\mathbf{A} = \mathbf{A}; \qquad \chi_L\mathbf{B} = 0 \tag{1.5.221}$$

$$\chi_R\mathbf{A} = 0; \qquad \chi_R\mathbf{B} = \mathbf{B} \tag{1.5.222}$$

Questo significa che nel sottospazio definito dal proiettore χ_L, **B** potrà essere solo nullo e dunque questo spazio sarà sede della rappresentazione $(s_1, 0)$, essendo $s_1 = 1/2$ definito da **A**. Analogamente il sottospazio definito da χ_R sarà, a sua volta, sede della rappresentazione $(0, s_2)$ con, ancora, $s_2 = 1/2$.
In questo modo, la rappresentazione spinoriale risulta essere del tipo

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{1.5.223}$$

Nell'ambito dello spazio definito dal proiettore χ_L, dovendo essere $\mathbf{B} = 0$, necessariamente deve risultare

$$\mathbf{L} - i\,\mathbf{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = i\,\mathbf{K} \tag{1.5.224}$$

e quindi

$$\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}; \quad \vec{K} = -i\frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{L}}\, e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{K}} = e^{\frac{i}{2}\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}} e^{\frac{1}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}} \tag{1.5.225}$$

ovvero si tratta della rappresentazione a valori in $SL(2, C)$.
Ricordando adesso che

$$\sigma_2^2 = I, \quad \sigma_2\,\vec{\sigma}\sigma_2 = \vec{\sigma}^* \tag{1.5.226}$$

è facile convincersi che la rappresentazione nello spazio individuato da χ_R è equivalente alla rappresentazione complessa coniugata in $SL(2, C)$ di cui sopra, che, però, non è a essa equivalente (come accade, invece, nel caso del solo $SU(2)$).

1.6 La Rappresentazione Aggiunta di $\mathcal{L}_+^\uparrow$

I generatori del gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sono sei e una possibile base della sua algebra di Lie è fatta dagli operatori $\mathbf{L} \equiv \vec{L}$ e $\mathbf{K} \equiv \vec{K}$, le cui regole di commutazione, come è noto, sono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
[L_i, \, , L_j] &= i\,\epsilon_{ijk} L_k && (1.6.227)\\
[L_i, \, K_j] &= i\,\epsilon_{ijk} K_k && (1.6.228)\\
[K_i, \, L_j] &= i\,\epsilon_{ijk} K_k && (1.6.229)\\
[K_i, \, K_j] &= -i\,\epsilon_{ijk} L_k && (1.6.230)
\end{aligned}
$$

Conviene adesso rinumerare la base dell'algebra nel modo seguente, ponendo

$$\hat{A} \equiv (\mathbf{L}, \, \mathbf{K}) \tag{1.6.231}$$

e definiamo quindi le seguenti matrici ρ_i (quadrate 3×3) nel modo seguente[29]

$$(\rho_i)_{jk} \equiv -i\,\epsilon_{ijk} \tag{1.6.233}$$

Ricordiamo infine che i generatori della Rappresentazione Aggiunta (RA) sono definiti direttamente a partire dalle costanti di struttura, secondo la regola per cui se

$$g(x) = e^{i x_j \cdot \hat{A}_j} \quad e \quad \left[\hat{A}_j, \hat{A}_k\right] = -i\, C_{jk}^m \hat{A}_m \tag{1.6.234}$$

allora i generatori $\hat{T}_j$ della RA sono le matrici $n \times n$ così definite

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} = i\, C_{jk}^m \tag{1.6.235}$$

dove n è il numero di parametri del gruppo (uguale a 6, nel nostro caso).

Dalle (1.6.227) - (1.6.230), segue allora che

$$j = 1,2,3: \quad \hat{T}_j = \begin{pmatrix} \rho_j & 0 \\ 0 & \rho_j \end{pmatrix} \equiv \sigma_0 \otimes \rho_j; \quad \hat{T}_{j+3} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_j \\ -\rho_j & 0 \end{pmatrix} \equiv i\sigma_2 \otimes \rho_j \tag{1.6.236}$$

dove abbiamo indicato con σ_0 l'identità in due dimensioni e con σ_j le consuete matrici di Pauli.

Verifichiamo le regole di commutazione. Abbiamo[30]

$$
\begin{aligned}
[\hat{T}_j, \hat{T}_k] &= \sigma_0 \otimes \rho_j \cdot \sigma_0 \otimes \rho_k - \sigma_0 \otimes \rho_k \cdot \sigma_0 \otimes \rho_j = (\sigma_0^2) \otimes [\rho_j, \, \rho_k] = \\
&= i\,\epsilon_{jkm} \sigma_0 \otimes \rho_m = i\,\epsilon_{jkm}\, \hat{T}_m && (1.6.238)
\end{aligned}
$$

[29] Si osservi che le matrici ρ_i coincidono con i generatori del gruppo $SO(3)$, ovvero costituiscono una rappresentazione degli operatori di momento angolare, per cui

$$[\rho_i, \, \rho_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,\rho_k \tag{1.6.232}$$

[30] Ricordiamo che

$$(\sigma_j \otimes \rho_k) \cdot (\sigma_m \otimes \rho_n) = (\sigma_j \sigma_m) \otimes (\rho_k \rho_n) \tag{1.6.237}$$

visto che ($\sigma_0^2 = I = \sigma_0$) mentre $[\rho_j,\, \rho_k] = i\,\epsilon_{jkm}\,\rho_m$.
Analogamente abbiamo che ($\sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0 = \sigma_2$)

$$\begin{aligned}
[\hat{T}_j, \hat{T}_{k+3}] &= \sigma_0 \otimes \rho_j \cdot i\sigma_2 \otimes \rho_k - i\sigma_2 \otimes \rho_k \cdot \sigma_0 \otimes \rho_j = i\sigma_2 \otimes [\rho_j,\, \rho_k] = \\
&= i\,\epsilon_{jkm} i\sigma_2 \otimes \rho_m = i\,\epsilon_{jkm}\,\hat{T}_{m+3} \qquad (1.6.239)
\end{aligned}$$

e infine risulta ($\sigma_2^2 = \sigma_0$)

$$\begin{aligned}
[\hat{T}_{j+3}, \hat{T}_{k+3}] &= i\sigma_2 \otimes \rho_j \cdot i\sigma_2 \otimes \rho_k - i\sigma_2 \otimes \rho_k \cdot i\sigma_2 \otimes \rho_j = (i\sigma_2)^2 \otimes [\rho_j,\, \rho_k] = \\
&= i\,\epsilon_{jkm}(-\sigma_0) \otimes \rho_m = -i\,\epsilon_{jkm}\,\hat{T}_m \qquad (1.6.240)
\end{aligned}$$

Verificate così le regole di commutazione fra i sei operatori $\hat{T}$, vediamo adesso questa rappresentazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio come è fatta in termini delle due rappresentazioni indipendenti di $SU(2)$ definite dai consueti operatori

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{L} + i\mathbf{K}}{2}; \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{L} - i\mathbf{K}}{2} \qquad (1.6.241)$$

che, nel caso attuale, divengono

$$A_j = \frac{\hat{T}_j + i\hat{T}_{j+3}}{2}; \qquad B_j = \frac{\hat{T}_j - i\hat{T}_{j+3}}{2}; \quad j = 1,\, 2,\, 3 \qquad (1.6.242)$$

Esplicitamente risulta

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{\hat{T}_j + i\hat{T}_{j+3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 \otimes \rho_j + i\,i\sigma_2 \otimes \rho_j\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 - \sigma_2\right) \otimes \rho_j \quad (1.6.243)\\
B_j &= \frac{\hat{T}_j - i\hat{T}_{j+3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 \otimes \rho_j - i\,i\sigma_2 \otimes \rho_j\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 + \sigma_2\right) \otimes \rho_j \quad (1.6.244)
\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
(\sigma_0 - \sigma_2)^2 &= \sigma_0^2 - \sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_0 + \sigma_2^2 = 2\sigma_0(\sigma_0 - \sigma_2) = 2(\sigma_0 - \sigma_2) \quad (1.6.245)\\
(\sigma_0 + \sigma_2)^2 &= \sigma_0^2 + \sigma_0\sigma_2 + \sigma_2\sigma_0 + \sigma_2^2 = 2\sigma_0(\sigma_0 + \sigma_2) = 2(\sigma_0 + \sigma_2) \quad (1.6.246)\\
(\sigma_0 - \sigma_2)(\sigma_0 + \sigma_2) &= \sigma_0^2 + \sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_0 - \sigma_2^2 = 0 \quad (1.6.247)
\end{aligned}$$

ecco che risultano immediatamente verificate le regole di commutazione ben note, ovvero

$$\begin{aligned}
[A_j,\, A_k] &= \frac{1}{4}(\sigma_0 - \sigma_2)^2 \otimes [\rho_j,\, \rho_k] = i\epsilon_{jkm}\,A_m \qquad (1.6.248)\\
[B_j,\, B_k] &= \frac{1}{4}(\sigma_0 + \sigma_2)^2 \otimes [\rho_j,\, \rho_k] = i\epsilon_{jkm}\,B_m \qquad (1.6.249)\\
[A_j,\, B_k] &= \frac{1}{4}(\sigma_0 - \sigma_2)(\sigma_0 + \sigma_2) \otimes [\rho_j,\, \rho_k] = 0 \qquad (1.6.250)
\end{aligned}$$

Evidentemente $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{B}^2$ commutano sia con gli A_j che con i B_j, dunque, se la rappresentazione aggiunta fosse irriducibile, dovrebbero essere entrambi multipli dell'identità e quindi necessariamente proporzionali. Vediamo[31]:

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_0 - \sigma_2)^2 \otimes \rho_i \rho_i = (\sigma_0 - \sigma_2) \otimes I \qquad (1.6.252)$$

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_0 + \sigma_2)^2 \otimes \rho_i \rho_i = (\sigma_0 + \sigma_2) \otimes I \qquad (1.6.253)$$

Come si vede, né A^2 né B^2 sono multipli dell'identità in sei dimensioni, bensì risulta

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{pmatrix} \qquad (1.6.254)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} I & -iI \\ iI & I \end{pmatrix} \qquad (1.6.255)$$

quindi la rappresentazione aggiunta del gruppo di Lorentz ortocrono proprio non è irriducibile.
Poiché gli operatori $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{B}^2$ commutano fra loro, essi potranno essere diagonalizzati simultaneamente. Per questo è necessario trovare gli autovalori e quindi gli autovettori simultanei degli operatori $\sigma_0 - \sigma_2$ e $\sigma_0 + \sigma_2$.
E' facile vedere che i loro autovalori sono 0 e 2 e che una base di autovettori comuni normalizzati è, per esempio, la seguente

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.6.256)$$

Risulta infatti

$$\begin{matrix} (\sigma_0 - \sigma_2)v_1 = 0; & (\sigma_0 - \sigma_2)v_2 = 2\,v_2 \\ (\sigma_0 + \sigma_2)v_1 = 2\,v_1; & (\sigma_0 + \sigma_2)v_2 = 0 \end{matrix} \qquad (1.6.257)$$

e dunque, in questa nuova base, risulta

$$(\sigma_0 - \sigma_2) \equiv 2\,d = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.6.258)$$

$$(\sigma_0 + \sigma_2) \equiv 2\,u = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.6.259)$$

ovvero

$$\mathbf{A}^2 = 2\,d \otimes I; \qquad \mathbf{B}^2 = 2\,u \otimes I \qquad (1.6.260)$$

[31] Ricordiamo che, indicando con I l'identità in tre dimensioni, risulta

$$(\rho_i\,\rho_i)_{ab} = (-i)^2\,\epsilon_{iac}\,\epsilon_{icb} = -(\delta_{ac}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta cc) = -\delta_{ab} + 3\delta_{ab} = 2\,\delta_{ab} = 2I \qquad (1.6.251)$$

Questo risultato mostra che **B** agisce nello spazio dei primi tre vettori della nuova base, mentre **A** in quello degli altri tre. Poiché, laddove non sono nulli, entrambi gli operatori assumono il valore 2, ne segue che definiscono una rappresentazione di spin $s = 1$, per cui infatti $s^2 = (s + 1) \cdot s = 2$.
In conclusione, la rappresentazione aggiunta del gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è del tipo $(1, 0) \oplus (0, 1)$.

Veniamo adesso alla determinazione del tensore di Killing. Come si ricorderà, esso è definito nel modo seguente

$$\gamma_{jk} = Tr\left(\hat{T}_j \, \hat{T}_k\right); \qquad 1 \le j, k \le 6 \tag{1.6.261}$$

Abbiamo dunque che[32]

$$\begin{aligned}
1 \le j, k \le 3 : \gamma_{jk} &= Tr\left(\sigma_0 \otimes \rho_j \cdot \sigma_0 \otimes \rho_k\right) = \\
&= Tr\left(\sigma_0^2 \otimes (\rho_j \rho_k)\right) = Tr(\sigma_0^2)\, Tr(\rho_j \rho_k) = \\
&= 2 \cdot 2\delta_{jk} \qquad (1.6.266)\\
1 \le j, k-3 \le 3 : \gamma_{jk} &= Tr\left(\sigma_0 \otimes \rho_j \cdot i\sigma_2 \otimes \rho_k\right) = \\
&= Tr\left(\sigma_0 \cdot i\sigma_2\right) Tr(\rho_j \rho_k) = 0 \qquad (1.6.267)\\
4 \le j, k \le 6 : \gamma_{jk} &= Tr\left(i\sigma_2 \otimes \rho_j \cdot i\sigma_2 \otimes \rho_k\right) = \\
&= -Tr(\sigma_2^2) Tr(\rho_j \rho_k) = -2 \cdot 2\delta_{jk} \qquad (1.6.268)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\gamma_{jk} = 4\, \sigma_3 \otimes I \tag{1.6.269}$$

dove I è la matrice identità 3×3.
Evidentemente il tensore di Killing nella base scelta è diagonale, è invertibile ma *non* è definito positivo, coerentemente con il fatto che il gruppo di Lorentz ortocrono proprio *non* è compatto.
Essendo comunque invertibile, il tensore di Killing consente di definire in ogni rappresentazione irriducibile un invariante di Casimir attaverso la relazione

$$C = \gamma_{jk}^{-1}\, \hat{A}_j \hat{A}_k \tag{1.6.270}$$

che, data la scelta della base che abbiamo fatto, diventa

$$C = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2\right) \tag{1.6.271}$$

[32] Ricordiamo che

$$\begin{aligned}
&Tr(\sigma_0^2) = Tr(\sigma_0) = 2 && (1.6.262)\\
&Tr(\rho_j \rho_k) = (-i)^2 \epsilon_{jab}\epsilon_{kba} = \epsilon_{jab}\epsilon_{kab} = (\delta_{jk}\delta_{aa} - \delta_{ja}\delta_{ak}) = 3\delta_{jk} - \delta_{jk} = 2\delta_{jk} && (1.6.263)\\
&Tr(\sigma_0 \sigma_k) = Tr(\sigma_k) = 0 && (1.6.264)\\
&Tr((\sigma_k))^2 = Tr(\sigma_0) = 2 && (1.6.265)
\end{aligned}$$

1.7 Ancora sugli invarianti di Casimir di $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Abbiamo visto che l'operatore

$$\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 \equiv L_j L_j - K_j K_j \tag{1.7.272}$$

è un invariante di Casimir di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, ovvero è un operatore che commuta con tutti i generatori del gruppo e dunque con tutti gli elementi stessi di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, cioè, in altri termini, è uno *operatore scalare*.
Utilizzando $\mathbf{L}$ e $\mathbf{K}$ possiamo costruire anche un altro operatore scalare, cioè

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \equiv L_j K_j \tag{1.7.273}$$

Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned} [L_j K_j, L_k] &= L_j\,[K_j, L_k] + [L_j, L_k]\,K_j = L_j\; i\epsilon_{jks} K_s + i\epsilon_{jks} L_s\, K_j = \\ &= i\epsilon_{jks} L_j K_s + i\epsilon_{jks} L_s K_j = -i\epsilon_{kjs} L_j K_s - i\epsilon_{kjs} L_s K_j = \\ &= -i\epsilon_{kjs} L_j K_s + i\epsilon_{ksj} L_s K_j = 0 \end{aligned} \tag{1.7.274}$$

come pure che

$$\begin{aligned} [L_j K_j, K_k] &= L_j\,[K_j, K_k] + [L_j, K_k]\,K_j = L_j\; (-i)\epsilon_{jks} J_s + i\epsilon_{jks} K_s\, K_j = \\ &= i\epsilon_{kjs} L_j L_s + i\epsilon_{ksj} K_s K_j = 0 \end{aligned} \tag{1.7.275}$$

Questo risultato ci ricorda quanto abbiamo imparato riguardo al campo elettromagnetico. In quel caso, infatti, partendo dal tensore di Maxwell $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.276}$$

abbiamo potuto costruire due invarianti di Lorentz, cioè[33]

$$\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = B_j B_j - E_j E_j \equiv \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \tag{1.7.277}$$

$$\frac{1}{4}\,F^{\mu\nu} \cdot \tilde{F}_{\mu\nu} = E_j\, B_j \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \tag{1.7.278}$$

dove $\tilde{F}_{\mu\nu}$ è il tensore duale associato al tensore di Maxwell $F^{\mu\nu}$, definito in termini del tensore completamente antisimmetrico a quattro indici[34] $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$

[33] I coefficienti numerici $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ servono unicamente per rendere più evidente la struttura dell'invariante in termini delle grandezze fisiche coinvolte.

[34] Come riportato in Appendice, la definizione di $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ è tale per cui $\epsilon_{0123} = 1$ così come per qualunque altra permutazione pari di (0123), mentre vale -1 per le sue permutazioni dispari e vale 0 in tutti i restanti casi.

nel modo seguente

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.279}$$

Nel caso attuale è proprio l'insieme dei generatori $J^{\mu\nu}$ che svolge il ruolo[35] del tensore di Maxwell.
Iniziamo dimostrando che la matrice dei generatori di cui alla (1.4.132)

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{.\beta} = -i\left(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}\right) \tag{1.7.280}$$

si trasforma sotto il gruppo di Lorentz come un tensore. Vogliamo dimostrare che, qualunque sia la trasformazione di Lorentz Γ, risulta

$$\Gamma^{-1}\,J^{\mu\nu}\,\Gamma = \Gamma^{\mu}_{.\alpha}\,\Gamma^{\nu}_{.\beta}\,J^{\alpha\beta} \tag{1.7.281}$$

ovvero, in termini di componenti, abbiamo che

$$\left(\Gamma^{-1}\,J^{\mu\nu}\,\Gamma\right)^{\sigma}_{.\tau} = \Gamma^{\mu}_{.\alpha}\,\Gamma^{\nu}_{.\beta}\,\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\sigma}_{.\tau} \tag{1.7.282}$$

Iniziamo considerando il primo membro della (1.7.282), ma prima ricordiamo che $\Gamma^{-1} = g\,\Gamma^t\,g$, e dunque, in termini di componenti, si ha[36]

$$\left(\Gamma^{-1}\right)^{\sigma}_{.\alpha} = g_{\sigma\gamma}(\Gamma)^t_{\gamma\rho}\,g_{\rho\alpha} = g_{\sigma\gamma}(\Gamma)_{\rho\gamma}\,g_{\rho\alpha} \tag{1.7.284}$$

Risulta quindi che

$$\begin{aligned} i\left(\Gamma^{-1}\,J^{\mu\nu}\,\Gamma\right)^{\sigma}_{.\tau} &= i\left(\Gamma^{-1}\right)^{\sigma}_{.\alpha}\,(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{.\beta}\,\Gamma^{\beta}_{.\tau} = i\,g_{\sigma\gamma}(\Gamma)_{\rho\gamma}\,g_{\rho\alpha}\,(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{.\beta}\,\Gamma^{\beta}_{.\tau} = \\ &= g_{\sigma\gamma}(\Gamma)_{\rho\gamma}\,g_{\rho\alpha}\,(g_{\mu\alpha}I_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}I_{\mu\beta})\,(\Gamma)_{\beta\tau} = \\ &= g_{\sigma\gamma}(\Gamma)_{\rho\gamma}\,(I_{\rho\mu}I_{\nu\beta} - I_{\rho\nu}I_{\mu\beta})\,(\Gamma)_{\beta\tau} = \\ &= [g_{\sigma\gamma}(\Gamma)_{\mu\gamma}I_{\nu\beta} - g_{\sigma\gamma}(\Gamma)_{\nu\gamma}I_{\mu\beta}]\,(\Gamma)_{\beta\tau} = \\ &= (\Gamma\,g)_{\mu\sigma}\,\Gamma_{\nu\tau} - (\Gamma\,g)_{\nu\sigma}\,(\Gamma)_{\mu\tau} \end{aligned} \tag{1.7.285}$$

[35] La differenza è che nel caso del tensore di Maxwell gli elementi del tensore sono le componenti del campo elettrico e magnetico, mentre nel caso considerato gli elementi sono i generatori stessi del gruppo.

[36] E' opportuno ricordare che per una generica matrice di Lorentz Σ, quando scriviamo $\Sigma^{\alpha}_{.\beta}$ intendiamo che α sia il primo indice e sia controvariante, mentre β sia il secondo indice e risulti covariante. Se invece scriviamo $\Sigma^{\alpha\beta}$ intendiamo che entrambi gli indici siano controvarianti, essendo α il primo. Analogamente $\Sigma_{\alpha}^{.\beta}$ significa che α è il primo indice, ma è covariante mentre β è il secondo ed è controvariante. Se scriviamo $\Sigma_{\alpha\beta}$, questo significa che entrambi gli indici sono covarianti, essendo α il primo di essi.
Nel caso infine che si scriva $(\Sigma)_{\alpha\beta}$ si intende semplicemente l'elemento derlla matrice Σ che compare nella riga α e colonna β. Secondo queste definizioni, abbiamo in generale che

$$\Sigma^{\alpha}_{.\beta} = (\Sigma)_{\alpha\beta};\;\; \Sigma^{\alpha\beta} = (\Sigma g)_{\alpha\beta};\;\; \Sigma_{\alpha}^{.\beta} = (g\Sigma g)_{\alpha\beta};\;\; (\Sigma^{-1})^{\alpha}_{.\beta} = (g\Sigma^t g)_{\alpha\beta} \tag{1.7.283}$$

Venendo ora al secondo membro della (1.7.282), abbiamo

$$\begin{aligned} i\,\Gamma^{\mu}_{.\alpha}\,\Gamma^{\nu}_{.\beta}\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\sigma}_{.\tau} &= (\Gamma)_{\mu\alpha}\,(\Gamma)_{\nu\beta}\,(g_{\alpha\sigma}I_{\beta\tau} - g_{\beta\sigma}I_{alpha\tau}) = \\ &= (\Gamma g)_{\mu\sigma}(\Gamma)_{\nu\tau} - (\Gamma g)_{\nu\sigma}(\Gamma)_{\mu\tau} \end{aligned} \tag{1.7.286}$$

che mostra appunto la validitá della (1.7.282) ovvero del fatto che $J^{\mu\nu}$ si trasforma sotto il gruppo di Lorentz come un tensore controvariante del secondo ordine. Se dunque Λ è l'elemento di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ definito attraverso $J^{\mu\nu}$ e la matrice antisimmetrica dei parametri $\omega_{\mu\nu}$, ovvero tale che

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \tag{1.7.287}$$

allora accade che

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}\,\Lambda\,\Gamma &= \Gamma^{-1}\,e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\,\Gamma = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Gamma^{-1}J^{\mu\nu}\Gamma} = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{.\alpha}\Gamma^{\nu}_{.\beta}J^{\alpha\beta}} = \\ &= e^{\frac{i}{2}\omega'_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}} \end{aligned} \tag{1.7.288}$$

dove

$$\omega'_{\alpha\beta} \equiv \omega_{\mu\nu}\,\Gamma^{\mu}_{.\alpha}\Gamma^{\nu}_{.\beta} \tag{1.7.289}$$

ovvero la matrice dei parametri di $\Gamma^{-1}\,\Lambda\,\Gamma$ si ottiene trasformando quella che definisce Λ come un tensore covariante del secondo ordine.
Questo risultato si estende a ogni rappresentazione di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, infatti se $\mathcal{R}$ è una qualunque sua rappresentazione, allora

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{R}(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}} \tag{1.7.290}$$

dove $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ sono i generatori di $\mathcal{R}$ nella stessa base dell'algebra di Lie da cui siamo partiti. Poichè $\mathcal{R}$ è, appunto, una rappresentazione, abbiamo

$$\mathcal{R}(\Gamma^{-1})\mathcal{R}(\Lambda)\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{R}(\Gamma^{-1}\Lambda\Gamma) = e^{\frac{i}{2}\omega'_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}} \tag{1.7.291}$$

Ma abbiamo altresì che

$$\mathcal{R}(\Gamma^{-1})\mathcal{R}(\Lambda)\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{R}(\Gamma^{-1})e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}}\mathcal{R}(\Gamma) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{R}(\Gamma^{-1})\mathcal{J}^{\mu\nu}\mathcal{R}(\Gamma)} \tag{1.7.292}$$

e dunque, data l'arbitrarietà dei parametri, deve di nuovo essere che

$$\mathcal{R}(\Gamma^{-1})\mathcal{J}^{\mu\nu}\mathcal{R}(\Gamma) = \Gamma^{\mu}_{.\alpha}\Gamma^{\nu}_{.\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta} \tag{1.7.293}$$

da cui gli invarianti $\mathcal{J}^{\mu\nu}\mathcal{J}_{\mu\nu}$ e $\mathcal{J}^{\mu\nu}\tilde{\mathcal{J}}_{\mu\nu}$.
D'altronde, in base alle definizioni date

$$\vec{L} \equiv \mathbf{L} = -\left(\mathcal{J}^{23},\,\mathcal{J}^{31},\,\mathcal{J}^{12}\right); \qquad \vec{K} \equiv \mathbf{K} = -\left(\mathcal{J}^{01},\,\mathcal{J}^{02},\,\mathcal{J}^{03}\right) \tag{1.7.294}$$

abbiamo che, usando per semplicità gli stessi simboli sia per i generatori del gruppo che per quelli delle sue rappresentazioni, risulta

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & -L_3 & L_2 \\ K_2 & L_3 & 0 & -L_1 \\ K_3 & -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \tilde{\mathcal{J}}^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & -L_2 & -L_3 \\ L_1 & 0 & -K_3 & K_2 \\ L_2 & K_3 & 0 & -K_1 \\ L_3 & -K_2 & K_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.295}$$

da cui gli invarianti $\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2$ e $\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}$.

Osserviamo infine che se la rappresentazione irriducibile di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è di tipo (s_1, s_2) allora avremo che $(L_j K_j = K_j L_j ...)$

$$\mathbf{A}^2 = \left(\frac{\mathbf{L} + i\mathbf{K}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 + 2i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}\right) = s_1(s_1+1)I \tag{1.7.296}$$

$$\mathbf{B}^2 = \left(\frac{\mathbf{L} - i\mathbf{K}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 - 2i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}\right) = s_2(s_2+1)I \tag{1.7.297}$$

e dunque

$$\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = 2(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2) = 2\left[s_1(s_1+1) + s_2(s_2+1)\right] I \tag{1.7.298}$$

$$i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2) = \left[s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right] I \tag{1.7.299}$$

che, nel caso particolare in cui la rappresentazione sia di tipo (s, s), fornisce

$$\mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = 4s(s+1)\,I \tag{1.7.300}$$

$$i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = 0 \tag{1.7.301}$$

mentre, se è di tipo[37] $(s, 0)$ o $(0, s)$, abbiamo

$$(s,0) : \begin{cases} \mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = 2s(s+1)\,I \\ i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = s(s+1) \end{cases} \tag{1.7.302}$$

$$(0,s) : \begin{cases} \mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = 2s(s+1)\,I \\ i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = -s(s+1) \end{cases} \tag{1.7.303}$$

Ritroviamo così, per esempio, che

$$\begin{array}{lcl} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \rightarrow & \mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = 3\,I; \quad i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) & \rightarrow & \mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = \frac{3}{2}\,I; \quad i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = \frac{3}{4}\,I \\ (1, 0) & \rightarrow & \mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 = 4\,I; \quad i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = 2\,I \end{array} \tag{1.7.304}$$

[37] Come si risorderà, i casi $(s, 0)$ e $(0, s)$ sono uno il complesso coniugato dell'altro.

Appendice A

Appendix: Generalità

A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ($1\ ues = \frac{1}{2997924580}\ coulomb$, $1\ erg = 10^{-7}\ J$)

$$\begin{array}{rcl} carica\ dell'elettrone & e & = 4.8032 \times 10^{-10}\, ues \\ massa\ dell'elettrone & m & = 9.1095 \times 10^{-28}\, g \\ costante\ di\ Planck & \hbar & = \dfrac{h}{2\,\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27}\, erg \cdot s \\ velocita'\ della\ luce & c & = 2.99792458 \times 10^{10}\, cm/s \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il $fermi$ (equivalente al $femtometro$, definito come
$$1\ fermi = 1\ fm = 10^{-13}\ cm = 10^{-15}\ m = 10^{-5}\, \text{Å}ngstrom;$$
- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (e i suoi multipli), legato al sistema *cgs* e *SI* dalla equivalenza
$$1\ eV = 1.60219 \cdot 10^{-12}\, erg = 1.60219 \cdot 10^{-19}\, J;$$
- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{eV}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è
$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{erg}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{erg}{c^2} = 0.511 \frac{MeV}{c^2}$$
poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche
$$m_e = 0.511\ MeV;$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{eV}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v, possiede un impulso[1]

$$p = mv = mc\,\beta = 0.511\,\beta\,\frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{array}{lcclcc} div\vec{E} & = & 4\pi\,\rho; & rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} & = & 0; & rot\vec{B} & = & \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \tag{A.1.1}$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar\,c} \tag{A.1.2}$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (SI) e in quello di Heaviside-Lorentz (HL) risulta[2]

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\,\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\,\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \tag{A.1.4}$$

Ricordiamo infine che, sempre nel SI, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	yocto	y

[1] Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\,\gamma\,\beta$, dove $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

[2] Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{array}{lcclcc} div\vec{E} & = & \rho; & rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} & = & 0; & rot\vec{B} & = & \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \tag{A.1.3}$$

In particolare, $q_{HL} = \sqrt{4\pi}\,q_{cgs}$, da cui, se $\hbar = c = 1$, ne segue che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

A.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, ..) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italici (i, j, ..) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \qquad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \tag{A.2.5}$$

e il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq, oppure (pq), se il simbolo senza parentesi può dar luogo a errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \tag{A.2.6}$$

Dato un quadrivettore p, rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (p\,p) = p^\mu\, p_\mu \tag{A.2.7}$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{A.2.8}$$

Per quanto riguarda le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \tag{A.2.9}$$
$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \tag{A.2.10}$$
$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{A.2.11}$$
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{A.2.12}$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu\, \gamma_\mu = p_\mu\, \gamma^\mu \equiv \not{p} \tag{A.2.13}$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \tag{A.2.14}$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{A.2.15}$$
$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \tag{A.2.16}$$
$$(\gamma_5)^2 = I \tag{A.2.17}$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{A.2.18}$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ, i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2.19}$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.2.20}$$

e in questa rappresentazione, la matrice γ_5 assume la forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2.21}$$

Per quanto riguarda le tracce delle matrici γ's, ricordiamo che

$$a)\ Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = 0 \tag{A.2.22}$$

$$b)\ Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4\delta^{\mu\nu} \tag{A.2.23}$$

$$\begin{aligned} c)\ Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\} = \\ \delta^{\mu_1\mu_2}Tr\{\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1\mu_3}Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}...\gamma^{\mu_{2n}}\} \\ +...\delta^{\mu_1\mu_{2n}}Tr\{\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n-1}}\} \end{aligned} \tag{A.2.24}$$

da cui otteniamo

$$Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4(\delta^{\alpha\beta}\delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\mu} - \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}) \tag{A.2.25}$$

Se, fra le γ's c'è anche la γ_5, allora, date le (A.2.14) e (A.2.22)

$$d)\ Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\} = 0 \tag{A.2.26}$$

Inoltre

$$e)\ Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\} = 0 \tag{A.2.27}$$

$$f)\ Tr\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\} = 4i\,\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{A.2.28}$$

$$f)\ Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\} = 4i\,\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{A.2.29}$$

dove il tensore completamente antisimmetrico ϵ è definito come segue:

$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = +1$ se $\alpha\beta\mu\nu$ è una permutazione pari di 0 1 2 3;
$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -1$ se $\alpha\beta\mu\nu$ è una permutazione dispari di 0 1 2 3;
$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ altrimenti

Si osservi che, date le definizioni di cui sopra, risulta

$$\epsilon_{0123} = +1 \qquad \epsilon^{0123} = -1 \tag{A.2.30}$$

Appendice B

Teorema di Cayley e lemma di Jordan

B.1 Teorema di Cayley

Il teorema di Cayley afferma che, data una qualsiasi matrice quadrata $n \times n$ M, essa soddisfa la sua equazione secolare.

Ricordiamo che l'equazione secolare associata a una matrice M è definita dall'equazione

$$det\,|M - x\,I| = 0 \tag{B.1.1}$$

dalla quale si ottiene l'equazione algebrica

$$(x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2}...(x - \lambda_k)^{r_k} = 0 \tag{B.1.2}$$

dove i λ_i sono gli autovalori della matrice M ($k \leq n$) mentre gli r_i sono le loro molteplicità, le quali soddisfano le condizioni

$$r_i \geq 1; \qquad \sum_{i=1,k} r_i = n \tag{B.1.3}$$

Il teorema di Cayley afferma che vale certamente l'equazione

$$(M - \lambda_1)^{r_1} \cdot (M - \lambda_2)^{r_2} \cdot ... \cdot (M - \lambda_k)^{r_k} = 0 \tag{B.1.4}$$

Noi proveremo adesso che M soddisfa un'equazione del tipo

$$(M - \lambda_1)^{s_1}...(M - \lambda_k)^{s_k} = 0 \quad con \quad 1 \leq s_i \leq r_i \tag{B.1.5}$$

che, evidentemente, è sufficiente per dimostrare il teorema in questione.

Consideriamo dunque un generico spazio vettoriale n-dimensionale $\mathcal{E}$ sul corpo complesso e introduciamo in esso una base qualsiasi. La matrice M

rappresenta, in tale base, un preciso operatore lineare $\mathcal{M}$ di $\mathcal{E}$ in sé.
Se dimostriamo che

$$\forall v \in \mathcal{E} : (\mathcal{M} - \lambda_1)^{s_1} ... (\mathcal{M} - \lambda_k)^{s_k}\, v = 0 \quad con \quad 1 \leq s_i \leq r_i \tag{B.1.6}$$

abbiamo provato il teorema.
Prendiamo dunque un qualsiasi vettore (non nullo) $v \in \mathcal{E}$ e costruiamo la seguente catena di vettori di $\mathcal{E}$

$$v,\, \mathcal{M}v, ..., \mathcal{M}^t\, v \tag{B.1.7}$$

Fissato comunque $t \geq 0$, la chiusura lineare $\mathcal{E}(v,t)$ dei vettori

$$v_i \equiv \mathcal{M}^i v, \quad i = 0, ..., t \tag{B.1.8}$$

è chiaramente un sottospazio lineare di $\mathcal{E}$ e quindi, necessariamente

$$dim\, \mathcal{E}(v,t) \leq n \tag{B.1.9}$$

Poiché risulta altresì che

$$\mathcal{E}(v,t) \subseteq \mathcal{E}(v, t+1) \tag{B.1.10}$$

ne segue che esiste un opportuno $\underline{t}$ per cui

$$\forall l > \underline{t} : \mathcal{M}^l v \in \mathcal{E}(v, \underline{t}) \tag{B.1.11}$$

e questo implica, in particolare, per esempio, che

$$\mathcal{M}^{\underline{t}+1} v = \sum_{i=0,\underline{t}} c_i\, \mathcal{M}^i v \tag{B.1.12}$$

Dunque, possiamo conludere che esiste un polinomio $P_v(\mathcal{M})$ di grado $\underline{t}+1$

$$P_v(\mathcal{M}) \equiv (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_i)^{a_i} \quad con \quad a_i \geq 1;\; a_1 + ... + a_i = \underline{t} + 1 \tag{B.1.13}$$

il quale è identicamente nullo sul vettore v, i.e.

$$P_v(\mathcal{M})\, v = (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_i)^{a_i}\, v = 0 \tag{B.1.14}$$

Proviamo che questo polinomio è identicamente nullo su tutto lo spazio $\mathcal{E}(v, \underline{t})$. Ricordiamo infatti che lo spazio $\mathcal{E}(v, \underline{t})$ è generato dai vettori $\mathcal{M}^j\, v,\; j = 0, 1, ...\underline{t}$ e su questi vettori si ha

$$\begin{aligned} P_v(\mathcal{M})\, \mathcal{M}^j\, v &= (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_i)^{a_i} \mathcal{M}^j\, v = \\ &= \mathcal{M}^j\, (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_i)^{a_i}\, v = 0 \end{aligned} \tag{B.1.15}$$

Se $\mathcal{E}(v, \underline{t}) = \mathcal{E}$, abbiamo così dimostrato che esiste un opportuno polinomio in $\mathcal{M}$ che è identicamente nullo su tutto $\mathcal{E}$.

Se invece $\mathcal{E}(v, \underline{t})$ è un sottospazio proprio di $\mathcal{E}$, allora potremo trovare un vettore non nullo $u \in \mathcal{E}$, non appartenente a $\mathcal{E}(v, \underline{t})$, con il quale costruire, nel modo già illustrato, un nuovo spazio $\mathcal{E}(u, \underline{t}')$, per il quale esisterà un opportuno polinomio $P_u(\mathcal{M})$ identicamente nullo su $\mathcal{E}(u, \underline{t}')$.
Evidentemente, il polinomio $P_v(\mathcal{M}) \cdot P_u(\mathcal{M})$ sarà nullo sui vettori appartenenti alla chiusura lineare di $\mathcal{E}(v, \underline{t}) + \mathcal{E}(u, \underline{t}')$ che, per come abbiamo costruito questi sottospazi vettoriali, contiene strettamente entrambi.
Il processo può quindi essere iterato, ottenendo a ogni passo un polinomio nullo su un sottospazio lineare di $\mathcal{E}$ sempre più grande. Poiché $\mathcal{E}$ ha dimensione finita, il processo dovrà a un certo punto arrestarsi, avendo determinato un polinomio $P(\mathcal{M})$ che è identicamente nullo su tutto $\mathcal{E}$. Riduciamo adesso gli esponenti dei vari binomi $(\mathcal{M} - \alpha)$ fino al minimo, in modo che il polinomio resti comunque nullo su $\mathcal{E}$, ottenendo così l'espressione

$$P(\mathcal{M}) = (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_l)^{a_l}; \quad a_i \geq 1 \tag{B.1.16}$$

Per ipotesi, dunque, questo polinomio è tale per cui

- $\forall v \in \mathcal{E} : (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_l)^{a_l}\, v = 0$;
- $\forall i, 1 \leq i \leq l, \exists v \in \mathcal{E} : (\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_i)^{a_i - 1} ... (\mathcal{M} - \alpha_l)^{a_l}\, v \neq 0$

Vogliamo dimostrare che

1. gli α_i sono tutti e soli gli autovalori dell'operatore $\mathcal{M}$;
2. gli esponenti a_i sono minori o uguali alla molteplicità degli autovalori corrispondenti.

Iniziamo dimostrando che fra gli α_i devono trovarsi tutti gli autovalori di $\mathcal{M}$ e quindi della matrice M. Supponiamo infatti che l'autovalore λ non coincida con nessun α_i e sia $|\lambda >$ un autovettore corrispondente a quell'autovalore (almeno uno *deve* esistere ...): abbiamo

$$(\mathcal{M} - \alpha_1)^{a_1} ... (\mathcal{M} - \alpha_l)^{a_l} \,|\lambda >= (\lambda - \alpha_1)^{a_1} ... (\lambda - \alpha_l)^{a_l} \,|\lambda > \neq 0 \tag{B.1.17}$$

e questo è assurdo perché $P(\mathcal{M})$ è, per ipotesi, identicamente nullo in $\mathcal{E}$.
E' quindi dimostrato che fra gli α_i devono trovarsi tutti gli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_k$ di $\mathcal{M}$, cioé di M.
Dimostriamo ora che non possono essercene altri. Procediamo per assurdo. Assumiamo che il polinomio minimo identicamente nullo su $\mathcal{E}$ sia

$$\tilde{P}(\mathcal{M}) = (\mathcal{M} - \lambda_1)^{b_1} ... (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k}\; (\mathcal{M} - \gamma_1)^{c_1} ... (\mathcal{M} - \gamma_m)^{c_m} \tag{B.1.18}$$

dove, per ipotesi, i γ_i <u>non</u> sono autovalori di $\mathcal{M}$. Questo implica che gli operatori $(\mathcal{M} - \gamma_i)$ siano invertibili, infatti, se non lo fossero, avrebbero un nucleo non banale e quindi esisterebbe almeno un autovettore di $\mathcal{M}$ corrispondente all'autovalore γ_i. Consideriamo dunque l'operatore lineare $\mathcal{O}$ così definito

$$\mathcal{O} = \tilde{P}(\mathcal{M}) \ \left[(\mathcal{M} - \gamma_1)^{c_m}\right]^{-1} ... \left[(\mathcal{M} - \gamma_m)^{c_1}\right]^{-1} \tag{B.1.19}$$

Esso è definito da $\mathcal{E}$ in sé e, per le proprietà di $\tilde{P}(\mathcal{M})$, è identicamente nullo. Questo operatore, però, altri non è che il polinomio

$$(\mathcal{M} - \lambda_1)^{b_1} ... (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k} \tag{B.1.20}$$

e questo contrasta con l'ipotesi che $\tilde{P}(\mathcal{M})$ fosse giá il "minimo" possibile.
Resta cosí dimostrato che gli α_i sono tutti e soli gli autovalori dell'operatore $\mathcal{M}$, per cui riscriviamo il polinomio in questione nella forma

$$P(\mathcal{M}) = (\mathcal{M} - \lambda_1)^{b_1} ... (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k} \tag{B.1.21}$$

il quale è identicamente nullo su $\mathcal{E}$.

Vogliamo adesso dimostrare che gli esponenti b_i sono minori o uguali alla molteplicità degli autovalori corrispondenti.
Iniziamo considerando i nuclei $\mathcal{N}_j$ degli operatori lineari $(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j}$.
Essi hanno dimensione d_j almeno uguale a b_j, visto che

$$\forall j = 1, ..., k; \exists v_j : (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} \, v_j = 0, \quad (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - 1} \, v_j \neq 0 \tag{B.1.22}$$

Osserviamo adesso che poiché $\mathcal{M}$ commuta evidentemente con ciascuno degli operatori $(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j}$, i nuclei $\mathcal{N}_j$ sono $\mathcal{M}$-invarianti, cioé

$$\forall v \in \mathcal{N}_j : \mathcal{M} \, v \in \mathcal{N}_j \tag{B.1.23}$$

Dimostriamo ora che questi nuclei hanno in comune solo il vettore nullo.
Supponiamo infatti che il vettore non nullo v sia comune a $\mathcal{N}_i$ e a $\mathcal{N}_j$ (con $i \neq j$). Questo significa che per il vettore $v \in \mathcal{E}$ valgono entrambe le equazioni

$$(\mathcal{M} - \lambda_i)^{b_i} \, v = 0; \quad (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} \, v = 0 \tag{B.1.24}$$

Indichiamo allora con r_i il minimo esponente per cui $(\mathcal{M} - \lambda_i)^{r_i} \, v = 0$: ne segue che possiamo definire il seguente vettore w non nullo

$$w = (\mathcal{M} - \lambda_i)^{r_i - 1} \, v \tag{B.1.25}$$

il quale è autovettore di $\mathcal{M}$ per l'autovalore λ_i, essendo

$$(\mathcal{M} - \lambda_i) \, w = (\mathcal{M} - \lambda_i)^{r_i} \, v = 0 \tag{B.1.26}$$

Per la seconda equazione della (B.1.24), abbiamo

$$(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} \, w = (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} \, (\mathcal{M} - \lambda_i)^{r_i - 1} \, v = (\mathcal{M} - \lambda_i)^{r_i - 1} \, (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} \, v = 0 \tag{B.1.27}$$

ma, per il fatto che w è autovettore di $\mathcal{M}$ per l'autovalore λ_i, abbiamo altresì che

$$(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j}\, w = (\lambda_i - \lambda_j)^{b_j} w \neq 0 \tag{B.1.28}$$

Questo prova che non può esistere alcun vettore v, diverso da quello nullo, che sia comune ai diversi nuclei $\mathcal{N}_j$.
Il risultato ottenuto ci autorizza anche a definire il sottospazio vettoriale di $\mathcal{E}$, somma diretta dei nuclei in questione, i.e.

$$\mathcal{N} \equiv \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{N}_j \subseteq \mathcal{E} \tag{B.1.29}$$

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{N} = \mathcal{E}$.
Per farlo, basterà dimostrare che $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{E}$, ovvero che ogni vettore di $\mathcal{E}$ puo essere scritto come una opportuna combinazione lineare di vettori $w_j \in \mathcal{N}_j$.

Iniziamo osservando che se $i \neq j$ allora l'operatore $(\mathcal{M} - \lambda_i)^{b_i}$ manda il nucleo $\mathcal{N}_j$ in sé, infatti

$$\begin{aligned} & v_j \in \mathcal{N}_j \Leftrightarrow (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} v_j = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j})(\mathcal{M} - \lambda_i)^{b_i} v_j = (\mathcal{M} - \lambda_i)^{b_i})(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} v_j = 0 \end{aligned} \tag{B.1.30}$$

e la trasformazione risulta invertibile perché, come abbiamo già visto, non esiste alcun vettore non nullo appartenente a $\mathcal{N}_j$ il quale sia mandato nel vettore nullo da $(\mathcal{M} - \lambda_i)^{b_i}$, ovvero che appartenga anche a $\mathcal{N}_i$.
Consideriamo ora un generico vettore v di $\mathcal{E}$: per ipotesi

$$(\mathcal{M} - \lambda_1)^{b_1}(\mathcal{M} - \lambda_2)^{b_2} \ldots (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k}\, v = 0 \tag{B.1.31}$$

Definiamo dunque il vettore

$$w_1 = (\mathcal{M} - \lambda_2)^{b_2} \ldots (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k}\, v = 0 \tag{B.1.32}$$

il quale, per come è definito e per la (B.1.31), apparterrà a $\mathcal{N}_1$.
Per quanto osservato in precedenza circa l'invertibilità in $\mathcal{N}_1$ degli operatori $(\mathcal{M} - \lambda_2)^{b_2}, \ldots, (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k}$, possiamo adesso definire il seguente vettore $Y_1 \in \mathcal{N}_1$

$$Y_1 = \Big[(\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k}\Big]^{-1} \ldots \Big[(\mathcal{M} - \lambda_2)^{b_2}\Big]^{-1}\; w_1 \tag{B.1.33}$$

Definiamo dunque il vettore

$$W_1 = v - Y_1 \tag{B.1.34}$$

Esso è tale per cui

$$\begin{aligned} (\mathcal{M} - \lambda_2)^{b_2} \ldots (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k}\, W_1 &= (\mathcal{M} - \lambda_2)^{b_2} \ldots (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k} (v - Y_1) = \\ &= w_1 - w_1 = 0 \end{aligned} \tag{B.1.35}$$

per cui possiamo iterare il procedimento di cui sopra, ottenendo così la catena

$$\begin{array}{ll} 1. & W_1 = y - Y1 \\ 2. & W_2 = W_1 - Y_2 \\ ...... & \\ k-1 & W_{k-1} = W_{k-2} - Y_{k-1} \end{array}$$

dove i vettori Y_j appartengono agli spazi $\mathcal{N}_j$ mentre i vettori W_j godono della proprietà che $(\mathcal{M} - \lambda_{j+1})^{b_{j+1}} ... (\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k} W_j = 0$.
Sommando membro a membro le $k-1$ equazioni di cui sopra, otteniamo infine

$$W_{k-1} = v - Y_1 - Y_2 - ... - Y_{k-1} \tag{B.1.36}$$

i.e.

$$v = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{k-1} + W_{k-1} \tag{B.1.37}$$

Ma W_{k-1} verifica l'equazione $(\mathcal{M} - \lambda_k)^{b_k} W_{k-1} = 0$ per cui appartiene a $\mathcal{N}_k$ e quindi, dato che avevamo già dimostrato l'inclusione opposta, è così dimostrato che

$$\mathcal{E} = \mathcal{N} \equiv \bigoplus_{j=1,k} \mathcal{N}_j \tag{B.1.38}$$

Come abbiamo osservato sopra (cfr.(B.1.23)), gli spazi $\mathcal{N}_j$ sono $\mathcal{M}$-invarianti: questo significa che possiamo usare una base di $\mathcal{E}$ costituita dall'unione di opportune sottobasi degli spazi $\mathcal{N}_j$. In questa base, poiché le diverse sottobasi sono trasformate in sé da $\mathcal{M}$, questo l'operatore sarà descritto da una matrice $\overline{M}$ costituita da k blocchi sulla diagonale principale, ciascuno dei quali rappresenta l'azione di $\mathcal{M}$ ristretta a $\mathcal{N}_j$.

Vediamo dunque cosa possiamo dire riguardo a queste "sottomatrici" che descrivono l'azione della restrizione di $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}_j$. Ricordiamo che $\mathcal{N}_j$ e il nucleo dell'operatore lineare $(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j}$ da $\mathcal{E}$ in sé, ovvero fatto dai vettori per cui

$$v \in \mathcal{N}_j \Leftrightarrow v \in \mathcal{E} \;\; e \;\; (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} v = 0 \tag{B.1.39}$$

e l'ipotesi che b_j sia il minimo esponente richiesto affinché valga la (B.1.39) implica altresì che

$$\exists v \in \mathcal{E} : (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j} v = 0 \;\; e \;\; (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - 1} v \neq 0 \tag{B.1.40}$$

Mediante il vettore v della (B.1.40) definiamo dunque la seguente catena di vettori (non nulli)

$$e_1 = v; \;\; e_2 = (\mathcal{M} - \lambda_j)\, v, \;\; ..., e_{b_j} = (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - 1}\, v \tag{B.1.41}$$

Si tratta di vettori che sono linearmente indipendenti, infatti, se così non fosse, esisterebbero opportuni coefficienti complessi α non identicamente nulli per cui

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{b_j} e_{b_j} = 0 \tag{B.1.42}$$

Supponiamo quindi che il primo coefficiente α non nullo che compare nell'espressione (B.1.42) corrisponda ll'indice t. Dunque, dividendo per α_t, abbiamo

$$e_t = \beta_{t+1} e_{t+1} + ... + \beta_{b_j} e_{b_j} \quad dove \quad \beta_i \equiv -\frac{\alpha_i}{\alpha_t} \tag{B.1.43}$$

Applichiamo ora al primo e al secondo membro l'operatore $(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - t}$.
Al primo membro si ha

$$(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - t} e_t = (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - t} (\mathcal{M} - \lambda_j)^{t-1} v = (\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - 1} v \neq 0 \tag{B.1.44}$$

mentre il secondo membro risulta nullo poiché $(\mathcal{M} - \lambda_j)^{b_j - t} e_s = 0$ quando $s > t$. Dobbiamo quindi concludere che la catena dei b_j vettori definita dalla (B.1.41) è fatta da vettori linearmente indipendenti.
Se la dimensione d_j dello spazio $\mathcal{N}_j$ coincide con b_j, la catena in questione costituisce una possibile base per $\mathcal{N}_j$, altrimenti esisterà almeno un altro vettore non nullo $u \in \mathcal{N}_j$, indipendente dai vettori della catena sopra definita. Usiamo questo vettore per definire, nello stesso modo di cui sopra, una nuova catena $f_1, ..., f_l$ con $f_1 \equiv u$: non è detto che risulti $l = b_j$ e, pur essendo anche la nuova catena fatta da vettori fra loro linearmente indipendenti, non è detto che essi lo siano con tutti quelli della catena definita dalla $(B.1.41)$.
Consideriamo dunque i vettori

$$e_1, ..., e_{b_j}, f_1, ... f_l \tag{B.1.45}$$

Procedendo dalla fine, eliminiamo i vettori linearmente dipendenti da quelli che li precedono: arriveremo così a una nuova catena di vettori indipendenti così fatta

$$e_1, ..., e_{b_j}, f_1, ... f_s \tag{B.1.46}$$

dove, per il fatto che il vettore $u = f_1$ è indipendente dalla prima catena, $s \geq 1$ e quindi questa nuova catena descrive un sottospazio di dimensione $b_j + s > b_j$. Iterando la procedura, poiché lo spazio $\mathcal{N}_j$ ha comunque una dimensione finita d_j, costruiremo in questo modo una base fatta dai vettori seguenti

$$e_1, ..., e_{b_j}, f_1, ... f_s, ..., h_1, ... h_t \tag{B.1.47}$$

dove ciascuna lettera si riferisce a una catena.
L'azione su uno qualunque di questi vettori della base da parte dell'operatore

$(\mathcal{M} - \lambda_j)$ è quindi quella di produrre il vettore nullo se siamo a fine catena, oppure il vettore immediatamente seguente nella catena in cui si trova il vettore considerato. Questo significa che l'operatore $\mathcal{M}$ riproduce su questi vettori loro stessi moltiplicati per l'autovalore λ_j, eventualmente sommati al vettore immediatamente successivo nella catena.

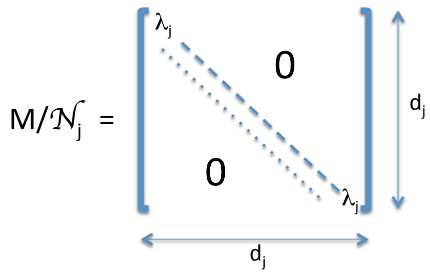


Figura B.1:

La matrice che descrive questa azione, rappresentata in fig.B.1, è una matrice che ha l'autovalore λ_j sulla diagonale principale e degli 1 o degli 0 sulla diagonale immediatamente sotto quella principale, essendo nulli tutti gli altri termini.

Unendo le basi così definite nei vari $\mathcal{N}_j$, otteniamo una base dell'intero spazio $\mathcal{E}$ sulla quale l'operatore $\mathcal{M}$ è rappresentato dalla matrice $\overline{M}$, avente una struttura del tipo rappresentato in fig. B.2.

Quanto all'equazione secolare per la matrice $\overline{M}$, essa ha necessariamente la forma seguente

$$(x - \lambda_1)^{d_1} \, (x - \lambda_2)^{d_2} \, ..., \, (x - \lambda_k)^{d_k} = 0 \tag{B.1.48}$$

ma poiché le matrici M e $\overline{M}$ esprimono, in basi diverse, la stesso operatore lineare $\mathcal{M}$, esse sono coniugate attraverso una trasformazione di verosimiglianza (cambiamento di base) e quindi hanno la stessa equazione secolare, i.e.

$$d_j = r_j \tag{B.1.49}$$

per cui, dalla condizione $d_j \geq b_j$, segue $b_j \leq r_j$ e dunque il teorema di Cayley è provato.

Per ogni matrice quadrata M di ordine n, esiste un polinomio
$P(M) = (M - \lambda_1)^{s_1} ... (M - \lambda_k)^{s_k}$ identicamente nullo.
I coefficienti $\lambda_1 ... \lambda_k$ sono tutti e soli gli autovalori di M, mentre gli esponenti s_k sono minori o uguali delle molteplicità $r_1, ... r_k$ degli autovalori corrispondenti.

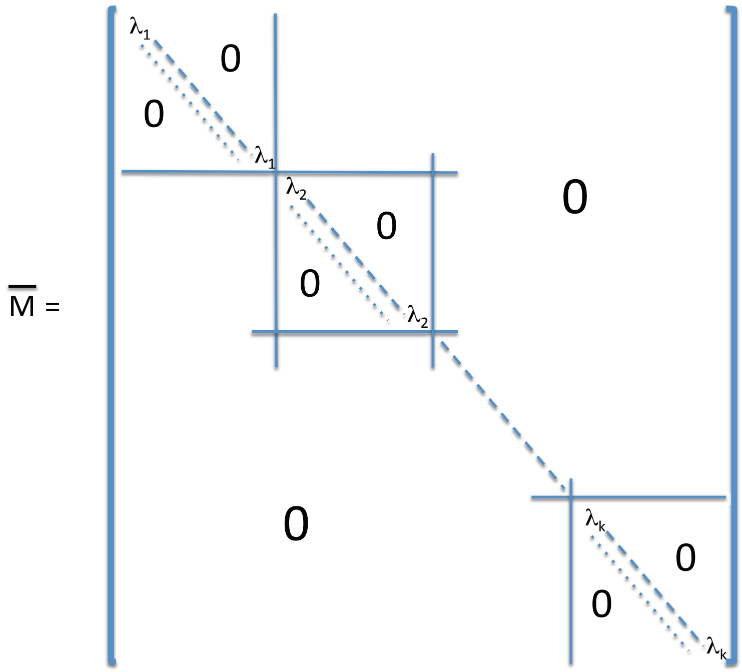


Figura B.2:

B.2 Lemma di Jordan

Il lemma di Jordan stabilisce che ogni matrice quadrata M può essere posta in forma triangolare attraverso una trasformazione di verosimiglianza, ovvero una trasformazione del tipo $T = A\,M\,A^{-1}$, con la matrice T che ha sulla diagonale principale gli autovalori (T ed M hanno gli stessi autovalori ...) e, nella diagonale immediatamente sotto solamente degli 1 o degli 0, mentre tutti gli altri elementi risultano nulli.

La dimostrazione del teorema di Cayley ha condotto al risultato per cui, data una qualunque matrice $n \times n$, essa descrive un operatore in $\mathbf{R}^n$ che, in una base opportuna è descritto da una matrice $\overline{M}$ avente una struttura del tipo rappresentato in fig. B.2.