

*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.

Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623)

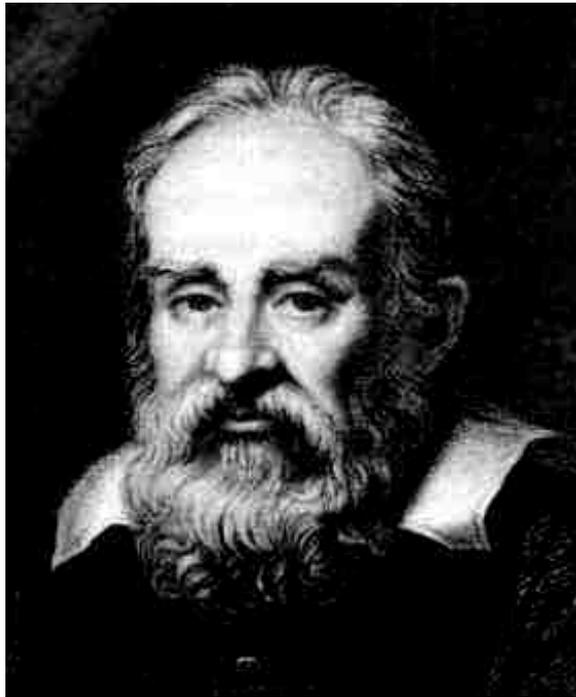


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

Principali simboli usati:

- \mathbb{N} : insieme (gruppo) dei numeri interi non negativi
 \mathbb{Z} : insieme (gruppo) dei numeri interi relativi
 \mathbb{Q} : insieme (gruppo) dei numeri razionali
 \mathbb{R} : insieme (gruppo) dei numeri reali
 \mathbb{C} : insieme (gruppo) dei numeri complessi
 \mathcal{Q} : insieme (gruppo) dei quaternioni
 \mathbb{G}, \mathbb{H} : gruppo e sottogruppo generico
 \mathbb{K} : kernel di un omomorfismo fra gruppi
 \mathbb{I} : immagine di un gruppo secondo un omomorfismo
 \mathbb{A} : anello
 \mathcal{A} : algebra generica
 \mathcal{K} : campo o corpo
 \mathcal{V}, \mathcal{W} : spazi vettoriali
 \mathcal{T}, \mathcal{S} : spazio e sottospazio topologico
 \mathcal{M} : spazio metrico
 \mathcal{H} : spazio di Hilbert
 \mathbf{v}, \mathbf{w} : generici elementi di uno spazio vettoriale
 $\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j$: elementi di una base di uno spazio vettoriale

Indice

1	Strutture matematiche di interesse	9
1.1	Gruppi	9
1.2	Anelli	11
1.3	Corpi e campi	14
1.4	Spazi vettoriali	15
1.4.1	Operatori e funzionali lineari	16
1.5	Algebre	17
1.6	Spazi topologici	19
1.6.1	Spazi connessi	22
1.6.2	Spazi compatti	23
1.7	Spazi metrici	24
1.7.1	Successione di Cauchy	24
1.7.2	Spazio metrico completo	24
1.7.3	Gli spazi \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)	25
1.7.4	Sottospazi convessi di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)	25
1.7.5	Sottospazi compatti di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)	25
1.8	Spazi di Banach	26
1.9	Spazi di Hilbert	28
1.9.1	Operatori lineari	31
1.9.2	Operatori aggiunti	32
1.9.3	Operatori unitari	32
1.9.4	Operatori antilineari	33
1.9.5	Operatori aggiunti di operatori antilineari	33
1.9.6	Operatori antiunitari	33
2	Approfondimenti di Teoria dei Gruppi	35
2.1	Generalità	35
2.2	Rappresentazioni	38
2.3	Gruppi di Lie	43
2.4	Algebre di Lie	44
2.5	Algebre e gruppi di Lie	46
2.6	La rappresentazione aggiunta	52
2.7	Rappresentazioni di gruppi compatti	57

2.8	Ancora sulla Rappresentazione Aggiunta	61
2.9	I Pesì	71
2.10	Le radici	76
2.10.1	Le radici semplici	86
2.11	Il gruppo $SU(2)$	92
2.12	Parametrizzazione con gli angoli di Eulero	98
2.13	Le Rappresentazioni irriducibili del gruppo $SU2$	101
2.13.1	Esempio 1: la rappresentazione di spin $1/2$	107
2.13.2	Esempio 2: la rappresentazione di spin 1	109
2.13.3	Le matrici $D_{m'm}^j$ e $d_{m'm}^j$	121
2.13.4	Esempio 3: la rappresentazione di spin $j = \frac{3}{2}$	125
2.13.5	Esempio 4: la rappresentazione di spin $j = 2$	127
2.14	Prodotto di due rappresentazioni irriducibili	129
2.15	Operatori tensoriali e teorema di Wigner-Eckart	137
2.16	Il gruppo $SU(3)$	140
2.17	I pesi della $\mathbf{3}$ e della $\bar{\mathbf{3}}$	143
2.18	Le radici di $SU(3)$	146
2.18.1	Il gruppo di Weyl	157
2.18.2	Forma esplicita dei generatori della RA di $SU3$	158
2.19	Rappresentazioni irriducibili	165
2.19.1	Generalità	165
2.19.2	Ancora $SU2$	167
2.19.3	$SU3$	170
2.19.4	La rappresentazione $\mathbf{3}$	173
2.20	Il metodo tensoriale	195
2.20.1	La rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$	199
2.20.2	La rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$	204
2.20.3	La rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \equiv (1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0)$	208
2.21	La molteplicità nelle rappresentazioni (n, m)	215
2.21.1	La molteplicità nella $(3, 2)$	217
2.21.2	La molteplicità sul primo layer dei pesi della (n, m)	223
2.21.3	La molteplicità nel secondo layer della (n, m)	228
2.21.4	La molteplicità nella (n, m) in generale	235
2.22	La dimensione della (n, m)	254

Introduzione

In questa *Prima Parte* del volume dedicato a nozioni di Matematica, senza alcuna nessuna pretesa di essere esaustivi, richiameremo alcune nozioni relative alle strutture di maggior interesse per la Fisica, in particolare tratteremo il problema della rappresentazioni dei gruppi di Lie, concentrando la nostra attenzione su $SU2$ e $SU3$.

Capitolo 1

Strutture matematiche di interesse

1.1 Gruppi

Un gruppo \mathbb{G} è un insieme in cui è definita una operazione di composizione interna, che viene di solito indicata con il nome di *moltiplicazione*, tale che

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbb{G} : g_1 \cdot g_2 \in \mathbb{G} \quad (1.1.1)$$

Affinché \mathbb{G} sia un gruppo, occorre che la legge di moltiplicazione abbia le seguenti proprietà:

- sia associativa, ovvero $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
- ammetta identità e (elemento neutro), ovvero $\exists e \in \mathbb{G} : \forall g \in \mathbb{G} : e \cdot g = g$
- ogni elemento abbia inverso, ovvero $\forall g \in \mathbb{G}, \exists g^{-1} \in \mathbb{G} : g^{-1} \cdot g = e$

Il gruppo è detto *abeliano* o *commutativo* se accade che

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbb{G} : g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \quad (1.1.2)$$

Si dimostra che in un gruppo, l'elemento neutro è unico e tale che $g \cdot e = g$; come pure che l'inverso di ogni elemento del gruppo è anch'esso unico e tale che $g \cdot g^{-1} = e$. Nel seguito, se questo non potrà creare confusione, ometteremo il segno del prodotto, ovvero porremo $g_1 \cdot g_2 \equiv g_1 g_2$.

Un sottoinsieme $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ è detto *sottogruppo* del gruppo \mathbb{G} se l'insieme degli elementi di \mathbb{H} costituiscono a loro volta un gruppo sotto la moltiplicazione definita in \mathbb{G} , ovvero se \mathbb{H} è stabile sotto l'operazione di composizione interna che rende \mathbb{G} un gruppo. Si dimostra che questo accade se e solo se

$$\forall h_1, h_2 \in \mathbb{H} : h_1 h_2^{-1} \in \mathbb{H} \quad (1.1.3)$$

Un sottogruppo $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ è detto *normale* o *invariante* se accade che

$$\forall g \in \mathbb{G}, \forall h \in \mathbb{H} : g h g^{-1} \in \mathbb{H} \quad (1.1.4)$$

Un gruppo si dice *semplice* se non ha sottogruppi normali non banali, cioè diversi dal gruppo stesso e dal sottogruppo fatto dalla sola identità.

Si parla invece di gruppo *semisemplice* se esso non ammette sottogruppi normali abeliani.

Esempi

L'insieme \mathbb{Z} dei numeri relativi, l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali, l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali e l'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi costituiscono, ciascuno, un gruppo abeliano con la somma. L'elemento neutro è, naturalmente, l'elemento nullo ovvero lo zero mentre l'elemento *inverso* è quello che, comunemente, chiamiamo *opposto*.

\mathbb{Z} è sottogruppo di \mathbb{Q} , che è sottogruppo di \mathbb{R} , che è sottogruppo di \mathbb{C} .

Trattandosi di strutture abeliane, ciascuno di questi sottogruppi è *normale*.

1.2 Anelli

Un anello \mathbb{A} è un gruppo abeliano con l'operazione di composizione interna, che indicheremo con il simbolo di somma, nel quale è definita un'altra operazione di composizione interna, detta *prodotto*, tale che

$$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{A} : a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{A} \quad (1.2.5)$$

Per definizione, indicheremo con "0" l'elemento neutro per la somma.

Quanto al prodotto, esso deve

- essere associativo, ovvero tale che
 $\forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A} : (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)$;
- ammettere l'elemento neutro¹ (che indicheremo con 1), tale che
 $\forall a \in \mathbb{A} : a \cdot 1 = a$;
- essere distributivo rispetto alla somma, ovvero tale che

$$\begin{aligned} \forall a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{A} \quad : \quad (a_1 + a_2) \cdot (a_3 + a_4) &= a_1 \cdot (a_3 + a_4) + a_2 \cdot (a_3 + a_4) = \\ &= (a_1 \cdot a_3) + (a_1 \cdot a_4) + (a_2 \cdot a_3) + (a_2 \cdot a_4) \end{aligned}$$

Se accade che il prodotto è anch'esso commutativo, allora si parla di *anello abeliano*.

Si osservi che in un anello non è richiesto che ogni elemento abbia inverso quanto all'operazione di prodotto.

Con le consuete operazioni di somma e prodotto, gli insiemi \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} sono anelli commutativi. In essi, ogni elemento diverso dallo zero (elemento neutro per la somma), ammette inverso secondo il prodotto che è, naturalmente, commutativo: come vedremo, questa ulteriore proprietà caratterizza i *campi*.

¹L'elemento neutro per la somma, cioè lo 0, non può coincidere con l'elemento neutro per il prodotto, cioè l'1, a meno che il gruppo sia costituito da questo unico elemento ... Infatti, da un lato abbiamo che

$$\forall x, y : (x + 0) \cdot y = x \cdot y + 0 \cdot y = x \cdot y \Rightarrow 0 \cdot y = 0$$

mentre dall'altro abbiamo che

$$1 \cdot y = y$$

dunque, se accadesse che $0 = 1$, indicando con ν questo elemento neutro, dovremmo avere sia che $\forall y : \nu \cdot y = \nu$ come pure che $\nu \cdot y = y$ e questo è possibile se e solo se l'insieme è fatto dal solo elemento ν , tale che $\nu + \nu = \nu$ e $\nu \cdot \nu = \nu$.

Un caso interessante di anello commutativo è l'insieme $\mathcal{P}(z)$ costituito dai polinomi a coefficienti complessi in una indeterminata z

$$\mathcal{P}(z) = \{P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n; \quad \alpha_i \in \mathbb{C}; \quad n \text{ qualsiasi}\}$$

Chiaramente questo insieme costituisce un gruppo abeliano con la somma e, introducendo il prodotto consueto fra polinomi, diventa un anello commutativo.

Si osservi che, in generale, non esiste il polinomio inverso di un qualunque $P(z)$, ma solo se si tratta di un polinomio non nullo di grado zero, cioè $P(z) = \alpha_0 \neq 0$.

Dalla teoria dei polinomi in una incognita sappiamo che, usando unicamente le proprietà che definiscono la struttura di anello (somma e prodotto), un polinomio di grado n ammette radici complesse λ_i (eventualmente in parte o tutte coincidenti) tali che ($\alpha_n \neq 0$)

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n = \alpha_n (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_k)^{m_k}$$

dove $k \leq n$ e le molteplicità m_i delle radici λ_i sono tali che

$$m_1 + \dots + m_k = n$$

Abbiamo richiamato questo aspetto relativo ai polinomi perché esso, legato unicamente alla struttura ad anello del loro insieme, consente di trattare in modo molto semplice il caso delle equazioni differenziali a coefficienti (complessi) costanti, omogenee di grado n qualsiasi.

Vediamo.

La forma canonica di una equazione differenziale del tipo citato sopra è ($\alpha_n \neq 0$)

$$\alpha_n \frac{d^n f}{dx^n} + \dots + \alpha_1 \frac{df}{dx} + \alpha_0 f = 0$$

dove la soluzione cercata f è una funzione a priori complessa della variabile reale x , mentre gli α_i sono, in generale, numeri complessi ed è noto che l'insieme delle soluzioni costituisce uno *spazio vettoriale* (per la definizione, vedi oltre) sul corpo complesso di dimensione n .

Introduciamo adesso l'operatore differenziale $D \equiv \frac{d}{dx}$, per cui potremo riscrivere l'equazione di cui sopra nella forma operatoriale seguente

$$(\alpha_n D^n + \dots + \alpha_1 D + \alpha_0) f = 0$$

Introduciamo adesso l'insieme \mathcal{D} degli operatori differenziali di ordine qualsiasi

$$\mathcal{D} = \{\alpha_n D^n + \dots + \alpha_1 D + \alpha_0; \quad \alpha_i \in \mathbb{C}; \quad n \text{ qualsiasi}\}$$

Risulta evidente come questo insieme sia un gruppo abeliano con la somma e diventi un anello con il prodotto definito dall'applicazione in successione di due suoi elementi. E' facile convincersi che entrambe le operazioni seguono esattamente le stesse regole che nel caso della somma e del prodotto fra polinomi. Questo significa che i due anelli sono isomorfi² fra loro.

Possiamo allora concludere che, in termini delle radici del polinomio definito dai coefficienti α_i , abbiamo che

$$0 = (\alpha_n D^n + \dots + \alpha_1 D + \alpha_0) f = \alpha_n (D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_k)^{m_k} f$$

Le soluzioni indipendenti sono tutte e sole quelle che soddisfano l'equazione differenziale definita da un singolo fattore, ovvero che soddisfano l'equazione tipica

$$(D - \lambda)^m f = 0$$

che sono le funzioni

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}) e^{\lambda x}$$

dove gli a_i sono costanti di integrazione.

²Con questo termine si intende che i due insiemi possono essere posti in corrispondenza biunivoca e questa corrispondenza rispetta la struttura di anello di entrambi.

1.3 Corpi e campi

Un anello in cui ogni elemento diverso dall'elemento identico per la somma, ammetta inverso secondo l'operazione di prodotto, si chiama *corpo*.

Indicheremo genericamente con \mathcal{K} un tale insieme.

Se anche il prodotto è commutativo, allora si parla più propriamente di *campo*.

Esempi di campo sono sia gli anelli dei numeri reali \mathbb{R} come quello dei numeri complessi \mathbb{C} .

Esempio invece di corpo è quello dei quaternioni \mathcal{Q} , di cui una rappresentazione è fatta dall'insieme delle matrici seguenti:

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (1.3.6)$$

ovvero, in termini della matrice $\sigma_0 \equiv I$ e delle usuali matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

dalle matrici

$$q = a_0 \sigma_0 + i a_j \sigma_j; \quad a_\mu \in \mathbb{R} \quad (1.3.8)$$

La struttura di corpo è necessaria per poter assicurare, in generale, di poter risolvere la generica equazione di primo grado

$$ax + b = 0, \quad a, b, x \in \mathcal{K}$$

nella incognita x . Data la struttura di gruppo abeliano con la somma presente in \mathcal{K} , si ha infatti che

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b + (-b) = 0 - b \Leftrightarrow ax = -b$$

Se $a = 0$, allora, poiché, qualunque possa essere il valore di x , è comunque $ax = 0$, l'equazione è una identità se anche $b = 0$ mentre è impossibile (non ha soluzioni) se $b \neq 0$. Se $a \neq 0$ allora, data la struttura di corpo, esiste un elemento di \mathcal{K} , che indichiamo con a^{-1} , tale che $a^{-1}a = 1$. Dunque

$$ax = -b \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}(-b) \Leftrightarrow 1x \equiv x = -a^{-1}b$$

che è la soluzione cercata.

Si noti che se il corpo \mathcal{K} non è commutativo (cioè non è un campo) allora la soluzione delle equazioni

$$ax = b \quad e \quad xa = b$$

possono essere differenti.

Nel seguito, salvo diverso avviso, assumeremo che il campo \mathcal{K} coincida con il campo reale \mathbb{R} oppure con quello complesso \mathbb{C} .

1.4 Spazi vettoriali

Un gruppo abeliano \mathcal{V} , con la somma come operazione di composizione interna, costituisce uno spazio vettoriale su un campo \mathcal{K} se è data un'operazione di *prodotto per scalari* tale che, per ogni elemento del campo $k \in \mathcal{K}$ e per qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, è definito in maniera univoca il vettore $k\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tale che

$$\forall k \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$$

Un insieme di vettori $\{\mathbf{e}_i; i = 1, \dots, n\}$ è detta una *base* dello spazio vettoriale \mathcal{V} se qualunque vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori \mathbf{e}_i *in un unico modo*. Questo ultimo aspetto esprime il fatto che i vettori \mathbf{e}_i sono fra loro indipendenti ovvero tali che

$$\sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i = 0 \Leftrightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

essendo gli α_i elementi del campo \mathcal{K} .

Se troviamo una base dello spazio \mathcal{V} che è fatta da n elementi, qualunque base di \mathcal{V} sarà comunque sempre fatta da n vettori e si dice che n è la dimensione dello spazio vettoriale dato.

Nel caso che occorra una infinità numerabile di vettori per poter esprimere il generico elemento di \mathcal{V} , si parla di spazio di dimensione infinita, numerabile. L'indipendenza dei vettori della base implica l'unicità della n -tupla dei coefficienti che esprimono un vettore assegnato nella base data.

Siano ora date due basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_j\}$ e si consideri il generico vettore \mathbf{v} : per definizione di base, abbiamo

$$\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{e}_i = \beta_j \mathbf{f}_j$$

Chiediamoci adesso quale sia la relazione fra i coefficienti α_i e i coefficienti β_j , i quali esprimono lo stesso vettore \mathbf{v} ma in due basi diverse.

Osserviamo che, poiché $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base, sarà altresì

$$\mathbf{f}_j = \sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i \equiv A_{ij} \mathbf{e}_i$$

dove la matrice A_{ij} , di dimensione $n \times n$, è univocamente definita. Dunque

$$\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{e}_i = \beta_j \mathbf{f}_j = \beta_j A_{ij} \mathbf{e}_i \Rightarrow \alpha_i = A_{ij} \beta_j$$

dove abbiamo usato sia l'unicità della rappresentazione di un vettore in una base assegnata come pure la convenzione della somma su indici ripetuti.

Ripetendo l'argomento per la base $\{\mathbf{f}_j\}$ abbiamo che

$$\mathbf{e}_i = B_{ji} \mathbf{f}_j \Rightarrow \mathbf{v} = \beta_j \mathbf{f}_j = \alpha_i \mathbf{e}_i = \alpha_i B_{ji} \mathbf{f}_j \Rightarrow \beta_j = B_{ji} \alpha_i$$

Le due relazioni trovate mostrano, in particolare, che le matrici A e B devono poi essere una l'inversa dell'altra.

1.4.1 Operatori e funzionali lineari

Siano dati due spazi vettoriali \mathcal{V} e \mathcal{W} definiti sullo stesso campo \mathcal{K} (reale o complesso) e sia F una funzione definita da \mathcal{V} in \mathcal{W} , dove non è detto che il dominio della funzione debba necessariamente coincidere con \mathcal{V} né che \mathcal{V} e \mathcal{W} debbano essere diversi.

La funzione F viene detta *operatore lineare* se accade che

- il dominio della funzione F è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} , eventualmente coincidente con \mathcal{V} stesso;
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{K} : F(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha F(\mathbf{x}) + \beta F(\mathbf{y}) \equiv \alpha F\mathbf{x} + \beta F\mathbf{y}$

Quando la funzione F ha valori in \mathcal{K} , si parla di un *funzionale* e di un *funzionale lineare* se F soddisfa i requisiti degli operatori lineari di cui sopra.

Elenchiamo adesso, senza dimostrazione, alcune proprietà importanti degli operatori lineari:

- un operatore lineare manda il vettore nullo di \mathcal{V} nell'elemento nullo di \mathcal{W} ;
- il nucleo (kernel) di un operatore lineare, cioè l'insieme dei vettori \mathbf{x} per i quali $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} ;
- un operatore lineare è invertibile se e solo se il suo nucleo è fatto dallo spazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo.

Riguardo ai funzionali lineari e continui F definiti sullo spazio \mathcal{V} , essi vengono anche indicati nel modo seguente

$$F(\mathbf{x}) = (F, \mathbf{x})$$

Un funzionale molto particolare è certamente il funzionale nullo 0 , caratterizzato dal fatto che $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} : (0, \mathbf{x}) = 0 \in \mathcal{K}$.

L'insieme dei funzionali lineari su \mathcal{V} può essere dotato della struttura di spazio vettoriale sul campo \mathcal{K} su cui è costituito \mathcal{V} stesso, definendo l'operazione di somma fra funzionali nel modo seguente³

$$(F + G, \mathbf{x}) = (F, \mathbf{x}) + (G, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})$$

e il prodotto di F per gli elementi k del campo \mathcal{K} nel modo seguente

$$(kF, \mathbf{x}) = (F, k\mathbf{x}) = F(k\mathbf{x})$$

Lo spazio vettoriale \mathcal{V}^* dei funzionali lineari su \mathcal{V} è detto *spazio duale* associato a \mathcal{V} .

³Evidentemente l'identità per la somma è proprio il funzionale 0 definito prima ...

1.5 Algebre

Uno spazio vettoriale su un campo \mathcal{K} costituisce un'algebra \mathcal{A} sullo stesso campo se è definito in esso un prodotto fra i suoi elementi (vettori) che sia distributivo rispetto alla somma, ovvero tale che

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A} : \quad & (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz} \\ & \mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{xy} + \mathbf{xz}\end{aligned}$$

per il quale accade che

$$\forall k \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A} : (k\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(k\mathbf{y}) = k(\mathbf{xy})$$

Poiché \mathcal{A} è uno spazio vettoriale su \mathcal{K} , potremo fissare in essa una base $\{\mathbf{e}_i\}$ ed esprimere i suoi elementi attraverso di essa.

Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due generici elementi di \mathcal{A} . Avremo dunque

$$\mathbf{x} = \alpha_i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{y} = \beta_j \mathbf{e}_j$$

Consideriamo ora il loro prodotto \mathbf{xy} .

Esso è ancora, necessariamente, un elemento dell'algebra \mathcal{A} , per cui potremo certamente esprimerlo nella base data, ovvero potremo scrivere

$$\mathbf{xy} = \gamma_k \mathbf{e}_k$$

D'altronde

$$\mathbf{xy} = (\alpha_i \mathbf{e}_i)(\beta_j \mathbf{e}_j) = \alpha_i \beta_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$$

Ma anche il prodotto $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ sarà un vettore di \mathcal{A} , dunque di nuovo esprimibile come combinazione lineare degli elementi della base data, ovvero

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_k C_{ij}^k \mathbf{e}_k \equiv C_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

I coefficienti C_{ij}^k sono detti *coefficienti di struttura* dell'algebra e dipendono sia dall'algebra che dalla base scelta.

Essi consentono di determinare univocamente la n -tupla $\{\gamma_k\}$ caratteristica dell'elemento dell'algebra \mathbf{xy} attraverso le due n -tuple $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_j\}$ che definiscono \mathbf{x} e \mathbf{y} . Infatti

$$\mathbf{xy} = \gamma_k \mathbf{e}_k = \alpha_i \beta_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \alpha_i \beta_j C_{ij}^k \mathbf{e}_k \Rightarrow \gamma_k = C_{ij}^k \alpha_i \beta_j$$

dove è sottintesa, al solito, la somma sugli indici ripetuti i e j .

Algebre che abbiano gli stessi coefficienti di struttura in basi opportune, si dicono fra loro isomorfe.

Si osservi che, in generale, per le algebre non è richiesto né che il prodotto sia commutativo e nemmeno che sia associativo.

Nel caso in cui il prodotto sia associativo, cioè se accade che

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A} : \mathbf{x}(\mathbf{y}\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\mathbf{y})\mathbf{z}$$

l'algebra è detta *associativa*.

Nel caso in cui il prodotto sia commutativo, ovvero se

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A} : \mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x}$$

l'algebra è detta *commutativa*.

Alcune strutture algebriche particolarmente rilevanti per la Fisica sono le seguenti:

- *algebra di Lie*
che è definita dalle seguenti proprietà del prodotto:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A} : \mathbf{x}\mathbf{y} &= -\mathbf{y}\mathbf{x} \\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A} : \mathbf{x}(\mathbf{y}\mathbf{z}) + \mathbf{y}(\mathbf{z}\mathbf{x}) + \mathbf{z}(\mathbf{x}\mathbf{y}) &= 0 \end{aligned}$$

Un'algebra di questo tipo è quella costituita dallo spazio vettoriale dei consueti vettori tridimensionali, con il prodotto vettoriale⁴;

- *algebra di Clifford*
Questa struttura è definita nell'ambito di opportuni sottospazi dello spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$ a valori, in generale, complessi⁵.
Supponiamo che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ sia una base del sottospazio vettoriale considerato: questo sottospazio costituisce un'algebra di Clifford se accade che

$$\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\} = G_{ij} \cdot I$$

dove G è una matrice $m \times m$ invertibile, mentre I indica l'identità in n dimensioni.

Il prodotto, in questo caso, è costituito dall'anticommutatore che, come tale, è evidentemente commutativo, per cui l'algebra è commutativa (ma non associativa!).

⁴Ricordiamo che, per il prodotto vettoriale, accade appunto che

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) + \mathbf{y} \wedge (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) + \mathbf{z} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) &= 0 \end{aligned}$$

e l'ultima relazione è nota anche come *identità di Jacobi*.

⁵La struttura di spazio vettoriale è quella canonica, ovvero con la somma fra matrici (gruppo) e con il prodotto della matrice per scalari complessi.

1.6 Spazi topologici

Si dice che un insieme \mathcal{T} possiede la struttura di *spazio topologico* se accade che, per ogni suo punto x è assegnata una famiglia $\mathcal{I}(x)$ di sottoinsiemi (*intorni*) $U(x)$

$$\mathcal{I}(x) = \{U(x) : U(x) \subseteq \mathcal{T}; x \in U(x)\}$$

tale che

- ogni elemento $x \in \mathcal{T}$ possiede almeno un intorno $U(x)$;
- se $U(x)$ e $V(x)$ sono intorni dello stesso elemento x , allora anche la loro intersezione $U(x) \cap V(x)$ è un intorno di x ;
- se $U(x)$ è un intorno del punto x , allora esiste un intorno $V(x)$ tale per cui $U(x)$ è intorno anche di tutti gli elementi di $V(x)$;
- se x e y sono due elementi diversi di \mathcal{T} allora esistono due intorni $U(x)$ e $V(x)$ che sono fra loro disgiunti

L'ultima proprietà può essere o no presente: nel caso in cui sia verificata, si parla di spazio topologico *separabile* o di Hausdorff.

Un punto $x \in \mathcal{T}$ si dice *aderente* a un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ se accade che ogni intorno $U(x)$ del punto x contiene qualche punto dell'insieme \mathcal{S} , ovvero se

$$\forall U(x) \in \mathcal{I}(x) : U(x) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

Naturalmente questa definizione implica che tutti i punti di \mathcal{S} risultano essere aderenti a \mathcal{S} stesso.

Si dice che x è un *punto di accumulazione* per \mathcal{S} se ogni intorno di x contiene punti di \mathcal{S} diversi da x stesso (si osservi che non è richiesto che x appartenga a \mathcal{S} ...), ovvero se accade che

$$\forall U(x) \in \mathcal{I}(x) : U(x) \cap \mathcal{S} \neq \text{sia da } \emptyset \text{ come da } \{x\}$$

Si dice che $x \in \mathcal{S}$ è un *punto isolato* in \mathcal{S} se non è un punto di accumulazione per \mathcal{S} , ovvero se esiste un intorno $U(x)$ di x che non contiene altri punti di \mathcal{S} diversi da x , cioè se

$$\exists U(x) \in \mathcal{I}(x) : U(x) \cap \mathcal{S} = \{x\}$$

Le definizioni di punto di accumulazione e di punto isolato si applicano anche nel caso in cui $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Se succede che ogni punto dello spazio topologico è isolato, allora lo spazio topologico viene detto *discreto*.

Un insieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ viene detto *denso* in \mathcal{T} se accade che ogni punto di \mathcal{T} risulta aderente a \mathcal{S} .

Con il simbolo $\overline{\mathcal{S}}$ viene poi indicato l'insieme di tutti i punti aderenti a \mathcal{S} . L'insieme $\overline{\mathcal{S}}$ viene chiamato *chiusura* di \mathcal{S} stesso.

Chiaramente risulta che

$$\mathcal{S} \subseteq \overline{\mathcal{S}}$$

Inoltre accade che

$$\begin{aligned} \overline{\emptyset} &= \emptyset \\ \overline{\mathcal{T}} &= \mathcal{T} \\ \forall \mathcal{S} \subset \mathcal{T} &: \overline{(\overline{\mathcal{S}})} = \overline{\mathcal{S}} \\ \forall \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{T}, \forall \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{T} &: \overline{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} = \overline{\mathcal{S}_1} \cup \overline{\mathcal{S}_2} \end{aligned}$$

Un insieme \mathcal{S} si dice *chiuso* se esso coincide con la sua chiusura, ovvero se accade che

$$\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}}$$

Questa proprietà è equivalente a quella di chiedere che \mathcal{S} contenga tutti i suoi punti di accumulazione.

Da quanto riportato sopra, risulta immediato che l'insieme vuoto \emptyset e l'intero spazio \mathcal{T} sono entrambi chiusi. Si dimostra poi che

- l'unione di un numero finito⁶ di insiemi chiusi è chiusa;
- l'intersezione di una qualsiasi famiglia (finita o infinita) di insiemi chiusi è chiusa

Un insieme \mathcal{S} viene detto *aperto* se il suo complementare è chiuso.

Si osservi che "chiuso" e "aperto" non costituiscono uno la negazione dell'altro. E' evidente, per esempio, che, per le definizioni date, l'insieme vuoto \emptyset e l'intero spazio \mathcal{T} risultano sia chiusi che aperti e possiamo trovare anche insiemi che non sono né chiusi né aperti.

Si può dimostrare che vale il teorema secondo cui un insieme \mathcal{S} è aperto se e solo se per ogni punto $x \in \mathcal{S}$, esiste un intorno di x che è contenuto in \mathcal{S} , ovvero se accade che

$$\forall x \in \mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{I}(x) \Leftrightarrow \mathcal{S} \text{ aperto}$$

⁶Questa proprietà *non* vale per l'unione di un numero infinito di insiemi chiusi.

Consideriamo infatti l'esempio seguente. Come vedremo, la topologia canonica definita sulla retta reale prevede che gli intorni di un generico punto x debbano contenere il segmento fatto dai punti y tali che $|x - y| < \delta$ per qualche opportuno valore di $\delta > 0$. Se prendiamo allora un segmento $[a, b]$ comprendente i due estremi $a < b$, questo è chiuso. Consideriamo adesso l'unione dei segmenti $[0, 2 - 1/n]$ con $n = 1, 2, \dots$: questo insieme è fatto, ovviamente, dai punti x tali che $x \geq 0, x < 2$ e il punto $x = 2$ è di accumulazione ma non appartiene all'insieme che, quindi non è chiuso.

Dato un insieme \mathcal{S} , si dice che un punto $x \in \mathcal{S}$ è *interno* a \mathcal{S} se accade che \mathcal{S} contiene tutto un intorno di x , ovvero se \mathcal{S} è, esso stesso, un intorno di x . L'insieme dei punti interni di \mathcal{S} viene indicato con $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$.

Un punto $x \in \mathcal{T}$ viene detto *esterno* a \mathcal{S} se risulta essere interno al complementare di \mathcal{S} stesso.

Si dimostra facilmente che, qualunque sia \mathcal{S} , l'insieme $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ è aperto.

Si chiama poi *frontiera* di \mathcal{S} l'insieme dei punti di \mathcal{T} che non sono né interni né esterni a \mathcal{S} , ovvero l'insieme dei punti aderenti tanto a \mathcal{S} quanto al suo complementare.

Riguardo poi alla famiglia degli intorni $\mathcal{I}(x)$ del generico punto $x \in \mathcal{T}$, viene detta *base* per $\mathcal{I}(x)$ la sottofamiglia $\mathcal{I}^*(x) \subset \mathcal{I}(x)$ per la quale accade che

$$\forall U(x) \in \mathcal{I}(x), \exists V(x) \in \mathcal{I}^*(x) : V \subset U$$

Una base di intorni del generico punto x è quindi tale che per ogni intorno $U(x)$ si può trovare un elemento $V(x)$ della base che è contenuto in $U(x)$. Due basi di intorni $\mathcal{I}_1^*(x)$ e $\mathcal{I}_2^*(x)$ del punto x sono equivalenti fra loro, nel senso che definiscono la stessa topologia, se accade che

$$\begin{aligned} \forall V_1(x) \in \mathcal{I}_1^*(x), \exists V_2(x) \in \mathcal{I}_2^*(x) : V_2(x) \subseteq V_1(x) \\ \forall V_2(x) \in \mathcal{I}_2^*(x), \exists V_1(x) \in \mathcal{I}_1^*(x) : V_1(x) \subseteq V_2(x) \end{aligned}$$

L'utilità del concetto di *base di intorni* sta nel fatto che gli aspetti topologici più rilevanti che abbiamo espresso in termini di intorni U possono equivalentemente essere espressi in termini di elementi V di una base di intorni. Questo accade, per esempio, nel caso di

- punto aderente;
- punto di accumulazione;
- punto isolato;
- insieme chiuso;
- insieme aperto.

La nozione di spazio topologico è fondamentale per poter definire, per esempio, la *continuità* di una funzione in un punto, e quindi definire conseguentemente il limite, la derivata, etc. ...

Supponiamo infatti che \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 siano due spazi topologici e che F sia una funzione definita da \mathcal{T}_1 (o comunque da un intorno $U(x)$ del punto $x \in \mathcal{T}_1$) a valori in \mathcal{T}_2

$$x \in \mathcal{T}_1 \xrightarrow{F} F(x) \equiv y \in \mathcal{T}_2$$

Si dice che la funzione F è continua nel punto x se, essendo $F(x) \equiv y$, accade che

$$\forall U(x) \in \mathcal{I}(x), \exists V(y) \in \mathcal{I}(y) : F^{-1}(V(y)) \subset U(x)$$

dove con $F^{-1}(V(y))$ indichiamo, al solito, la controimmagine, secondo la funzione F , dell'intorno $V(y) \subset \mathcal{T}_2$ del punto $y = F(x)$.

In altri termini, la funzione F è continua in x se, scelto comunque un intorno $U(x)$ del punto x , possiamo trovare un opportuno intorno $V(y)$ del punto $y = F(x)$ la cui controimmagine $F^{-1}(V(y))$ è contenuta in $U(x)$.

1.6.1 Spazi connessi

Abbiamo visto che in ogni spazio topologico \mathcal{T} , l'insieme vuoto e \mathcal{T} stesso sono, allo stesso tempo, sia chiusi che aperti.

Uno spazio topologico viene detto *sconnesso* se esistono due suoi sottoinsiemi propri \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 tali che

- \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 sono entrambi non vuoti;
- $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset$, mentre $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$;
- \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 sono entrambi aperti e quindi anche entrambi chiusi, essendo complementari.

Uno spazio topologico viene detto *connesso* se non è sconnesso.

Se accade che, per ogni coppia di elementi x, y dello spazio topologico \mathcal{T} , si può trovare una funzione continua f definita dal segmento reale $[0, 1]$ a valori in \mathcal{T} , per la quale accade che

$$f(0) = x; \quad f(1) = y$$

allora lo spazio \mathcal{T} viene detto *connesso per archi*.

Si può dimostrare che la connessione per archi implica la connessione di cui sopra, mentre il contrario non è assicurato.

1.6.2 Spazi compatti

Iniziamo definendo la *copertura* di uno spazio topologico.

Dato uno spazio topologico \mathcal{T} , una sua copertura è una famiglia \mathcal{F} di sue parti tale che l'unione dei suoi membri coincide con \mathcal{T} :

$$\left\{ \forall k \in \mathcal{F}, P_k \subset \mathcal{T} \text{ e } \bigcup_{k \in \mathcal{F}} P_k = \mathcal{T} \right\}$$

La copertura si dice

- *finita* se la famiglia \mathcal{F} è finita,
- *aperta* se le parti $P_k \subset \mathcal{T}$ sono aperte.

In generale, uno spazio topologico \mathcal{T} viene detto *compatto* se è *separato* (di Hausdorff) e da ogni sua copertura aperta si può estrarre una copertura finita.

Nel caso particolare in cui la topologia sia indotta da una metrica (vedi oltre), si dimostra che questa definizione di spazio compatto equivale a quella secondo cui da ogni successione di suoi punti si può estrarre una successione parziale convergente. Questo implica anche che lo spazio sia chiuso e completo (vedi).

1.7 Spazi metrici

Un insieme \mathcal{M} possiede la struttura di *spazio metrico* se è assegnata una funzione *distanza* d sulle coppie ordinate (x, y) degli elementi di \mathcal{M} che ha valori reali e possiede le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathcal{M} : d(x, y) &\geq 0; \\ \forall x, y \in \mathcal{M} : d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x = y; \\ \forall x, y \in \mathcal{M} : d(x, y) &= d(y, x); \\ \forall x, y, z \in \mathcal{M} : d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

L'ultima relazione è detta anche "diseguaglianza triangolare".

La presenza di una metrica in uno spazio \mathcal{M} induce in esso, in modo canonico, una topologia.

Sia dato, infatti, un punto $x \in \mathcal{M}$ e sia $\delta > 0$ un qualsiasi numero reale positivo: definiamo la *sfera* $S(x, \delta)$ come l'insieme dei punti di \mathcal{M} che distano dal punto x meno di δ , ovvero

$$S(x, \delta) \equiv \{y : y \in \mathcal{M}; d(x, y) \leq \delta\}$$

Possiamo allora definire gli intorni del punto x come quei sottoinsiemi di \mathcal{M} che contengono una sfera $S(x, \delta)$ per un valore opportuno di $\delta > 0$.

E' facile dimostrare che questa definizione soddisfa le proprietà richieste agli intorni per definire uno spazio topologico separabile e che l'insieme delle sfere $\{S(x, \delta), \delta > 0\}$ costituisce una *base* di intorni del punto x .

In termini di questa topologia indotta dalla metrica, la definizione di continuità nel punto x_0 di una funzione reale a valori reali $f(x)$ diventa semplicemente la consueta condizione per cui

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

1.7.1 Successione di Cauchy

Dato uno spazio metrico \mathcal{M} in cui è definita la distanza d , una successione $\{\alpha_n\}$ di elementi di \mathcal{M} viene detta *successione di Cauchy* se accade che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \hat{n} \text{ tale che } \forall n_a, n_b : n_a \geq \hat{n}, n_b \geq \hat{n} \Rightarrow d(\alpha_{n_a}, \alpha_{n_b}) \leq \epsilon$$

1.7.2 Spazio metrico completo

Uno spazio metrico \mathcal{M} è detto *completo* se tutte le successioni di Cauchy a valori in esso sono convergenti a un suo elemento.

1.7.3 Gli spazi \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)

Una importante classe di spazi metrici è costituita dagli spazi \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n). Si tratta degli spazi vettoriali costituiti dalle n -tuple di numeri reali (complessi) (x_1, x_2, \dots, x_n) con la struttura di spazio vettoriale sul corpo reale (complesso) conferitagli dalla somma così definita

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

e dal seguente prodotto per scalari reali (complessi) a

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

nei quali è introdotta la seguente distanza

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \sqrt{\sum_i |x_i - y_i|^2}$$

che conferisce a \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) la struttura metrica e quindi anche topologica.

1.7.4 Sottospazi convessi di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)

Un sottospazio \mathcal{S} di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) è detto *convesso* se accade che, per ogni coppia di suoi elementi \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 , tutti i punti definiti dalla funzione lineare

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)t; \quad t \in [0, 1]$$

appartengono ancora a \mathcal{S} ; ovvero, in altri termini, il "segmento" di punti di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) avente per estremi \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 è tutto contenuto in \mathcal{S} .

Un sottospazio convesso è, evidentemente, anche connesso per archi e dunque connesso.

Il viceversa non è vero: è facile convincersi che esistono sottospazi di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) che sono connessi ma che non sono convessi.

1.7.5 Sottospazi compatti di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)

Abbiamo già visto qual è, in generale, la definizione di spazio compatto. Nel caso di un sottospazio di \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n), secondo la definizione esso risulta compatto se e solo se è chiuso (come richiesto dalla definizione generale) e *limitato*, ovvero tale per cui si può trovare una opportuna ipersfera centrata sul vettore nullo e di raggio $r \in \mathbb{R}$ opportuno, la quale contiene interamente il sottospazio dato.

1.8 Spazi di Banach

Supponiamo che in uno spazio vettoriale \mathcal{V} definito sul campo complesso \mathbb{C} sia definita una funzione da \mathcal{V} in \mathbb{R} , che chiameremo *norma* e indicheremo con $\|\cdot\|$, tale che

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \|\mathbf{v}\| &\geq 0; \\ \|\mathbf{v}\| = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}; \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda \mathbf{v}\| &= |\lambda| \|\mathbf{v}\|; \\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| &\leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \end{aligned}$$

e l'ultima proprietà della norma viene anche indicata con il nome di *disuguaglianza triangolare*.

Usando la norma sopra definita, possiamo introdurre nello spazio \mathcal{V} una distanza, ponendo

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

Chiaramente questa definizione di distanza gode della proprietà di essere *invariante per traslazioni*, ovvero tale che

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V} : d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d(\mathbf{v} + \mathbf{z}, \mathbf{w} + \mathbf{z})$$

E' facile constatare che la definizione garantisce che

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\geq 0; \quad = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}; \\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

e si può dimostrare⁷ che la definizione di distanza, data sopra in termini della norma, soddisfa anche la relazione per cui

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V} : d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

⁷Iniziamo, infatti, partendo dalla disuguaglianza triangolare, secondo la quale

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

che, vista la definizione di distanza data, può essere riscritta come

$$d(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{v}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{0}, \mathbf{w})$$

D'altronde, per l'invarianza per traslazioni della distanza, se \mathbf{z} è un qualunque vettore di \mathcal{V} , risulta

$$d(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{v} + \mathbf{z}, \mathbf{z} - \mathbf{w})$$

Per l'invarianza per traslazioni e la simmetria della funzione distanza, si ha altresì che

$$\begin{aligned} d(\mathbf{v}, \mathbf{0}) &= d(\mathbf{v} + \mathbf{z}, \mathbf{z}) \\ d(\mathbf{0}, \mathbf{w}) &= d(\mathbf{w}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{z}, \mathbf{z} - \mathbf{w}) \end{aligned}$$

che, per l'arbitrarietà di $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$, dimostra la disuguaglianza triangolare.

Abbiamo quindi che uno spazio *normato* può essere visto anche come spazio *metrico* (mentre il viceversa non è vero perché, in generale, in uno spazio metrico non si può necessariamente concludere che $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$).

Uno spazio normato e completo viene detto *spazio di Banach*.

Se gli spazi \mathcal{V} e \mathcal{W} sono normati e hanno una dimensione finita, allora qualunque operatore lineare dell'uno nell'altro è continuo⁸.

Se poi \mathcal{V} è uno spazio di Banach, si può introdurre una norma canonica nel suo duale \mathcal{V}^* , ponendo

$$\|F\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \frac{\|(F, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Si dimostra che, in questo caso, lo spazio \mathcal{V}^* non è fatto solo dal funzionale nullo e che vale il seguente teorema (di Hahn-Banach): se \mathcal{V} è uno spazio di Banach e \mathcal{W} è un suo sottospazio, allora se F è un funzionale lineare e continuo su \mathcal{W} , esiste una sua estensione lineare e continua a tutto lo spazio \mathcal{V} tale che

$$\|F\|_{\mathcal{W}} = \|F\|_{\mathcal{V}}$$

⁸Nel caso di dimensione infinita esistono anche operatori lineari che *non* sono continui. Si consideri, per esempio, lo spazio delle funzioni di variabile reale a valori reali che sono derivabili e sono definite nel segmento reale chiuso $[-1, 1]$. Definiamo l'operatore lineare che associa alla generica funzione f la sua derivata Df calcolata nel punto $x = 1$. Consideriamo la successione $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Evidentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(1) = 1 \neq D \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

1.9 Spazi di Hilbert

Una struttura matematica molto importante per la Meccanica Quantistica è quella dello *spazio di Hilbert*.

Uno spazio vettoriale \mathcal{H} sul corpo complesso costituisce uno spazio di Hilbert se in esso è definito un prodotto scalare che associa a ogni coppia ordinata di vettori un numero complesso

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{C}$$

in modo che

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle^*$$

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0; \quad = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda^* \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

Il prodotto scalare di cui sopra gode della seguente proprietà⁹, detta anche *disuguaglianza di Schwarz*

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H} : |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

⁹Per dimostrare la disuguaglianza di Schwarz, iniziamo osservando che se il prodotto scalare fra i due vettori considerati $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, allora la disuguaglianza è certamente vera.

Se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$, definiamo allora la seguente fase complessa α

$$\alpha \equiv \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}$$

Per la proprietà secondo cui $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, ecco che possiamo concludere che

$$\langle \alpha \mathbf{a} + t \mathbf{b}, \alpha \mathbf{a} + t \mathbf{b} \rangle \geq 0$$

qualsiasi sia il coefficiente t (reale o complesso).

Procediamo ora assumendo che t sia reale: risulta

$$0 \leq |\alpha|^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \alpha^* t \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \alpha t \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + t^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

Ma α è una fase, dunque $|\alpha|^2 = 1$; inoltre, vista la sua definizione, risulta

$$\alpha^* \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha^* \alpha |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \\ \alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = [\alpha^* \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle]^* = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^* = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$$

e dunque

$$0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2t |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| + t^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

Affinché questa disuguaglianza possa essere verificata per qualunque valore del parametro reale t , essendo $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle > 0$ (abbiamo già escluso che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ e dunque anche che sia $\mathbf{b} = \mathbf{0}$...), occorre che il discriminante dell'equazione di secondo grado sia non positivo, ovvero

$$4|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 - 4 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \leq 0$$

e dunque deve accadere, appunto, che $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$

Attraverso il prodotto scalare avente le proprietà elencate sopra, possiamo definire una funzione dallo spazio \mathcal{H} a valori reali non negativi, nel modo seguente

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{H} : \|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$$

Questa funzione, che abbiamo indicato con il simbolo consueto della *norma*, ha effettivamente le proprietà della norma.

Risulta infatti immediato che essa è tale che

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a} \in \mathcal{H} & : \|\mathbf{a}\| \geq 0; \quad = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \forall \mathbf{a} \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C} & : \|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\| \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

e si può dimostrare¹⁰ che la funzione sopra definita soddisfa anche la disuguaglianza triangolare, ovvero che essa è tale che

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H} : \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

In questo modo, il prodotto scalare definito in \mathcal{H} consente di dare ad \mathcal{H} stesso la struttura di *spazio normato*.

Si osservi che la norma definita sopra attraverso il prodotto scalare soddisfa l'identità

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$$

che è nota come *identità del parallelogramma* (in geometria euclidea piana, la somma dei quadrati sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alle somma dei quadrati costruiti sui lati).

Inoltre, se i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono ortogonali fra loro, ovvero se accade che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, allora vale per loro il teorema di Pitagora

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

¹⁰Iniziamo osservando che, qualunque siano i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H}$, risulta

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\Re \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

D'altronde

$$2\Re \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq 2|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$$

e, usando la disuguaglianza di Schwarz, abbiamo

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{1/2}$$

dunque, sostituendo, abbiamo

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{1/2} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \left(\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \right)^2$$

e quindi

$$\sqrt{\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle} \leq \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}$$

ovvero, appunto, che

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{H} : \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

Se lo spazio \mathcal{H} è *completo* con la metrica definita dalla norma definita a sua volta attraverso il prodotto scalare, allora lo spazio vettoriale \mathcal{H} è detto costituire uno *spazio di Hilbert*.

Uno spazio di Hilbert è detto poi *separabile* se ammette una base finita o numerabile¹¹.

Vogliamo adesso mostrare come, in uno spazio di dimensione finita o numerabile, sia sempre possibile definire una base fatta da vettori che hanno norma unitaria e sono fra loro ortogonali, cioè una base *ortonormale*.

Supponiamo dunque che sia data una base $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, \dots$

Iniziamo definendo il vettore $\mathbf{e}_1 \equiv \frac{\mathbf{g}_1}{|\mathbf{g}_1|}$ e sostituendo nella base di cui sopra al vettore \mathbf{g}_1 il vettore \mathbf{e}_1 , ovvero stabilendo così la nuova base $\mathbf{e}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, \dots$. Poniamo quindi

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{g}_2 \rangle \mathbf{e}_1$$

Poiché \mathbf{e}_1 e \mathbf{g}_2 sono fra loro linearmente indipendenti dato che, per ipotesi, lo erano \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 , evidentemente $\mathbf{f}_2 \neq \mathbf{0}$ e lo spazio lineare generato da \mathbf{e}_1 e \mathbf{g}_2 coincide con quello generato da \mathbf{e}_1 e \mathbf{f}_2 , mentre, evidentemente, si ha che $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = 0$. Definiamo allora il nuovo vettore $\mathbf{e}_2 \equiv \frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}$ e consideriamo la nuova base dello spazio fatta dai vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{g}_3, \dots, \mathbf{g}_n, \dots$ in cui i primi due sono ortogonali fra loro e hanno norma unitaria.

Occupiamoci adesso di \mathbf{g}_3 e poniamo

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{g}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{g}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{g}_3 \rangle \mathbf{e}_2$$

Di nuovo, poiché $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{g}_3 sono linearmente indipendenti, \mathbf{f}_3 è diverso dal vettore nullo ed è anche, evidentemente, ortogonale sia a \mathbf{e}_1 che a \mathbf{e}_2 .

Se definiamo allora il nuovo vettore $\mathbf{e}_3 \equiv \frac{\mathbf{f}_3}{|\mathbf{f}_3|}$ ecco che i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono ortogonali fra loro, hanno norma unitaria e generano lo stesso spazio vettoriale dei vettori $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \dots$

Procedendo in questo modo, con questo processo di ortogonalizzazione (di Gram-Schmidt), possiamo concludere che, data la base $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, \dots$, è sempre possibile ridefinire, a partire da questa, un'altra base la quale è ortonormale.

¹¹Esistono anche spazi di Hilbert non-separabili.

Si considerino, per esempio, le seguenti funzioni $x \rightarrow e^{isx}$, con s e x reali, e si introduca fra queste funzioni, definite sull'asse reale, il seguente prodotto scalare

$$\langle e^{isx}, e^{irx} \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dx e^{-isx} \cdot e^{irx}$$

Usando queste funzioni come base per la costruzione di uno spazio vettoriale sul corpo complesso, con il prodotto scalare di cui sopra, ecco che esse risultano tutte ortogonali (ortonormali) fra loro e sono, evidentemente, non-numerabili.

1.9.1 Operatori lineari

Una classe importante di funzioni definite dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} in sé è costituita dagli operatori lineari L i quali, secondo la definizione generale, sono tali per cui

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} & : L(\mathbf{v}) \equiv L\mathbf{v} \in \mathcal{H}; \\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} & : L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L\mathbf{v} + L\mathbf{w}; \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C} & : L(\lambda\mathbf{v}) = \lambda \cdot L\mathbf{v}\end{aligned}$$

Supponiamo che lo spazio \mathcal{H} sia separabile e che $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ sia una sua base ortonormale. Ogni vettore \mathbf{v} di \mathcal{H} sarà univocamente individuato da opportuni coefficienti γ_i tali che¹²

$$\mathbf{v} = \gamma_i \mathbf{e}_i; \quad \gamma_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$$

Quanto all'azione dell'operatore lineare L sul vettore \mathbf{v} , avremo

$$L\mathbf{v} = L(\gamma_i \mathbf{e}_i) = \gamma_i L\mathbf{e}_i$$

Ma $L\mathbf{e}_i$ è un vettore di \mathcal{H} e dunque sarà esso stesso esprimibile in termini dei vettori della base data, per cui avremo

$$L\mathbf{e}_i = L_{ji} \mathbf{e}_j$$

dove abbiamo indicato con L_{ij} gli elementi di una opportuna matrice (di dimensione eventualmente infinita ...) costituita da coefficienti complessi. Abbiamo così

$$L\mathbf{v} = \gamma_i L\mathbf{e}_i = \gamma_i L_{ji} \mathbf{e}_j = (L_{ji} \gamma_i) \mathbf{e}_j$$

e dunque le componenti del vettore $L\mathbf{v}$ nella base assegnata sono date semplicemente da

$$\langle \mathbf{e}_j, L\mathbf{v} \rangle = L_{ji} \gamma_i$$

Si dimostra che un operatore lineare è invertibile se e solo se accade che

$$L\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

o, in termini della matrice L_{ji} , se essa è invertibile, cioè se esiste una matrice L_{jk}^{-1} tale che

$$L_{ij} L_{jk}^{-1} = I_{ik} \equiv \delta_{ik}$$

La matrice L_{jk}^{-1} risulta essere la matrice associata all'operatore L^{-1} , inverso dell'operatore L dato.

¹²E' implicita la somma sugli indici ripetuti.

1.9.2 Operatori aggiunti

Supponiamo che lo spazio \mathcal{H} sia separabile e che $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ sia una sua base ortonormale. Sia dato l'operatore lineare L . Si definisce l'operatore a esso aggiunto L^\dagger come quell'operatore lineare tale che

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{v}, L^\dagger \mathbf{w} \rangle \equiv \langle L\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Questa definizione, applicata ai vettori della base ortonormale, fornisce

$$\langle \mathbf{e}_i, L^\dagger \mathbf{e}_j \rangle = \langle L\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle L_{ki}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = L_{ji}^* \equiv L_{ij}^+$$

dove abbiamo indicato con L^+ la matrice hermitiana coniugata della matrice L , ovvero la matrice $L^+ = (L^*)^t$.

Possiamo concludere dunque che

$$L^\dagger \mathbf{e}_j = L_{ij}^+ \mathbf{e}_i$$

La matrice che descrive l'operatore aggiunto L^\dagger nella base ortonormale dove L è descritto dalla matrice L_{ij} risulta essere quindi la matrice hermitiana coniugata di questa, cioè L_{ij}^+ .

Si parla di operatori autoaggiunti se accade che $L = L^\dagger$, nel qual caso le matrici che descrivono i due operatori (una la hermitiana coniugata dell'altra) coincidono. Per questo genere di operatori accade evidentemente che

$$\langle \mathbf{v}, L^\dagger \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, L\mathbf{w} \rangle = \langle L\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

che, nel caso in cui $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, stabilisce altresì che

$$\langle \mathbf{v}, L^\dagger \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, L\mathbf{v} \rangle = \langle L\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$$

1.9.3 Operatori unitari

Un operatore lineare e invertibile U definito da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} in sé viene detto *unitario* se accade che

$$U^\dagger = U^{-1}$$

Per questo genere di operatori accade quindi che

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} : \langle U\mathbf{v}, U\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, U^\dagger U\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, U^{-1}U\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

1.9.4 Operatori antilineari

Una applicazione A dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} in sé tale che

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} & : A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C} & : A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^*\mathbf{v}\end{aligned}$$

viene detta *antilineare*.

1.9.5 Operatori aggiunti di operatori antilineari

Anche nel caso di un operatore antilineare A è possibile definire l'aggiunto A^\dagger , ponendo

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w} \rangle \equiv \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^*$$

Si osservi che la definizione data sopra è l'unica coerente con il carattere antilineare dell'operatore, infatti, dalla definizione del prodotto scalare abbiamo

$$\langle \lambda\mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w} \rangle = \lambda^* \langle \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w} \rangle$$

e, dalla definizione di operatore aggiunto, coerentemente, si ha

$$\begin{aligned}\langle \lambda\mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w} \rangle &= \langle A(\lambda\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle^* = \langle \lambda^* A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^* = (\lambda \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle)^* = \lambda^* \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^* = \\ &= \lambda^* \langle \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w} \rangle\end{aligned}$$

Un operatore antilineare A che coincide con il proprio aggiunto A^\dagger viene detto *autoaggiunto*. Per questa classe di operatori risulta

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w} \rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^*$$

Nel caso in cui \mathbf{v} e \mathbf{w} coincidano, abbiamo adesso che

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^* = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$$

ovvero, a differenza di quanto accadeva per gli operatori lineari e autoaggiunti, questo **non** implica alcuna condizione sulla quantità $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$.

1.9.6 Operatori antiunitari

Un operatore antilineare invertibile A da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} in sé, per il quale accada che

$$A^\dagger = A^{-1}$$

viene detto *antiunitario*. Gli operatori antiunitari sono tali per cui

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H} : \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^\dagger A\mathbf{w} \rangle^* = \langle \mathbf{v}, A^{-1} A\mathbf{w} \rangle^* = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^*$$

Capitolo 2

Approfondimenti di Teoria dei Gruppi

2.1 Generalità

Supponiamo che \mathbb{G} sia un gruppo e che \mathbb{H} sia un suo sottogruppo.

Possiamo definire, per ogni elemento $g \in \mathbb{G}$, la classe laterale sinistra (destra) $[g\mathbb{H}]$ ($[\mathbb{H}g]$) fatta dall'insieme di tutti gli elementi gh (hg), al variare di h in \mathbb{H} , cioè

$$\forall g \in \mathbb{G} : [g\mathbb{H}] \equiv \{gh, h \in \mathbb{H}\} \quad (2.1.1)$$

Si tratta di classi disgiunte, ovvero se $[g_1\mathbb{H}]$ e $[g_2\mathbb{H}]$ hanno un elemento \tilde{g} in comune, allora le due classi coincidono, infatti

$$\exists \tilde{g} : \tilde{g} = g_1h_1 = g_2h_2 \Rightarrow g_2^{-1}g_1 = h_2h_1^{-1} \equiv h \in \mathbb{H} \Rightarrow \exists h \in \mathbb{H} : g_1 = g_2h \quad (2.1.2)$$

e dunque

$$[g_1\mathbb{H}] = [g_2h\mathbb{H}] = [g_2\mathbb{H}] \quad (2.1.3)$$

Nel caso in cui il sottogruppo \mathbb{H} sia invariante, evidentemente¹ le classi sinistre e destre, individuate da uno stesso elemento $g \in \mathbb{G}$, coincidono fra loro, ovvero accade che

$$\forall g \in \mathbb{G} : [g\mathbb{H}] = [\mathbb{H}g] \quad (2.1.4)$$

In questo caso, l'insieme delle classi può essere dotato della struttura di gruppo attraverso la seguente definizione di prodotto:

$$[g_1\mathbb{H}][g_2\mathbb{H}] \equiv [g_1g_2\mathbb{H}] \quad (2.1.5)$$

¹Consideriamo infatti il generico elemento gh di $[g\mathbb{H}]$. Essendo \mathbb{H} un sottogruppo invariante, accade che esiste un opportuno \tilde{h} tale che $ghg^{-1} = \tilde{h}$ e dunque si ha che $gh = \tilde{h}g$, la quale mostra come l'elemento $gh \in [g\mathbb{H}]$ è anche elemento di $[\mathbb{H}g]$. Poiché vale anche il viceversa, questo prova appunto che le due classi laterali $[g\mathbb{H}]$ e $[\mathbb{H}g]$ coincidono.

Con questa definizione di prodotto fra classi, l'elemento neutro risulta essere $[\mathbb{H}]$ stesso, mentre l'inverso dell'elemento $[g\mathbb{H}]$ è evidentemente $[g^{-1}\mathbb{H}]$. Il gruppo fatto dalle classi laterali è il *gruppo quoziente* fra \mathbb{G} e il suo sottogruppo invariante \mathbb{H} :

$$\mathbb{G}/\mathbb{H} \equiv \{[g\mathbb{H}] = [\mathbb{H}g]\} \quad (2.1.6)$$

Dati adesso due gruppi \mathbb{G}_a e \mathbb{G}_b e una applicazione F dal primo nel secondo

$$F : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_b \quad (2.1.7)$$

questa viene chiamata *omomorfismo* se rispetta la struttura gruppane di entrambi, cioè se accade che

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbb{G}_a : F(g_1 g_2) = F(g_1) F(g_2) \quad (2.1.8)$$

In questo caso, è immediato che

- l'immagine dell'elemento neutro e_a di \mathbb{G}_a è l'elemento neutro e_b di \mathbb{G}_b , infatti ponendo $g_1 = e_a$ nella relazione (2.1.8), abbiamo evidentemente che

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathbb{G}_a & : F(e_a g) \equiv F(g) = F(e_a) F(g) \\ \Rightarrow F(g) (F(g))^{-1} &= F(e_a) \Rightarrow e_b = F(e_a) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

- dato un qualunque elemento $g_a \in \mathbb{G}_a$, risulta

$$F(g_a^{-1}) = (F(g_a))^{-1} \quad (2.1.10)$$

infatti, per quanto visto sopra

$$\forall g \in \mathbb{G}_a : F(g g^{-1}) = F(e_a) = e_b \quad (2.1.11)$$

e d'altronde, essendo F un omomorfismo, si ha²

$$e_b = F(g g^{-1}) = F(g) F(g^{-1}) \Rightarrow (F(g))^{-1} = F(g^{-1}) \quad (2.1.12)$$

L'omomorfismo può non essere iniettivo, nel qual caso esso non è invertibile: in ogni caso la controimmagine dell'identità e_b di \mathbb{G}_b , cioè il *kernel* (nucleo) \mathbb{K} dell'omomorfismo, è un sottogruppo³ di \mathbb{G}_a , infatti dalla definizione abbiamo che

$$\mathbb{K} \equiv \{F^{-1}(e_b)\} \subset \mathbb{G}_a \Leftrightarrow \mathbb{K} \equiv \{k_i \in \mathbb{G}_a : F(k_i) = e_b\} \quad (2.1.13)$$

²Si osservi che la (2.1.12) non stabilisce nulla quanto alla funzione inversa (che potrebbe anche non esistere se F non è iniettiva), ma solo che, qualunque sia $g \in \mathbb{G}_a$, l'elemento inverso secondo la legge di moltiplicazione in \mathbb{G}_b di $F(g)$ coincide con il valore assunto dall'omomorfismo F su g^{-1} .

³Evidentemente, nel caso di un omomorfismo iniettivo, questo sottogruppo è fatto solo dall'elemento identico ...

e risulta

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K} : F(k_1 k_2^{-1}) = e_b e_b^{-1} = e_b \Rightarrow k_1 k_2 \in \mathbb{K} \quad (2.1.14)$$

Il kernel \mathcal{K} è un sottogruppo invariante, infatti

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathbb{G}_a, \forall k \in \mathbb{K} : F(g k g^{-1}) &= F(g)F(k)F(g^{-1}) = \\ &= F(g)e_b(F(g))^{-1} = e_b \Leftrightarrow g k g^{-1} \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

dunque se \mathbb{G}_a è semplice, i suoi omomorfismi sono sempre e solo iniettivi.

L'omomorfismo può non essere suriettivo: in ogni caso l'immagine \mathbb{I} del gruppo \mathbb{G}_a secondo l'omomorfismo F è un sottogruppo di \mathbb{G}_b , infatti se $i_1 = F(g_1)$ e $i_2 = F(g_2)$ sono due elementi di \mathbb{I} , allora anche il loro prodotto sta in \mathbb{I} poiché

$$i_1 i_2^{-1} = F(g_1) F(g_2^{-1}) = F(g_1 g_2^{-1})$$

e dunque esiste un elemento di \mathbb{G}_a di cui $i_1 i_2^{-1}$ è immagine secondo F .

Nel caso in cui l'omomorfismo sia biiettivo (iniettivo e suriettivo), si parla di *isomorfismo*. Se poi $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_b$ allora invece che di omomorfismo si parla di *endomorfismo* e invece di isomorfismo si parla di *automorfismo*.

Dato un qualunque omomorfismo F , esso definisce in modo naturale un isomorfismo fra il gruppo quoziente \mathbb{G}_a/\mathbb{K} e il gruppo \mathbb{I} , immagine di \mathbb{G}_a . Per esempio, l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili a valori complessi $GL_n(\mathbb{C})$ con l'usuale prodotto fra matrici (righe per colonne) costituiscono il *gruppo generale lineare* di ordine n sul corpo complesso e l'applicazione

$$Det : M \in GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow det(M) \in \mathbb{C} \quad (2.1.16)$$

è un omomorfismo nel gruppo (con il prodotto) dei numeri complessi privati dello zero. Esso è ovviamente suriettivo ma non iniettivo e il kernel è fatto dalle matrici con determinante $+1$, mentre le classi laterali sono gli insiemi di matrici con lo stesso valore del determinante.

2.2 Rappresentazioni

Un caso particolarmente importante di omomorfismo è quello che va sotto il nome di "rappresentazione" di un gruppo.

Con questo nome si indica un omomorfismo a valori nel gruppo degli operatori lineari e invertibili agenti sugli elementi (vettori) di un opportuno spazio vettoriale \mathcal{V} sul corpo reale o complesso, fra i quali l'operazione di composizione interna è il prodotto ordinario fra operatori, ovvero la loro applicazione in successione.

Questo gruppo di operatori va sotto il nome di *gruppo generale lineare* su \mathcal{V} e viene indicato con il simbolo $GL(\mathcal{V})$.

Una rappresentazione, dunque, è un omomorfismo

$$T : \mathbb{G} \rightarrow GL(\mathcal{V}) \quad (2.2.17)$$

Se poi \mathcal{V} è uno spazio di Hilbert e l'omomorfismo ha valori nel sottogruppo degli operatori unitari, allora la rappresentazione viene detta *unitaria*.

Infine, se l'omomorfismo è iniettivo, si parla di rappresentazione *fedele*.

Nel caso di spazi vettoriali di dimensione finita e dunque, fissata una base, isomorfi a \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , la rappresentazione può, equivalentemente, essere vista a valori nel gruppo delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti reali o complessi $GL(\mathbb{R}^n)$ o $GL(\mathbb{C}^n)$. Evidentemente il generico elemento del gruppo $g \in \mathbb{G}$ associato alla trasformazione lineare $T(g)$, sarà associato a una matrice $M(g)$ che dipende dalla base scelta in \mathcal{V} . Se U è la matrice che descrive il cambiamento di base $\mathbf{e}' = U \mathbf{e}$, la matrice $M'(g)$, che esprime la stessa trasformazione $T(g)$ nella nuova base \mathbf{e}' sarà comunque legata alla matrice $M(g)$ dalla relazione

$$M'(g) = U M(g) U^{-1} \quad (2.2.18)$$

e per questo, M ed M' vengono dette *rappresentazioni equivalenti* e la relazione (2.2.18) è detta *di verosimiglianza*.

In generale, due rappresentazioni T e T' in $GL(\mathcal{V})$ sono dette *equivalenti* quando esiste un operatore $U \in GL(\mathcal{V})$ per cui

$$\forall g \in \mathbb{G} : T'(g) = U T(g) U^{-1} \quad (2.2.19)$$

Data una rappresentazione $M(g)$ di un gruppo \mathbb{G} a valori in $GL(\mathbb{C}^n)$, possiamo definire tre altre rappresentazioni canonicamente individuate attraverso la rappresentazione data, ovvero

- la rappresentazione complessa coniugata

$$\forall g \in \mathbb{G} : g \rightarrow (M(g))^* \quad (2.2.20)$$

- la rappresentazione trasposta-inversa

$$\forall g \in \mathbb{G} : g \rightarrow (M(g^{-1}))^t \quad (2.2.21)$$

- la rappresentazione hermitiana-inversa

$$\forall g \in \mathbb{G} : g \rightarrow (M(g^{-1}))^\dagger \quad (2.2.22)$$

Chiaramente, nel caso in cui lo spazio \mathcal{V} sia sul corpo reale e dunque la rappresentazione sia in realtà in $GL(\mathbb{R}^n)$, la rappresentazione complessa coniugata coincide⁴ con quella di partenza, come pure, nel caso di una rappresentazione sul gruppo delle matrici ortogonali, la rappresentazione trasposta-inversa coincide con quella data e, nel caso di una rappresentazione unitaria, è la rappresentazione hermitiana-inversa a coincidere con quella di partenza. In generale, però, queste rappresentazioni possono non essere nemmeno equivalenti fra loro !

Vediamo un esempio.

Chiaramente i numeri complessi \mathbb{C} costituiscono un gruppo con l'usuale operazione di somma.

Consideriamo ora il gruppo delle matrici 2×2 così fatte

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.2.23)$$

Esse hanno determinante pari all'unità e costituiscono un gruppo G_2 con l'usuale moltiplicazione fra matrici, infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 + z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

La funzione

$$F : \mathbb{C} \rightarrow G_2 : \forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.25)$$

è una rappresentazione fedele del gruppo dei numeri complessi con la somma, a valori nel sottogruppo G_2 definito sopra.

E' facile convincersi che essa non è equivalente né alla rappresentazione complessa coniugata né a quella hermitiana-inversa, mentre, attraverso la matrice $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (σ_2 matrice di Pauli) è equivalente alla rappresentazione trasposta-inversa.

Un sottospazio lineare \mathcal{W} di \mathcal{V} è detto *invariante* sotto una rappresentazione T di un gruppo \mathbb{G} se accade che

$$\forall g \in \mathbb{G} : T(g) \mathcal{W} = \mathcal{W} \quad (2.2.26)$$

⁴Come vedremo in seguito, può accadere, come nel caso di $SU(2)$, che le due rappresentazioni, pur non coincidendo, siano però equivalenti tra loro.

ovvero \mathcal{W} è invariante quando accade che tutte le trasformazioni lineari $T(g)$ mandano \mathcal{W} in sé. In altri termini, se P è l'operatore di proiezione da \mathcal{V} in \mathcal{W} , allora affinché \mathcal{W} sia invariante sotto $T(g)$ deve accadere (condizione necessaria e sufficiente) che, come operatori da \mathcal{V} in sé, sia

$$\forall g \in \mathbb{G} : P T(g) P = T(g) P \quad (2.2.27)$$

Chiaramente, data la definizione di cui sopra, esistono due sottospazi invarianti *banali*, i.e.

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}; \quad \mathcal{W} = \{\Omega\} \quad (2.2.28)$$

dove Ω è l'elemento identico in \mathcal{V} , cioè il vettore nullo.

Una rappresentazione T di un gruppo \mathbb{G} a valori nel gruppo degli operatori lineari invertibili agenti in uno spazio vettoriale \mathcal{V} è detta *irriducibile* se non ammette sottospazi invarianti non banali. Se una rappresentazione non soddisfa questo criterio, allora essa è detta *riducibile*.

Nell'esempio considerato prima, dove lo spazio lineare \mathcal{V} è evidentemente \mathbb{C}^2 , chiaramente il sottospazio lineare unidimensionale generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è invariante⁵ sotto la rappresentazione data e dunque essa è riducibile.

Una rappresentazione è detta *completamente riducibile* se lo spazio lineare \mathcal{V} in cui agiscono gli operatori a essa associati può essere decomposto in somma diretta di sottospazi invarianti, in ciascuno dei quali la restrizione della rappresentazione T è irriducibile. Nell'esempio sopra riportato, questo *non* è possibile perché la rappresentazione data non ammette alcun altro sottospazio invariante oltre quello indicato, a parte quelli banali.

Una rappresentazione irriducibile è tale per cui, preso un qualunque vettore non nullo dello spazio lineare \mathcal{V} , applicando a esso gli operatori lineari $T(g)$, si genera un insieme di vettori con i quali è possibile esprimere un qualsiasi vettore di \mathcal{V} .

Nel caso di gruppi finiti, cioè costituiti da un numero finito di elementi, si può dimostrare che ogni rappresentazione è equivalente a una rappresentazione unitaria.

Nel caso di rappresentazioni unitarie, particolarmente importanti in Fisica perché traducono l'azione delle trasformazioni di simmetria nello spazio di Hilbert dei vettori di stato, indipendentemente dalla cardinalità del gruppo, le rappresentazioni sono comunque irriducibili o completamente riducibili.

⁵E' immediato osservare che il proiettore sullo spazio unidimensionale indicato è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.29)$$

e che, data la (2.2.25) e la (2.2.29), vale la (2.2.27).

Infatti se T è riducibile, allora esiste per ipotesi un proiettore non banale P per il quale

$$PT(g)P = T(g)P \quad (2.2.30)$$

Prendendo allora l'aggiunto e ricordando che $P^\dagger = P$, abbiamo

$$P(T(g))^\dagger P = P(T(g))^\dagger \quad (2.2.31)$$

ma essendo T unitaria

$$(T(g))^\dagger = (T(g))^{-1} = T(g^{-1}) \quad (2.2.32)$$

e siccome, al variare di g in \mathbb{G} , g^{-1} può assumere un qualunque valore in \mathbb{G} , possiamo concludere che, nel caso di rappresentazioni unitarie, deve essere altresì che

$$PT(g)P = PT(g) \quad (2.2.33)$$

e dunque, per la (2.2.30) e la ((2.2.33)), avremo che

$$\begin{aligned} (1-P)T(g)(1-P) &= T(g)(1-P) - PT(g)(1-P) = \\ &= T(g) - T(g)P - PT(g) + PT(g)P = \\ &= T(g) - T(g)P - PT(g)P + PT(g)P = \\ &= T(g) - T(g)P = T(g)(1-P) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

e questo dimostra che anche il proiettore $(1-P)$ seleziona un sottospazio invariante, che è ovviamente complementare a quello di partenza. Così procedendo, si dimostra la completa riducibilità della rappresentazione data.

La rilevanza delle rappresentazioni irriducibili sta in una loro proprietà, nota come *Lemma di Schur*. Questo lemma afferma che se $T(g)$ è una rappresentazione irriducibile di un gruppo, se A è un operatore che commuta con tutti gli operatori $T(g)$, allora A è multiplo dell'identità, ovvero

$$\forall g \in \mathbb{G} : T(g)A = AT(g) \Rightarrow A \propto I \quad (2.2.35)$$

La dimostrazione si basa sul fatto che A ammetterà⁶ almeno un autovalore λ e dunque un sottospazio lineare U_λ non banale fatto di autovettori a esso corrispondenti, per il quale, quindi

$$w \in U_\lambda \Leftrightarrow Aw = \lambda w \quad (2.2.36)$$

Accade dunque che, se A commuta con tutti i $T(g)$, allora

$$\forall w \in U_\lambda : AT(g)w = T(g)Aw = \lambda T(g)w \quad (2.2.37)$$

⁶E' facile vedere che, siccome ogni matrice ammette almeno un autovalore e quindi almeno un autovettore, questo è vero in dimensione finita.

Resta vero anche nel caso di dimensione infinita, almeno se A è autoaggiunto.

e dunque $T(g)w$ è ancora autovettore di A per l'autovalore λ , ovvero $T(g)w \in U_\lambda$. Ne segue quindi che U_λ è invariante sotto T e dunque, non potendo coincidere, per la sua stessa definizione, con il sottospazio fatto dal solo vettore nullo, occorre, per l'ipotesi che T è irriducibile, che esso coincida con l'intero spazio lineare, da cui $A = \lambda I$.

2.3 Gruppi di Lie

Un gruppo \mathbb{G} è un *gruppo di Lie* quando

- possiede una struttura topologica, per cui la moltiplicazione è una funzione continua;
- è parametrizzabile attraverso n variabili⁷ reali indipendenti $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ appartenenti a un opportuno sottoinsieme \mathcal{S} di \mathbb{R}^n , cioè

$$\forall g \in \mathbb{G}, \exists \mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S} : g = g(\mathbf{x}) \quad (2.3.38)$$

- La parametrizzazione è analitica⁸, ovvero, posto

$$g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) \equiv g(F(\mathbf{x}, \mathbf{y})); \quad (g(\mathbf{x}))^{-1} \equiv g(f(\mathbf{x})) \quad (2.3.39)$$

le due funzioni F e f sono analitiche.



Figura 2.1: *Marius Sophus Lie (1842-1899)*

Dato un gruppo di Lie, una applicazione analitica $\mathbf{x}(t)$ da un segmento di \mathbb{R} nel dominio \mathcal{S} dei parametri, induce in modo naturale un *cammino* in \mathbb{G} nel modo seguente

$$t \rightarrow g(\mathbf{x}(t)) \equiv g(t) \quad (2.3.40)$$

⁷ n è detta *dimensione* del gruppo.

⁸Con questo termine intendiamo dire che la funzione è infinitamente differenziabile.

- Due elementi g_1 e g_2 di \mathbb{G} si dicono *connessi* se si può trovare un cammino che li unisce.
- Se tutte le coppie di elementi di \mathbb{G} sono connesse, allora il gruppo si dice a sua volta *connesso*. Questo significa che, dati comunque due elementi del gruppo, si può passare con continuità dall'uno all'altro.
- Se consideriamo tutti i cammini chiusi all'interno del gruppo \mathbb{G} , può succedere che, dato comunque uno di questi, esso possa essere ridotto con continuità a un punto. In questo caso il gruppo è detto *semplicemente connesso*.
- Se si considerano tutti i cammini chiusi in \mathbb{G} , si può introdurre in questo insieme una relazione di equivalenza per cui due cammini risultano equivalenti se sono deformabili in modo continuo uno nell'altro: il numero delle classi di equivalenza in cui l'insieme si decompone è detta la *connettività* del gruppo⁹.

Un gruppo \mathbb{G} è semplicemente connesso se esso ha connettività pari a 1.

2.4 Algebre di Lie

Uno strumento fondamentale per trattare le proprietà dei gruppi di Lie è quello delle *algebre di Lie*.

Iniziamo dalla loro definizione: un'algebra di Lie \mathcal{A} è uno spazio vettoriale sul corpo reale di dimensione finita, nel quale è definita una operazione di composizione interna

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A} : [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathcal{A} \quad (2.4.41)$$

che si chiama appunto *prodotto di Lie*, la quale gode delle seguenti proprietà:

- è antisimmetrica

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A} : [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \quad (2.4.42)$$

- è lineare

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : [\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}] = \alpha [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \beta [\mathbf{x}, \mathbf{z}] \quad (2.4.43)$$

- soddisfa l'identità di Jacobi, ovvero accade che

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A} : [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0 \quad (2.4.44)$$

⁹Come avremo modo di vedere, il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni in tre dimensioni, fatto dalle matrici reali e ortogonali 3×3 , ha connettività 2 (come tutti i gruppi $SO(n)$ con $n > 2$) e quindi non è semplicemente connesso, come accade invece per $SU(2)$ e tutti i gruppi $SU(n)$.

Precisiamo prima di proseguire che, anche se il simbolo $[\]$ è effettivamente preso a prestito dal caso in cui lo spazio lineare \mathcal{A} è fatto da matrici quadrate e il prodotto di Lie è il commutatore, in questo contesto esso indica solo una operazione di composizione interna¹⁰ nello spazio vettoriale \mathcal{A} che gode delle proprietà di cui alle (2.4.42), (2.4.43) e (2.4.44).

Poiché \mathcal{A} è uno spazio lineare di dimensione finita, esso ammetterà una base fatta da un numero finito n di suoi elementi. Sia dunque A_1, \dots, A_n una base in \mathcal{A} . Essendo il prodotto¹¹ di Lie una operazione di composizione interna, il prodotto $[A_i, A_j]$ sarà ancora un elemento di \mathcal{A} e dunque, per definizione di base, avremo

$$\forall i, j = 1, \dots, n : [A_i, A_j] = C_{ij}^m A_m \quad (2.4.45)$$

I coefficienti C_{ij}^m giocano evidentemente un ruolo estremamente importante nel definire le caratteristiche dell'algebra di Lie data e si dicono per questo *costanti di struttura*. Fissata un'algebra \mathcal{A} , la forma esplicita delle costanti di struttura è comunemente legata alla base scelta; infatti se

$$\tilde{A}_k = M_{ki} A_i; \quad A_i = (M^{-1})_{ik} \tilde{A}_k \quad (2.4.46)$$

ecco che avremo

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_l, \tilde{A}_s] &\equiv \tilde{C}_{ls}^r \tilde{A}_r = M_{li} M_{sj} [A_i, A_j] = \\ &M_{li} M_{sj} C_{ij}^m A_m = C_{ij}^m M_{li} M_{sj} (M^{-1})_{mr} \tilde{A}_r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{C}_{ls}^r = C_{ij}^m M_{li} M_{sj} (M^{-1})_{mr} \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Due algebre di Lie si dicono *isomorfe* se, in opportune basi, le costanti di struttura dell'una coincidono con quelle dell'altra.

Le costanti di struttura, per il fatto che il prodotto $[\]$ presente nell'algebra di Lie è antisimmetrico, godono evidentemente della proprietà per cui

$$C_{ij}^m = -C_{ji}^m \quad (2.4.48)$$

Inoltre, data l'identità di Jacobi per cui

$$[A_i, [A_j, A_k]] + [A_j, [A_k, A_i]] + [A_k, [A_i, A_j]] = 0 \quad (2.4.49)$$

abbiamo che, fissati comunque i, j, k ed s , risulta

$$\begin{aligned} 0 &= C_{jk}^m [A_i, A_m] + C_{ki}^m [A_j, A_m] + C_{ij}^m [A_k, A_m] = \\ &= C_{jk}^m C_{im}^s A_s + C_{ki}^m C_{jm}^s A_s + C_{ij}^m C_{km}^s A_s \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_{jk}^m C_{im}^s + C_{ki}^m C_{jm}^s + C_{ij}^m C_{km}^s = 0 \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

¹⁰Per esempio, lo spazio dei consueti vettori in tre dimensioni è evidentemente un'algebra di Lie con il prodotto vettoriale.

¹¹Nel caso di algebre di Lie costituite da matrici quadrate, se non diversamente specificato, si intenderà comunque sempre che il prodotto di Lie sia effettivamente l'ordinario commutatore.

dove l'ultima implicazione è legata al fatto che gli A_s costituiscono una base e dunque sono indipendenti fra loro.

2.5 Algebre e gruppi di Lie

Veniamo adesso a studiare il legame esistente fra le algebre di Lie e i gruppi. Per fare questo, non considereremo il caso astratto studiato da Lie, bensì quello in cui è data una rappresentazione fedele dell'algebra astratta, a valori nell'insieme $\mathcal{M}(p)$ fatto dalle matrici $p \times p$ in generale complesse, dove sono definite nel modo consueto le operazioni di somma e prodotto fra matrici. Nel seguito confonderemo questa rappresentazione dell'algebra \mathcal{A} con \mathcal{A} stessa. Iniziamo dunque osservando che a ogni matrice $A \in \mathcal{M}(p)$ potrà essere associata una norma $\|A\|$ in modo canonico attraverso la relazione

$$\|A\| \equiv \sqrt{\sum_{i,j=1}^p |A_{ij}|^2} \quad (2.5.51)$$

In questa norma, la serie *esponenziale* così definita¹² in termini di A

$$e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{m!}A^m + \dots \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m \quad (2.5.52)$$

risulta assolutamente convergente nello spazio vettoriale $\mathcal{M}(p)$, reso metrico attraverso la (2.5.51), per cui possiamo concludere che è ben definita la corrispondenza seguente

$$\exp : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}(p) : \forall A \in \mathcal{A} : A \rightarrow e^A \quad (2.5.53)$$

Vogliamo adesso dimostrare che l'insieme \mathcal{E} di tutte le matrici e^A con $A \in \mathcal{A}$ costituisce un sottogruppo di $GL_p(\mathcal{C})$.

¹²Una proprietà importante della forma esponenziale e^A è quella per cui

$$\text{Det}(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$$

e dunque le matrici e^A hanno comunque determinante non nullo e quindi sono certamente invertibili, ovvero sono elementi del gruppo $GL_p(\mathcal{C})$.

Questa proprietà è facile da dimostrare nel caso in cui A sia diagonalizzabile, ma ha validità generale perché ogni matrice finita (lemma di Jordan) può comunque essere posta nella forma $A = M T M^{-1}$, dove M è una opportuna matrice invertibile mentre T è una matrice triangolare, ovvero tale che $T_{ij} = 0$ se $i > j$. Le matrici triangolari godono della proprietà per cui la loro forma è stabile sotto il prodotto e risulta che, fissato comunque un indice i , allora $(T^n)_{ii} = (T_{ii})^n$, per cui la matrice e^T è triangolare e gli elementi sulla sua diagonale principale sono l'esponenziale degli elementi presenti sulla diagonale principale di T stessa, per cui

$$\text{Det}(e^T) = \prod_i e^{T_{ii}} = e^{\sum_i T_{ii}} = e^{\text{Tr}(T)} = e^{\text{Tr}(A)}$$

Si noti in particolare che le matrici A con traccia nulla generano, per esponenziazione, matrici con determinante unitario.

Dunque è provato così che, data un'algebra di Lie \mathcal{A} di matrici quadrate di ordine p , le matrici e^A costituiscono un gruppo (sottogruppo di $GL_p(\mathbb{C})$) che chiameremo $\mathbb{G}(\mathcal{A})$.

Dalla definizione segue che il gruppo $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ così individuato dall'algebra di matrici \mathcal{A} è un gruppo di Lie. Infatti, se A_1, \dots, A_n è una base in \mathcal{A} , allora ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ sarà individuato da una opportuna n -tupla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ per cui

$$A = \sum_{i=1}^n x_i A_i \quad (2.5.62)$$

e accade allora che

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow e^{x_i A_i} = e^A \quad (2.5.63)$$

è una parametrizzazione di $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ che è analitica e quindi $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ risulta essere un gruppo di Lie.

Questo mostra come la rappresentazione di un'algebra di Lie con matrici individui in modo canonico la rappresentazione di un gruppo di Lie anch'esso di matrici, ottenuto attraverso l'esponenziazione degli elementi della rappresentazione dell'algebra. Ma vale anche il viceversa, infatti se \mathcal{G} è la rappresentazione di un gruppo di Lie, questa definisce in modo naturale la rappresentazione di un'algebra di Lie la quale, per esponenziazione, riproduce la rappresentazione del gruppo di partenza (almeno in un intorno dell'identità).

Lie lo ha dimostrato in generale¹⁵, per gruppi e algebre astratte, ma noi ci limitiamo qui a considerare il caso in cui $\hat{G}(\mathbf{x})$ sia una parametrizzazione di \mathbb{G} a valori in $GL_p(\mathbb{C})$, fedele in un intorno dell'elemento neutro $e \in \mathbb{G}$, il quale, senza perdita di generalità, possiamo immaginare sia ottenuto per $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, cosa che implica che lo spazio dei parametri sia un opportuno intorno di $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Poniamo dunque

$$A_k \equiv \left. \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_k} \right|_{x=0}, \quad k = 1, n \quad (2.5.64)$$

Le matrici A_k costituiscono una base dello spazio vettoriale sul corpo reale, tangente a $\hat{G}(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$: la loro forma esplicita dipende dalla parametrizzazione scelta, mentre lo spazio tangente dipende unicamente dalla struttura del gruppo \mathbb{G} (intorno al suo elemento neutro ...).

Questo significa che, in un opportuno intorno dell'identità, potremo sempre rappresentare il generico elemento del gruppo come

$$\hat{G}(d\mathbf{x}) = I + A_k \cdot dx_k + \dots \quad (2.5.65)$$

¹⁵Lie ha provato che, in astratto, un gruppo di Lie definisce univocamente un'algebra di Lie, ma il viceversa non è altrettanto vero. L'algebra definisce univocamente il gruppo di ricoprimento universale (vedi oltre).

Gli operatori $A_k \in \mathcal{M}(p)$ sono chiamati *generatori* del gruppo \mathbb{G} o, più propriamente, essi costituiscono una rappresentazione dei generatori del gruppo \mathbb{G} .

Se vogliamo adesso passare a descrivere elementi del gruppo via via più distanti dall'identità, esiste a priori una enorme libertà di scelta della parametrizzazione di cui, quella data, è solo un esempio. In particolare possiamo procedere in una direzione fissata dello spazio dei parametri, semplicemente elevando a opportuna potenza l'elemento infinitesimo dato dalla (2.5.65) troncata al primo ordine (il prodotto è una operazione di composizione interna nel gruppo!). Questa possibilità suggerisce allora di definire la seguente parametrizzazione *esponenziale* di \mathbb{G}

$$G(\mathbf{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A_k x_k}{m} \right)^m = e^{A \cdot \mathbf{x}} \quad (2.5.66)$$

la quale, per come è definita, coincide con la parametrizzazione \hat{G} in tutto un intorno dell'identità, dove, appunto, le due parametrizzazioni conducono agli stessi generatori.

Il punto importante è che lo spazio vettoriale n -dimensionale sul corpo reale generato dagli A_k , con il prodotto di Lie del commutatore, costituisce un'algebra di Lie chiusa. Per rendercene conto, consideriamo due generici elementi dello spazio tangente

$$X \equiv x_i A_i; \quad Y \equiv y_j A_j \quad (2.5.67)$$

Per quanto detto, evidentemente se α è un generico numero reale, allora se

$$G(\mathbf{y}) = e^{y_j A_j} \equiv e^Y \quad (2.5.68)$$

anche

$$G(\alpha \mathbf{x}) = e^{\alpha x_i A_i} \equiv e^{\alpha X} \quad (2.5.69)$$

sono elementi del gruppo. Consideriamo allora la funzione

$$F(\alpha) = e^{\alpha X} e^Y e^{-\alpha X} e^{-Y} \quad (2.5.70)$$

Evidentemente, qualunque sia α , $F(\alpha)$ è un elemento del gruppo, essendo prodotto di suoi elementi. Poiché $F(0) = I$, possiamo concludere che

$$F(d\alpha) = I + d\alpha \left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{t=0} + \dots \quad (2.5.71)$$

ovvero che $\left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ è necessariamente un elemento dello spazio tangente definito dai generatori A_k . D'altronde, dalla definizione segue che

$$H \equiv \left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{x=0} = X - e^Y X e^{-Y} \quad (2.5.72)$$

e si può dimostrare¹⁶ che

$$S \equiv e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots + \frac{1}{n!}[Y, [Y, \dots[Y, X]]] + \dots \quad (2.5.76)$$

per cui risulta che

$$H = - \left\{ [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots + \frac{1}{n!}[Y, [Y, \dots[Y, X]]] + \dots \right\} \quad (2.5.77)$$

e il fatto che H debba appartenere allo spazio tangente implica necessariamente, vista la forma generica di X e Y , che i commutatori dei generatori riproducano combinazioni dei generatori stessi, ovvero che l'algebra di Lie costruita con essi sia chiusa.

Abbiamo visto in questo modo lo stretto legame esistente fra rappresentazioni di algebre di Lie e rappresentazioni di gruppi di Lie e viceversa.

A livello astratto, la teoria dei gruppi di Lie, con il *teorema di Ado*, stabilisce poi che, a meno di isomorfismi, esiste un solo gruppo di Lie semplicemente connesso avente un'algebra di Lie assegnata: questo gruppo è detto *il gruppo di ricoprimento universale* per quella data algebra. Per ogni altro gruppo che possieda la stessa algebra, esiste un opportuno omomorfismo che mappa il gruppo di ricoprimento universale nel gruppo dato e la dimensione del kernel di questo omomorfismo è pari alla connettività del gruppo dato.

Sempre a proposito di legami fra algebre e gruppi di Lie, osserviamo che se un'algebra di Lie \mathcal{A} ammette una sottoalgebra¹⁷ propria (cioè non banale), evidentemente questa genera per esponenziazione un sottogruppo proprio di

¹⁶Definiamo infatti la funzione

$$X(\epsilon) \equiv e^{\epsilon Y} X e^{-\epsilon Y} \Rightarrow X(1) = S \quad (2.5.73)$$

e sviluppiamola in serie di Taylor intorno a $\epsilon = 0$: essendo

$$\frac{dX}{d\epsilon} = [Y, X(\epsilon)] \quad (2.5.74)$$

ogni operazione di derivazione conduce a una espressione con un commutatore in più, i.e.

$$\frac{d^n X}{d\epsilon^n} = [Y, [Y, \dots[Y, X(\epsilon)]]], \text{ dove le } Y \text{ sono } n \quad (2.5.75)$$

Quindi, dato che $X(0) = X$, essendo $X(1) = S$, lo sviluppo di Taylor conduce immediatamente, per quanto detto sopra circa le derivate, alla (2.5.76)

¹⁷Questo accade se e solo se si può trovare una base A_1, \dots, A_n dell'algebra, tale che, per un opportuno $k < n$, i commutatori fra gli elementi A_1, \dots, A_k forniscono combinazioni lineari solo degli elementi A_1, \dots, A_k . In termini delle costanti di struttura, questo si esprime con la relazione

$$\forall i, j \leq k, \forall m > k : C_{ij}^m = 0 \quad (2.5.78)$$

$\mathbb{G}(\mathcal{A})$ e viceversa, se un gruppo di Lie possiede un sottogruppo non banale, allora i generatori di questo sottogruppo costituiscono una sottoalgebra propria di quella del gruppo dato.

Una sottoalgebra propria viene poi detta *invariante* o un *ideale* quando essa è stabile sotto il prodotto di Lie con un altro qualunque elemento dell'algebra stessa, ovvero quando si può trovare una base A_1, \dots, A_n dell'algebra e un opportuno $k < n$ per cui

$$\forall i \leq k, \forall m > k : C_{ij}^m = 0 \quad \text{per ogni } j \quad (2.5.79)$$

In questo caso, l'ideale genera, per esponenziazione, un sottogruppo invariante (e viceversa). Supponiamo infatti che X sia un qualunque elemento della sottoalgebra invariante, mentre Y sia un qualunque elemento dell'algebra data. Per ipotesi di sottoalgebra invariante, $[X, Y]$ appartiene alla sottoalgebra invariante. Consideriamo adesso gli elementi del gruppo $h = e^X$ e $g = e^Y$. Ricordiamo che se accade sempre e comunque che

$$g h g^{-1} = e^Z \quad (2.5.80)$$

dove Z è un opportuno elemento della sottoalgebra invariante, allora il sottogruppo da essa generato è invariante (la condizione è necessaria e sufficiente). Ma

$$e^Y e^X e^{-Y} = e^{e^Y X e^{-Y}} \equiv e^Z, \quad \text{dove } Z \equiv e^Y X e^{-Y} \quad (2.5.81)$$

D'altronde si è già osservato che vale la (2.5.76) e quindi, per definizione di sottoalgebra invariante, Z è un elemento della sottoalgebra stessa. Questo ci consente di concludere quindi che il sottogruppo fatto dagli elementi ottenuti per esponenziazione dei vettori della sottoalgebra invariante è un sottogruppo invariante: il viceversa è immediato.

2.6 La rappresentazione aggiunta

Consideriamo adesso una particolare rappresentazione dell'algebra di Lie che conduce alla definizione della *rappresentazione aggiunta*¹⁸ RA .

Sia dunque data un'algebra di Lie \mathcal{A} di dimensione n e siano A_i gli elementi di una sua base. In termini delle costanti di struttura sappiamo allora che

$$[A_i, A_j] = C_{ij}^m A_m \quad (2.6.82)$$

Definiamo quindi le seguenti n matrici reali $n \times n$

$$(T_i)_{jm} = -C_{ij}^m \quad (2.6.83)$$

Dalla (2.4.50) abbiamo che

$$C_{jk}^m C_{im}^s + C_{ki}^m C_{jm}^s + C_{ij}^m C_{km}^s = 0 \quad (2.6.84)$$

Ricordando la proprietà di antisimmetria delle costanti di struttura, per le quali si ha che

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad (2.6.85)$$

ne segue che possiamo riscrivere la (2.6.84) nel modo seguente

$$C_{jk}^m C_{im}^s - C_{ik}^m C_{jm}^s - C_{ij}^m C_{mk}^s = 0 \quad (2.6.86)$$

ovvero, in termini delle matrici T sopra definite, abbiamo che

$$(T_j)_{km} (T_i)_{ms} - (T_i)_{km} (T_j)_{ms} = -C_{ij}^m (T_m)_{ks} \quad (2.6.87)$$

da cui, in termini matriciali e cambiando segno, si ha infine

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^m T_m \quad (2.6.88)$$

la quale mostra appunto come le matrici T definite dalla (2.6.83) costituiscono una rappresentazione dell'algebra di Lie data, a valori nello spazio delle matrici reali di ordine n , dove n è la dimensione del gruppo \mathbb{G} e quindi della sua algebra di Lie \mathcal{A} .

Si tratta della rappresentazione aggiunta.

¹⁸Questa rappresentazione dell'algebra non dà luogo, necessariamente, a una rappresentazione del gruppo di ricoprimento universale $\tilde{\mathbb{G}}$, ovvero può non dar luogo a una rappresentazione fedele di $\tilde{\mathbb{G}}$.

Dimostra, però che ogni algebra di Lie possiede almeno una rappresentazione.

Mediante queste matrici (T_j) si può introdurre una (pseudo)metrica nello spazio vettoriale che ha le (T_j) stesse come elementi della base, attraverso il seguente^{19,20} tensore reale simmetrico

$$\gamma_{jk} \equiv -Tr(T_j T_k) = -C_{js}^t C_{kt}^s \quad (2.6.96)$$

Il tensore (2.6.96) è chiamato *tensore di Killing*.

Al tensore di Killing²¹ sono legati alcuni aspetti importanti relativi alle

¹⁹La definizione (2.6.96) non è l'unica possibile.

²⁰Osserviamo che la definizione del tensore γ di cui alla (2.6.96), nel caso esso abbia autovalori strettamente positivi, consente di definire un prodotto scalare e quindi una metrica nella rappresentazione dell'algebra di Lie del gruppo, generata dai T_i (compatibile anche con una sua estensione al campo complesso...).

Siano infatti A e B due elementi dell'algebra: definiamo

$$\langle A|B \rangle \equiv -Tr(A^\dagger B) \quad (2.6.89)$$

Siccome i T_i sono una base (fatta da matrici reali), sarà

$$A = \alpha_i T_i; \quad B = \beta_j T_j \quad (2.6.90)$$

e dunque

$$\langle A|B \rangle = \alpha_i^* \beta_j \gamma_{ij} \quad (2.6.91)$$

E' facile adesso convincersi che questa definizione soddisfa i criteri di un prodotto scalare, ovvero qualunque siano i vettori A , B e C e lo scalare λ , è

$$\langle A|B+C \rangle = \langle A|B \rangle + \langle A|C \rangle \quad (2.6.92)$$

$$\langle A|B \rangle = \langle B|A \rangle^* \quad (2.6.93)$$

$$\langle A|A \rangle \geq 0; \quad = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad (2.6.94)$$

$$\langle A|\lambda B \rangle = \lambda \langle A|B \rangle \quad (2.6.95)$$

²¹E' importante osservare che il tensore di Killing non è invariante per cambiamento di base dell'algebra, infatti abbiamo già visto che se

$$A_k \rightarrow \tilde{A}_k = M_{ki} A_i \quad (2.6.97)$$

allora le costanti di struttura cambiano in modo che risulta

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ls}^r = C_{ij}^m M_{li} M_{sj} (M^{-1})_{mr} &\Rightarrow (\tilde{T}_l)_{sr} = (T_i)_{jm} M_{li} M_{sj} (M^{-1})_{mr} \\ &\Rightarrow \tilde{T}_l = (M T_i M^{-1}) M_{li} \end{aligned} \quad (2.6.98)$$

per cui abbiamo che

$$\begin{aligned} Tr(\tilde{T}_i \tilde{T}_j) &= M_{ia} M_{jb} Tr(M T_a M^{-1} M T_b M^{-1}) = M_{ia} M_{jb} Tr(M T_a T_b M^{-1}) = \\ &= M_{ia} M_{jb} Tr(T_a T_b M^{-1} M) = M_{ia} M_{jb} Tr(T_a T_b) \end{aligned} \quad (2.6.99)$$

e dunque, riguardo al tensore di Killing, accade che

$$\tilde{\gamma}_{ij} = M_{ia} M_{jb} \gamma_{ab} \Leftrightarrow \tilde{\gamma} = M \gamma M^t \quad (2.6.100)$$

Questo consente, attraverso una opportuna trasformazione della base dell'algebra, di poter ottenere un tensore di Killing avente forma diagonale.

rappresentazioni di un gruppo di Lie. Vediamone tre esempi.

- Il tensore di Killing consente di definire una espressione, costruita a partire dalle costanti di struttura, la quale è completamente antisimmetrica. Consideriamo infatti la quantità $Tr([T_a, T_b]T_c)$. Iniziamo osservando che questa quantità, ovviamente antisimmetrica negli indici a, b , è antisimmetrica anche in b, c e quindi in a, c . Usando le proprietà cicliche della traccia, abbiamo infatti, per esempio, che

$$\begin{aligned} Tr([T_a, T_b]T_c) &= Tr(T_a T_b T_c - T_b T_a T_c) = Tr(T_b T_c T_a - T_c T_b T_a) = \\ &= Tr([T_b, T_c]T_a) \end{aligned} \quad (2.6.105)$$

e similmente per gli indici a, c . Ma

$$\begin{aligned} Tr([T_a, T_b]T_c) &= Tr(C_{ab}^m T_m T_c) = C_{ab}^m Tr(T_m T_c) = \\ &= -C_{ab}^m \gamma_{mc} \end{aligned} \quad (2.6.106)$$

Questo dimostra che la quantità Γ_{abc} definita in termini delle costanti di struttura e del tensore di Killing nel modo che segue

$$\Gamma_{abc} \equiv C_{ab}^m \gamma_{mc} \quad (2.6.107)$$

è completamente antisimmetrica.

- Se il tensore di Killing è invertibile, allora l'operatore (di Casimir) C così definito

$$C = -\gamma_{ij}^{-1} A_i A_j \quad (2.6.108)$$

Infatti, essendo γ_{jk} una matrice $n \times n$ reale e simmetrica, esiste una base ortonormale in \mathbb{R}^n costituita da suoi autovettori. Indichiamo con $\mathbf{v}(s)$, $s = 1, \dots, n$ questi autovettori, corrispondenti agli autovalori (reali) $\lambda(s)$ e siano $\mathbf{v}(s)_k$ le loro componenti. Per ipotesi

$$\gamma \mathbf{v}(s) = \lambda(s) \mathbf{v}(s) \quad (\text{senza somma su } s) \Leftrightarrow \gamma_{jk} \mathbf{v}(s)_k = \lambda(s) \mathbf{v}(s)_j \quad (2.6.101)$$

Dunque, se definiamo la matrice reale $n \times n$ M_{ks} come

$$M_{ks} \equiv \mathbf{v}(s)_k \quad (2.6.102)$$

questa matrice è ortogonale, poiché

$$M_{ab}^t M_{bc} = M_{ba} M_{bc} = \mathbf{v}(a)_b \mathbf{v}(c)_b = \delta_{ac} \quad (2.6.103)$$

e, per la (2.6.101), è tale che

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} M_{ks} &= \lambda(s) M_{js} \Rightarrow (\gamma \cdot M)_{js} = \lambda(s) M_{js} (\text{senza somma su } s) \\ \Rightarrow M_{kj}^{-1} (\gamma \cdot M)_{js} &= \lambda(s) M_{kj}^{-1} M_{js} = \lambda(s) \delta_{ks} \Rightarrow \\ \Rightarrow (M^t \gamma M)_{ks} &= \lambda(s) \delta_{ks} \end{aligned} \quad (2.6.104)$$

che dimostra quanto affermato (si ricordi la proprietà generale della trasposta per cui $M = (M^t)^t$ e dunque $M^t \gamma M = (M^t) \gamma (M^t)^t \dots$).

gode della proprietà di commutare²² con tutti gli elementi della base A_1, \dots, A_n dell'algebra di Lie della rappresentazione del gruppo a essa associata e quindi, se la rappresentazione è irriducibile, allora C è multiplo dell'identità;

- il gruppo di ricoprimento universale (e quindi tutti i gruppi che ne dividono l'algebra di Lie) è compatto²³ se e solo se la metrica associata

²²Se il tensore di Killing γ è invertibile, allora tutti i suoi autovalori sono necessariamente non nulli. Supponiamo di aver scelto una base dell'algebra A_j generica mentre sia \tilde{A}_j la base in cui γ è diagonale. Iniziamo dimostrando che, in questa ipotesi, la quantità $\tilde{C} \equiv -(\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \tilde{A}_i \tilde{A}_j$ commuta con tutti i vettori della base dell'algebra e quindi con tutti gli elementi dell'algebra stessa. Infatti

$$\begin{aligned} [(\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \tilde{A}_k] &= (\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \left\{ \tilde{A}_i [\tilde{A}_j, \tilde{A}_k] + [\tilde{A}_i, \tilde{A}_k] \tilde{A}_j \right\} = \\ &= (\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \left\{ \tilde{C}_{jk}^m \tilde{A}_i \tilde{A}_m + \tilde{C}_{ik}^m \tilde{A}_m \tilde{A}_j \right\} \end{aligned} \quad (2.6.109)$$

ma invertendo adesso la relazione (2.6.107), ecco che possiamo riscrivere il risultato precedente nel modo che segue

$$[(\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \tilde{A}_k] = (\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \left\{ \tilde{\Gamma}_{jkl}(\tilde{\gamma}^{-1})_{lm} \tilde{A}_i \tilde{A}_m + \tilde{\Gamma}_{ikl}(\tilde{\gamma}^{-1})_{lm} \tilde{A}_m \tilde{A}_j \right\} \quad (2.6.110)$$

Usiamo ora il fatto che il tensore di Killing è diagonale e quindi lo è pure è il suo inverso, cioè

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \lambda(i) \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} = \lambda(i)^{-1} \delta_{ij} \quad (2.6.111)$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} [(\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \tilde{A}_k] &= \lambda(i)^{-1} \left\{ \tilde{\Gamma}_{ikm} \lambda(m)^{-1} \tilde{A}_i \tilde{A}_m + \tilde{\Gamma}_{ikm} \lambda(m)^{-1} \tilde{A}_m \tilde{A}_i \right\} = \\ &= \tilde{\Gamma}_{ikm} \frac{\tilde{A}_i \tilde{A}_m + \tilde{A}_m \tilde{A}_i}{\lambda(i) \lambda(m)} = 0 \end{aligned} \quad (2.6.112)$$

dove la conclusione è tratta per il fatto che si somma sulla coppia degli indici i, m nei quali $\tilde{\Gamma}_{ikm}$ è antisimmetrico mentre il resto dell'espressione è simmetrica.

Dimostriamo adesso che la quantità $C \equiv -(\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \tilde{A}_i \tilde{A}_j$ è invariante per cambiamento di base, cosa che garantisce che C è un operatore univocamente determinato dall'algebra.

Per quanto visto sopra, infatti, essendo

$$\tilde{\gamma} = M \gamma M^t \Rightarrow (\tilde{\gamma})^{-1} = (M^t)^{-1} \gamma^{-1} M^{-1}$$

risulta

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}^{-1})_{ij} \tilde{A}_i \tilde{A}_j &= (M^t)_{ia}^{-1} \gamma_{ab}^{-1} M_{bj}^{-1} M_{il} A_l M_{jm} A_m = \\ &= \gamma_{ab}^{-1} (M_{ai}^{-1} M_{il}) (M_{bj}^{-1} M_{jm}) A_l A_m = \gamma_{ab}^{-1} A_a A_b \end{aligned} \quad (2.6.113)$$

che dimostra, appunto, quanto asserito.

²³Un gruppo di Lie è compatto quando ne esiste una parametrizzazione completa che ha dominio in un sottoinsieme compatto di R^n .

Ricordiamo a questo riguardo che le rappresentazioni finite di gruppi compatti sono comunque equivalenti a rappresentazioni unitarie mentre per gruppi non compatti non esistono rappresentazioni unitarie di dimensione finita, a parte quella banale per cui tutto il gruppo è proiettato nell'identità.

al tensore di Killing è definita positiva.

Nell'ambito delle applicazioni della teoria dei gruppi di Lie alla Fisica, per l'interesse che hanno le rappresentazioni unitarie, solitamente la parametrizzazione delle rappresentazioni esponenziali dei gruppi di Lie viene riscritta nella forma seguente²⁴:

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow e^{i x_j \hat{A}_j} \quad (2.6.115)$$

così che i generatori \hat{A}_j risultino hermitiani.

A una parametrizzazione esponenziale del tipo (2.6.115) corrisponde una analogia ridefinizione delle vecchie costanti di struttura reali C_{ij}^m così fatta

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = [-iA_i, -iA_j] = -[A_i, A_j] = -C_{ij}^m A_m = -i C_{ij}^m \hat{A}_m \quad (2.6.116)$$

In termini di questi elementi, le matrici della rappresentazione aggiunta diventano

$$\hat{T} = -iT \quad \Rightarrow \quad (\hat{T}_a)_{bc} = i C_{ab}^c \quad (2.6.117)$$

e il tensore di Killing, di conseguenza, diviene

$$\gamma_{ij} = -Tr(T_i T_j) = Tr(\hat{T}_i \hat{T}_j) \quad (2.6.118)$$

²⁴Riguardo all'algebra di Lie, rispetto alla definizione "matematica" esposta in precedenza, quella "fisica" che useremo da ora in poi è semplicemente legata alla precedente dalla relazione

$$A \equiv A_{mat} = iA_{phys} \equiv i\hat{A} \Leftrightarrow A = i\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} = -iA \quad (2.6.114)$$

2.7 Rappresentazioni di gruppi compatti

Vogliamo qui approfondire l'argomento delle rappresentazioni²⁵ di dimensione finita, irriducibili, dei gruppi di Lie compatti.

Abbiamo visto, che se parametrizziamo gli elementi del gruppo \mathbb{G} come²⁶

$$R(a) = e^{ix_j \cdot \hat{A}_j}, \quad j = 1, n \quad (2.7.119)$$

allora gli \hat{A}_j e i generatori A_j introdotti in precedenza sono tali per cui

$$i \hat{A}_j = A_j \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A}_j = -i A_j \quad (2.7.120)$$

e dunque, come già osservato, abbiamo che

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] = C_{ij}^m A_m &\Rightarrow [i \hat{A}_i, i \hat{A}_j] = C_{ij}^m i \hat{A}_m \Rightarrow \\ \Rightarrow -[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i C_{ij}^m \hat{A}_m &\Rightarrow [\hat{A}_i, \hat{A}_j] = -i C_{ij}^m \hat{A}_m \end{aligned} \quad (2.7.121)$$

per cui le matrici della rappresentazione aggiunta RA sono tali che²⁷

$$\left(\hat{T}_j \right)_{km} = i C_{jk}^m \quad (2.7.122)$$

e dunque, quanto al tensore di Killing, abbiamo (cfr.(2.6.118))

$$\gamma_{ij} \equiv -C_{il}^k C_{jk}^l = Tr \left(\hat{T}_i \hat{T}_j \right) \quad (2.7.123)$$

Se, come abbiamo ipotizzato, il gruppo \mathbb{G} è compatto, allora il tensore reale e simmetrico γ risulta invertibile e definisce una metrica positiva; inoltre, come si è visto (cfr.(2.6.108)), attraverso il suo inverso si può definire l'operatore di Casimir

$$C \equiv -\gamma_{ij}^{-1} A_i A_j = \gamma_{ij}^{-1} \hat{A}_i \hat{A}_j \quad (2.7.124)$$

che gode della proprietà di commutare con tutti i generatori e quindi di essere multiplo dell'identità in ogni rappresentazione irriducibile del gruppo.

Abbiamo anche visto che, data comunque una base dell'algebra di Lie, attraverso una trasformazione ortogonale su di essa (cfr.(2.6.100)) si può ottenere una nuova base tale per cui il tensore di Killing γ risulta diagonale. Poiché gli elementi così presenti sulla diagonale di γ (i suoi autovalori...) sono necessariamente positivi, riscaldando gli elementi della base ottenuta

²⁵Ci baseremo in particolare su quanto riportato nel libro "Lie Algebras in Particle Physics" di Howard Georgi, Westnew Press, ISBN 978-0-7382-0233-4.

²⁶Si noti che stiamo qui usando la notazione "fisica", ovvero quella che prevede la presenza all'esponente del coefficiente immaginario.

²⁷Queste matrici, in accordo con la (2.6.117), differiscono dalle matrici T di cui alla (2.6.83) per il fattore immaginario, legato alla definizione (2.7.119).

dalla trasformazione ortogonale, possiamo infine fare in modo che il tensore di Killing risulti multiplo dell'identità, ovvero tale che

$$\gamma_{ij} = \Gamma \delta_{ij} \quad (2.7.125)$$

per un opportuno valore positivo di Γ .

In questa base dell'algebra \mathcal{A} , le costanti di struttura

$$C_{ab}^c = C_{ab}^m \delta_{mc} = C_{ab}^m \frac{1}{\Gamma} \gamma_{mc} = \frac{1}{\Gamma} \Gamma_{abc} \equiv C_{abc} \quad (2.7.126)$$

risultano completamente antisimmetriche e dunque, in questa base, la rappresentazione aggiunta ha come generatori le matrici²⁸

$$\left(\hat{T}_j \right)_{km} \equiv i C_{jk}^m = i C_{jkm} \quad (2.7.127)$$

Si tratta di matrici immaginarie pure (le C sono reali ...) che sono anche antisimmetriche e quindi si tratta di matrici hermitiane, per cui la rappresentazione unitaria che ne consegue per esponenziazione, cioè la RA , risulta reale e dunque fatta da matrici ortogonali.

Supponiamo dunque di aver scelto una base dell'algebra \mathcal{A} tale per cui il tensore di Killing sia multiplo dell'identità e dunque le costanti di struttura C_{jkm} siano reali e completamente antisimmetriche.

Dalla definizione generale sappiamo che, se $|\mathbf{e}_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$ è una generica base dello spazio lineare dove agisce la RA , allora possiamo dire che

$$\hat{T}_j |\mathbf{e}_k \rangle = \left(\hat{T}_j \right)_{mk} |\mathbf{e}_m \rangle = i C_{jmk} |\mathbf{e}_m \rangle \quad (2.7.128)$$

E' interessante, adesso, considerare il particolare spazio lineare che ha per base base gli stessi \hat{T}_j , ovvero lo spazio vettoriale fatto dai vettori²⁹

$$\lambda_j |\hat{\mathbf{T}}_j \rangle; \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7.129)$$

Su questa base particolare l'azione dei generatori della RA , in base alla (2.7.128), è la seguente

$$\hat{T}_j |\hat{\mathbf{T}}_k \rangle = \left(\hat{T}_j \right)_{mk} |\hat{\mathbf{T}}_m \rangle = i C_{jmk} |\hat{\mathbf{T}}_m \rangle \quad (2.7.130)$$

Ma dalle regole di commutazione sappiamo che

$$[T_j, T_k] = C_{jk}^m T_m = C_{jkm} T_m \xrightarrow{T_l = i \hat{T}_l} [\hat{T}_j, \hat{T}_k] = -i C_{jkm} \hat{T}_m \quad (2.7.131)$$

²⁸ Per non appesantire il testo, continuiamo comunque a usare il simbolo generico \hat{T} anche quando la base dell'algebra è quella di cui il tensore di Killing coincide con l'identità.

²⁹ Per distinguere il caso in cui consideriamo \hat{T}_j come un operatore da quello in cui lo consideriamo come vettore su cui l'operatore agisce, usiamo, in quest'ultimo caso, il simbolo $|\hat{\mathbf{T}}_j \rangle$.

come pure sappiamo che C_{jkm} è completamente antisimmetrico, dunque possiamo concludere che, per questa particolare realizzazione della RA , risulta

$$\hat{T}_j|\hat{\mathbf{T}}_k\rangle = i C_{jmk}|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = -i C_{jkm}|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = |[\hat{T}_j, \hat{T}_k]\rangle \quad (2.7.132)$$

Lo spazio vettoriale generato attraverso i vettori della base (2.7.129) può essere dotato in modo canonico di un prodotto scalare che è sostanzialmente quello definito attraverso il tensore di Killing, per il quale la base in questione risulta ortonormale. Poniamo infatti

$$\langle \hat{\mathbf{T}}_j|\hat{\mathbf{T}}_k\rangle \equiv -\frac{1}{\Gamma} Tr\left(\hat{T}_j^* \hat{T}_k\right) \quad (2.7.133)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{T}}_j|\hat{\mathbf{T}}_k\rangle &= -\frac{1}{\Gamma} \left(\hat{T}_j^*\right)_{ab} \left(\hat{T}_k\right)_{ba} = \frac{1}{\Gamma} \left(\hat{T}_j\right)_{ab} \left(\hat{T}_k\right)_{ba} = \\ &= -\frac{1}{\Gamma} C_{ja}^b C_{kb}^a = \frac{1}{\Gamma} \gamma_{jk} = \delta_{jk} \end{aligned} \quad (2.7.134)$$

I \hat{T}_j , che sappiamo essere matrici hermitiane, risultano anche essere operatori hermitiani secondo il prodotto scalare definito sopra, ovvero tali che

$$\langle \hat{T}_j \hat{\mathbf{T}}_k|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = \langle \hat{\mathbf{T}}_k|\hat{T}_j \hat{\mathbf{T}}_m\rangle \quad (2.7.135)$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_j \hat{\mathbf{T}}_k|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle &= \langle [\hat{T}_j, \hat{T}_k]|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = \langle i C_{jks} \hat{\mathbf{T}}_s|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = -i C_{jks} \langle \hat{\mathbf{T}}_s|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = \\ &= -i C_{jks} \delta_{sm} = -i C_{jkm} \end{aligned} \quad (2.7.136)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{T}}_k|\hat{T}_j \hat{\mathbf{T}}_m\rangle &= \langle \hat{\mathbf{T}}_k|[\hat{T}_j, \hat{T}_m]\rangle = \langle \hat{\mathbf{T}}_k|i C_{jms} \hat{\mathbf{T}}_s\rangle = i C_{jms} \langle \hat{\mathbf{T}}_k|\hat{\mathbf{T}}_s\rangle = \\ &= i C_{jms} \delta_{ks} = i C_{jmk} = -i C_{jkm} \end{aligned} \quad (2.7.137)$$

Tornando alle proprietà generali del gruppo, esso viene detto *semplice* se non ammette sottogruppi invarianti.

Poiché l'esistenza di sottogruppi invarianti in \mathbb{G} è equivalente all'esistenza di sottoalgebre invarianti in \mathcal{A} , si parlerà anche di algebre di Lie *semplici* quando *non* ammettono sottoalgebre invarianti non banali.

Nel caso in cui esistano uno o più generatori che commutano con tutti i generatori del gruppo, essi definiscono un sottogruppo abeliano invariante: si parla allora di un gruppo e un'algebra di Lie *semisemplici*.

Se l'algebra è semplice, si dimostra che la sua rappresentazione aggiunta RA risulta irriducibile.

Infatti proviamo a ragionare per assurdo. Operiamo nella base dell'algebra

dove il tensore di Killing è multiplo dell'identità e quindi le costanti di struttura, come abbiamo già detto, sono completamente antisimmetriche e tali che

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} = i C_{jkm} \quad (2.7.138)$$

L'azione degli operatori che rappresentano gli elementi $g \in \mathbb{G}$ del gruppo sui vettori dello spazio lineare \mathcal{S} di dimensione n è naturalmente descritta dalle matrici

$$R(g) = e^{i x_j \hat{T}_j} \quad (2.7.139)$$

Supponiamo ora che esista un sottospazio non banale \mathcal{S}_1 che è lasciato invariante dalle $R(g)$ e sia \mathcal{S}_2 il complementare di \mathcal{S}_1 a \mathcal{S} .

Sia quindi $|e_a \rangle$, $a = 1, \dots, r$ una base di \mathcal{S}_1 ed $|e_b \rangle$, $b = r + 1, \dots, n$ una base di \mathcal{S}_2 . Evidentemente deve essere

$$\forall j = 1, \dots, n : \left(\hat{T}_j\right)_{ab} = 0 \quad (2.7.140)$$

e dunque

$$C_{ab}^j = C_{abj} = 0 \quad \forall j = 1, n, a \leq r, r < b \leq n \quad (2.7.141)$$

Dato il carattere completamente antisimmetrico delle costanti di struttura, possiamo concludere che, nelle ipotesi fatte, esse saranno nulle se

- due indici sono $\leq r$ e l'altro è $> r$;
- due indici sono $> r$ e l'altro è $\leq r$.

Dunque, affinché le costanti di struttura possano essere non nulle è necessario che tutti e tre gli indici o siano $\leq r$ oppure siano $> r$.

E' facile convincersi che questo implica la validità della (2.5.79) e dunque che l'algebra data non sia semplice.

2.8 Ancora sulla Rappresentazione Aggiunta

Come si è visto in generale, dato un gruppo di Lie \mathcal{G} a n parametri reali, scelta una qualsiasi base dell'algebra di Lie a esso corrispondente, costituita dai generatori \hat{A}_j ($j = 1, \dots, n$), a questi corrispondono le costanti di struttura (reali) C_{jk}^m definite come

$$[\hat{A}_j, \hat{A}_k] = -i C_{jk}^m \hat{A}_m \quad (2.8.142)$$

I generatori della RA corrispondenti a questa scelta di base sono, a loro volta, definiti da

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} = i C_{jk}^m \quad (2.8.143)$$

Se ora consideriamo una nuova base dell'algebra di Lie, fatta dai generatori \tilde{A}_k , essa sarà tale

$$\tilde{A}_k = M_{kj} \hat{A}_j \quad (2.8.144)$$

dove M è una opportuna matrice invertibile.

Nella base \tilde{A}_k , come già visto (cfr.(2.4.47)), le costanti di struttura diventano

$$\tilde{C}_{ls}^r = C_{jk}^m M_{lj} M_{sk} (M^{-1})_{mr} \quad (2.8.145)$$

e, nel caso particolare in cui $M = R$ sia una matrice ortogonale reale, avremo

$$\tilde{C}_{ls}^r = C_{jk}^m R_{lj} R_{sk} R_{rm} \quad (2.8.146)$$

Supponiamo ora che la base degli \tilde{A}_k sia scelta in modo che il tensore di Killing γ sia multiplo dell'identità, ovvero che risulti $\gamma_{jk} = \Gamma \delta_{jk}$. Come sappiamo, in questo caso, le costanti di struttura (reali)

$$C_{jk}^m \equiv C_{jkm} \quad (2.8.147)$$

risultano completamente antisimmetriche e quindi i generatori della RA corrispondenti, per la (2.8.143), risultano essere matrici immaginarie pure e antisimmetriche, dunque hermitiane, per cui, le matrici R della RA stessa, ottenute per esponenziazione degli elementi dell'algebra

$$R = R(\mathbf{x}) = e^{i x_j \hat{T}_j} \quad (2.8.148)$$

risultano essere unitarie e reali, dunque ortogonali.

Vogliamo dimostrare che se R è una qualsiasi di queste matrici, allora

$$R_{lj} R_{sk} R_{rm} C_{jkm} = C_{lsr} \quad (2.8.149)$$

Iniziamo ricordando che se u, v, w, \dots sono elementi dell'algebra di Lie \mathcal{A} , allora per essi vale l'identità di Jacobi che afferma che

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (2.8.150)$$

Definiamo adesso il seguente operatore Δ_u dall'algebra \mathcal{A} in sé

$$\forall v \in \mathcal{A} : \Delta_u v \equiv [u, v] \quad (2.8.151)$$

Per l'antisimmetria del prodotto di Lie, abbiamo evidentemente che

$$\Delta_u v = -\Delta_v u \quad (2.8.152)$$

Attraverso Δ_u possiamo riscrivere l'identità di Jacobi, che diventa

$$0 = [u, \Delta_v w] + [v, \Delta_w u] + [w, \Delta_u v] = \quad (2.8.153)$$

$$= [u, \Delta_v w] - [v, \Delta_u w] + [w, \Delta_u v] = \quad (2.8.154)$$

$$= \Delta_u \Delta_v w - \Delta_v \Delta_u w + \Delta_w \Delta_u v \quad (2.8.155)$$

Più esplicitamente, in termini degli elementi \hat{A}_j della base dell'algebra, se

$$u = u_j \hat{A}_j; \quad v = v_k \hat{A}_k \quad (2.8.156)$$

ne segue che

$$\Delta_u v = (\Delta_u v)_m \hat{A}_m = [u, v] = u_j v_k [\hat{A}_j, \hat{A}_k] = u_j v_k (-i C_{jkm} \hat{A}_m) \quad (2.8.157)$$

e dunque, la componente m di $\Delta_u v$ nella base assegnata, vale

$$(\Delta_u v)_m = -i C_{jkm} u_j v_k = - \left(u_j \hat{T}_j \right)_{km} v_k \equiv - \left(\hat{T}_u \right)_{km} v_k \quad (2.8.158)$$

dove abbiamo definito

$$\hat{T}_u \equiv u_j \hat{T}_j \quad (2.8.159)$$

Dato che le costanti di struttura sono completamente antisimmetriche, abbiamo infine che

$$(\Delta_u v)_m = \left(\hat{T}_u \right)_{mk} v_k \quad (2.8.160)$$

la quale mostra come l'operatore Δ_u possa essere semplicemente identificato con la matrice immaginaria pura, antisimmetrica e dunque hermitiana $\hat{T}_u = u_j \hat{T}_j$. E' per questo che Δ_u viene chiamato *operatore aggiunto*.

Consideriamo infatti il caso in cui $u = \hat{A}_j$. Evidentemente, posto per comodità di notazione

$$\Delta_j \equiv \Delta_{\hat{A}_j} \quad (2.8.161)$$

si ha

$$\Delta_j = \hat{T}_j \quad (2.8.162)$$

e dunque i Δ_j costituiscono la base della RA individuata dagli \hat{A}_k .

Veniamo adesso al caso di un elemento generico $u \in \mathcal{A}$ e sia Δ_u l'operatore aggiunto a esso associato. Come sappiamo, il corrispondente elemento della RA si ottiene per esponenziazione di $i\Delta_u$

$$u \in \mathcal{A} \rightarrow \Delta_u \in \mathcal{A}_{RA} \rightarrow e^{i\Delta_u} = e^{iu_j\Delta_j} = e^{iu_j\hat{T}_j} \in RA \quad (2.8.163)$$

dove, per definizione

$$e^{i\Delta_u} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (\Delta_u)^n \quad (2.8.164)$$

Vediamo ora quale é l'azione dei vari termini dello sviluppo dell'esponenziale sul generico elemento v dell'algebra. Abbiamo

$$(\Delta_u)^n v = \Delta_u (\Delta_u)^{n-1} v = [u, (\Delta_u)^{n-1} v] = [u, [u, \dots, [u, v]]] \quad (2.8.165)$$

In termini della matrice \hat{T}_u vogliamo dimostrare che

$$(\Delta_u)^n v = \left((\hat{T}_u)^n \right)_{mk} v_k \hat{A}_m \quad (2.8.166)$$

Procediamo per induzione. Iniziamo osservando che per $n = 1$ la (2.8.166) è vera, infatti, in accordo con la (2.8.160), si ha

$$(\Delta_u) v = \left(\hat{T}_u \right)_{mk} v_k \hat{A}_m \quad (2.8.167)$$

Supponiamo ora che la (2.8.166) sia vera quando l'esponente vale $n - 1$: dimostriamo che allora essa risulta vera anche quando l'esponente vale n .

Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned} (\Delta_u)^n v &= \Delta_u (\Delta_u)^{n-1} v = [u, (\Delta_u)^{n-1} v] = \left[u, \left((\hat{T}_u)^{n-1} \right)_{lk} v_k \hat{A}_l \right] = \\ &= \left((\hat{T}_u)^{n-1} \right)_{lk} v_k [u, \hat{A}_l] = \left((\hat{T}_u)^{n-1} \right)_{lk} v_k \Delta_u \hat{A}_l = \\ &= \left((\hat{T}_u)^{n-1} \right)_{lk} v_k \left(\hat{T}_u \right)_{sl} \hat{A}_s = \left((\hat{T}_u)^n \right)_{sk} v_k \hat{A}_s \end{aligned} \quad (2.8.168)$$

Possiamo dunque concludere che

$$e^{i\Delta_u} = e^{i\hat{T}_u} \Leftrightarrow e^{i\Delta_u} v = \left(e^{i\hat{T}_u} \right)_{mk} v_k \hat{A}_m \quad (2.8.169)$$

Vogliamo dimostrare adesso che

$$[e^{i\Delta_u} v, e^{i\Delta_u} w] = e^{i\Delta_u} [v, w] \quad (2.8.170)$$

ovvero che

$$\begin{aligned} & \left[\left(I + (i\Delta_u) + \frac{(i\Delta_u)^2}{2!} + \frac{(i\Delta_u)^3}{3!} + \dots \right) v, \left(I + (i\Delta_u) + \frac{(i\Delta_u)^2}{2!} + \frac{(i\Delta_u)^3}{3!} + \dots \right) w \right] = \\ & = \left(I + (i\Delta_u) + \frac{(i\Delta_u)^2}{2!} + \frac{(i\Delta_u)^3}{3!} + \dots \right) [v, w] \end{aligned} \quad (2.8.171)$$

Procediamo raggruppando fra loro, al primo membro della (2.8.171), i termini che contengono uno stesso numero complessivo n di operatori Δ_u definendo così le gli elementi dell'algebra D_n

$$\begin{aligned} & \left[\left(I + (i\Delta_u) + \frac{(i\Delta_u)^2}{2!} + \frac{(i\Delta_u)^3}{3!} + \dots \right) v, \left(I + (i\Delta_u) + \frac{(i\Delta_u)^2}{2!} + \frac{(i\Delta_u)^3}{3!} + \dots \right) w \right] \equiv \\ & \equiv D_0 + D_1 + \frac{1}{2!} D_2 + \dots + \frac{1}{n!} D_n + \dots \end{aligned} \quad (2.8.172)$$

Per $n = 0$ e $n = 1$, evidentemente, si ha

$$n = 0: \quad D_0 = [v, w] \quad (2.8.173)$$

$$\begin{aligned} n = 1: \quad D_1 &= [(i\Delta_u)v, w] + [v, (i\Delta_u)w] = i([\Delta_u v, w] + [v, \Delta_u w]) = \\ &= i(-[w, \Delta_u v] + [v, \Delta_u w]) = i[u, \Delta_u w] \\ &= i\Delta_u[v, w] \end{aligned} \quad (2.8.174)$$

dove, nel penultimo passaggio, abbiamo fatto uso dell'identità di Jacobi.

Per un $n > 1$ generico, dallo sviluppo degli esponenziali, possiamo concludere in generale che

$$D_n = (i)^n \sum_{p=0}^n [\Delta_u^p v, \Delta_u^{n-p} w] \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2.8.175)$$

Procedendo per induzione, vogliamo dimostrare adesso che

$$D_n = (i\Delta_u)^n [v, w] \quad (2.8.176)$$

Abbiamo visto che la (2.8.176) è vera per $n = 1$: supponiamo dunque che essa sia vera per $n = k$, ovvero che

$$(i\Delta_u)^k [v, w] = (i)^k \sum_{p=0}^k [\Delta_u^p v, \Delta_u^{k-p} w] \frac{k!}{p!(k-p)!} \quad (2.8.177)$$

e dimostriamo che essa è vera anche per $n = k + 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
& (i\Delta_u)^{k+1} [v, w] = (i\Delta_u)(i\Delta_u)^k [v, w] = \\
&= (i)^{k+1} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \Delta_u \left\{ \Delta_u^p v \Delta_u^{k-p} w - \Delta_u^{k-p} w \Delta_u^p v \right\} = \\
&= (i)^{k+1} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \left\{ [u, \Delta_u^p v \Delta_u^{k-p} w] - [u, \Delta_u^{k-p} w \Delta_u^p v] \right\} = \\
&= (i)^{k+1} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \left\{ \Delta_u^p v [u, \Delta_u^{k-p} w] + [u, \Delta_u^p v] \Delta_u^{k-p} w - \right. \\
&\quad \left. - \Delta_u^{k-p} w [u, \Delta_u^p v] - [u, \Delta_u^{k-p} w] \Delta_u^p v \right\} = \\
&= (i)^{k+1} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \left\{ \Delta_u^p v \Delta_u^{k-p+1} w + \Delta_u^{p+1} v \Delta_u^{k-p} w - \Delta_u^{k-p} w \Delta_u^{p+1} v - \Delta_u^{k-p+1} w \Delta_u^p v \right\} = \\
&= (i)^{k+1} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \left\{ [\Delta_u^p v, \Delta_u^{k-p+1} w] + [\Delta_u^{p+1} v, \Delta_u^{k-p} w] \right\} \tag{2.8.178}
\end{aligned}$$

Per giungere alla conclusione, può essere utile ricordare adesso l'espressione del binomio di Newton: come ben noto, abbiamo

$$(x + y)^k = \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} x^p y^{k-p} \tag{2.8.179}$$

ed evidentemente sarà

$$\begin{aligned}
(x + y)^{k+1} &= \sum_{q=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{q!(k+1-q)!} x^q y^{k+1-q} \\
&= (x + y)(x + y)^k = (x + y) \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} x^p y^{k-p} = \\
&= \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \left\{ x^{p+1} y^{k-p} + x^p y^{k+1-p} \right\} \tag{2.8.180}
\end{aligned}$$

Il confronto con la (2.8.178) mostra dunque che è dimostrata l'ipotesi di induzione, ovvero che

$$\begin{aligned}
(i\Delta_u)^{k+1} [v, w] &= (i)^{k+1} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} \left\{ [\Delta_u^p v, \Delta_u^{k-p+1} w] + [\Delta_u^{p+1} v, \Delta_u^{k-p} w] \right\} = \\
&= (i)^{k+1} \sum_{q=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{q!(k+1-q)!} [\Delta_u^q v, \Delta_u^{k+1-q} w] = D_{k+1} \tag{2.8.181}
\end{aligned}$$

Riprendendo la (2.8.170), possiamo quindi concludere che è così dimostrata l'uguaglianza

$$\begin{aligned}
[e^{i\Delta_u} v, e^{i\Delta_u} w] &= D_0 + D_1 + \frac{1}{2!}D_2 + \dots + \frac{1}{n!}D_n + \dots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\Delta_u)^n}{n!} [v, w] \\
\iff [e^{i\Delta_u} v, e^{i\Delta_u} w] &= e^{i\Delta_u} [v, w] \quad (2.8.182)
\end{aligned}$$

Vediamo ora come da questo risultato segua direttamente la (2.8.149). Ricordiamo che, secondo la (2.8.169), risulta in generale che

$$e^{i\Delta_u} v = \left(e^{i\hat{T}_u} \right)_{mk} v_k \hat{A}_m \equiv \left(e^{i u_j \hat{T}_j} \right)_{mk} v_k \hat{A}_m \quad (2.8.183)$$

Ma $e^{i u_j \hat{T}_j} = R$ è la matrice ortogonale (cfr. (2.8.148)) che, nella RA , rappresenta l'elemento del gruppo individuato dal vettore reale di componenti u_j nella base \hat{A}_j . La (2.8.183) diventa dunque

$$e^{i\Delta_u} v = R_{mk} v_k \hat{A}_m \quad (2.8.184)$$

e quindi, quanto al primo membro della (2.8.182), abbiamo

$$\begin{aligned}
[e^{i\Delta_u} v, e^{i\Delta_u} w] &= \left[R_{mj} v_j \hat{A}_m, R_{nk} w_k \hat{A}_n \right] = R_{mj} v_j R_{nk} w_k \left[\hat{A}_m, \hat{A}_n \right] = \\
&= R_{mj} R_{nk} v_j w_k \left(-i C_{mns} \hat{A}_s \right) \quad (2.8.185)
\end{aligned}$$

da uguagliare al secondo membro, ovvero a

$$\begin{aligned}
e^{i\Delta_u} [v, w] &= e^{i\Delta_u} v_j w_k (-i C_{jkl}) \hat{A}_l = v_j w_k (-i C_{jkl}) e^{i\Delta_u} \hat{A}_l = \\
&= v_j w_k (-i C_{jkl}) R_{sl} \hat{A}_s \quad (2.8.186)
\end{aligned}$$

Il confronto fra le due espressioni così ottenute, tenuto conto che i coefficienti v_j e w_k sono arbitrari e che le \hat{A}_s costituiscono una base e dunque sono indipendenti fra loro, fornisce

$$R_{mj} R_{nk} C_{mns} = C_{jkl} R_{sl} \quad (2.8.187)$$

Moltiplicando ambo i membri per R_{st} e sommando sull'indice s , tenendo conto che R in quanto matrice della RA , è ortogonale, si ottiene infine che

$$R_{mj} R_{nk} R_{st} C_{mns} = C_{jkl} R_{sl} R_{st} = C_{jkl} \delta_{lt} = C_{jkt} \quad (2.8.188)$$

che è appunto quanto volevamo dimostrare.

Dal risultato (2.8.188) così ottenuto segue che se indichiamo con $\hat{\mathbf{T}}$ il vettore dei generatori della RA considerati fin'ora, ovvero

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv (\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_n) \quad (2.8.189)$$

allora se

$$R = e^{i x_j \hat{T}_j} \quad (2.8.190)$$

è una qualunque matrice (ortogonale) appartenente alla RA stessa, essendo

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} = i C_{jk}^m \quad (2.8.191)$$

ecco che, partendo dalla (2.8.188), abbiamo (si ricordi che $R^t = R^{-1}$)

$$R_{mj} R_{kn}^{-1} (T_m)_{ns} R_{st} = (T_j)_{kt} \quad (2.8.192)$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per R_{jl}^{-1} si ottiene

$$\begin{aligned} R_{mj} R_{jl}^{-1} R_{kn}^{-1} \left(\hat{T}_m\right)_{ns} R_{st} &= R_{jl}^{-1} \left(\hat{T}_j\right)_{kt} \Leftrightarrow \delta_{ml} \left(R^{-1} \hat{T}_m R\right)_{kt} = R_{lj} \left(\hat{T}_j\right)_{kt} \\ \Leftrightarrow \left(R^{-1} \hat{T}_l R\right)_{kt} &= R_{lj} \left(\hat{T}_j\right)_{kt} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R^{-1} \hat{T}_l R &= R_{lj} \hat{T}_j = R_{jl}^{-1} \hat{T}_j \end{aligned} \quad (2.8.193)$$

Ma data l'arbitrarietà della R in RA , possiamo evidentemente riscrivere la (2.8.193) anche come

$$R \hat{T}_l R^{-1} = R_{jl} \hat{T}_j \quad (2.8.194)$$

Consideriamo adesso una generica matrice R_0 di RA , definita nella base dei \hat{T}_k dai parametri che indicheremo con y_k :

$$R_0 \equiv e^{i y_k \hat{T}_k} \quad (2.8.195)$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} R'_0 &\equiv R R_0 R^{-1} = R e^{i y_k \hat{T}_k} R^{-1} = e^{i y_k R \hat{T}_k R^{-1}} = e^{i y_k R_{jk} \hat{T}_j} = \\ &= e^{i (R_{jk} y_k) \hat{T}_j} \end{aligned} \quad (2.8.196)$$

ovvero l'elemento R'_0 di RA , che otteniamo dalla trasformazione di verosimiglianza definita dalla generica R , per cui $R'_0 = R R_0 R^{-1}$, risulta essere definito semplicemente dai parametri $y'_j = R_{jk} y_k$.

Si osservi adesso che, nel caso in cui $R_0 = R$ evidentemente la (2.8.196) stabilisce che $R'_0 = R$. D'altronde R'_0 , sempre per la (2.8.196), è definito dai parametri $y_j = R_{jk}y_k = R_{jk}x_k$ mentre R , per ipotesi, è definito dai parametri (x_j) : occorre dunque che (x_j) sia autovettore di R per l'autovalore 1, ovvero che risulti $Rx = x$.

Consideriamo allora le componenti del vettore di \mathbb{R}^n definito da

$$(Rx)_s = \left(e^{i x_j \hat{T}_j} \right)_{st} x_t \quad (2.8.197)$$

e definiamo, per comodità di notazione, la seguente matrice reale antisimmetrica M

$$M \equiv i x_j \hat{T}_j \quad (2.8.198)$$

per cui

$$\left(e^{i x_j \hat{T}_j} \right)_{st} = (e^M)_{st} \quad (2.8.199)$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} (Rx)_s &= \left\{ I + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots \right\}_{st} x_t = \\ &= \delta_{st} x_t + \delta_{sk} M_{kt} x_t + \frac{1}{2!} M_{sk} M_{kt} x_t + \frac{1}{3!} (M^2)_{sk} M_{kt} x_t + \dots \end{aligned} \quad (2.8.200)$$

Ma

$$M_{kt} x_t = i x_j \left(\hat{T}_j \right)_{kt} x_t = i x_j (i C_{jkt}) x_t = C_{kjt} x_j x_t = 0 \quad (2.8.201)$$

essendo le costanti di struttura completamente antisimmetriche. Dunque, la (2.8.200) diventa

$$(Ru)_s = \delta_{st} u_t = u_s \quad \Leftrightarrow \quad Ru = u \quad (2.8.202)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Vogliamo mostrare ora che la (2.8.194) rappresenta, in realtà, un risultato più generale di quanto visto fin'ora nell'ambito ristretto alla RA .

Supponiamo dunque che sia data una rappresentazione irriducibile di un gruppo compatto \mathcal{G} a valori nello spazio delle matrici $N \times N$.

Siano \hat{A}_j gli n generatori che definiscono quella rappresentazione che supporremo, senza perdita di generalità, siano tali per cui le costanti di struttura definiscano un tensore di Killing multiplo della matrice identica $n \times n$, per cui queste costanti

$$C_{jk}^m = C_{jkm} \quad (2.8.203)$$

risultano reali e completamente antisimmetriche.

Sia poi (x_j) il vettore di \mathbb{R}^n che definisce per esponenziazione la (generica) matrice \mathcal{R} della rappresentazione considerata

$$\mathcal{R} = e^{i x_j \hat{A}_j} \quad (2.8.204)$$

Vogliamo dimostrare che

$$\mathcal{R} \hat{A}_l \mathcal{R}^{-1} = R_{sl} \hat{A}_s \quad (2.8.205)$$

dove R è la matrice $n \times n$ definita nella RA da

$$R = e^{i x_j \hat{T}_j} \quad \text{dove} \quad (\hat{T}_j)_{sl} = i C_{jst} \quad (2.8.206)$$

Per comodità di notazione, poniamo adesso

$$X = \hat{A}_l; \quad Y = i x_j \hat{A}_j \quad (2.8.207)$$

Il primo membro della (2.8.205) diventa allora

$$\mathcal{R} \hat{A}_l \mathcal{R}^{-1} = e^{i x_j \hat{A}_j} \hat{A}_l e^{-i x_j \hat{A}_j} = e^Y X e^{-Y} \quad (2.8.208)$$

D'altronde, noi abbiamo già dimostrato, in generale che (cfr. (2.5.76))

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \dots + \frac{1}{n!} [Y, [Y, \dots [Y, X] \dots]] + \dots \quad (2.8.209)$$

Nel nostro caso, se definiamo per comodità di notazione, la matrice $\hat{T}_{(x)}$ come

$$\hat{T}_{(x)} \equiv x_j \hat{T}_j \quad (2.8.210)$$

ecco che risulta

$$\begin{aligned} [Y, X] &= [i x_j \hat{A}_j, \hat{A}_l] = i x_j [\hat{A}_j, \hat{A}_l] = i x_j (-i C_{jlt}) \hat{A}_t = -i x_j (i C_{jlt}) \hat{A}_t = \\ &= -i x_j (T_j)_{lt} \hat{A}_t = i x_j (\hat{T}_j)_{tl} \hat{A}_t = i (\hat{T}_{(x)})_{tl} \hat{A}_t \end{aligned} \quad (2.8.211)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
[Y, [Y, X]] &= \left[i x_j \hat{A}_j, i \left(\hat{T}(x) \right)_{tl} \hat{A}_t \right] = i \left(\hat{T}(x) \right)_{tl} i x_j \left[\hat{A}_j, \hat{A}_t \right] = \\
&= i \left(\hat{T}(x) \right)_{tl} i x_j (-i C_{jts}) \hat{A}_s = i \left(\hat{T}(x) \right)_{tl} i x_j \left(\hat{T}_j \right)_{st} \hat{A}_s = \\
&= i \left(\hat{T}(x) \right)_{tl} i \left(\hat{T}(x) \right)_{st} \hat{A}_s = \left(i \hat{T}(x) \right)_{sl}^2 \hat{A}_s \quad (2.8.212)
\end{aligned}$$

ed è facile provare per induzione che infine risulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} \hat{A}_l \mathcal{R}^{-1} &= e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \dots + \frac{1}{n!} [Y, [Y, \dots [Y, X]]] + \dots = \\
&= \left\{ I + \left(i \hat{T}(x) \right) + \frac{1}{2!} \left(i \hat{T}(x) \right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(i \hat{T}(x) \right)^n + \dots \right\}_{sl} \hat{A}_s = \left(e^{i \hat{T}(x)} \right)_{sl} \hat{A}_s = \\
&= \left(e^{i x_j \hat{T}_j} \right)_{sl} \hat{A}_s = R_{sl} \hat{A}_s \quad (2.8.213)
\end{aligned}$$

ovvero appunto che

$$\mathcal{R} \hat{A}_l \mathcal{R}^{-1} = R_{sl} \hat{A}_s \quad (2.8.214)$$

Dalla (2.8.214) si conferma anche il fatto che il seguente operatore (di Casimir), costruito con i generatori e l'inverso del tensore di Killing

$$C \equiv \gamma_{jk}^{-1} \hat{A}_j \hat{A}_k = \frac{1}{\Gamma} \hat{A}_k \hat{A}_k \quad (2.8.215)$$

è un invariante. Infatti (si ricordi che $R^{-1} = R^t$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} C \mathcal{R}^{-1} &= \mathcal{R} \hat{A}_k \hat{A}_k \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} \hat{A}_k \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} \hat{A}_k \mathcal{R}^{-1} = R_{sk} \hat{A}_s R_{tk} \hat{A}_t = \\
&= R_{sk} R_{tk} \hat{A}_s \hat{A}_t = R_{sk} R_{kt}^{-1} \hat{A}_s \hat{A}_t = \delta_{st} \hat{A}_s \hat{A}_t = \\
&= \hat{A}_s \hat{A}_s = C \quad (2.8.216)
\end{aligned}$$

e dunque, se la rappresentazione è irriducibile, esso è multiplo dell'identità.

2.9 I Pesi

Le rappresentazioni finite di un gruppo di Lie compatto, come abbiamo già detto, sono equivalenti a rappresentazioni unitarie, dunque il generico elemento della rappresentazione può essere messo nella forma seguente

$$R(a) = e^{ix_j \hat{A}_j}; \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, n \quad (2.9.217)$$

dove n è la dimensione del gruppo, lo spazio dei parametri è un insieme compatto di \mathbb{R}^n e i generatori \hat{A}_j sono hermitiani e dunque tali che

$$\hat{A}_j = \hat{A}_j^\dagger \quad (2.9.218)$$

Se la rappresentazione, che assumeremo irriducibile e indicheremo con R , ha valori nel gruppo degli operatori unitari i quali agiscono in un opportuno spazio vettoriale \mathcal{V} , definito sul corpo complesso \mathbb{C} e di dimensione finita N , gli operatori \hat{A}_j , come tutti gli elementi della rappresentazione del gruppo dato, saranno rappresentati da matrici $N \times N$ a coefficienti complessi.

Nell'algebra \mathcal{A} generata dagli operatori \hat{A}_j , similmente a quanto fatto nel caso della RA con il tensore di Killing (cfr.(2.6.89) - (2.6.95)), è possibile introdurre un prodotto scalare attraverso la seguente matrice³⁰ $n \times n$, simmetrica

$$D_{jk} = Tr \left(\hat{A}_j^\dagger \hat{A}_k \right) = Tr \left(\hat{A}_j \hat{A}_k \right) \quad (2.9.219)$$

Se X e Y sono due elementi di \mathcal{A} , ovvero

$$X = x_j \hat{A}_j; \quad Y = y_k \hat{A}_k \quad (2.9.220)$$

allora³¹

$$\begin{aligned} \langle X_a | X_b \rangle &= Tr \left(X_a^\dagger X_b \right) = a_j^* b_k Tr \left(\hat{A}_j^\dagger \hat{A}_k \right) = a_j^* b_k Tr \left(\hat{A}_j \hat{A}_k \right) = \\ &= a_j^* b_k D_{jk} \end{aligned} \quad (2.9.221)$$

La matrice D così definita è reale, infatti, partendo da

$$D_{jk} = \left(\hat{A}_j \right)_{ab} \left(\hat{A}_k \right)_{ba} \quad (2.9.222)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} D_{jk}^* &= \left(\hat{A}_j \right)_{ab}^* \left(\hat{A}_k \right)_{ba}^* = \left(\hat{A}_j^\dagger \right)_{ba} \left(\hat{A}_k^\dagger \right)_{ab} = \left(\hat{A}_j^\dagger \hat{A}_k^\dagger \right)_{bb} = \\ &= Tr \left(\hat{A}_j^\dagger \hat{A}_k^\dagger \right) = Tr \left(\hat{A}_j \hat{A}_k \right) = D_{jk} \end{aligned} \quad (2.9.223)$$

³⁰Si ricordi che $\hat{A}_j = \hat{A}_j^\dagger$.

³¹Ricordiamo che, strettamente parlando, le algebre di Lie sono sul corpo reale e quindi i coefficienti x_j e y_k di cui alla (2.9.220) sono reali.

Risulta comunque evidente che la definizione (2.9.221) è applicabile anche al caso in cui l'algebra di Lie venga estesa al campo complesso come talvolta può risultare utile.

Questo significa che la matrice D_{jk} può essere diagonalizzata attraverso una matrice ortogonale reale. Possiamo dunque effettuare un cambiamento di base nell'algebra in modo che risulti³²

$$D_{jk} = Tr \left(\hat{A}_j \hat{A}_k \right) = \lambda_j \delta_{jk} \quad (\text{senza somma sull'indice } j) \quad (2.9.224)$$

In questo modo, le matrici \hat{A}_i così ridefinite formano una *base ortogonale*. Poiché gli autovalori λ_j di D_{jk} sono reali positivi³³ possiamo anche, volendo, riscaldare poi ciascuno degli \hat{A}_j , in modo che risulti infine³⁴

$$D_{ij} = Tr \left(\hat{A}_i \hat{A}_j \right) = D \delta_{ij} \quad \text{con } D > 0 \quad (2.9.226)$$

dove D , in generale, dipende³⁵ dalla rappresentazione e dalla normalizzazione dei generatori stessi.

Un sottoinsieme di generatori i quali commutino fra loro e siano il più numeroso possibile, individua una sottoalgebra dell'algebra di Lie del gruppo, indicata con il nome di *sottoalgebra di Cartan*³⁶ dell'algebra di Lie data e la cardinalità m della base costituisce il *rango* della sottoalgebra stessa. Attraverso una trasformazione di base descritta da una matrice ortogonale (che quindi non cambierà la (2.9.226)) si può fare in modo che questi generatori, che indicheremo con \hat{K}_j , $j = 1, \dots, m \leq n$, facciano parte della base stessa, che continueremo a indicare con (\hat{A}_j) . Per definizione avremo, evidentemente, che

$$[\hat{K}_j, \hat{K}_k] = 0; \quad Tr \left(\hat{K}_j \hat{K}_k \right) = D \delta_{jk} \quad 1 \leq j, k \leq m \quad (2.9.227)$$

Poiché la base dei \hat{K}_j di cui sopra è fatta da matrici hermitiane che commutano fra loro, esse possono essere diagonalizzate simultaneamente, per cui si può sempre trovare una base nello spazio N -dimensionale \mathcal{V} dove agisce

³²Per comodità, continueremo a usare lo stesso simbolo \hat{A}_j anche per gli elementi della nuova base, dove D è diagonale.

³³Infatti (si ricordi che le \hat{A}_i sono matrici hermitiane non identicamente nulle ...)

$$\begin{aligned} \lambda_j &= Tr \left(\hat{A}_j \hat{A}_j \right) = \left(\hat{A}_j \right)_{ab} \left(\hat{A}_j \right)_{ba} = \left(\hat{A}_j \right)_{ab} \left(\hat{A}_j \right)_{ab}^t = \\ &= \left(\hat{A}_j \right)_{ab} \left(\left(\hat{A}_j \right)_{ab}^\dagger \right)^* = \left(\hat{A}_j \right)_{ab} \left(\hat{A}_j \right)_{ab}^* > 0 \end{aligned} \quad (2.9.225)$$

³⁴Di nuovo, per non appesantire le notazioni, manterremo il simbolo \hat{A}_i anche per gli elementi della base riscaldata.

³⁵Ovviamente la conclusione (2.9.226) contiene anche il caso in cui $D = 1$ e quindi $D_{jk} = \delta_{jk}$.

³⁶Si può dimostrare (cfr. pag. 90 di "Lie Algebras in Particle Physics" di H. Giorgi) che la sottoalgebra di Cartan è essenzialmente unica, nel senso che qualunque sia la scelta che facciamo fra quelle di rango massimale, si ottengono alla fine gli stessi risultati.

la rappresentazione irriducibile R , che è costituita da autovettori simultanei dei generatori \hat{K}_j , eventualmente complementati da un opportuno set di altri parametri, che indicheremo genericamente con \mathbf{p} , per tenere conto dell'eventualità che gli autovettori simultanei dei \hat{K}_j possano presentare degenerazione.

Gli autovalori h_j degli operatori \hat{K}_j sono detti *pesi* e sono evidentemente numeri reali, in quanto autovalori di matrici hermitiane.

Il vettore a m -componenti $\mathbf{h} = (h_j)$ è chiamato *vettore dei pesi*.

Possiamo quindi concludere che, se R è la rappresentazione irriducibile considerata, si può sempre trovare una base dello spazio \mathcal{V} di dimensione N in cui agiscono gli operatori della rappresentazione R , la quale è fatta dai vettori $|\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle$ tali che

$$\hat{K}_j |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle = h_j |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle \quad (2.9.228)$$

Un vettore dei pesi \mathbf{h} (abbr. *peso*) viene detto *positivo* se la sua prima componente non nulla h_j è positiva, mentre esso è detto *negativo* se la sua prima componente non nulla è negativa. Evidentemente, quindi, un peso che non sia identicamente nullo, o è positivo o è negativo.

Questa definizione ci consente di introdurre un ordinamento nell'insieme dei vettori dei pesi, secondo il quale un peso \mathbf{h} è *più alto* o *maggiore* di un peso \mathbf{k} se $\mathbf{h} - \mathbf{k}$ risulta positivo.

In questo modo, data una rappresentazione del gruppo e fissata la base dei \hat{K}_j , è ben definita la nozione di peso più alto.

Si osservi infine che la base costituita dai \hat{K}_i non è univocamente determinata dalla condizione di essere fatta da generatori della rappresentazione R , ortogonali fra loro e che commutano.

Per esempio si può scalare diversamente la base dell'algebra in modo da cambiare la quantità che abbiamo indicato con D e in questo modo cambieranno ovviamente i pesi, in quanto autovalori delle matrici che sono elementi della base stessa, grado di libertà che può risultare utile avere a disposizione.

Esempio

Allo scopo di fissare le idee, consideriamo il gruppo $SU(2)$, ricoprimento universale del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni, su cui avremo modo, comunque, di ritornare più compiutamente.

Occupiamoci della sua rappresentazione irriducibile $(2j+1)$ -dimensionale di spin j . L'algebra di Cartan di $SU(2)$ è unidimensionale, definita attraverso uno qualunque dei suoi tre generatori J_k , tipicamente J_3 , i cui autovalori m vanno da $-j$ a $+j$. Scelto dunque

$$K = J_3 \quad (2.9.229)$$

concludiamo che il vettore dei pesi è unidimensionale e, conseguentemente alla scelta fatta di K , i pesi sono distribuiti uniformemente a passi di una unità fra $-j$ e $+j$ e non esiste degenerazione, ovvero

$$|\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle \rightarrow |m; j \rangle \quad \text{dove} \quad K |m; j \rangle = m |m; j \rangle; \quad m = -j, -j+1, \dots, j \quad (2.9.230)$$

Osserviamo che i generatori J_k sono tali che³⁷

$$\text{Tr}(J_i J_k) = D \delta_{ik} \quad \text{dove} \quad D = D(j) \quad (2.9.239)$$

dove, tanto per spin intero che semintero, risulta

$$D(j) = \sum_{m=-j}^j m^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{3} \quad (2.9.240)$$

Volendo usare una base dell'algebra di Lie, e quindi di quella di Cartan, che sia ortonormale, dovremmo scalare i J_k per il fattore comune

$$\sqrt{\frac{1}{D(j)}} = \sqrt{\frac{3}{j(j+1)(2j+1)}}.$$

³⁷Iniziamo osservando che, data la struttura diagonale di J_3 , è immediato che

$$\text{Tr}(J_3 J_3) = \sum_{-j}^j m^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{3} \equiv D(j) = D \quad (2.9.231)$$

D'altronde i generatori J_k per rotazioni si trasformano come le componenti di un vettore tridimensionale e dunque attraverso una rotazione di 90° intorno all'asse x , J_3 diventa J_2 . Sia R la matrice che, nella rappresentazione di cui ci stiamo occupando, rappresenta la rotazione in questione: abbiamo

$$\begin{aligned} J_2 = R J_3 R^{-1} &\Rightarrow \text{Tr}(J_2 J_2) = \text{Tr}(R J_3 R^{-1} R J_3 R^{-1}) = \text{Tr}(R J_3 J_3 R^{-1}) = \\ &= \text{Tr}(J_3 J_3) \end{aligned} \quad (2.9.232)$$

Lo stesso vale, ovviamente, per $\text{Tr}(J_1 J_1)$.

Quanto alla ortogonalità dei tre generatori, ricordiamo che, come dimostreremo in seguito trattando espressamente il gruppo $SU(2)$, se gli indici a e b vanno da $-j$ a $+j$, posto

$$N_a^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+a)(j-a+1)} \quad (2.9.233)$$

Così facendo, naturalmente anche i pesi scalerebbero nello stesso modo e lo stesso farebbero le costanti di struttura.

Proprio per questo motivo, però, il procedimento di rinormalizzazione della base risulta spesso poco pratico per cui, solitamente, si fissano i generatori dell'algebra di Lie in modo che costituiscano una base ortogonale in qualche rappresentazione particolarmente significativa (come, per esempio, la RA , ma non necessariamente) e poi, nelle varie altre rappresentazioni, si procede usando questi generatori (la loro rappresentazione) in modo da *non* alterare, passando da una rappresentazione a un'altra, le costanti di struttura.

risulta

$$(J_1)_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[N_a^j \delta_{a,b+1} + N_b^j \delta_{a+1,b} \right] \quad (2.9.234)$$

$$(J_2)_{ab} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[N_b^j \delta_{a+1,b} - N_a^j \delta_{a,b+1} \right] \quad (2.9.235)$$

$$(J_3)_{ab} = a \delta_{a,b} \quad (2.9.236)$$

Abbiamo quindi, per esempio, che

$$\begin{aligned} Tr(J_1 J_2) &= (J_1)_{ab} (J_2)_{ba} = \frac{i}{2} \left[N_a^j \delta_{a,b+1} + N_b^j \delta_{a+1,b} \right] \left[N_a^j \delta_{b+1,a} - N_a^j \delta_{b,a+1} \right] = \\ &= \frac{i}{2} \left[N_a^j N_a^j \delta_{a,b+1} \delta_{b+1,a} - N_a^j N_b^j \delta_{a,b+1} \delta_{b,a+1} + N_b^j N_a^j \delta_{a+1,b} \delta_{b+1,a} - N_b^j N_b^j \delta_{a+1,b} \delta_{b,a+1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.9.237)$$

Usando adesso una rotazione R di -90° intorno all'asse x possiamo trasformare J_2 in J_3 lasciando J_1 inalterato, e dunque

$$0 = Tr(J_1 J_2) = Tr(R J_1 R^{-1} R J_2 R^{-1}) = Tr(J_1 J_3) \quad (2.9.238)$$

e così per gli altri termini fuori diagonale.

2.10 Le radici

Sia dato un gruppo compatto \mathbb{G} , sia \mathcal{A} l'algebra di Lie a esso associata e sia \hat{A}_j con $j = 1, \dots, n$ una base di \mathcal{A} .

$$R(\mathbf{x}) = e^{ix_j \hat{A}_j}; \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10.241)$$

Abbiamo già osservato che possiamo ridefinire la base in modo che, essendo

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = -i C_{ij}^m \hat{A}_m \quad (2.10.242)$$

i coefficienti di struttura (reali) C_{ij}^m siano tali per cui il tensore di Killing γ_{ij} risulti multiplo dell'identità, ovvero

$$\gamma_{jk} \equiv -C_{js}^t C_{kt}^s = \Gamma \delta_{jk} \quad \Gamma > 0 \quad (2.10.243)$$

nel qual caso

$$C_{jk}^m = C_{jk}^l \delta_{lm} = C_{jk}^m \frac{1}{\Gamma} \gamma_{lm} = \frac{1}{\Gamma} C_{jkm} \quad (2.10.244)$$

e poiché C_{jkm} è completamente antisimmetrico, in questa base dell'algebra, i coefficienti di struttura risultano anch'essi reali e antisimmetrici. Siccome

$$\left(\hat{T}_j \right)_{km} \equiv i C_{jk}^m = i C_{jkm} \quad (2.10.245)$$

a seguito della scelta fatta della base dell'algebra, le matrici \hat{T}_j , generatori della RA , risultano quindi puramente immaginarie e antisimmetriche e dunque hermitiane.

Tutti questi fatti sono già stati ampiamente visti.

Partendo da questi, procediamo considerando lo spazio vettoriale \mathcal{T} su cui agisce la RA .

Come sappiamo, esso ha per base i vettori $|\hat{\mathbf{T}}_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$ e dunque è costituito dai vettori $\lambda_j |\hat{\mathbf{T}}_j \rangle$ con $\lambda_j \in \mathbb{C}$. L'azione degli operatori \hat{T}_k su questi vettori è tale per cui

$$\hat{T}_j |\hat{\mathbf{T}}_k \rangle = |[\hat{T}_j, \hat{T}_k] \rangle \quad (2.10.246)$$

mentre la metrica è definita dal fatto che la base dei $|\hat{\mathbf{T}}_j \rangle$ è ortonormale, cioè

$$\langle \hat{\mathbf{T}}_j | \hat{\mathbf{T}}_k \rangle = \delta_{jk} \quad (2.10.247)$$

Effettuiamo una trasformazione ortogonale di base per cui i primi m suoi elementi che indicheremo con $|\hat{\mathbf{H}}_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$ siano associati ai generatori \hat{H}_k della sottoalgebra di Cartan.

Sia \mathcal{H} lo spazio vettoriale generato da questi vettori.

Indichiamo con $|\hat{\mathbf{E}}_l\rangle$, $l = 1, \dots, n - m$ gli elementi della base che generano lo spazio vettoriale \mathcal{E} , complemento a \mathcal{T} di \mathcal{H}

$$\mathcal{T} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{E} \quad \text{dove} \quad \alpha_k |\hat{\mathbf{H}}_k\rangle \in \mathcal{H}; \quad \beta_l |\hat{\mathbf{E}}_l\rangle \in \mathcal{E} \quad (2.10.248)$$

con

$$\langle \hat{\mathbf{H}}_j | \hat{\mathbf{H}}_k \rangle = \delta_{jk} \quad (2.10.249)$$

$$\langle \hat{\mathbf{H}}_k | \hat{\mathbf{E}}_l \rangle = 0 \quad (2.10.250)$$

$$\langle \hat{\mathbf{E}}_l | \hat{\mathbf{E}}_k \rangle = \delta_{lk} \quad (2.10.251)$$

Vediamo ora di stabilire quale sarà l'azione degli operatori hermitiani \hat{H}_k in \mathcal{T} . Trattandosi di operatori di Cartan, la loro azione sui vettori di \mathcal{H} sarà tale per cui

$$\hat{H}_k |\hat{\mathbf{H}}_j\rangle = |[\hat{H}_k, \hat{H}_j]\rangle = 0 \quad (2.10.252)$$

Quanto all'azione degli \hat{H}_k sui vettori di \mathcal{E} , iniziamo osservando che, poiché gli operatori \hat{H}_k sono hermitiani e i vettori $|\hat{\mathbf{H}}_j\rangle$ sono loro autovettori corrispondenti all'autovalore nullo, sarà

$$\langle \hat{\mathbf{H}}_j | \hat{H}_k \hat{\mathbf{E}}_l \rangle = \langle \hat{H}_k \hat{\mathbf{H}}_j | \hat{\mathbf{E}}_l \rangle = \langle [\hat{H}_k, \hat{H}_j] | \hat{\mathbf{E}}_l \rangle = 0 \quad (2.10.253)$$

per cui il vettore $\hat{H}_k |\hat{\mathbf{E}}_l\rangle$ non potrà avere componenti nel sottospazio di Cartan e dunque dovrà essere, necessariamente, una combinazione lineare dei soli vettori $|\hat{\mathbf{E}}_l\rangle$, ovvero risulterà

$$\hat{H}_k |\hat{\mathbf{E}}_l\rangle = \alpha(k, l)_m |\hat{\mathbf{E}}_m\rangle \quad (2.10.254)$$

dove gli $\alpha(k, l)_m$ saranno opportuni coefficienti, a priori complessi.

Ma gli \hat{H}_k sono operatori hermitiani che commutano fra loro, dunque, poiché mandano in se stesso lo spazio \mathcal{E} generato dai vettori $|\hat{\mathbf{E}}_l\rangle$, essi saranno diagonalizzabili simultaneamente in una opportuna base ortonormale $|\tilde{\mathbf{E}}_a\rangle$ di \mathcal{E} stesso, fatta da autovettori simultanei degli \hat{H}_i e dunque tali per cui

$$\hat{H}_k |\tilde{\mathbf{E}}_a\rangle = a_k |\tilde{\mathbf{E}}_a\rangle; \quad \mathbf{a} \equiv (a_i) \quad (2.10.255)$$

dove gli a_k , sempre perché gli operatori \hat{H}_k sono hermitiani, saranno quantità reali che non potranno essere identicamente nulle, altrimenti i vettori $|\tilde{\mathbf{E}}_a\rangle$ non sarebbero indipendenti dagli $|\hat{\mathbf{H}}_k\rangle$.

Questo significa che i corrispondenti operatori³⁸ saranno tali che

$$[\hat{H}_k, \tilde{\mathbf{E}}_a] = a_k \tilde{\mathbf{E}}_a; \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (2.10.256)$$

³⁸Occorre qui osservare che la diagonalizzazione sopra citata degli operatori hermitiani \hat{H}_k in \mathcal{E} richiede che lo spazio lineare da essi generato sia considerato sul corpo complesso, mentre, come sappiamo, l'algebra di Lie è intesa sul corpo reale.

In realtà, infatti, gli operatori $\tilde{\mathbf{E}}_a$ non sono propriamente generatori del gruppo di Lie che stiamo considerando, bensì combinazioni a coefficienti complessi degli stessi: per questo li abbiamo indicati, genericamente, con il nome di *operatori* ...

Verifichiamo adesso che gli operatori \tilde{E}_a non possono essere hermitiani (altra ragione per cui non possono far parte della rappresentazione dei generatori della rappresentazione unitaria del gruppo ...) come, invece, per ipotesi, erano gli \hat{E}_l , infatti

$$\begin{aligned} \hat{H}_k |\tilde{\mathbf{E}}_a^\dagger \rangle &\equiv | [\hat{H}_k, \tilde{E}_a^\dagger] \rangle = | [\hat{H}_k^\dagger, \tilde{E}_a^\dagger] \rangle = | [\tilde{E}_a, \hat{H}_k]^\dagger \rangle = \\ &= - | [\hat{H}_k, \tilde{E}_a] \rangle^\dagger = -a_k |\tilde{\mathbf{E}}_a^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (2.10.257)$$

dove abbiamo usato di nuovo il fatto che gli operatori \hat{H}_k sono hermitiani e perciò gli a_k sono reali (e non identicamente nulli). Dunque

$$\tilde{E}_a^\dagger \equiv \tilde{E}_{-a} \quad (2.10.258)$$

Gli autovalori a_k , che per una rappresentazione generica abbiamo chiamato *pesi*, in questo caso sono detti *radici* e il vettore $\mathbf{a} \equiv (a_k)$ costituisce il *vettore delle radici*.

Torniamo adesso ai vettori $|\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle$, autovettori simultanei degli \hat{H}_k . Per ciascuno di questi autovettori abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{H}_k \tilde{E}_a |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle &\equiv [\hat{H}_k, \tilde{E}_a] |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle + \tilde{E}_a \hat{H}_k |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle = \\ &= a_k \tilde{E}_a |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle + (-a_k \tilde{E}_a |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle) = 0 \end{aligned} \quad (2.10.259)$$

dunque ciascuno dei vettori $\tilde{E}_a |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle$, avendo pesi identicamente nulli, devono essere combinazioni lineari dei generatori della sottoalgebra di Cartan, ovvero dovrà essere che

$$\tilde{E}_a |\tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle = | [\tilde{E}_a, \tilde{E}_{-a}] \rangle = \beta_k |\hat{\mathbf{H}}_k \rangle \quad (2.10.260)$$

Cerchiamo adesso di esplicitare questi coefficienti β_k .

Ricordiamo a questo riguardo che, per ipotesi, gli $|\hat{\mathbf{H}}_k \rangle$ costituiscono una base ortonormale, dunque

$$\begin{aligned} \beta_k &\equiv \langle \hat{\mathbf{H}}_k | \tilde{E}_a \tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle = \langle \tilde{E}_a^\dagger \hat{\mathbf{H}}_k | \tilde{\mathbf{E}}_{-a} \rangle = \langle \tilde{E}_a^\dagger \hat{\mathbf{H}}_k | \tilde{\mathbf{E}}_a^\dagger \rangle = \\ &= \langle [\tilde{E}_a^\dagger, \hat{H}_k] | \tilde{\mathbf{E}}_a^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (2.10.261)$$

Ma, dalla relazione

$$[\hat{H}_k, \tilde{E}_a] = a_k \tilde{E}_a$$

essendo gli a_k reali, abbiamo che

$$[\hat{H}_k, \tilde{E}_a]^\dagger = a_k \tilde{E}_a^\dagger$$

D'altronde gli operatori \hat{H}_k sono hermitiani, per cui

$$\left[\hat{H}_k, \tilde{E}_a \right]^\dagger = \left[\tilde{E}_a^\dagger, \hat{H}_k^\dagger \right] = \left[\tilde{E}_a^\dagger, \hat{H}_k \right]$$

e dunque

$$\left[\tilde{E}_a^\dagger, \hat{H}_k \right] = a_k \tilde{E}_a^\dagger \quad (2.10.262)$$

Quindi, sempre perchè i coefficienti a_k sono reali e operiamo in una base ortonormale, abbiamo

$$\beta_k = \langle \left[\tilde{E}_a^\dagger, \hat{H}_k \right] | \tilde{\mathbf{E}}_a^\dagger \rangle = a_k$$

Dunque, possiamo infine concludere che³⁹

$$\left[\tilde{E}_a, \tilde{E}_{-a} \right] = a_k \hat{H}_k \quad (2.10.267)$$

Supponiamo ora che $|\tilde{\mathbf{E}}_{\pm a} \rangle$ siano i due autovettori simultanei degli \hat{H}_i , relativi al vettore delle radici \mathbf{a} , normalizzati. Poniamo

$$|\mathbf{a}| \equiv \sqrt{a_i a_i} > 0 \quad (2.10.268)$$

$$E^\pm \equiv \frac{1}{|\mathbf{a}|} \tilde{E}_{\pm a} \quad (2.10.269)$$

$$E_3 \equiv \frac{a_i \hat{H}_i}{|\mathbf{a}|^2} \quad (2.10.270)$$

Risulta allora che

$$\left[E_3, E^\pm \right] = |\mathbf{a}|^{-3} \left[a_i \hat{H}_i, \tilde{E}_{\pm a} \right] = |\mathbf{a}|^{-3} a_i (\pm a_i) \tilde{E}_{\pm a} = \pm E^\pm \quad (2.10.271)$$

$$\left[E^+, E^- \right] = |\mathbf{a}|^{-2} \left[\tilde{E}_a, \tilde{E}_{-a} \right] = |\mathbf{a}|^{-2} a_i \hat{H}_i = E_3 \quad (2.10.272)$$

³⁹Può essere utile, a questo punto, osservare che se i vettori $|\hat{\mathbf{H}}_i \rangle$ vengono tutti scalati di una stessa quantità reale positiva ρ , ovvero si passa alla seguente base ortogonale (ma non più ortonormale) della sottoalgebra di Cartan

$$|\mathbf{H}_i \rangle = \rho |\hat{\mathbf{H}}_i \rangle \quad (2.10.263)$$

allora gli autovettori non cambiano rispetto agli $|\hat{\mathbf{H}}_i \rangle$ ma gli autovalori scalano proporzionalmente a ρ , infatti

$$H_i |\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle = \rho \hat{H}_i |\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle = \rho a_i |\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle \quad (2.10.264)$$

e dunque, nella nuova base $|\mathbf{H}_i \rangle$ abbiamo

$$|\tilde{\mathbf{E}}_{\rho a} \rangle = |\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle \quad (2.10.265)$$

Nella base $|\mathbf{H}_i \rangle$ abbiamo quindi

$$\left[\tilde{E}_{\rho a}, \tilde{E}_{-\rho a} \right] = \left[\tilde{E}_a, \tilde{E}_{-a} \right] = a_i \hat{H}_i = \frac{a_i}{\rho} H_i \quad (2.10.266)$$

Dunque, data una qualunque coppia di operatori $\tilde{E}_{\pm a}$, possiamo individuare sempre nell'algebra data, una sottoalgebra tridimensionale chiusa, generata dagli operatori E^{\pm} ed E_3 , univocamente individuati nel modo definito sopra da $\tilde{E}_{\pm a}$ e dal loro commutatore, il quale risulta appartenere alla sottoalgebra di Cartan del gruppo dato.

Dunque, data una qualsiasi rappresentazione irriducibile R del gruppo, avremo che

$$E_3 |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{a}|^2} |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle \quad (2.10.273)$$

Mostriamo adesso che la quantità $2\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{a}|^2}$ è necessariamente un numero intero.

Dimostriamo infatti che, qualsiasi sia la rappresentazione irriducibile R , i possibili autovalori dell'operatore hermitiano E_3 definito sopra possono essere solo interi o semidispari⁴⁰.

Iniziamo considerando gli operatori E^{\pm} e definiamo, attraverso di essi, i due seguenti operatori⁴¹ hermitiani $E_{1,2}$

$$E_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(E^+ + E^-); \quad E_2 \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}}(E^+ - E^-) \quad (2.10.274)$$

Risulta

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \frac{-i}{2}[E^+ + E^-, E^+ - E^-] = \frac{-i}{2}\{-[E^+, E^-] + [E^-, E^+]\} = \\ &= i[E^+, E^-] = iE_3 \end{aligned} \quad (2.10.275)$$

$$\begin{aligned} [E_1, E_3] &= -[E_3, E_1] = -[E_3, \frac{E^+ + E^-}{\sqrt{2}}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}(E^+ - E^-) = \\ &= -iE_2 \end{aligned} \quad (2.10.276)$$

$$\begin{aligned} [E_2, E_3] &= -[E_3, E_2] = \frac{i}{\sqrt{2}}[E_3, E^+ - E^-] = \frac{i}{\sqrt{2}}(E^+ + E^-) = \\ &= iE_1 \end{aligned} \quad (2.10.277)$$

da cui segue che, posto

$$E^2 \equiv E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 \quad (2.10.278)$$

⁴⁰Molto spesso, invece che "semidispari" si dice "seminteri" con lo stesso significato.

⁴¹Come vedremo, la terna E_1, E_2, E_3 definisce l'algebra di Lie dei generatori di $SU(2)$.

risulta⁴²

$$[E^2, E_i] = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10.282)$$

L'operatore E^2 , che è hermitiano, commuta quindi con tutti gli E_i e in particolare con E_3 , per cui è diagonalizzabile simultaneamente a quest'ultimo. Supponiamo allora che $|\mathbf{v}\rangle$ sia un autovettore di E_3 per l'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ e di E^2 per l'autovalore $\mu \in \mathbb{R}$; ovvero

$$E_3|\mathbf{v}\rangle = \lambda|\mathbf{v}\rangle; \quad E^2|\mathbf{v}\rangle = \mu|\mathbf{v}\rangle \quad (2.10.283)$$

Poiché⁴³ per $p \geq 1$ si ha

$$[E_3, (E^\pm)^p] = \pm p (E^\pm)^p \quad (2.10.285)$$

ne concludiamo che, se il vettore $(E^\pm)^p|\mathbf{v}\rangle$ non è nullo, allora esso è autovettore di E_3 per l'autovalore $\lambda \pm p$; infatti

$$\begin{aligned} E_3 (E^\pm)^p|\mathbf{v}\rangle &= [E_3, (E^\pm)^p]|\mathbf{v}\rangle + (E^\pm)^p E_3|\mathbf{v}\rangle = \\ &= \pm p (E^\pm)^p|\mathbf{v}\rangle + \lambda (E^\pm)^p|\mathbf{v}\rangle = (\lambda \pm p) (E^\pm)^p|\mathbf{v}\rangle \end{aligned} \quad (2.10.286)$$

Consideriamo ora la catena

$$(E^+)^p|\mathbf{v}\rangle, \quad p \geq 1 \quad (2.10.287)$$

Vogliamo dimostrare che dovrà esistere un intero $\bar{p} \geq 1$ per il quale accade che

$$(E^+)^{\bar{p}}|\mathbf{v}\rangle \neq \mathbf{0}, \quad \text{ma} \quad (E^+)^{(\bar{p}+1)}|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{0} \quad (2.10.288)$$

⁴²Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned} [E^2, E_1] &= [E_1^2 + E_2^2 + E_3^2, E_1] = [E_2^2 + E_3^2, E_1] = [E_2^2, E_1] + [E_3^2, E_1] = \\ &= E_2[E_2, E_1] + [E_2, E_1]E_2 + E_3[E_3, E_1] + [E_3, E_1]E_3 = \\ &= E_2(-iE_3) + (-iE_3)E_2 + E_3(iE_2) + (iE_2)E_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.10.279)$$

$$\begin{aligned} [E^2, E_2] &= [E_1^2 + E_2^2 + E_3^2, E_2] = [E_1^2 + E_3^2, E_2] = [E_1^2, E_2] + [E_3^2, E_2] = \\ &= E_1[E_1, E_2] + [E_1, E_2]E_1 + E_3[E_3, E_2] + [E_3, E_2]E_3 = \\ &= E_1(iE_3) + (iE_3)E_1 + E_3(-iE_1) + (-iE_1)E_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.10.280)$$

$$\begin{aligned} [E^2, E_3] &= [E_1^2 + E_2^2 + E_3^2, E_3] = [E_1^2 + E_2^2, E_3] = [E_1^2, E_3] + [E_2^2, E_3] = \\ &= E_1[E_1, E_3] + [E_1, E_3]E_1 + E_2[E_2, E_3] + [E_2, E_3]E_2 = \\ &= E_1(-iE_2) + (-iE_2)E_1 + E_2(iE_1) + (iE_1)E_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.10.281)$$

dove abbiamo usato il fatto che un operatore A commuta con il proprio quadrato A^2 e che, in generale, risulta $[A^2, B] = A[A, B] + [A, B]A$.

⁴³Procediamo alla dimostrazione della (2.10.285) per induzione.

Per $p = 1$ la relazione è vera. Supponiamo che sia vera per $p > 1$ e dimostriamo che allora lo è anche per $p + 1$. Infatti

$$\begin{aligned} [E_3, (E^\pm)^{p+1}] &= [E_3, (E^\pm)^p E^\pm] = (E^\pm)^p [E_3, E^\pm] + [E_3, (E^\pm)^p] E^\pm = \\ &= (E^\pm)^p (\pm) E^\pm + (\pm p) (E^\pm)^p E^\pm = \pm(p+1) (E^\pm)^{p+1} \end{aligned} \quad (2.10.284)$$

Cominciamo osservando che, quanto a E^2 , tutti i vettori della catena restano suoi autovettori per l'autovalore μ

$$E^2 (E^+)^p |\mathbf{v}\rangle = \mu (E^+)^p |\mathbf{v}\rangle \quad (2.10.289)$$

Ma per ogni vettore $|\mathbf{w}\rangle$, essendo gli E_i operatori hermitiani, risulta che

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w} | E^2 \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w} | (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \mathbf{w} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{w} | E_1^2 \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w} | E_2^2 \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w} | E_3^2 \mathbf{w} \rangle = \\ &= \langle E_1 \mathbf{w} | E_1 \mathbf{w} \rangle + \langle E_2 \mathbf{w} | E_2 \mathbf{w} \rangle + \langle E_3 \mathbf{w} | E_3 \mathbf{w} \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (2.10.290)$$

come pure che

$$\langle \mathbf{w} | E^2 \mathbf{w} \rangle \geq \langle \mathbf{w} | E_3^2 \mathbf{w} \rangle \quad (2.10.291)$$

e dunque, facendo $|\mathbf{w}\rangle = (E^+)^{\bar{p}} |\mathbf{v}\rangle$, avremo che vale la disuguaglianza

$$\mu \geq (\lambda + \bar{p})^2 \quad (2.10.292)$$

la quale stabilisce, in particolare, che la catena non può crescere indefinitamente. Sia allora

$$t \equiv \lambda + \bar{t} \quad (2.10.293)$$

il più grande autovalore di E_3 della catena originata da $|\mathbf{v}\rangle$ e sia $|\mathbf{v}_t\rangle \equiv (E^+)^{\bar{p}} |\mathbf{v}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle$ l'autovettore corrispondente. Per definizione si ha

$$E_3 |\mathbf{v}_t\rangle = t |\mathbf{v}_t\rangle; \quad E^2 |\mathbf{v}_t\rangle = \mu |\mathbf{v}_t\rangle; \quad E^+ |\mathbf{v}_t\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad (2.10.294)$$

Ma, in generale, risulta

$$\begin{aligned} 2 E^\pm E^\mp &= (E_1 \pm iE_2)(E_1 \mp iE_2) = E_1^2 \mp iE_1 E_2 \pm iE_2 E_1 + E_2^2 = \\ &= E_1^2 + E_2^2 \mp i[E_1, E_2] = E_1^2 + E_2^2 \pm E_3 = \\ &= E^2 - E_3^2 \pm E_3 \end{aligned} \quad (2.10.295)$$

e dunque

$$E^2 = E_3^2 \mp E_3 + 2E^\pm E^\mp \quad (2.10.296)$$

Usando allora l'uguaglianza $E^2 = E_3^2 + E_3 + 2E^- E^+$ sul vettore $|\mathbf{v}_t\rangle$, abbiamo

$$E^2 |\mathbf{v}_t\rangle = E_3^2 |\mathbf{v}_t\rangle + E_3 |\mathbf{v}_t\rangle + 2E^- E^+ |\mathbf{v}_t\rangle \quad (2.10.297)$$

ma, essendo $|\mathbf{v}_t\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle$ ed $E^+ |\mathbf{v}_t\rangle = |\mathbf{0}\rangle$, deve dunque essere che

$$\mu = t^2 + t = t(t + 1) \quad (2.10.298)$$

Ripetendo quanto sopra per la catena (discendente) $(E^-)^q|\mathbf{v}\rangle$, abbiamo adesso che

$$E_3(E^-)^q|\mathbf{v}\rangle = (\lambda - q)(E^-)^q|\mathbf{v}\rangle; \quad E^2(E^-)^q|\mathbf{v}\rangle = \mu(E^-)^q|\mathbf{v}\rangle \quad (2.10.299)$$

Poiché, di nuovo, $\mu \geq (\lambda - q)^2$, dovrà esistere un opportuno intero \bar{q} tale per cui

$$(E^-)^{\bar{q}}|\mathbf{v}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle; \quad (E^-)^{\bar{q}+1}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad (2.10.300)$$

Poniamo, per comodità

$$|\mathbf{v}_b\rangle \equiv (E^-)^{\bar{q}}|\mathbf{v}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle; \quad b \equiv \lambda - \bar{q} \quad (2.10.301)$$

Per questo autovettore simultaneo di E_3 ed E^2 abbiamo

$$E_3|\mathbf{v}_b\rangle = b|\mathbf{v}_b\rangle; \quad E^2|\mathbf{v}_b\rangle = \mu|\mathbf{v}_b\rangle; \quad E^-|\mathbf{v}_b\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad (2.10.302)$$

Usando allora la (2.10.296), risulta che

$$E^2|\mathbf{v}_b\rangle = E_3^2|\mathbf{v}_b\rangle - E_3|\mathbf{v}_b\rangle + 2E^+E^-|\mathbf{v}_b\rangle \quad (2.10.303)$$

da cui, essendo $E^-|\mathbf{v}_b\rangle = |\mathbf{0}\rangle$, ricaviamo che

$$\mu = b^2 - b = b(b - 1) \quad (2.10.304)$$

Dal confronto di questo risultato con la (2.10.298) ricaviamo che

$$b^2 - b = t^2 + t \quad (2.10.305)$$

Per determinare la condizione che lega b con t , possiamo vedere la (2.10.305) come una equazione di secondo grado nella variabile b , considerando t come un dato. Si ha

$$\begin{aligned} b^2 - b - (t^2 + t) &= 0 \\ \Delta &= 1 + 4(t^2 + t) = 1 + 4t^2 + 4t = (2t + 1)^2 \\ b_{\pm} &= \frac{1 \pm (2t + 1)}{2} \\ \Rightarrow b_+ &= t + 1; \quad b_- = -t \end{aligned} \quad (2.10.306)$$

ma la soluzione b_+ non è accettabile perché b e t devono essere della forma

$$b = \lambda - \bar{q}; \quad t = \lambda + \bar{p} \quad (2.10.307)$$

con \bar{p} e \bar{q} interi non negativi, dunque deve essere $t \geq b$ e dunque non può essere

$$t = -b \geq 0; \quad \mu = t^2 + t = t(t + 1) \quad (2.10.308)$$

I possibili autovalori di E_3 vanno quindi da $t \geq 0$ a $b = -t$, a passi di una unità: il loro numero N è dunque pari a

$$N = 2t + 1 \quad (2.10.309)$$

Essendo N , ovviamente, un numero intero, ne segue che t (e, di conseguenza, tutti gli altri autovalori di E_3 della catena) può essere solamente intero o semidispari, che è appunto quanto volevamo dimostrare.

Torniamo ora alla rappresentazione aggiunta RA .

Coerentemente con la definizione generale di *peso positivo*, diremo che una radice \mathbf{a} è *positiva* se il suo primo coefficiente non nullo è positivo.

Siano dunque \mathbf{a} e \mathbf{b} due radici positive differenti. Per ipotesi accade che

$$\hat{H}_i |\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle = a_i |\tilde{\mathbf{E}}_a \rangle \quad (2.10.310)$$

$$\hat{H}_i |\tilde{\mathbf{E}}_b \rangle = b_i |\tilde{\mathbf{E}}_b \rangle \quad (2.10.311)$$

Iniziamo usando la radice \mathbf{a} per definire, attraverso le relazioni (2.10.268)-(2.10.270), gli operatori E^\pm ed E_3 a essa associati. Poiché risulta

$$E_3 = \frac{a_i \hat{H}_i}{|\mathbf{a}|^2}$$

abbiamo che

$$E_3 |\tilde{\mathbf{E}}_b \rangle = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} |\tilde{\mathbf{E}}_b \rangle$$

Ma, come abbiamo visto in precedenza per una rappresentazione qualsiasi R (e dunque anche per la RA) gli autovalori di E_3 sono interi o semidispari, dunque sarà

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{r}{2} \quad (2.10.312)$$

con r intero opportuno.

Se adesso costruiamo gli operatori E'^\pm ed E'_3 usando la radice \mathbf{b} , troviamo analogamente che

$$\frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{s}{2} \quad (2.10.313)$$

dove s è un altro opportuno numero intero, dello stesso segno di r visto che $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Moltiplicando i due risultati ottenuti, abbiamo che

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2} = \frac{1}{4} r s \quad (2.10.314)$$

Definiamo ora l'angolo θ_{ab} fra le due radici, ponendo semplicemente⁴⁴

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{ab} \quad (2.10.316)$$

Abbiamo così che

$$\cos^2 \theta_{ab} = \frac{1}{4} rs \quad (2.10.317)$$

Essendo la quantità rs necessariamente intera e positiva (i due interi hanno lo stesso segno, data la loro definizione), esistono solo quattro possibilità, ovvero

rs	θ_{ab}
0	90^0
1	60^0 o 120^0
2	45^0 o 135^0
3	30^0 o 150^0

infatti, il caso $rs = 4$ implica $\theta = 0$ oppure $\theta = 180^0$ e il primo caso è escluso dall'ipotesi che \mathbf{a} e \mathbf{b} siano una coppia distinta di radici, così come il secondo perché le radici sarebbero opposte e quindi non entrambe positive.

⁴⁴Si ricordi che il prodotto scalare gode della proprietà della disuguaglianza triangolare, ovvero

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (2.10.315)$$

e dunque la definizione (2.10.316) è trigonometricamente consistente.

2.10.1 Le radici semplici

Supponiamo che il gruppo compatto che stiamo considerando sia *semplice* e dunque non ammetta sottogruppi invarianti non banali. Come si è visto, questo si traduce anche nel fatto che l'algebra di Lie a esso associata è anch'essa *semplice* e dunque non ammette sottoalgebre di Lie invarianti non banali.

Supponiamo che $|\tilde{\mathbf{E}}_a\rangle$ ed $|\tilde{\mathbf{E}}_b\rangle$ siano due soluzioni dell'equazione (2.10.255). Vogliamo dimostrare che il commutatore dei corrispondenti operatori della RA, \tilde{E}_a e \tilde{E}_b , è proporzionale all'operatore \tilde{E}_{a+b} . Per ipotesi sappiamo che

$$[\hat{H}_i, \tilde{E}_a] = a_i \tilde{E}_a; \quad [\hat{H}_i, \tilde{E}_b] = b_i \tilde{E}_b \quad (2.10.318)$$

Consideriamo adesso la quantità $[\hat{H}_i, [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b]]$: l'identità di Jacobi stabilisce che

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{H}_i, [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b]] + [\tilde{E}_a, [\tilde{E}_b, \hat{H}_i]] + [\tilde{E}_b, [\hat{H}_i, \tilde{E}_a]] = \\ &= [\hat{H}_i, [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b]] - b_i [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b] + a_i [\tilde{E}_b, \tilde{E}_a] \\ \Rightarrow [\hat{H}_i, [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b]] &= (a_i + b_i) [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b] \end{aligned} \quad (2.10.319)$$

e questo significa che, *se esiste* l'operatore \tilde{E}_{a+b} , allora deve essere

$$[\tilde{E}_a, \tilde{E}_b] \propto \tilde{E}_{a+b} \quad (2.10.320)$$

Se $a+b$ non è una radice e dunque se \tilde{E}_{a+b} non esiste, questo stesso risultato implica necessariamente che $[\tilde{E}_a, \tilde{E}_b] = 0$.

Una radice positiva viene definita *semplice* se *non* può essere espressa come somma di altre radici positive.

L'importanza delle radici semplici risiede nel fatto che, partendo da queste, è possibile ricostruire l'intera algebra del gruppo di Lie.

Vediamo nel seguito come questo sia possibile.

Supponiamo che \mathbf{a} e \mathbf{b} siano due radici semplici differenti: iniziamo dimostrando che $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *non* è una radice.

Infatti, siccome le due radici sono diverse, allora $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ oppure $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ sarà positiva. Supponiamo, senza perdita di generalità, che $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ sia positiva: se questa fosse una radice, allora sarebbe una radice positiva tale che $\mathbf{a} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b}$ e quindi contraddiremmo l'ipotesi secondo la quale \mathbf{a} è una radice semplice, in quanto risulterebbe la somma di due radici positive. Dunque sia $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ che la sua opposta $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ *non* possono essere radici.

Per quanto visto sopra, questo significa che

$$[\tilde{E}_a, \tilde{E}_{-b}] = 0 = [\tilde{E}_{-b}, \tilde{E}_a] \quad (2.10.321)$$

$$[\tilde{E}_b, \tilde{E}_{-a}] = 0 = [\tilde{E}_{-a}, \tilde{E}_b] \quad (2.10.322)$$

e dunque

$$\tilde{E}_{-a}|\tilde{E}_b\rangle = |[\tilde{E}_{-a}, \tilde{E}_b]\rangle = 0 \quad (2.10.323)$$

$$\tilde{E}_{-b}|\tilde{E}_a\rangle = |[\tilde{E}_{-b}, \tilde{E}_a]\rangle = 0 \quad (2.10.324)$$

Supponiamo ora che E^\pm ed E_3 siano gli operatori costruiti a partire da $\tilde{E}_{\pm a}$, mentre E'^\pm ed E'_3 siano gli analoghi operatori costruiti a partire da $\tilde{E}_{\pm b}$, ovvero

$$E^\pm = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \tilde{E}_{\pm a}; \quad E_3 = \frac{a_i \tilde{H}_i}{|\mathbf{a}|^2} \quad (2.10.325)$$

$$E'^\pm = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \tilde{E}_{\pm b}; \quad E'_3 = \frac{b_i \tilde{H}_i}{|\mathbf{b}|^2} \quad (2.10.326)$$

Evidentemente risulta

$$E_3|\tilde{E}_b\rangle = \frac{a_i \tilde{H}_i}{|\mathbf{a}|^2} |\tilde{E}_b\rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} |\tilde{E}_b\rangle \quad (2.10.327)$$

D'altronde, poiché dalla (2.10.325) è

$$E^- = \frac{\tilde{E}_{-a}}{|\mathbf{a}|} \quad (2.10.328)$$

la (2.10.323) ci dice che $E^-|\tilde{E}_b\rangle = 0$. Questo significa che se $j_a \geq 0$ è il numero intero o semidispari che caratterizza la rappresentazione irriducibile definita da E_\pm ed E_3 nello spazio vettoriale a cui appartiene $|\tilde{E}_b\rangle$, questi deve essere autovettore di E_3 per l'autovalore $-j_a \leq 0$, ovvero deve essere il *capostipite* inferiore della catena. Dunque

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} = -j_a \quad (2.10.329)$$

Analogo argomento vale per

$$E'_3|\tilde{E}_a\rangle = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2} |\tilde{E}_a\rangle \quad (2.10.330)$$

e dunque

$$\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2} = -j_b \quad (2.10.331)$$

Potendo determinare j_a e j_b , ecco che

- risulta noto l'angolo fra le due radici semplici, essendo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta_{ab} = -|\mathbf{a}|^2 j_a \quad (2.10.332)$$

$$= |\mathbf{b}||\mathbf{a}| \cos\theta_{ab} = -|\mathbf{b}|^2 j_b \quad (2.10.333)$$

da cui⁴⁵

$$\cos \theta_{ab} = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} j_a = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} j_b = -\sqrt{j_a j_b} \quad (2.10.334)$$

e poiché $\cos \theta_{ab} \leq 0$, ne segue che $\pi/2 \leq \theta_{ab} < \pi$;

- risulta determinato il rapporto fra le lunghezze delle due radici, infatti

$$\left(\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\right)^2 = \frac{j_b}{j_a} \quad (2.10.335)$$

Vediamo adesso alcune altre proprietà delle radici semplici che indicheremo genericamente con \mathbf{s}_j .

1. Le radici semplici sono fra loro linearmente indipendenti⁴⁶.

Consideriamo infatti una generica combinazione lineare \mathbf{a} di radici semplici \mathbf{s}_j

$$\mathbf{a} = \sum_j x_j \mathbf{s}_j \quad (2.10.336)$$

dove gli x_j sono coefficienti reali.

Vogliamo dimostrare che \mathbf{a} non può essere nulla a meno che tutti i coefficienti x_j lo siano. Infatti, se gli x_j sono tutti positivi, allora \mathbf{a} non può essere nulla perché, per ipotesi, le radici \mathbf{s}_j sono tutte positive. Supponiamo dunque che i coefficienti (non nulli) x_j possano essere sia positivi che negativi e indichiamo con x_m^+ i coefficienti positivi e con x_n^- quelli negativi. Poniamo

$$\mathbf{a}_+ = \sum_m x_m^+ \mathbf{s}_m; \quad x_m^+ > 0 \quad (2.10.337)$$

$$\mathbf{a}_- = \sum_n x_n^- \mathbf{s}_n; \quad x_n^- < 0 \quad (2.10.338)$$

Evidentemente

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_+ + \mathbf{a}_- \quad (2.10.339)$$

e dunque, in particolare avremo

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}_+|^2 + |\mathbf{a}_-|^2 + 2(\mathbf{a}_+ \cdot \mathbf{a}_-) \quad (2.10.340)$$

⁴⁵Si ricordi che l'angolo fra radici è comunque fra 0 e π .

⁴⁶Per ipotesi una radice semplice non può essere scritta come *somma* di altre radici positive, ma questo non è la stessa cosa che affermare che sono fra loro linearmente indipendenti.

dove

$$\mathbf{a}_+ \cdot \mathbf{a}_- = \sum_{m,n} x_m^+ x_n^- \mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_n \quad (2.10.341)$$

ma la quantità $x_m^+ x_n^-$ è certamente negativa perché $x_m^+ > 0$ ma $x_n^- < 0$, e così pure risulta negativa la quantità $\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_n$ perchè, per ipotesi, \mathbf{s}_m e \mathbf{s}_n sono radici semplici differenti, per le quali vale evidentemente la (2.10.334). Dunque

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}_+|^2 + |\mathbf{a}_-|^2 + 2(\mathbf{a}_+ \cdot \mathbf{a}_-) > |\mathbf{a}_+|^2 + |\mathbf{a}_-|^2 > 0 \quad (2.10.342)$$

per cui nessuna combinazione lineare non banale fatta di radici semplici può annullarsi.

2. Dimostriamo ora che ogni radice positiva \mathbf{a} può essere scritta come combinazione lineare di tutte le radici semplici \mathbf{s}_j , usando coefficienti interi non negativi k_j , ovvero

$$\mathbf{a} = \sum_j k_j \mathbf{s}_j \quad (2.10.343)$$

Infatti, se \mathbf{a} è *semplice*, l'affermazione è ovviamente vera e saranno nulli tutti i coefficienti k ad eccezione di quello che si riferisce alla radice stessa, che varrà 1. Poichè la combinazione lineare è fatta da un solo termine non nullo, la radice viene indicata con \mathbf{a}_1 e per questo tutte le radici semplici sono dette di tipo 1.

Se \mathbf{a} non è una radice semplice, allora potrà essere scritta come somma di due radici positive. Se entrambe sono semplici, l'affermazione è dimostrata e la radice $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_2$ è di tipo 2. Se solo una delle due radici positive è semplice, ma l'altra non lo è, possiamo continuare scrivendo quest'ultima come somma di radici positive finchè tutte le radici della combinazione lineare saranno semplici: la somma k degli interi che definiscono la combinazione stabilisce la tipologia della radice in esame, cioè

$$\mathbf{a}_k = \sum k_j \mathbf{s}_j; \quad k \equiv \sum_j k_j \quad (2.10.344)$$

3. Le radici semplici, che sono vettori con un numero di componenti (tutte necessariamente reali) uguale al rango r della sottoalgebra di Cartan, ovvero al numero dei generatori di Cartan indipendenti \hat{H}_i , non solo risultano, come si è visto, linearmente indipendenti, ma sono anche un set completo e dunque una base dello spazio vettoriale sul corpo reale di dimensione r al quale esse appartengono.

Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

ortogonale a tutte le radici semplici e dunque ortogonale a tutte le radici \mathbf{a} . Poichè, qualunque sia la radice \mathbf{a} , risulta

$$\tilde{H}_i|\tilde{E}_a \rangle = a_i|\tilde{E}_a \rangle \tag{2.10.345}$$

ne segue che

$$v_i \tilde{H}_i|\tilde{E}_a \rangle = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})|\tilde{E}_a \rangle = 0 \tag{2.10.346}$$

Ma

$$v_i \tilde{H}_i|\tilde{E}_a \rangle = |[v_i \tilde{H}_i, \tilde{E}_a] \rangle \tag{2.10.347}$$

quindi ne ricaviamo che l'operatore $v_i \tilde{H}_i$ commuta con tutti gli \tilde{E}_a e quindi, visto che commuta ovviamente anche con gli \tilde{H}_i , esso commuta con tutti i generatori del gruppo. Questo significa che l'algebra di Lie del gruppo non è *semplice*, contrariamente all'ipotesi fatta.

4. Consideriamo ora le radici positive .

Abbiamo visto che le radici positive hanno la forma

$$\mathbf{a}_k = \sum_j k_j \mathbf{s}_j; \quad k_j \text{ intero} \geq 0; \quad \sum_j k_j \equiv k \geq 1 \tag{2.10.348}$$

Come possiamo stabilire quali combinazioni lineari delle radici semplici \mathbf{s}_j danno luogo a radici ?

Iniziamo osservando che tutti gli \mathbf{a}_1 sono radici, visto che coincidono necessariamente con una radice semplice.

Supponiamo ora di aver determinato tutte le radici positive per le quali $k \leq n$, dove $n > 1$. Le radici positive di tipo $n + 1$, per definizione, saranno ottenute da una radice di tipo n con qualche radice semplice, ovvero saranno del tipo

$$\tilde{E}_s|\tilde{E}_n \rangle = |[\tilde{E}_s, \tilde{E}_n] \rangle \tag{2.10.349}$$

Quanto abbiamo visto ci consente di concludere che se il commutatore indicato è non nullo, allora abbiamo individuato una radice di tipo $n + 1$, altrimenti, se è nullo, no.

Ma possiamo dire che il procedimento descritto è esaustivo?

In altri termini, possiamo trovare una radice positiva \mathbf{a}_{n+1} che non è la somma di una radice \mathbf{a}_n e una opportuna radice semplice \mathbf{s}_j ?

Procediamo per assurdo.

Se questo accadesse allora dovrebbe succedere che

$$\forall \mathbf{s}_j : \quad \tilde{E}_{-\mathbf{s}_j}|\tilde{E}_{n+1} \rangle = 0 \tag{2.10.350}$$

poiché se $\tilde{E}_{-s_j}|\tilde{E}_{n+1}\rangle \neq 0$ questo sarebbe un vettore a cui corrisponderebbe una radice di tipo \mathbf{a}_n e, applicandogli \tilde{E}_{s_j} riprodurrebbe $|\tilde{E}_{n+1}\rangle$, contraddicendo l'ipotesi per cui la radice \mathbf{a}_{n+1} non può essere ottenuta da una radice di tipo n e una qualche radice semplice.

Dunque $|\tilde{E}_{n+1}\rangle$ dovrà essere annichilato dagli operatori di discesa associati a tutte le sottoalgebre di tipo $SU(2)$ definite dalle radici semplici. Questo richiede che

$$\forall \mathbf{s}_j : E_3^{(j)}|\tilde{E}_{n+1}\rangle = \frac{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{a}_{n+1}}{|\mathbf{s}_j|^2}|\tilde{E}_{n+1}\rangle \quad \text{con} \quad \frac{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{a}_{n+1}}{|\mathbf{s}_j|^2} \leq 0 \quad (2.10.351)$$

Ma (cfr.(2.10.343)) ogni radice positiva può essere scritta come combinazione delle radici semplici a coefficienti interi k_j non negativi

$$\mathbf{a} = \sum_j k_j \mathbf{s}_j \quad (2.10.352)$$

dunque

$$\mathbf{a}_{n+1} \cdot \mathbf{a}_{n+1} = \sum_j k_j \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{a}_{n+1} \quad (2.10.353)$$

e questa quantità, per la (2.10.351) risulterebbe non positiva, cosa che è evidentemente assurda.

Quindi possiamo concludere che le radici di tipo \mathbf{a}_{n+1} si ottengono tutte dalle radici di tipo \mathbf{a}_n e le radici semplici \mathbf{s}_j .

5. Vogliamo dimostrare che, in una qualsiasi rappresentazione irriducibile del gruppo, se accade che un autovettore simultaneo degli operatori \tilde{H}_i della sottoalgebra di Cartan è mandato nel vettore nullo (annichilato) da *tutti* gli operatori⁴⁷ associati alle radici semplici, allora questo stato risulta quello di peso \mathbf{h} più alto.

In qualsiasi rappresentazione irriducibile, il vettore $|\mathbf{h}, \mathbf{p}, R\rangle$ di peso più alto gode evidentemente della proprietà per cui non si può trovare un altro vettore con peso ancora più alto, cioè quel peso non può aumentare ulteriormente e dunque tutti gli operatori di salita, ovvero tutti gli operatori che corrispondono appunto a radici positive devono annichilare quel vettore. Poiché bastano le radici semplici per costruire tutte le radici positive, ecco dimostrato quanto enunciato sopra.

6. Supponiamo dunque di avere determinato, a partire dalle radici semplici, la lista delle radici positive⁴⁸. Si può dimostrare che, partendo dalle radici semplici, è possibile costruire l'intera algebra del gruppo.

⁴⁷Ricordiamo che, nella RA le radici positive corrispondono a operatori di salita mentre quelle negative a operatori di discesa.

⁴⁸Poiché quelle negative sono semplicemente le opposte delle positive, in questo modo abbiamo determinato tutte le radici.

2.11 Il gruppo $SU(2)$

Il gruppo $SU(2)$ è certamente il gruppo di Lie che si presenta più spesso in Fisica. Vediamo quindi di considerarlo in dettaglio.

Consideriamo le matrici unitarie 2×2 , a coefficienti complessi, con determinante uguale all'unità. E' facile rendersi conto che esse costituiscono un gruppo con l'usuale prodotto fra matrici.

In generale, queste matrici U possono venir rappresentate in forma esponenziale attraverso matrici hermitiane

$$U = e^{iH} \quad (2.11.354)$$

Poiché $\det(U) = 1$, occorre che $Tr(H) = 0$, infatti, come sappiamo, in generale, per una matrice S che sia l'esponenziale di una matrice M , risulta

$$\det(S) = Tr(M) \quad (2.11.355)$$

Qualunque matrice hermitiana 2×2 a traccia nulla dà luogo, per esponenziazione, a una matrice di $SU(2)$, infatti

$$(e^{iH})^\dagger = e^{-iH^\dagger} = e^{-iH} = (e^{iH})^{-1} \quad (2.11.356)$$

e, come si è detto sopra, vale anche il viceversa. Quindi, il numero di parametri reali necessari per descrivere gli elementi di $SU(2)$ è quello necessario per poter descrivere H , la generica matrice hermitiana 2×2 a traccia nulla. Si tratta, evidentemente, di *tre* parametri reali, infatti la generica matrice H sarà definita attraverso un termine complesso fuori diagonale (l'altro ne è il complesso coniugato) e da un termine reale sulla diagonale (l'altro ne è l'opposto)

$$H = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (2.11.357)$$

La base dello spazio delle matrici H che usualmente viene utilizzata è quella fatta dalle tre matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11.358)$$

per cui la generica matrice hermitiana 2×2 a traccia nulla può essere scritta come

$$H = a \sigma_1 + b \sigma_2 + c \sigma_3 \quad (2.11.359)$$

Le proprietà più rilevanti delle matrici di Pauli σ_k sono le seguenti

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \quad (2.11.360)$$

$$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i \epsilon_{kmj} \sigma_j \quad (2.11.361)$$

$$\{\sigma_k, \sigma_m\} = 2 \delta_{km} I \quad (2.11.362)$$

$$Tr(\sigma_k \sigma_m) = 2 \delta_{km} \quad (2.11.363)$$

Evidentemente queste matrici possono essere viste anche come una base dell'algebra di Lie del gruppo $SU(2)$: si preferisce, però, usare come base di quest'algebra quella fatta dalle matrici⁴⁹

$$J_k \equiv \frac{1}{2} \sigma_k \quad (2.11.365)$$

e il generico elemento del gruppo viene scritto come

$$U(\vec{a}) = e^{i\vec{a}\cdot\vec{J}} = e^{\frac{i}{2}\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} \quad (2.11.366)$$

dove $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ è il vettore dei parametri reali che individuano, in questa base, l'elemento del gruppo.

Le regole di commutazione dei generatori J_k , data la (2.11.361) e la (2.11.365), sono le seguenti

$$[J_k, J_m] = i \epsilon_{kmj} J_j \quad (2.11.367)$$

ovvero, data la (2.6.116), in questa base le costanti di struttura di $SU(2)$ risultano essere le seguenti

$$C_{km}^j = -\epsilon_{kmj} \quad (2.11.368)$$

Essendo gli elementi $U(\vec{a}) \in SU(2)$ operatori lineari agenti in uno spazio vettoriale di dimensione due sul corpo complesso, possiamo vedere questi elementi come una rappresentazione del gruppo di Lie $SU(2)$ astratto, definito dall'algebra di Lie basata sulla (2.11.367).

In questo senso, il gruppo matriciale $SU(2)$ da cui siamo partiti risulta essere una *rappresentazione* del gruppo $SU(2)$ astratto⁵⁰ e, come vedremo fra breve, una sua rappresentazione *fedele*.

Per giungere a questa conclusione, iniziamo osservando che, se poniamo

$$\vec{a} \equiv \theta \vec{n} \quad \text{con} \quad \theta \equiv |\vec{a}| \quad \text{e} \quad \text{dunque} \quad |\vec{n}|^2 = 1 \quad (2.11.370)$$

allora le matrici $U(\vec{a})$ possono essere messe nella forma

$$U(\vec{a}) = e^{i\vec{a}\cdot\vec{J}} = e^{\frac{i}{2}\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} \equiv e^{\frac{i\theta}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} \quad (2.11.371)$$

⁴⁹Queste matrici costituiscono una base ortogonale ma non ortonormale, infatti

$$Tr(J_k J_m) = \frac{1}{2} \delta_{km} \quad (2.11.364)$$

però esse sono tali, come vedremo a breve, che le costanti di struttura definite in questa base individuano una *RA* in cui il tensore di Killing è l'identità.

⁵⁰Indicheremo con L_j i tre generatori di $SU(2)$ astratto, per i quali sappiamo che

$$[L_j, L_k] = i \epsilon_{jkm} L_m \quad (2.11.369)$$

Data la definizione della funzione esponenziale, abbiamo

$$U(\vec{a}) = I + \frac{i\theta}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{i\theta}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{i\theta}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right]^3 + \dots \quad (2.11.372)$$

ma

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 &= n_i \sigma_i n_j \sigma_j = n_i n_j \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} n_i n_j \{\sigma_i, \sigma_j\} = \\ &= \frac{1}{2} n_i n_j 2 \delta_{ij} I = |\vec{n}|^2 I = I \end{aligned} \quad (2.11.373)$$

e dunque

$$\begin{aligned} U(\vec{a}) &= I + \frac{i\theta}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\theta}{2} \right)^2 I + \frac{1}{3!} \left(\frac{i\theta}{2} \right)^3 (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + \dots \\ &= I \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 + \dots \right] + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \left[\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 + \dots \right] = \\ &= I \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.11.374)$$

Questo mostra che gli elementi di $SU(2)$ possono essere descritti attraverso un insieme di parametri compresi nella sfera tridimensionale avente centro nell'origine e raggio⁵¹ 2π , che sta a dire, quindi, che il gruppo è *compatto*.

Questa parametrizzazione, però, non è sempre univoca: tutti i punti della superficie della sfera che corrispondono quindi a $\theta = 2\pi$, indipendentemente dal versore \vec{n} , individuano ognuno, lo stesso elemento di $SU(2)$, cioè l'opposto $-I$ dell'identità: tutti i punti della superficie della sfera (aventi quindi $\theta = 2\pi$) sono equivalenti fra loro. Una curva che unisca due punti qualsiasi della superficie della sfera è quindi una curva *chiusa* ed è riconducibile a un punto in modo continuo. Il gruppo è quindi *semplicemente connesso*.

Da questo segue, per quanto si è visto, che il gruppo delle matrici $SU(2)$ è isomorfo al suo gruppo di ricoprimento universale (teorema di Ado) SU_2 e dunque ne è una rappresentazione fedele⁵².

Come si ricorderà, la compattezza di un gruppo di Lie è direttamente legata al fatto che il tensore di Killing individua una metrica positiva.

Vediamo dunque cosa succede nel nostro caso.

⁵¹Per descrivere tutti gli elementi di $SU(2)$ occorre e basta effettivamente considerare i punti della sfera di raggio 2π ; infatti i punti fuori dalla sfera descrivono tramite la (2.11.374) elementi già compresi in quelli descritti dai punti della sfera stessa.

Fissiamo, per esempio, il versore \vec{n} e poniamo $\theta = 2\pi + \epsilon$ con $\epsilon > 0$: è immediato che l'elemento così individuato è lo stesso descritto da $\theta = \epsilon$ e versore $-\vec{n}$.

⁵²Questa proprietà vale per tutti i gruppi $SU(n)$, che sono semplicemente connessi e compatti.

Consideriamo la Rappresentazione Aggiunta (RA) di $SU(2)$.

Poiché il gruppo è di rango tre, essa è definita in uno spazio vettoriale tridimensionale e i generatori della stessa sono le matrici 3×3 definite dalle costanti di struttura dell'algebra di Lie, che, per la scelta fatta della base di cui alla (2.11.369), nel caso presente (cfr.(2.11.368)) ci permettono di concludere che

$$(\hat{T}_j)_{ab} = i C_{ja}^b = -i \epsilon_{jab} \quad (2.11.375)$$

Il tensore di Killing, secondo la sua definizione, è dato da

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} Tr(\hat{T}_i \hat{T}_j) = \frac{1}{2} (\hat{T}_i)_{ab} (\hat{T}_j)_{ba} = \frac{1}{2} (-i C_{ia}^b) (-i C_{jb}^a) = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{iab} \epsilon_{jba} = \frac{1}{2} \epsilon_{iab} \epsilon_{jab} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{aa} - \delta_{ia} \delta_{aj}) = \\ &= \frac{1}{2} (3 \delta_{ij} - \delta_{ij}) = \delta_{ij} = I_{ij} \end{aligned} \quad (2.11.376)$$

Il tensore di Killing coincide quindi con l'identità in tre dimensioni e, in particolare, esso è ovviamente un tensore definito positivo, a conferma del fatto, appunto, che il gruppo $SU(2)$ è compatto. Questo stesso risultato mostra anche che la base dell'algebra della RA fatta da questi particolari \hat{T}_j è ortonormale.

Un'altra importante proprietà del tensore di Killing, come si ricorderà, è poi quella per cui l'operatore

$$C = \gamma_{ab}^{-1} L_a L_b \equiv L^2 \quad (2.11.377)$$

è un invariante di Casimir, ovvero esso commuta con tutti i generatori L_k e quindi con tutti gli elementi del gruppo.

In ogni rappresentazione irriducibile, dunque, C sarà multiplo dell'identità per un valore caratteristico della rappresentazione stessa.

Nel caso della rappresentazione *canonica* di $SU(2)$, dove

$$\vec{L} \rightarrow \vec{J} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad (2.11.378)$$

è

$$J^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \frac{3}{4} I \quad (2.11.379)$$

Nel caso, invece, della rappresentazione aggiunta RA , dove $L_i \rightarrow J_i = \hat{T}_i$, abbiamo

$$\begin{aligned} (J^2)_{ab} &= (\hat{T}^2)_{ab} = \sum_j (\hat{T}_j)_{ac} (\hat{T}_j)_{cb} = -\epsilon_{jac} \epsilon_{jcb} = -(\delta_{ac} \delta_{cb} - \delta_{ab} \delta_{cc}) \\ &= -\delta_{ab} + 3\delta_{ab} = 2\delta_{ab} = 2I_{ab} \quad \Rightarrow \quad J^2 = 2 \end{aligned} \quad (2.11.380)$$

Occupiamoci adesso di stabilire qual è la sottoalgebra di Cartan di $SU2$. Poiché non esistono due generatori diversi che commutano, la sottoalgebra di Cartan di $SU2$ è necessariamente unidimensionale. Possiamo quindi prendere, per esempio

$$\hat{H} = L_3 \tag{2.11.381}$$

Per $SU2$, evidentemente, il vettore dei pesi $\mathbf{h} \equiv (h_i)$ essendo, per sua definizione, costituito come sappiamo dagli autovalori dei generatori della sottoalgebra di Cartan, risulta essere unidimensionale e fatto dal solo autovalore di $\hat{H} = L_3$, relativo all'autovettore considerato.

Veniamo adesso alla Rappresentazione Aggiunta (RA) di $SU2$. Come sappiamo i suoi generatori sono le matrici hermitiane 3×3 , definite dalle costanti di struttura nella base dell'algebra che abbiamo scelto, fatta dai generatori \vec{L} . Risulta⁵³ dunque che

$$\left(\hat{T}_i\right)_{jk} \equiv -i \epsilon_{ijk} \tag{2.11.382}$$

ovvero, esplicitamente

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \hat{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \hat{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11.383}$$

Lo spazio vettoriale (sul corpo complesso) sul quale queste matrici agiscono come operatori lineari autoaggiunti, in rappresentanza dei generatori L_j , sarà, in generale, descritto attraverso una generica base ortonormale $|\mathbf{e}_k \rangle$, $k = 1, 2, 3$.

Se scegliamo come base dello spazio vettoriale in cui definire la RA quella fatta dai \hat{T}_j stessi, ponendo così

$$|\mathbf{e}_k \rangle \equiv |\hat{\mathbf{T}}_k \rangle \tag{2.11.384}$$

abbiamo visto, in generale, che

$$\hat{T}_j |\hat{\mathbf{T}}_k \rangle = |[\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_k] \rangle \tag{2.11.385}$$

Nella RA i possibili autovalori di $\hat{H} \equiv \hat{T}_3$ sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm 1$, a cui corrispondono, rispettivamente, gli autovettori normalizzati definiti dalle seguenti componenti

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = +1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.11.386}$$

⁵³Come vedremo, questi sono i generatori del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni, $SO(3)$.

e dunque, quanto alla base della RA individuata dagli autovettori normalizzati di $\hat{H} = \hat{T}_3$, unico generatore della sottoalgebra di Cartan, abbiamo

$$|+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{\mathbf{T}}_1\rangle + i|\hat{\mathbf{T}}_2\rangle \right) \quad (2.11.387)$$

$$|0\rangle = |\hat{\mathbf{T}}_3\rangle \quad (2.11.388)$$

$$|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{\mathbf{T}}_1\rangle - i|\hat{\mathbf{T}}_2\rangle \right) \quad (2.11.389)$$

Questo significa che le *radici* di $SU2$ sono soltanto due, ovvero ± 1 .

Esiste evidentemente una sola radice positiva, $+1$, che è anche una radice semplice. Partendo da questa unica radice semplice e usando le definizioni di cui alle (2.10.268) - (2.10.270), concludiamo che

$$\tilde{E}_3 = \hat{H} = L_3 \quad (2.11.390)$$

$$\tilde{E}_\pm = E^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_1 \pm iL_2) \equiv L^\pm \quad (2.11.391)$$

e risulta

$$[E^+, E^-] = \frac{1}{2} [L_1 + iL_2, L_1 - iL_2] = i [L_2, L_1] = L_3 = \hat{H} \quad (2.11.392)$$

$$\begin{aligned} [E_3, E^\pm] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [L_3, L_1 \pm iL_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [L_3, L_1] \pm \frac{i}{\sqrt{2}} [L_3, L_2] = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} L_2 \pm \frac{i}{\sqrt{2}} (-iL_1) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (L_1 \pm iL_2) = \pm E^\pm \end{aligned} \quad (2.11.393)$$

Ritroviamo così in modo diretto quanto avevamo anticipato ovvero che la struttura dell'algebra di Lie di $SU2$ coincide con quella che abbiamo ottenuto, per un qualsiasi gruppo compatto, a partire da una sua qualsiasi radice positiva.

2.12 Parametrizzazione con gli angoli di Eulero

Oltre alla parametrizzazione canonica, per la quale, come abbiamo visto, gli elementi di $SU(2)$ possono essere individuati attraverso un vettore tridimensionale \vec{a} , di modulo non maggiore di 2π , risultando

$$U(\vec{a}) \equiv U(\theta\vec{n}) = I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.12.394)$$

gli elementi di $SU(2)$ possono venire individuati anche attraverso gli *angoli di Eulero* (o una loro generalizzazione).

Prima di procedere, ricordiamo la loro definizione nell'ambito della rotazione dei sistemi di riferimento cartesiani ortogonali.

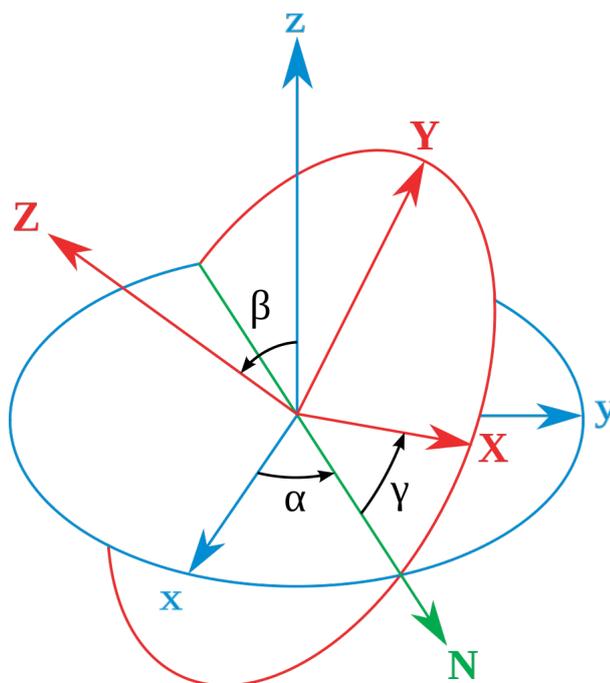


Figura 2.2: Angoli di Eulero

Immaginiamo che $Oxyz$ sia la terna (celeste) destrorsa da cui partiamo, mentre $OXYZ$ sia la terna (rossa) a cui vogliamo arrivare attraverso una generica rotazione. In generale il piano xy e il piano XY non coincideranno fra loro, ma, avendo certamente almeno un punto (l'origine O) in comune, avranno in comune una retta: è l'asse dei *nodi* che, nella figura (2.2), abbiamo indicato⁵⁴ in verde con N .

⁵⁴Se i due piani coincidono, si prende come asse dei nodi lo stesso l'asse x .

Per portare $Oxyz$ a coincidere con $OXYZ$, iniziamo effettuando una rotazione di un angolo $0 < \alpha \leq 2\pi$ intorno all'asse z (in verso antiorario per un osservatore allineato con z). Il nuovo sistema avrà assi $Ox'y'z'$ dove $z' \equiv z$ e l'angolo α è scelto in modo che l'asse x' coincida con l'asse dei nodi N . Si procede poi con una successiva rotazione di un angolo β compreso fra 0 e π , effettuata intorno a $x' = N$, in modo da far coincidere l'asse z'' così ottenuto dopo la seconda rotazione, con l'asse Z finale. Per completare la rotazione dei due sistemi di assi cartesiani, occorre infine effettuare, evidentemente, un'ultima opportuna rotazione $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ intorno all'asse Z . Questo significa che la rotazione attiva che porta da $Oxyz$ a $OXYZ$ è fattorizzabile come

$$R = R_Z(\gamma) R_N(\beta) R_z(\alpha) \quad (2.12.395)$$

Gli angoli α , β e γ sono gli *angoli di Eulero*.

Ma torniamo adesso al gruppo $SU(2)$.

In analogia con quanto visto sopra, fissiamo i seguenti tre angoli (si noti il raddoppio del loro intervallo di valori rispetto a quelli di Eulero ...)

$$0 \leq \alpha \leq 4\pi; \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi; \quad 0 \leq \gamma \leq 4\pi \quad (2.12.396)$$

e consideriamo la matrice

$$\begin{aligned} U(\gamma, \beta, \alpha) &= U_3(\gamma) U_1(\beta) U_3(\alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & i \sin(\beta/2) \\ i \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos(\beta/2) & ie^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin(\beta/2) \\ ie^{i\frac{\alpha}{2}} \sin(\beta/2) & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos(\beta/2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos(\beta/2) & ie^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \sin(\beta/2) \\ ie^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin(\beta/2) & e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \quad (2.12.397) \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che, al variare dei parametri α , β e γ , la (2.12.397) descrive tutti gli elementi di $SU(2)$.

Abbiamo visto che la parametrizzazione canonica conduce a

$$U(\theta \vec{n}) = I \cos(\theta/2) + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin(\theta/2) \quad (2.12.398)$$

dove \vec{n} è un versore a priori qualsiasi mentre θ è compreso fra 0 e 2π .

Ricordiamo adesso alcune proprietà delle matrici di Pauli, ovvero che

$$Tr(\sigma_j) = 0 \quad (2.12.399)$$

$$\sigma_j \sigma_k = I \delta_{jk} + i \epsilon_{jkm} \sigma_m \Rightarrow Tr(\sigma_j \sigma_k) = 2 \delta_{jk} \quad (2.12.400)$$

essendo ovviamente

$$\text{Tr}(I) = 2 \quad (2.12.401)$$

Dunque, data la (2.12.398), risulta

$$\text{Tr}(U) = 2 \cos(\theta/2) \quad (2.12.402)$$

$$\text{Tr}(U\sigma_j) = 2i n_j \sin(\theta/2) \quad (2.12.403)$$

Applicando questi risultati alla (2.12.397), abbiamo

$$\text{Tr}(U) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \quad (2.12.404)$$

$$\text{Tr}(U\sigma_1) = 2i n_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \quad (2.12.405)$$

$$\text{Tr}(U\sigma_2) = 2i n_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \quad (2.12.406)$$

$$\text{Tr}(U\sigma_3) = 2i n_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2i \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \quad (2.12.407)$$

da cui ricaviamo, evidentemente, che

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \quad (2.12.408)$$

$$n_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \quad (2.12.409)$$

$$n_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \quad (2.12.410)$$

$$n_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \quad (2.12.411)$$

A riprova del risultato ottenuto, osserviamo che le componenti n_j ricavate dalle relazioni di cui sopra costituiscono effettivamente un vettore, infatti

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \left[\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \left[\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \left[1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = 1 \end{aligned} \quad (2.12.412)$$

come doveva essere.

2.13 Le Rappresentazioni irriducibili del gruppo $SU2$

Partiamo dai seguenti fatti già noti:

- l'algebra di Lie del gruppo (astratto) $SU2$ può essere definita mediante tre generatori, che indichiamo con L_j , per i quali

$$[L_j, L_k] = i \epsilon_{jkm} L_m \quad (2.13.413)$$

Le costanti di struttura così definite determinano un tensore di Killing coincidente con l'identità;

- la sottoalgebra di Cartan è unidimensionale. La scelta consueta è quella di assumere che sia generata da

$$\hat{H} \equiv L_3 \quad (2.13.414)$$

per cui, nella RA , abbiamo che

$$\left(\hat{H}\right)_{ij} \equiv \left(\hat{T}_3\right)_{ij} = -i \epsilon_{3ij} \quad (2.13.415)$$

- il gruppo ha una sola radice positiva, uguale a $+1$, a cui corrisponde l'autovettore

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{\mathbf{T}}_1 \rangle + i |\hat{\mathbf{T}}_2 \rangle \right) \quad (2.13.416)$$

mentre alla corrispondente radice negativa -1 corrisponde l'autovettore

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{\mathbf{T}}_1 \rangle - i |\hat{\mathbf{T}}_2 \rangle \right) \quad (2.13.417)$$

- Il procedimento canonico di cui alle (2.11.390)-(2.11.393) consente di definire gli operatori

$$\tilde{E}_3 = \hat{H} = L_3 \quad (2.13.418)$$

$$\tilde{E}_\pm \equiv E^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_1 \pm i L_2) \equiv L^\pm \quad (2.13.419)$$

tali che

$$[E^+, E^-] \equiv [L^+, L^-] = L_3 \quad (2.13.420)$$

$$[L_3, E^\pm] \equiv [L_3, L^\pm] = \pm L^\pm \quad (2.13.421)$$

Sia data, adesso, una rappresentazione irriducibile del gruppo SU_2 e siano $\vec{J} \equiv (J_1, J_2, J_3)$ i suoi generatori. Poichè il gruppo è compatto, la rappresentazione sarà equivalente a una rappresentazione unitaria di dimensione finita. L'operatore J_3 consisterà dunque in una opportuna matrice hermitiana e sarà quindi diagonalizzabile. Supponiamo ora che $|\alpha\rangle$ sia un suo autovettore, corrispondente all'autovalore (reale) α .

Come abbiamo visto trattando il problema delle radici, accade che se J^\pm rappresentano gli operatori L^\pm ovvero gli E^\pm , allora accade che

$$J_3|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.13.422)$$

$$J_3J^+|\alpha\rangle = (\alpha + 1)J^+|\alpha\rangle \quad (2.13.423)$$

$$J_3J^-|\alpha\rangle = (\alpha - 1)J^-|\alpha\rangle \quad (2.13.424)$$

Dato che siamo in dimensione finita, dovrà esistere sia un autovalore massimo che un autovalore minimo di J_3 , ovvero dovranno esistere due vettori non nulli $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ tali che

$$J_3|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad J_3|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad (2.13.425)$$

$$J^+|\alpha\rangle = |0\rangle; \quad J^-|\beta\rangle = |0\rangle \quad (2.13.426)$$

Come abbiamo dimostrato trattando il problema delle radici, gli autovalori di J_3 , cioè i *pesi*, sono compresi fra un valore massimo j e un valore minimo $-j$, dove j può essere un qualsiasi numero positivo intero o semidispari.

Gli autovalori sono distribuiti uniformemente fra $-j$ e $+j$ a passi di una unità e sono non degeneri. Tutti gli autovettori sono poi caratterizzati dallo stesso autovalore dell'invariante di Casimir J^2 , uguale appunto a $j(j+1)$.

Indicheremo questi autovettori con il simbolo $|m, j\rangle$, dove m è l'autovalore di J_3 mentre j è legato all'autovalore di J^2 nel modo detto sopra ed è chiamato *spin* della rappresentazione irriducibile considerata, definita quindi in uno spazio vettoriale di dimensione $2j+1$. Abbiamo dunque

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle \quad (2.13.427)$$

$$J_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle; \quad \text{con } -j \leq m \leq j \quad (2.13.428)$$

$$J^+|j, m\rangle \equiv A_{m+1}|j, m+1\rangle; \quad J^+|j, j\rangle = |0\rangle \quad (2.13.429)$$

$$J^-|j, m\rangle \equiv B_m|j, m-1\rangle; \quad J^-|j, -j\rangle = |0\rangle \quad (2.13.430)$$

dove le costanti A_k e B_k sono quantità reali positive⁵⁵ da esplicitare, necessarie per garantire la normalizzazione dei vettori della base, ortogonali fra loro dato che corrispondono ad autovalori differenti ed è inteso, per quanto anticipato, che $A_{j+1} = B_{-j} = 0$.

⁵⁵La condizione di normalizzazione fissa solo il modulo delle costanti A_k e B_k : il fatto che si assumano reali positive corrisponde a una precisa scelta della fase degli autovettori di J_3 .

Iniziamo osservando che⁵⁶, poiché la base è ortonormale, sarà

$$B_j^2 = \langle J^-(j, j) | J^-(j, j) \rangle \quad (2.13.431)$$

Ma, poiché J_1 e J_2 sono anch'essi hermitiani come J_3 , ecco che $(J^\pm)^\dagger = J^\mp$ e dunque

$$\begin{aligned} B_j^2 &= \langle j, j | (J^-)^\dagger J^-(j, j) \rangle = \langle j, j | J^+ J^-(j, j) \rangle = \\ &= \langle j, j | [J^+, J^-](j, j) \rangle + \langle j, j | J^- J^+(j, j) \rangle \end{aligned} \quad (2.13.432)$$

ovvero, poiché $[J^+, J^-] = J_3$ mentre $J^+|j, j\rangle = 0$, abbiamo

$$B_j^2 = j \quad \Rightarrow \quad B_j = \sqrt{j} \quad (2.13.433)$$

Quanto ad A_j , osserviamo che

$$\begin{aligned} J^+|j, j-1\rangle &\equiv A_j|j, j\rangle = J^+ \frac{1}{B_j} J^-|j, j\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{j}} [J^+, J^-]|j, j\rangle + \frac{1}{\sqrt{j}} J^- J^+|j, j\rangle = \frac{j}{\sqrt{j}}|j, j\rangle = \\ &= \sqrt{j}|j, j\rangle \end{aligned} \quad (2.13.434)$$

e dunque abbiamo

$$A_j = B_j = \sqrt{j} \quad (2.13.435)$$

Passiamo adesso a considerare il vettore $J^-|j, j-1\rangle$. Per definizione si ha

$$J^-|j, j-1\rangle = B_{j-1}|j, j-2\rangle \quad (2.13.436)$$

e quindi

$$\begin{aligned} B_{j-1}^2 &= \langle J^-(j, j-1) | J^-(j, j-1) \rangle = \langle j, j-1 | J^+ J^-(j, j-1) \rangle = \\ &= \langle j, j-1 | [J^+, J^-](j, j-1) \rangle + \langle j, j-1 | J^- J^+(j, j-1) \rangle = \\ &= \langle j, j-1 | J_3(j, j-1) \rangle + \langle J^+(j, j-1) | J^+(j, j-1) \rangle = \\ &= (j-1) + A_j^2 \end{aligned} \quad (2.13.437)$$

ovvero, poiché abbiamo visto che $A_j = B_j$, possiamo scrivere che

$$B_{j-1}^2 - B_j^2 = j - 1 \quad (2.13.438)$$

⁵⁶Per evitare confusione, se O è un operatore e $|v\rangle$ un vettore, scriveremo talvolta $|O(v)\rangle$ per indicare il vettore $O|v\rangle$. Questo è particolarmente utile quando si vuole scrivere il bra associato a $O|v\rangle$ che è quindi $\langle O(v)| \equiv \langle v|O^\dagger$.

Consideriamo adesso il vettore $[J^+, J^-]|j, j-1\rangle$. Si ha

$$[J^+, J^-]|j, j-1\rangle = J_3|j, j-1\rangle = (j-1)|j, j-1\rangle \quad (2.13.439)$$

$$\begin{aligned} &= J^+ J^-|j, j-1\rangle - J^- J^+|j, j-1\rangle = \\ &= B_{j-1} J^+|j, j-2\rangle - A_j J^-|j, j\rangle = \\ &= B_{j-1} A_{j-1}|j, j-1\rangle - A_j B_j|j, j-1\rangle \end{aligned} \quad (2.13.440)$$

e dunque, poiché $|j, j-1\rangle$ non è nullo

$$A_{j-1} B_{j-1} - A_j B_j = j-1 \quad (2.13.441)$$

la quale, vista la (2.13.438) e il fatto che $A_j = B_j$, ci dice che anche per $j-1$ vale la relazione

$$A_{j-1} = B_{j-1} \quad (2.13.442)$$

Iterando il procedimento si dimostra allora che

$$\forall m \quad -j \leq m \leq j: A_m = B_m \equiv N_m^j \quad (2.13.443)$$

e che risulta

$$(N_j^j)^2 = j \quad (2.13.444)$$

$$(N_{j-1}^j)^2 - (N_j^j)^2 = j-1 \quad (2.13.445)$$

...

$$(N_{j-k}^j)^2 - (N_{j-k+1}^j)^2 = j-k \quad (2.13.446)$$

...

da cui, sommando, si ottiene che

$$\begin{aligned} (N_{j-k}^j)^2 &= j + (j-1) + \dots + (j-k) = j(k+1) - \frac{k(k+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(2j-k) \end{aligned} \quad (2.13.447)$$

ovvero, ponendo $m = j-k \Rightarrow k = j-m$, si ha infine che, per $-j \leq m \leq j$, risulta

$$(N_m^j)^2 = \frac{1}{2}(j-m+1)(2j-j+m) = \frac{1}{2}(j+m)(j-m+1) \quad (2.13.448)$$

$$\Rightarrow N_m^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \quad (2.13.449)$$

Siamo quindi in grado, adesso, di esplicitare le matrici che rappresentano i generatori della rappresentazione, qualsiasi sia il suo spin.

Nella base degli autovettori di J_3 , ordinati per autovalore decrescente da $+j$ a $-j$, la matrice J_3 è ovviamente diagonale e si ha

$$(J_3)_{aa} = j - a + 1; \quad 1 \leq a \leq 2j + 1 \quad (2.13.450)$$

Quanto a J^+ , data la (2.13.429), sarà non nulla solo sulla diagonale immediatamente sopra quella principale, risultando

$$(J^+)_{a,a+1} = N_{j-a+1}^j; \quad 1 \leq a \leq 2j \quad (2.13.451)$$

mentre, quando a J^- , vista la (2.13.430), essa sarà non nulla solo sulla diagonale immediatamente sotto quella principale, risultando

$$(J^-)_{a+1,a} = N_{j-a+1}^j; \quad 1 \leq a \leq 2j \quad (2.13.452)$$

Quindi, poiché $J^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ \pm J^-)$ gli altri due generatori⁵⁷ J_1 e J_2 sono dati da

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ + J^-) \quad (2.13.453)$$

$$J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(J^- - J^+) \quad (2.13.454)$$

Si osservi che la matrice che descrive J_1 , come quella relativa a J_3 , è reale mentre la matrice che descrive J_2 è immaginaria pura. Questo non ha alcun significato profondo, ma è semplicemente l'effetto della scelta di fase fatta allorché abbiamo assunto che le costanti N_m^j fossero quantità reali positive. Usualmente, per gli indici delle matrici J , invece della convenzione usuale che li vedono andare da 1 a $2j + 1$, per ragioni che saranno più chiare fra breve, si preferisce farli andare da $-j$ a $+j$, che, come abbiamo visto, sono i possibili autovalori di J_3 , posti in ordine decrescente.

In questa convenzione, abbiamo allora che (senza sommare sugli indici ripetuti)

$$(J_3)_{mm'} = m \delta_{m,m'} \quad (2.13.455)$$

$$(J^+)_{mm'} = N_m^j \delta_{m,m'+1} \quad (2.13.456)$$

$$(J^-)_{mm'} = N_{m'}^j \delta_{m+1,m'} \quad (2.13.457)$$

$$(2.13.458)$$

⁵⁷Si ricordi che, J^\pm non sono, propriamente, elementi dell'algebra di Lie, essendo combinazioni a coefficienti complessi dei generatori ...

e dunque

$$\begin{aligned} (J_1)_{mm'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ + J^-)_{mm'} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[N_m^j \delta_{m,m'+1} + N_{m'}^j \delta_{m+1,m'} \right] \end{aligned} \quad (2.13.459)$$

$$\begin{aligned} (J_2)_{mm'} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(J^- - J^+)_{mm'} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[N_{m'}^j \delta_{m+1,m'} - N_m^j \delta_{m,m'+1} \right] \end{aligned} \quad 2 \quad (2.13.460)$$

E' interessante, adesso, considerare il sottogruppo di $SU2$ fatto dagli elementi $U(\theta) = e^{i\theta L_3}$ con $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

Nella base canonica di una qualunque rappresentazione irriducibile di spin j , questi elementi $U(\theta)$ sono naturalmente rappresentati da $R(\theta) = e^{i\theta J_3}$ dove J_3 rappresenta il generatore L_3 e, come sappiamo, è diagonale nella base canonica. La matrice $R(\theta)$ è anch'essa, ovviamente, diagonale con autovalori $e^{i\theta m}$, dove m è l'autovalore di J_3 corrispondente.

Se lo spin della rappresentazione è semidispari e dunque anche tutti gli m sono semidispari, allora $R(2\pi) = e^{i2\pi J_3} = -I$ poiché, qualunque sia m semidispari, $e^{i2\pi m} = -1$. L'identità si ottiene solo per $\theta = 4\pi$.

Questo risultato si può generalizzare a ogni rotazione lungo qualsiasi direzione essa avvenga (l'asse z corrispondente a J_3 , infatti, non ha in sé nulla di particolare) e la conclusione è che le rappresentazioni di spin semidispari sono rappresentazioni *fedeli* di $SU2$.

Se, al contrario, lo spin j della rappresentazione è intero, allora $R(2\pi) = I$ e $R(2\pi + \phi) = R(\phi)$ per $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Queste rappresentazioni di spin intero *non* sono rappresentazioni fedeli di $SU2$, bensì lo sono del gruppo delle rotazioni $SO(3)$ che, appunto, è a sua volta una rappresentazione (non fedele) di $SU2$ di spin $j = 1$.

Nota riassuntiva

Ogni rappresentazione irriducibile R di $SU2$ è finita ed equivalente a una rappresentazione unitaria. Essa risulta univocamente determinata dal valore del *peso* positivo più alto, ovvero dal più alto autovalore di J_3 . A questo autovalore j corrisponderà un autovettore $|j, j\rangle$ di J_3 tale che

$$J_3 |j, j\rangle = j |j, j\rangle; \quad J^+ |j, j\rangle = 0 \quad (2.13.461)$$

dove J^+ è l'immagine dell'operatore definito nella RA dalla condizione di corrispondere alla radice (autovalore di \hat{T}_3) $+1$. A partire dall'autovettore $|j, j\rangle$, usando l'operatore $J^- = (J^+)^\dagger$ (immagine dell'operatore che, nella RA , corrisponde alla radice -1), si costruisce tutta la catena degli autovettori di J_3 che costituisce una base ortonormale dello spazio vettoriale dove agisce la rappresentazione R . I generatori di R , oltre a J_3 , sono J_1 e J_2 tali che

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ + J^-); \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ - J^-); \quad \text{con } [J_j, J_k] = i \epsilon_{jkm} J_m \quad (2.13.462)$$

2.13.1 Esempio 1: la rappresentazione di spin 1/2

In questo caso la dimensione d della rappresentazione è $d = 2j + 1 = 2$ e l'invariante di Casimir J^2 vale $j(j+1)I = \frac{3}{4}I$, dove abbiamo indicato con I l'identità in due dimensioni.

Iniziamo adesso a costruire J_3 . Esso potrà avere solo i due autovalori $\pm\frac{1}{2}$ e dunque, nella base dei suoi autovettori organizzati per autovalore decrescente, sarà pari a

$$J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13.463)$$

Veniamo ora alle matrici che rappresentano, nella base suddetta, gli operatori J^\pm . Dovrà aversi

$$J^+|+\rangle = |0\rangle; \quad J^+|-\rangle = N_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|+\rangle \quad (2.13.464)$$

$$J^-|-\rangle = |0\rangle; \quad J^-|+\rangle = N_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|-\rangle \quad (2.13.465)$$

dove

$$N_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.13.466)$$

e dunque

$$J^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.467)$$

ovvero

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ + J^-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.468)$$

$$J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(J^- - J^+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.469)$$

Si riconosce facilmente qualcosa che potevamo certo attenderci..., ovvero che i generatori della rappresentazione di spin $\frac{1}{2}$ sono semplicemente la metà delle matrici di Pauli:

$$J_k = \frac{1}{2} \sigma_k \quad (2.13.470)$$

Nella base canonica degli autovettori di J_3 , nel caso di spin $j = \frac{1}{2}$, abbiamo quindi che le matrici della rappresentazione sono così fatte

$$U(\vec{a}) \equiv U(\theta\vec{n}) = e^{\frac{i}{2}\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.13.471)$$

In particolare abbiamo

$$\begin{aligned} U_x &\equiv U(\theta, 0, 0) = \cos \theta/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin \theta/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13.472)$$

$$\begin{aligned} U_y &\equiv U(0, \theta, 0) = \cos \theta/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin \theta/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13.473)$$

$$\begin{aligned} U_z &\equiv U(0, 0, \theta) = \cos \theta/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin \theta/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13.474)$$

2.13.2 Esempio 2: la rappresentazione di spin 1

Nel caso della rappresentazione di spin $j = 1$, l'invariante di Casimir J^2 vale $j(j+1)I = 2I$, la dimensione dello spazio vettoriale in cui gli operatori agiscono ha dimensione $d = 2j + 1 = 3$ e quindi i generatori J_k sono rappresentati da matrici 3×3 .

Gli autovalori di J_3 , dovendo andare da $m = j = 1$ a $m = -j = -1$ a step di una unità, sono $+1, 0$ e -1 e dunque, nella base (ortonormale) fatta dai corrispondenti autovettori, risulterà

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13.475)$$

Veniamo adesso agli operatori J^\pm : sulla base di quanto abbiamo detto in generale, nel nostro caso avremo

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & N_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & N_0^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.476)$$

$$J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & N_0^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.477)$$

dove, dalla definizione secondo cui $N_m^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$, abbiamo

$$N_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 \cdot 1} = 1 \quad (2.13.478)$$

$$N_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \cdot 2} = 1 \quad (2.13.479)$$

e dunque

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.13.480)$$

per cui, quanto ai generatori J_1 e J_2 , abbiamo

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ + J^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.481)$$

$$J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(J^- - J^+) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.482)$$

Ma noi avevamo già trovato una rappresentazione di $SU2$ in uno spazio a dimensione tre: la Rappresentazione Aggiunta RA , i cui generatori sono

$$(\bar{J}_k)_{mn} = (\hat{T}_k)_{mn} = -i \epsilon_{kmn} \quad (2.13.483)$$

ovvero

$$\bar{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.484)$$

Qual è il legame fra le due rappresentazioni ?

Si tratta semplicemente della *stessa* rappresentazione ma vista in due basi differenti.

La base della rappresentazione "canonica", come si è visto, è fatta dagli autovettori di J_3 .

Vediamo che forma essi assumono nella base "cartesiana" della RA . E' facile vedere che all'autovalore $m = +1$ corrisponde l'autovettore normalizzato

$$|+ \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.485)$$

dove α è una fase a priori qualsiasi, da fissare.

All'autovalore $m = 0$ corrisponde invece l'autovettore normalizzato

$$|0 \rangle = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.13.486)$$

dove β è ancora una fase qualsiasi da fissare.

Infine, all'autovalore $m = -1$ corrisponde l'autovettore normalizzato

$$|- \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.487)$$

essendo γ una fase a priori qualsiasi, da fissare.

I tre autovettori, corrispondendo ad autovalori diversi, sono fra loro ortogonali e quindi, essendo normalizzati (indipendentemente dalle fasi α , β e γ), costituiscono una base ortonormale dello spazio vettoriale.

Il cambiamento di base, fra quella *cartesiana* della RA e quella *canonica* degli autovettori normalizzati di J_3 , è descritto dalla matrice unitaria U seguente

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ i\alpha & 0 & -i\gamma \\ 0 & \beta\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^\dagger = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha^* & -i\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \beta^*\sqrt{2} \\ \gamma^* & i\gamma^* & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.488)$$

La trasformazione dalla base cartesiana a quella canonica sarà descritta, quindi, dalla trasformazione di verosimiglianza

$$J_k = U^\dagger \bar{J}_k U \quad (2.13.489)$$

Iniziamo da \bar{J}_3 : si ha (si ricordi che α , β e γ sono fattori di fase ...)

$$\begin{aligned} U^\dagger \bar{J}_3 U &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^\dagger \begin{pmatrix} 0-i & 0 & \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ i\alpha & 0 & -i\gamma \\ 0 & \beta\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^* & -i\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \beta^*\sqrt{2} \\ \gamma^* & i\gamma^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\gamma \\ i\alpha & 0 & i\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\alpha|^2 & 0 & -\alpha^*\gamma + \alpha^*\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha\gamma^* - \alpha\gamma^* & 0 & -|\gamma|^2 - |\gamma|^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_3 \end{aligned} \quad (2.13.490)$$

e non poteva essere altrimenti, visto che la trasformazione di verosimiglianza definita da U ci fa passare nella base "canonica" degli autovettori di J_3 .

Ma veniamo adesso agli altri generatori e iniziamo con \bar{J}_1 . Risulta

$$\begin{aligned} U^\dagger \bar{J}_1 U &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ i\alpha & 0 & -i\gamma \\ 0 & \beta\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^* & -i\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \beta^*\sqrt{2} \\ \gamma^* & i\gamma^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\beta\sqrt{2} & 0 \\ -\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^*\beta\sqrt{2} & 0 \\ -\alpha\beta^*\sqrt{2} & 0 & \beta^*\gamma\sqrt{2} \\ 0 & \beta\gamma^*\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^*\beta & 0 \\ -\alpha\beta^* & 0 & \beta^*\gamma \\ 0 & \beta\gamma^* & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13.491)$$

Affinché questa matrice coincida con quanto trovato per la rappresentazione canonica, ovvero

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.492)$$

è necessario, evidentemente, che risulti

$$-\alpha^*\beta = 1; \quad \beta^*\gamma = 1 \quad (2.13.493)$$

Ma vediamo adesso che succede per \bar{J}_2 . Si ha

$$\begin{aligned} U^\dagger \bar{J}_2 U &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ i\alpha & 0 & -i\gamma \\ 0 & \beta\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^* & -i\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \beta^*\sqrt{2} \\ \gamma^* & i\gamma^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\beta\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i\alpha & 0 & -i\gamma \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\alpha^*\beta\sqrt{2} & 0 \\ -i\alpha\beta^*\sqrt{2} & 0 & -i\beta^*\gamma\sqrt{2} \\ 0 & i\beta\gamma^*\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^*\beta & 0 \\ -\alpha\beta^* & 0 & -\beta^*\gamma \\ 0 & \beta\gamma^* & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.494) \end{aligned}$$

e, se valgono le scelte di fase di cui alla (2.13.493), allora abbiamo

$$U^\dagger \bar{J}_2 U = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2 \quad (2.13.495)$$

Dunque, per ottenere dalla RA la rappresentazione "cartesiana", occorre fissare le fasi degli autovettori di J_3 secondo la (2.13.493), ovvero, assumendo per comodità $\beta = 1$, occorre porre $\alpha = -1$ e $\gamma = 1$.

Questo corrisponde a stabilire che

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.496)$$

da cui

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^\dagger = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.497)$$

Veniamo adesso alla forma esplicita delle matrici della rappresentazione. E' conveniente iniziare ponendoci nella base cartesiana, laddove, come già detto, abbiamo che

$$(\bar{J}_k)_{mn} = -i \epsilon_{kmn} \quad (2.13.498)$$

Formalmente, la matrice della rappresentazione di spin $j = 1$ che corrisponde⁵⁸ all'elemento $U(\vec{a}) \in SU(2)$ è dato da

$$R(\vec{a}) = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \quad (2.13.499)$$

Iniziamo osservando che le matrici \vec{J}_k sono tutte immaginarie pure, quindi, definendo

$$\vec{M} \equiv i\vec{J} \Rightarrow (M_k)_{mn} = \epsilon_{kmn} \quad (2.13.500)$$

le matrici M_k sono reali e risulta

$$R(\vec{a}) = e^{\vec{a} \cdot \vec{M}} \quad (2.13.501)$$

da cui risulta evidente che le matrici $R(\vec{a})$ sono reali: si tratta delle matrici del gruppo $SO(3)$, fatto appunto dalle matrici 3×3 ortogonali reali con determinante uguale all'unità, le quali, come sappiamo, descrivono appunto le rotazioni nello spazio tridimensionale.

Abbiamo infatti che, essendo le matrici M antisimmetriche, cioè tali che $M_k^t = -M_k$, si ha

$$R(\vec{a})^t = \left(e^{\vec{a} \cdot \vec{M}} \right)^t = e^{-\vec{a} \cdot \vec{M}} = (R(\vec{a}))^{-1} \quad (2.13.502)$$

che dimostra come le $R(\vec{a})$ siano matrici ortogonali reali.

Esse hanno poi, evidentemente, determinante uguale all'unità poiché

$$\text{Tr}(\vec{a} \cdot \vec{M}) = a_j \text{Tr}(M_j) = 0 \quad (2.13.503)$$

Vediamo adesso come esse descrivano le rotazioni nelle tre dimensioni.

Assunto al solito che $\vec{a} = \theta \vec{n}$, abbiamo

$$R(\vec{a}) = e^{\vec{a} \cdot \vec{M}} = e^{\theta \vec{n} \cdot \vec{M}} \quad (2.13.504)$$

Definiamo allora per comodità

$$A \equiv \vec{n} \cdot \vec{M} \quad (2.13.505)$$

per cui risulta che

$$R(\theta \vec{n}) = e^{\theta A} = I + \theta A + \frac{1}{2!}(\theta A)^2 + \frac{1}{3!}(\theta A)^3 + \frac{1}{4!}(\theta A)^4 + \frac{1}{5!}(\theta A)^5 + \dots \quad (2.13.506)$$

⁵⁸Si ricordi che $SU(2)$ e $SU(2)$ sono fra loro isomorfi, essendo $SU(2)$ una rappresentazione fedele del gruppo astratto $SU(2)$.

Ma

$$\begin{aligned}
(A)_{jk} &= n_s(M_s)_{jk} = n_s \epsilon_{sjk} \\
(A^2)_{jk} &= n_s \epsilon_{sjm} n_t \epsilon_{tmk} = -n_s n_t \epsilon_{sjm} \epsilon_{tkm} = -n_s n_t (\delta_{st} \delta_{jk} - \delta_{sk} \delta_{jt}) = -\delta_{jk} + n_j n_k \\
(A^3)_{jk} &= (A^2)_{js} (A)_{sk} = (-\delta_{js} + n_j n_s) n_t \epsilon_{tsk} = -n_t \epsilon_{tjk} + n_j n_s n_t \epsilon_{tsk} = -(A)_{jk} \\
(A^4)_{jk} &= (A^3)_{js} (A)_{sk} = -(A)_{js} (A)_{sk} = -(A^2)_{jk} \\
(A^5)_{jk} &= (A^4)_{js} (A)_{sk} = -(A^2)_{js} (A)_{sk} = -(A^3)_{jk} = (A)_{jk}
\end{aligned}$$

per cui risulta

$$\begin{aligned}
R(\theta \vec{n}) &= e^{\theta A} = I + \theta A + \frac{1}{2!} \theta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 A^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 A^4 + \frac{1}{5!} \theta^5 A^5 + \dots = \\
&= I + A \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right) + A^2 \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) = \\
&= I + A \sin \theta + A^2 (1 - \cos \theta) \\
\Rightarrow (R(\theta \vec{n}))_{jk} &= \delta_{jk} + \sin \theta A_{jk} + (1 - \cos \theta) A^2_{jk} = \\
&= \delta_{jk} + \sin \theta \epsilon_{sjk} n_s + (1 - \cos \theta) (-\delta_{jk} + n_j n_k) \\
&= \delta_{jk} \cos \theta + \epsilon_{sjk} n_s \sin \theta + n_j n_k (1 - \cos \theta) \tag{2.13.507}
\end{aligned}$$

Consideriamo adesso il caso in cui il vettore \vec{n} è parallelo agli assi coordinati. Iniziamo assumendo $\vec{n} = \vec{n}_x \equiv (1, 0, 0)$: si ha

$$\begin{aligned}
(R(\theta, 0, 0))_{jk} &= \delta_{jk} \cos \theta + \epsilon_{1jk} \sin \theta + \delta_{j1} \delta_{k1} (1 - \cos \theta) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.13.508}
\end{aligned}$$

che descrive una rotazione antioraria passiva⁵⁹ di un angolo θ intorno all'asse x , ovvero intorno al vettore \vec{n}_x .

Analogamente, se adesso assumiamo $\vec{n} = \vec{n}_y = (0, 1, 0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
(R(0, \theta, 0))_{jk} &= \delta_{jk} \cos \theta + \epsilon_{2jk} \sin \theta + \delta_{j2} \delta_{k2} (1 - \cos \theta) = \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.13.509}
\end{aligned}$$

che descrive una rotazione antioraria passiva di un angolo θ intorno all'asse y , ovvero intorno al vettore \vec{n}_y .

⁵⁹Ricordiamo che, per rotazione, le coordinate di un punto possono cambiare o perché la rotazione è effettuata sul punto stesso, con gli assi coordinati tenuti fissi (rotazione attiva), oppure perché, tenendo fermo il punto che stiamo osservando, si ruota il sistema di riferimento (rotazione passiva).

Le matrici che rappresentano queste due situazioni sono una l'inversa dell'altra.

Infine, se assumiamo $\vec{n} = \vec{n}_z = (0, 0, 1)$, si ottiene

$$\begin{aligned} (R(0, \theta, 0))_{jk} &= \delta_{jk} \cos \theta + \epsilon_{2jk} \sin \theta + \delta_{j3} \delta_{k3} (1 - \cos \theta) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13.510)$$

che descrive una rotazione antioraria passiva di un angolo θ intorno all'asse z , ovvero intorno al versore \vec{n}_z .

Osserviamo adesso che la rappresentazione di $SU2$ che stiamo considerando (di spin $j = 1 \dots$) *non* è fedele. Abbiamo infatti che se \vec{n} è un versore qualsiasi ed $\vec{\hat{n}} \equiv -\vec{n}$ il suo opposto, allora

$$\forall \alpha : 0 < \alpha \leq \pi \quad R((\pi + \alpha)\vec{n}) = R((\pi - \alpha)\vec{\hat{n}}) \quad (2.13.511)$$

I due elementi *diversi* di $SU2$, individuati dai parametri $(\pi + \alpha)\vec{n}$ e $(\pi - \alpha)\vec{\hat{n}}$, con $0 < \alpha \leq \pi$, vengono rappresentati nello stesso elemento di $SO(3)$.

Lo spazio dei parametri per descrivere gli elementi di $SO(3)$, cioè il gruppo delle rotazioni ordinarie in tre dimensioni, è dunque limitato ai punti della sfera di raggio π e non 2π come per $SU2$. In questo modo accade che punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera descrivono la stessa rotazione, ovvero una rotazione di π intorno all'asse \vec{n} , oppure ancora di π intorno all'asse $-\vec{n}$. L'insieme dei parametri è compatto ed è anche connesso, ma *non* è semplicemente connesso, infatti una curva che connetta due punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera è chiusa in quanto i due elementi estremi identificano la stessa rotazione, però la curva non è riconducibile a un punto. Nello spazio dei parametri (sfera di raggio π) esistono due classi di curve chiuse *omotope*, cioè che possono essere deformate con continuità una nell'altra: in un caso esse possono essere ridotte a un punto (se non toccano la superficie esterna oppure se lo fanno in un numero di casi multiplo di 4), nell'altro caso no (se toccano la superficie esterna in un numero di casi uguale a $2 + 4n$ con n intero non negativo), pur essendo anche queste ultime equivalenti fra loro, ovvero deformabili con continuità una nell'altra.

Il gruppo $SO(3)$ è *duplicemente connesso*, come tutti i gruppi $SO(n)$ e, pur avendo la stessa algebra di Lie di $SU2$, non coincide con il gruppo di ricoprimento universale individuato dall'algebra che è, appunto $SU2$.

Dimostriamo adesso direttamente che (\bar{J}_k) si trasforma come un vettore. Si tratta di un caso particolare (cfr.(2.8.214)) di quanto visto in generale per i generatori delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi compatti in termini della RA .

Se R è una qualsiasi matrice di rotazione, ovvero un qualunque elemento di $SO(3)$, allora

$$R \bar{J}_j R^{-1} = R_{kj} \bar{J}_k \quad (2.13.512)$$

Risulta infatti

$$\begin{aligned} (R \bar{J}_j R^{-1})_{mn} &= R_{mk} (\bar{J}_j)_{ks} R_{sn}^{-1} = R_{mk} (\bar{J}_j)_{ks} R_{ns} = \\ &= -i R_{mk} \epsilon_{jks} R_{ns} \end{aligned} \quad (2.13.513)$$

D'altronde, il tensore completamente antisimmetrico $\epsilon_{ijk} = -C_{ijk}$ soddisfa la condizione (cfr.(2.8.188))

$$\epsilon_{kmn} R_{ik} R_{jm} R_{ln} = \epsilon_{ijl} \quad (2.13.514)$$

per cui abbiamo che

$$\begin{aligned} -i R_{mk} \epsilon_{jks} R_{ns} &= -i \delta_{jt} \epsilon_{tks} R_{ns} R_{mk} = -i R_{vt} R_{vj} \epsilon_{tks} R_{ns} R_{mk} = \\ &= -i R_{vj} \epsilon_{tks} R_{vt} R_{mk} R_{ns} = -i R_{vj} \epsilon_{vmn} = \\ &= R_{vj} (\bar{J}_v)_{mn} \end{aligned} \quad (2.13.515)$$

che, insieme alla (2.13.513), dimostra appunto la (2.13.512). Una conseguenza diretta di questo risultato è che, per qualunque rotazione R , risulta

$$R e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1} = e^{i R(\vec{\theta} \cdot \vec{J}) R^{-1}} = e^{i \theta_j R \bar{J}_j R^{-1}} = e^{i \theta_j R_{kj} \bar{J}_k} = e^{i (R\vec{\theta}) \cdot \vec{J}} \quad (2.13.516)$$

essendo appunto⁶⁰

$$(R\vec{\theta})_j = R_{jk} \theta_k \quad (2.13.517)$$

⁶⁰Si osservi che in $SO(3)$ la relazione (2.13.512) può essere dedotta anche direttamente, infatti si ha

$$\begin{aligned} (R e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1})_{ij} &\equiv R_{ik} (e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{J}})_{km} R_{mj}^{-1} \\ &= R_{ik} [\cos\theta \delta_{km} + \sin\theta \epsilon_{kmn} n_n + (1 - \cos\theta) n_k n_m] R_{jm} = \\ &= \cos\theta R_{ik} R_{jk} + \sin\theta \epsilon_{kmn} n_n R_{ik} R_{jm} + (1 - \cos\theta) R_{ik} n_k R_{jm} n_m \end{aligned}$$

e usando l'identità (2.13.514), otteniamo quindi

$$\epsilon_{kmn} n_n R_{ik} R_{jm} = \epsilon_{kmn} n_l \delta_{nl} R_{ik} R_{jm} = \epsilon_{kmn} n_l R_{sl} R_{sn} R_{ik} R_{jm} = \epsilon_{ijs} R_{sl} n_l$$

per cui, sostituendo, risulta

$$\begin{aligned} (R e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1})_{ij} &\equiv \delta_{ij} \cos\theta + \epsilon_{ijs} (R\vec{n})_s \sin\theta + (1 - \cos\theta) (R\vec{n})_i (R\vec{n})_j \\ &\equiv (e^{i (R\vec{\theta}) \cdot \vec{J}})_{ij} \end{aligned}$$

Un'altra proprietà utile da conoscere riguardo alle matrici R discende dal fatto che, come già osservato, la generica matrice di rotazione R di $SO(3)$ risulta legata esplicitamente al vettore $\vec{\theta} \equiv \theta \vec{n}$ che la individua, nel modo seguente

$$R_{ij} = \left(e^{i\theta \vec{n} \cdot \vec{L}} \right)_{ij} = \cos\theta \delta_{ij} + \sin\theta \epsilon_{ijk} n_k + (1 - \cos\theta) n_i n_j \quad (2.13.518)$$

e da questa relazione è immediato che, se $\vec{n}, \vec{v}, \vec{w}$ costituiscono una terna cartesiana ortonormale destrorsa (i.e. $\vec{w} = \vec{n} \times \vec{v}$), allora si ha che

- $R_{ij} n_j = n_i \cos\theta + \epsilon_{ijk} n_j n_k \sin\theta + (1 - \cos\theta) n_i n_j n_j = n_i$
- $R_{ij} v_j = v_i \cos\theta + \epsilon_{ijk} v_j n_k \sin\theta + (1 - \cos\theta) n_i n_j v_j = v_i \cos\theta - (\vec{n} \times \vec{v})_i \sin\theta = v_i \cos\theta - w_i \sin\theta$

essendo, per ipotesi, $n_j n_j = 1$ e $n_j v_j = 0$.

Questi risultati significano semplicemente, che la rotazione (di ampiezza θ , come si è visto nei casi sopra considerati) avviene intorno al vettore \vec{n} il quale, perciò, rimane inalterato.

Fino a questo momento abbiamo studiato la rappresentazione di spin $j = 1$ nella base cartesiana, dove i generatori sono i \vec{J}_k , dati dalla (2.13.484).

Cosa possiamo dire se analizziamo gli elementi della rappresentazione nella base canonica degli autovettori di J_3 ?

Per farlo, basta usare la trasformazione di verosimiglianza (2.13.489).

Nel caso, per esempio, della generica rotazione intorno all'asse z di cui alla (2.13.510), abbiamo che, nella base canonica, è

$$R_z = U^\dagger \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U \quad (2.13.519)$$

Il risultato ottenuto è anche facilmente giustificabile da un punto di vista strettamente geometrico. Risulta evidente, infatti, che la rotazione $R e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1}$ lascia invariante il vettore $R\vec{\theta}$ e si dimostra anche facilmente che alle due rotazioni corrispondono poi la stessa ampiezza di rotazione. Questo accade perchè l'ampiezza dell'angolo di rotazione è direttamente legata alla traccia della matrice, essendo $Tr(e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}) = 1 + 2 \cos\theta$. Ma, risultando evidentemente che

$$Tr(R e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1}) = Tr(e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}})$$

ne concludiamo che l'ampiezza della rotazione descritta da $R e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1}$ risulta la stessa di quella descritta da $e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$, che è appunto quanto volevamo dimostrare.

e dunque, data la (2.13.497), risulta

$$\begin{aligned}
 R_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^\dagger \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & 0 & -ie^{-i\theta} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{2.13.520}
 \end{aligned}$$

che coincide, naturalmente, con $e^{i\theta J_3}$ (si ricordi la forma diagonale di J_3 nella base canonica in cui stiamo operando ...).

Meno intuitive sono le rappresentazioni delle matrici che descrivono rotazioni intorno all'asse x o y . Iniziando dall'asse x , si ha

$$\begin{aligned}
 R_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta & -i \cos \theta \\ i \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta & i \sin \theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \theta}{2} & \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{-1+\cos \theta}{2} \\ \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1+\cos \theta}{2} & \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos \theta}{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta J_1} \tag{2.13.521}
 \end{aligned}$$

Passando ora all'asse y , abbiamo

$$\begin{aligned}
 R_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^\dagger \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sqrt{2} \sin \theta & \cos \theta \\ -i & 0 & -i \\ -\sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos \theta}{2} \\ -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos \theta}{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta J_2} \tag{2.13.522}
 \end{aligned}$$

Si osservi che R_y è una matrice reale: questo è vero per qualsiasi spin se si lavora nella base canonica degli autovettori di J_3 .

Il motivo è che, in questa base, J_2 è rappresentato da una matrice puramente immaginaria e quindi l'esponente di $e^{i\theta J_2}$ è una matrice puramente reale.

In molti casi, per individuare una rotazione, invece dei parametri rappresentati dal vettore \vec{a} si preferisce usare gli angoli di Eulero o una loro rivisitazione. Siccome ci sono varie definizioni di questi angoli, ricordiamo di seguito la definizione⁶¹ che useremo, differente da quella già illustrata in precedenza per renderla più adatta all'uso per le rappresentazioni di $SU2$. Avendo assunto che $Ox_1x_2x_3$ sia un sistema di coordinate ortogonali destrorso, la successione delle tre rotazioni è definita nel modo che segue.

- Si procede con una rotazione antioraria di un angolo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) attorno all'asse Ox_3 . Indichiamo con $O\xi_1\xi_2\xi_3$ la terna prodotta a partire da $Oxyz$.
- Si effettua una rotazione di un angolo β ($0 \leq \beta \leq \pi$) intorno all'asse $O\xi_2$ ⁶². Sia $O\eta_1\eta_2\eta_3$ la nuova terna così ottenuta..
- L'ultima rotazione di angolo γ $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ è effettuata intorno all'asse $O\eta_3$ e dà luogo alla terna finale $Ox'_1x'_2x'_3$.

La rotazione (passiva) caratterizzata dagli angoli di Eulero (α, β, γ) sarà indicata con $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.13.523}$$

Dati gli angoli di Eulero (α, β, γ) e quindi data la matrice di rotazione di cui sopra, i parametri θ e \vec{n} che la individuano si possono ritrovare utilizzando la (2.13.507). Risulta

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [Tr(\mathcal{R}) - 1] \tag{2.13.524}$$

$$n_k = \frac{-1}{2 \sin \theta} \epsilon_{kjm} \mathcal{R}_{jm} \tag{2.13.525}$$

⁶¹Cfr. A Galindo, P. Pascual: "Quantum Mechanics", pag 206 e seguenti

⁶²Nella definizione consueta degli angoli di Eulero, questa seconda rotazione è fatta intorno all'asse $O\xi_1$. Ovviamente non c'è nulla di particolare in questa scelta e quella di $O\xi_2$ è altrettanto valida. Preferiamo la scelta di farla intorno al secondo asse perché J_2 è puramente reale e questo semplifica il risultato.

Come abbiamo avuto modo di osservare, l'espressione ottenuta si riferisce a una trasformazione passiva e le rotazioni sono fatte rispetto ad assi che *non* sono dello stesso sistema di riferimento: esclusa la prima, non appartengono al riferimento "fisso". Esplicitamente abbiamo infatti

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\gamma J_{\eta_3}} e^{i\beta J_{\xi_2}} e^{i\alpha J_3} \quad (2.13.526)$$

Vediamo ora come possiamo riscrivere la rotazione, usando però solo gli assi del riferimento $Ox_1x_2x_3$. Per la (2.13.516) abbiamo visto, in generale, che

$$R e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} R^{-1} = e^{i(R\vec{\theta}) \cdot \vec{J}} \quad (2.13.527)$$

dunque, essendo l'asse $O\xi_2$ il risultato della rotazione $R(\alpha) = e^{i\alpha J_3}$ del riferimento iniziale, relativamente all'asse Ox_2 , potremo scrivere

$$e^{i\beta J_{\xi_2}} = e^{i\alpha J_3} e^{i\beta J_2} e^{-i\alpha J_3} \quad (2.13.528)$$

Analogamente avremo che

$$e^{i\gamma J_{\eta_3}} = e^{i\beta J_{\xi_2}} e^{i\gamma J_{\xi_3}} e^{-i\beta J_{\xi_2}} \quad (2.13.529)$$

per cui abbiamo il primo risultato che

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{i\gamma J_{\eta_3}} e^{i\beta J_{\xi_2}} e^{i\alpha J_3} = \\ &= \left(e^{i\beta J_{\xi_2}} e^{i\gamma J_{\xi_3}} e^{-i\beta J_{\xi_2}} \right) e^{i\beta J_{\xi_2}} e^{i\alpha J_3} = \\ &= e^{i\beta J_{\xi_2}} e^{i\gamma J_{\xi_3}} e^{i\alpha J_3} \end{aligned} \quad (2.13.530)$$

Usando la (2.13.529), abbiamo infine che

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \left(e^{i\alpha J_3} e^{i\beta J_2} e^{-i\alpha J_3} \right) \left(e^{i\alpha J_3} e^{i\gamma J_3} e^{-i\alpha J_3} \right) e^{i\alpha J_3} = \\ &= e^{i\alpha J_3} e^{i\beta J_2} e^{i\gamma J_3} \end{aligned} \quad (2.13.531)$$

dove, adesso, le rotazioni sono tutte in termini dei generatori che le descrivono nel primo riferimento assegnato, dimostrando in particolare che otteniamo la stessa rotazione $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ se le tre rotazioni di Eulero sono effettuate intorno agli assi cartesiani originali, ma in ordine inverso.

Questa parametrizzazione delle rotazioni risulta la più utile nello studio delle rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ e del suo gruppo di ricoprimento universale $SU(2)$.

2.13.3 Le matrici $D_{m'm}^j$ e $d_{m'm}^j$

Abbiamo visto che, nella base ortonormale dello spazio vettoriale sede della rappresentazione irriducibile di $SU2$ che intendiamo considerare, costituita dagli autovettori di J_3 ordinati per autovalore decrescente (base canonica), abbiamo⁶³ (cfr (2.13.455), (2.13.459) e (2.13.460))

$$(J_1)_{m'm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[N_m^j \delta_{m'+1,m} + N_{m'}^j \delta_{m',m+1} \right] \quad (2.13.532)$$

$$(J_2)_{m'm} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[N_m^j \delta_{m'+1,m} - N_{m'}^j \delta_{m',m+1} \right] \quad 2 \quad (2.13.533)$$

$$(J_3)_{m'm} = m' \delta_{m',m} \quad (2.13.534)$$

Consideriamo dunque la matrice \mathcal{D} che, nella base canonica, corrisponde all'elemento del gruppo individuato dagli angoli di Eulero (α, β, γ) .

Evidentemente avremo

$$\mathcal{D}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha J_3} e^{i\beta J_2} e^{i\gamma J_3} \quad (2.13.535)$$

dove le J_k sono le matrici che rappresentano i generatori del gruppo nella base canonica relativamente alla rappresentazione di spin j considerata.

Ma, evidentemente, vista la base scelta, le matrici $e^{i\alpha J_3}$ e $e^{i\gamma J_3}$ sono diagonali e dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j(\alpha, \beta, \gamma)_{m'm} &= \langle j, m' | e^{i\alpha J_3} e^{i\beta J_2} e^{i\gamma J_3} | j, m \rangle = \\ &= e^{i\alpha m'} e^{i\gamma m} \langle j, m' | e^{i\beta J_2} | j, m \rangle \end{aligned} \quad (2.13.536)$$

Per determinare l'elemento di matrice $\mathcal{D}^j(\alpha, \beta, \gamma)_{m'm}$ ci siamo così ricondotti a dover esplicitare solo gli elementi di matrice di $e^{i\beta J_2}$ che, essendo J_2 immaginaria pura, sono reali. Seguendo Wigner⁶⁴ si definisce

$$d_{m'm}^j(\beta) \equiv \langle j, m' | e^{i\beta J_2} | j, m \rangle \quad (2.13.537)$$

per cui possiamo scrivere che

$$\mathcal{D}^j(\alpha, \beta, \gamma)_{m'm} = e^{i\alpha m'} e^{i\gamma m} d_{m'm}^j(\beta) \quad (2.13.538)$$

La formula generale che fornisce l'espressione di $d_{m'm}^j(\beta)$, determinata da Wigner, è la seguente

$$\begin{aligned} d_{m'm}^j(\beta) &= \sqrt{(j+m')! (j-m')! (j+m)! (j-m)!} \cdot \\ &\cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(j-m'-n)! (j+m-n)! (m'-m+n)! n!} \cdot \\ &\cdot \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j+m-m'-2n} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m'-m+2n} \end{aligned} \quad (2.13.539)$$

⁶³Si faccia attenzione all'inversione dei due indici ...

⁶⁴E.P. Wigner: "Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantummechanik der Atomspektren" (1931) tradotto come "Group theory and its application to the Quantum Mechanics of Atomic spectra" (1959)

dove la somma sull'indice n è fatta su tutti gli interi non negativi per i quali gli argomenti di tutti i fattoriali restano non negativi.

Di seguito riportiamo alcune interessanti proprietà degli elementi di matrice $d_{m'm}^j(\beta)$.

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{mm'}^j(\beta) \quad (2.13.540)$$

$$d_{m'm}^j(\beta) = d_{-m-m'}^j(\beta) \quad (2.13.541)$$

$$d_{m'm}^j(\beta) = d_{mm'}^j(-\beta) \quad (2.13.542)$$

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^{j+m'} d_{m'-m}^j(\pi - \beta) \quad (2.13.543)$$

$$d_{m'm}^j(0) = \delta_{m'm} \quad (2.13.544)$$

$$d_{m'm}^j(\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m',-m} \quad (2.13.545)$$

$$d_{m'm}^j(\beta + 2\pi) = (-1)^{2j} d_{m'm}^j(\beta) \quad (2.13.546)$$

Si osservi che

- se j è intero, allora possiamo limitare il campo di variabilità di β fra 0 e 2π , poichè la (2.13.546) stabilisce che, in questo caso, è $d_{m'm}^j(\beta + 2\pi) = d_{m'm}^j(\beta)$;
- se j è semidispari, allora abbiamo $d_{m'm}^j(\beta + 2\pi) = -d_{m'm}^j(\beta)$ e il campo di variabilità di β deve essere da 0 a 4π .

Un risultato importante circa le proprietà di ortogonalità⁶⁵ degli elementi di matrice \mathcal{D}^j è il seguente

$$\int dR \mathcal{D}_{ab}^j(R)^* \mathcal{D}_{a'b'}^{j'}(R) = \frac{1}{2j+1} \delta_{j'j} \delta_{a'a} \delta_{b'b} \int dR \quad (2.13.547)$$

dove R , parametrizzato con gli angoli di Eulero (α, β, γ) , è tale che

$$dR = d\alpha \sin \beta d\beta d\gamma \quad (2.13.548)$$

con β compreso fra 0 e π , α e γ compresi fra 0 e 2π se j e j' sono entrambi interi, altrimenti fra 0 e 4π .

Riguardo infine ai valori degli elementi della matrice d^j , già ne abbiamo determinata direttamente l'espressione per gli spin $j = 1/2$ e $j = 1$.

Abbiamo visto, infatti, per esempio, che per $j = 1/2$ e quindi per $J_2 = \frac{\sigma_2}{2}$, risulta

$$\begin{aligned} d^{\frac{1}{2}}(\beta) &= e^{i\beta \frac{\sigma_2}{2}} = I \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + i \sigma_2 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13.549)$$

⁶⁵M. Tinkham: "Group theory and Quantum Mechanics", 1964

e dunque, secondo la definizione data, è

$$d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \cos \frac{\beta}{2} = d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta) \quad (2.13.550)$$

$$d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \sin \frac{\beta}{2} = -d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta) \quad (2.13.551)$$

Proviamo, per prova, a calcolare $d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta)$ con la formula di Wigner (2.13.539).

Dobbiamo assumere $j = m' = m = \frac{1}{2}$. E' immediato che la somma si riduce al solo addendo corrispondente a $n = 0$ perchè qualunque $n > 0$ renderebbe negativo l'argomento del fattoriale ($j - m' - n$). Dunque

$$d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \sqrt{1!0!1!0!} \frac{(-1)^0}{0!1!0!0!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^1 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^0 = \cos \frac{\beta}{2} \quad (2.13.552)$$

in accordo con la (2.13.550).

Passiamo adesso a valutare $d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta)$, ovvero al caso in cui $j = m' = \frac{1}{2}$ e $m = -\frac{1}{2}$. Di nuovo, l'unico addendo è quello che corrisponde a $n = 0$ per via che, altrimenti, la quantità ($j - m' - n$) diventa negativa. Quindi

$$d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \sqrt{1!0!0!1!} \frac{(-1)^0}{0!0!1!0!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^0 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^1 = \sin \frac{\beta}{2} \quad (2.13.553)$$

in accordo con la (2.13.551).

Non staremo a calcolare i termini dipendenti da questi due, ovvero $d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta)$ e $d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\beta)$, bensì passeremo a considerare l'altro caso già determinato direttamente, ovvero quello relativo allo spin $j = 1$. Abbiamo trovato che, con la terminologia di adesso, (cfr. (2.13.522))

$$e^{i\beta J_2} = d^1(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\beta}{2} \\ -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \cos\beta & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\beta}{2} & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.13.554)$$

Non staremo a calcolare tutti i termini, ma, come in precedenza, calcoleremo solo quelli indipendenti. Iniziamo da

$$d_{11}^1(\beta) = \frac{1 + \cos\beta}{2} = d_{-1-1}^1 \quad (2.13.555)$$

Vediamo dunque cosa fornisce la formula di Wigner quando $j = m' = m = 1$. Di nuovo, poiché $j = m'$, l'unica possibilità affinché il termine $j - m' - n$ non sia negativo è che $n = 0$. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} d_{11}^1(\beta) &= \sqrt{2!0!2!0!} \frac{(-1)^0}{0!2!0!0!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^2 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^0 = \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1 + \cos\beta}{2} \end{aligned} \quad (2.13.556)$$

in accordo con quanto ci aspettavamo. Occupiamoci adesso di calcolare

$$d_{10}^1(\beta) = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} = d_{0-1}^1(\beta) = -d_{01}^1(\beta) = -d_{-10}^1(\beta) \quad (2.13.557)$$

In questo caso abbiamo $j = m' = 1$ e $m = 0$: poiché $j = m'$, di nuovo, la somma che compare nell'espressione di Wigner è fatta dal solo addendo relativo a $n = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} d_{10}^1(\beta) &= \sqrt{2!0!1!1!} \frac{(-1)^0}{0!1!1!0!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^1 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^1 = \sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \\ &= \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.13.558)$$

in accordo con il risultato diretto (2.13.554). Occupiamoci adesso di

$$d_{1-1}^1(\beta) = \frac{1 - \cos \beta}{2} = d_{-11}^1 \quad (2.13.559)$$

In questo caso abbiamo $j = m' = 1$ e $m = -1$: anche in questo caso, per il solito motivo, nell'espressione di Wigner è presente solo il contributo relativo a $n = 0$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} d_{1-1}^1(\beta) &= \sqrt{2!0!0!2!} \frac{(-1)^0}{0!0!2!0!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^0 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1 - \cos \beta}{2} \end{aligned} \quad (2.13.560)$$

in accordo con il risultato diretto (2.13.554). Occupiamoci infine di

$$d_{00}^1(\beta) = \cos \beta \quad (2.13.561)$$

In questo caso abbiamo $j = 1$ e $m' = m = 0$ e i soli possibili valori dell'indice n sono $n = 0$ e $n = 1$. Si ha

$$\begin{aligned} d_{00}^1(\beta) &= \sqrt{1!1!1!1!} \left[\frac{(-1)^0}{1!1!0!0!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^2 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^0 + \frac{(-1)^1}{0!0!1!1!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^0 \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^2 \right] = \\ &= \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^2 = \cos \beta \end{aligned} \quad (2.13.562)$$

2.13.4 Esempio 3: la rappresentazione di spin $j = \frac{3}{2}$

Sulla base di quanto abbiamo già appreso, la matrice J_3 , nella base canonica $|j, m\rangle$, avrà la forma seguente

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (2.13.563)$$

e quindi la matrice $e^{i\alpha J_3}$ sarà anch'essa diagonale e pari a

$$e^{i\alpha J_3} = \begin{pmatrix} e^{\frac{3i}{2}\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{3i}{2}\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.13.564)$$

Quanto ai generatori J_1 e J_2 , come abbiamo già visto, essi saranno dati da

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^- + J^+); \quad J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(J^- - J^+) \quad (2.13.565)$$

e, sulla base di quanto già detto, risulta

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & N_{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.566)$$

$$J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.567)$$

dove, come abbiamo imparato

$$N_m^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \quad (2.13.568)$$

e quindi

$$N_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \quad N_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}; \quad N_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad (2.13.569)$$

per cui risulta infine

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.570)$$

$$J_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.571)$$

e il calcolo, attraverso la formula di Wigner, degli elementi della matrice $d^{\frac{3}{2}}(\beta)$ conduce a (riportiamo di seguito solo i termini indipendenti)

$$d^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}(\beta) = \frac{1 + \cos \beta}{2} \cos(\beta/2) \quad (2.13.572)$$

$$d^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}(\beta) = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \beta}{2} \sin(\beta/2) \quad (2.13.573)$$

$$d^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}(\beta) = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \beta}{2} \cos(\beta/2) \quad (2.13.574)$$

$$d^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}(\beta) = -\frac{1 - \cos \beta}{2} \sin(\beta/2) \quad (2.13.575)$$

$$d^{\frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta) = \frac{3 \cos \beta - 1}{2} \cos(\beta/2) \quad (2.13.576)$$

$$d^{\frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\beta) = -\frac{3 \cos \beta + 1}{2} \sin(\beta/2) \quad (2.13.577)$$

2.13.5 Esempio 4: la rappresentazione di spin $j = 2$

Nel caso della rappresentazione di spin $j = 2$, gli autovalori di J_3 vanno da $+2$ a -2 e, quanto alla rappresentazione della rotazione intorno al terzo asse nella base degli autovettori di J_3 ordinati per autovalore decrescente, essa, che è naturalmente diagonale, risulta pari a

$$e^{i\alpha J_3} = \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2i\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.13.578)$$

Allo scopo di determinare J_1 e J_2 , iniziamo dalle espressioni di J^\pm . Sulla base di quanto già conosciamo, si ha

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & N_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.579)$$

$$J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{-1}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.580)$$

dove, usando l'espressione ben nota per cui $N_m^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$, abbiamo che

$$N_2^2 = \sqrt{2}; \quad N_1^2 = \sqrt{3}; \quad N_0^2 = \sqrt{3}; \quad N_{-1}^2 = \sqrt{2} \quad (2.13.581)$$

Ma

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^- + J^+); \quad J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(J^- - J^+) \quad (2.13.582)$$

per cui risulta

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.583)$$

$$J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13.584)$$

e quanto alla formula di Wigner per gli elementi (indipendenti) della matrice $d^2(\beta)$, essa fornisce

$$d_{22}^2(\beta) = \left(\frac{1 + \cos \beta}{2} \right)^2 \quad (2.13.585)$$

$$d_{21}^2(\beta) = -\frac{1}{2} \sin \beta (1 + \cos \beta) \quad (2.13.586)$$

$$d_{20}^2(\beta) = \sqrt{\frac{3}{8}} \sin^2 \beta \quad (2.13.587)$$

$$d_{2-1}^2(\beta) = -\frac{1}{2} \sin \beta (1 - \cos \beta) \quad (2.13.588)$$

$$d_{2-2}^2(\beta) = \left(\frac{1 - \cos \beta}{2} \right)^2 \quad (2.13.589)$$

$$d_{11}^2(\beta) = \frac{1 + \cos \beta}{2} (2 \cos \beta - 1) \quad (2.13.590)$$

$$d_{10}^2(\beta) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta \quad (2.13.591)$$

$$d_{1-1}^2(\beta) = \frac{1 - \cos \beta}{2} (2 \cos \beta + 1) \quad (2.13.592)$$

$$d_{00}^2(\beta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) \quad (2.13.593)$$

2.14 Prodotto di due rappresentazioni irriducibili

Supponiamo che lo spazio vettoriale dove agisce il gruppo $SU2$ sia il prodotto diretto (prodotto tensoriale) di due spazi vettoriali \mathcal{E}_1 ed \mathcal{E}_2 , il primo fatto dai vettori $|a \rangle$, che si trasformano secondo la rappresentazione irriducibile D_1 , il secondo fatto dai vettori $|\alpha \rangle$, che si trasformano secondo la rappresentazione irriducibile D_2 . Se $|a_i \rangle$ è una base ortonormale nel primo spazio e $|\alpha_j \rangle$ lo è del secondo, allora, per definizione, $|a_i \rangle |\alpha_j \rangle$ è una base dello spazio vettoriale $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, prodotto diretto dei due.

Riguardo all'azione di $SU2$ sui vettori di questo spazio, per ipotesi si ha

$$\begin{aligned} D(\vec{a})|a_i \rangle |\alpha_j \rangle &= (D_1(\vec{a})|a_i \rangle) (D_2(\vec{a})|\alpha_j \rangle) = \\ &= D_1(\vec{a})_{ki} D_2(\vec{a})_{sj} |a_k \rangle |\alpha_s \rangle \end{aligned} \quad (2.14.594)$$

L'operatore che agisce sulla base $|a_i \rangle |\alpha_j \rangle$ ha quindi componenti matriciali date da $D_1(\vec{a})_{ki} D_2(\vec{a})_{sj}$.

Allo scopo di determinare i generatori della *rappresentazione prodotto* consideriamo una trasformazione infinitesima per la quale, evidentemente, si ha

$$D_1(\vec{a})_{ki} D_2(\vec{a})_{sj} \approx \left(I + \vec{a} \cdot \vec{J}_1 \right)_{ki} \left(I + \vec{a} \cdot \vec{J}_2 \right)_{sj} \quad (2.14.595)$$

e dunque, al primo ordine nei parametri \vec{a} , risulta

$$D_1(\vec{a})_{ki} \otimes D_2(\vec{a})_{sj} \approx I_{ki} \otimes I_{sj} + \vec{a} \cdot \left[(\vec{J}_1)_{ki} \otimes I_{sj} + I_{ki} \otimes (\vec{J}_2)_{sj} \right] \quad (2.14.596)$$

dove abbiamo usato il simbolo \otimes relativo al prodotto diretto, per significare che l'operatore a sinistra di quel simbolo agisce sui vettori dello spazio \mathcal{E}_1 , mentre l'operatore a destra agisce sui vettori dello spazio \mathcal{E}_2 .

La (2.14.596) mostra che, quando si "moltiplicano" fra loro rappresentazioni differenti, i generatori si sommano nel senso mostrato sopra (ognuno agendo nel proprio spazio).

Per semplicità, nel seguito, invece di scrivere che

$$\vec{J}^{(1\otimes 2)} = \vec{J}^{(1)} \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes \vec{J}^{(2)} \quad (2.14.597)$$

scriveremo più concisamente che

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1\otimes 2)} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)} \quad (2.14.598)$$

intendendo però quanto detto sopra.

Supponiamo ora che la rappresentazione D_1 sia la rappresentazione irriducibile di spin j_1 , agente nello spazio vettoriale \mathcal{E}_1 di dimensione $2j_1 + 1$, mentre D_2 sia la rappresentazione irriducibile di spin j_2 , agente nello spazio vettoriale \mathcal{E}_2 di dimensione $2j_2 + 1$.

Supporremo, senza che questo conduca a perdita di generalità, che $j_1 \geq j_2$.

Prendiamo ora come base ortonormale dello spazio prodotto tensoriale $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ quella ottenuta dal prodotto tensoriale delle due basi canoniche in \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , ovvero

$$|j_1, m_1 \rangle |j_2, m_2 \rangle \quad (2.14.599)$$

Questo spazio vettoriale \mathcal{E} ha, ovviamente, dimensione $N = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ e la rappresentazione D di $SU2$, indotta in esso dalle rappresentazioni D_1 e D_2 nel modo descritto sopra, sarà, in generale, (completamente) riducibile.

Vogliamo vedere come D si possa decomporre in somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Iniziamo osservando che i vettori della base (2.14.599) sono tutti autovettori del generatore J_3 della rappresentazione D , infatti abbiamo

$$\begin{aligned} J_3 |j_1, m_1 \rangle |j_2, m_2 \rangle &\equiv (J_3^{(1)} |j_1, m_1 \rangle) |j_2, m_2 \rangle + |j_1, m_1 \rangle (J_3^{(2)} |j_2, m_2 \rangle) = \\ &= (m_1 + m_2) |j_1, m_1 \rangle |j_2, m_2 \rangle \equiv \\ &\equiv m |j_1, m_1 \rangle |j_2, m_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.14.600)$$

Poiché $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ e $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$, i possibili autovalori m dell'operatore J_3 saranno evidentemente compresi nell'intervallo $-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2$. Abbiamo visto che le rappresentazioni irriducibili di $SU2$ possono essere "costruite" a partire dal vettore con l'autovalore M di J_3 più grande (per il quale, quindi, l'applicazione a esso dell'operatore J^+ conduce al vettore nullo) attraverso l'applicazione iterata dell'operatore J^- che, ogni volta, conduce a un autovettore di J_3 per un autovalore diminuito di una unità rispetto all'autovalore relativo all'autovettore di partenza.

Questo accade finché non si raggiunge l'autovalore $-M$, sul cui autovettore l'operatore J^- conduce al vettore nullo.

La catena di autovettori di J_3 così costruita è fatta di autovettori simultanei dell'operatore J^2 corrispondenti all'autovalore $M(M+1)$. Dunque, lo spazio vettoriale (invariante sotto J_3, J^+, J_- e quindi sotto tutti e tre gli operatori J_1, J_2 e J_3) così individuato è sede della rappresentazione irriducibile di spin M . Quindi, posto $M \equiv j_1 + j_2$ ecco che i vettori⁶⁶

$$|M, M \rangle \equiv |j_1, j_1 \rangle |j_2, j_2 \rangle, \quad (2.14.601)$$

$$|M, M-1 \rangle \equiv \frac{1}{N_M^M} J^- |M, M \rangle, \quad (2.14.602)$$

$$|M, M-2 \rangle \equiv \frac{1}{N_{M-1}^M} J^- |M, M-1 \rangle, \quad (2.14.603)$$

.....

$$|M, -M \rangle \equiv \frac{1}{N_{-M+1}^M} J^- |M, -M+1 \rangle \quad (2.14.604)$$

⁶⁶Si ricordi che $N_m^j = \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}}$

costituiscono una base ortonormale di un sottospazio $\mathcal{E}_M \subset \mathcal{E}$, sede di una rappresentazione irriducibile di spin $M = j_1 + j_2$.

Però questa non può essere, in generale, la sola rappresentazione irriducibile presente nel prodotto diretto considerato, non fosse che per il fatto che la dimensione dello spazio sede di questa rappresentazione, come sappiamo dalla teoria generale, è $2M + 1 = 2(j_1 + j_2) + 1 = 2j_1 + 2j_2 + 1$ mentre lo spazio \mathcal{E} ha dimensione $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = 4j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 + 1$ ed è possibile che queste due dimensioni coincidano se e solo se (avendo assunto $j_1 \geq j_2$) $j_2 = 0$. Se dunque $j_2 > 0$, dobbiamo aspettarci che la decomposizione in rappresentazioni irriducibili non si riduca solo a quella di spin M .

Osserviamo infatti che se prendiamo l'autovalore di J_3 uguale a $M - 1 = j_1 + j_2 - 1$, un autovettore corrispondente a questo autovalore è presente nella rappresentazione di spin M , ma nello spazio \mathcal{E} ci sono *due* autovettori indipendenti di J_3 corrispondenti entrambi all'autovalore $M - 1$, cioè $|j_1, j_1 > |j_2, j_2 - 1 >$ e $|j_1, j_1 - 1 > |j_2, j_2 >$.

Dobbiamo dunque aspettarci che una loro combinazione lineare sia nello spazio \mathcal{E}_M , ma che l'autovettore a questo ortogonale individui, a sua volta, una rappresentazione irriducibile di spin $M - 1$.

Vediamolo esplicitamente e iniziamo, per questo, osservando che

$$\begin{aligned}
 J^- |M, M > &= N_M^M |M, M - 1 > = \sqrt{M} |M, M - 1 > = \\
 &= \left(J_{(1)}^- |j_1, j_1 > \right) |j_2, j_2 > + |j_1, j_1 > \left(J_{(2)}^- |j_2, j_2 > \right) = \\
 &= N_{j_1}^{j_1} |j_1, j_1 - 1 > |j_2, j_2 > + N_{j_2}^{j_2} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 - 1 > = \\
 &= \sqrt{j_1} |j_1, j_1 - 1 > |j_2, j_2 > + \sqrt{j_2} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 - 1 > \\
 \Rightarrow |M, M - 1 > &= \sqrt{\frac{j_1}{M}} |j_1, j_1 - 1 > |j_2, j_2 > + \sqrt{\frac{j_2}{M}} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 - 1 > \quad (2.14.605)
 \end{aligned}$$

Consideriamo ora il vettore

$$\sqrt{\frac{j_2}{M}} |j_1, j_1 - 1 > |j_2, j_2 > - \sqrt{\frac{j_1}{M}} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 - 1 > \quad (2.14.606)$$

Esso è ortogonale a $|M, M - 1 >$, è autovettore di J_3 per l'autovalore $M - 1$, è normalizzato e, se gli applichiamo l'operatore J^+ , otteniamo il vettore nullo, come si può verificare⁶⁷ direttamente in modo immediato (vedi nota).

⁶⁷Infatti si ha

$$\begin{aligned}
 &J^+ \left[\sqrt{\frac{j_2}{M}} |j_1, j_1 - 1 > |j_2, j_2 > - \sqrt{\frac{j_1}{M}} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 - 1 > \right] = \\
 &= \sqrt{\frac{j_2}{M}} N_{j_1}^{j_1} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 > - \sqrt{\frac{j_1}{M}} N_{j_2}^{j_2} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 > = \\
 &= \sqrt{\frac{j_2}{M}} \sqrt{j_1} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 > - \sqrt{\frac{j_1}{M}} \sqrt{j_2} |j_1, j_1 > |j_2, j_2 > = 0 \quad (2.14.607)
 \end{aligned}$$

Posto dunque

$$|M - 1, M - 1 \rangle \equiv \sqrt{\frac{j_2}{M}} |j_1, j_1 - 1 \rangle |j_2, j_2 \rangle - \sqrt{\frac{j_1}{M}} |j_1, j_1 \rangle |j_2, j_2 - 1 \rangle \quad (2.14.608)$$

esso risulta essere il capostipite di una catena di autovettori di J_3 per gli autovalori $M - 1, M - 2, \dots, -M + 1$, ottenuti a partire da esso attraverso applicazioni successive di J^- . Lo spazio da essi generato è invariante sotto la rappresentazione che stiamo considerando e quindi questi vettori costituiscono la base di un sottospazio di \mathcal{E} , che indicheremo con \mathcal{E}_{M-1} , dove è definita una rappresentazione irriducibile di SU_2 di spin $M - 1$.

Abbiamo finito con la decomposizione ?

Per capirlo consideriamo la molteplicità degli autovalori di J_3 in \mathcal{E} .

Gli autovalori m di J_3 , la loro molteplicità \mathcal{N} nello spazio \mathcal{E} , prodotto tensoriale di $\mathcal{E}(1)$ ed $\mathcal{E}(2)$, nonché il range degli autovettori corrispondenti a quell'autovalore di J_3 sono riportati nella Tabella riportata sotto, nell'ipotesi che $j_1 \geq j_2$ (altrimenti basta scambiare queste due quantità fra loro ...).

m	\mathcal{N}	autovettori possibili
$j_1 + j_2$	1	$ j_1, j_1 \rangle j_2, j_2 \rangle$
$j_1 + j_2 - 1$	2	$ j_1, j_1 - 1 \rangle j_2, j_2 \rangle, j_1, j_1 \rangle j_2, j_2 - 1 \rangle$
$j_1 + j_2 - 2$	3	$ j_1, j_1 - 2 \rangle j_2, j_2 \rangle, \dots j_1, j_1 \rangle j_2, j_2 - 2 \rangle$
\vdots	\vdots	\vdots
$j_1 - j_2 + 1$	$2j_2$	$ j_1, j_1 - 2j_2 + 1 \rangle j_2, j_2 \rangle, \dots j_1, j_1 \rangle j_2, -j_2 + 1 \rangle$
$j_1 - j_2$	$2j_2 + 1$	$ j_1, j_1 - 2j_2 \rangle j_2, j_2 \rangle, \dots j_1, j_1 \rangle j_2, -j_2 \rangle$
$j_1 - j_2 - 1$	$2j_2 + 1$	$ j_1, j_1 - 2j_2 - 1 \rangle j_2, j_2 \rangle, \dots j_1, j_1 - 1 \rangle j_2, -j_2 \rangle$
\vdots	\vdots	\vdots
$j_2 - j_1$	$2j_2 + 1$	$ j_1, -j_1 \rangle j_2, j_2 \rangle, \dots j_1, -j_1 + 2j_2 \rangle j_2, -j_2 \rangle$
$j_2 - j_1 - 1$	$2j_2$	$ j_1, -j_1 \rangle j_2, j_2 - 1 \rangle, \dots j_1, -j_1 + 2j_2 - 1 \rangle j_2, -j_2 \rangle$
\vdots	\vdots	\vdots
$-j_1 - j_2 + 2$	3	$ j_1, -j_1 + 2 \rangle j_2, -j_2 \rangle, \dots j_1, -j_1 \rangle j_2, -j_2 + 2 \rangle$
$-j_1 - j_2 + 1$	2	$ j_1, -j_1 + 1 \rangle j_2, -j_2 \rangle, j_1, -j_1 \rangle j_2, -j_2 + 1 \rangle$
$-j_1 - j_2$	1	$ j_1, -j_1 \rangle j_2, -j_2 \rangle$

Tabella 2.1: Molteplicità degli autovalori di J_3 nel prodotto diretto di due rappresentazioni

Come si vede, la molteplicità inizia crescendo di una unità al decrescere di una unità dell'autovalore m a partire da $M = j_1 + j_2$, fino a $m = j_1 - j_2 = |j_1 - j_2|$, poi resta costante e uguale a $2j_2 + 1$ fra $m = j_1 - j_2 = |j_1 - j_2|$ e $m = -j_1 + j_2 = -|j_1 - j_2|$ ovvero per $2|j_1 - j_2| + 1$ autovalori decrescenti di m , per riprendere poi a diminuire fino a raggiungere 1, quando

m passa da $j_2 - j_1$ a $-j_2 - j_1$. Tenendo presente che in ogni rappresentazione irriducibile la molteplicità degli autovalori di J_3 è sempre uguale a 1, ecco che, procedendo come abbiamo fatto, insieme alla rappresentazione di spin $M = j_1 + j_2$ e a quella di spin $M - 1 = j_1 + j_2 - 1$, la decomposizione della rappresentazione tensoriale data proseguirà fino a individuare un totale di $2j_2 + 1$ rappresentazioni irriducibili, tutte di spin diverso che va da $j_1 + j_2$ a $j_1 - j_2$ o, rilasciando la condizione $j_1 \geq j_2$, fino a $|j_1 - j_2|$.

Possiamo dunque concludere che la rappresentazione tensoriale definita nello spazio

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \quad (2.14.609)$$

si decompone nella somma diretta delle rappresentazioni irriducibili di spin

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad (2.14.610)$$

e lo spazio lineare \mathcal{E} si decompone nella seguente somma diretta⁶⁸

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{j_1+j_2} \oplus \mathcal{E}_{j_1+j_2-1} \cdots \oplus \mathcal{E}_{|j_1-j_2|} \quad (2.14.612)$$

dove gli indici in basso indicano lo spin della rappresentazione irriducibile presente nel sottospazio vettoriale in questione.

Se poniamo adesso, per semplicità

$$|j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle \equiv |j_1, m_1 \rangle |j_2, m_2 \rangle \quad (2.14.613)$$

e indichiamo con $|j_1, j_2, J; M \rangle$ il vettore normalizzato della rappresentazione irriducibile di spin J con autovalore M di J_3 , il seguente prodotto scalare che stabilisce il legame fra la base ortonormale "tensoriale" e quella fatta dai vettori appartenenti alle diverse rappresentazioni irriducibili

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2, J; M \rangle \equiv C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} \quad (2.14.614)$$

definisce i *coefficienti di Clebsch-Gordan* $C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2}$, i quali sono nulli se $M \neq m_1 + m_2$ oppure $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$. Nella figura che segue (fig.(2.3)) sono riportati i coefficienti più comuni (come da PDG).

⁶⁸E' facile verificare che la dimensione dello spazio tensoriale $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ è effettivamente uguale alla somma delle dimensioni degli spazi di cui alla somma diretta (2.14.612), infatti

$$\begin{aligned} \sum_{j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) &= j_1 + j_2 - (j_1 - j_2) + 1 + 2 \sum_{j_1-j_2}^{j_1+j_2} j = 2j_2 + 1 + 2 \sum_1^{j_1+j_2} j - 2 \sum_1^{j_1-j_2-1} j = \\ &= 2j_2 + 1 + 2 \frac{(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)}{2} - 2 \frac{(j_1 - j_2 - 1)(j_1 - j_2)}{2} = \\ &= 2j_2 + 1 + (j_1 + j_2)^2 + j_1 + j_2 - (j_1 - j_2)^2 + j_1 - j_2 = \\ &= 2j_2 + 1 + 2j_1 + j_1^2 + j_2^2 + 2j_1 j_2 - j_1^2 - j_2^2 + 2j_1 j_2 = \\ &= 2j_1 + 2j_2 + 1 + 4j_1 j_2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \end{aligned} \quad (2.14.611)$$

Essendo $\{|j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle\}$ e $\{|j_1, j_2, J; M \rangle\}$ entrambe basi ortonormali dello stesso spazio vettoriale, attraverso i coefficienti di Clebsch-Gordan è possibile esprimere gli elementi di una base in termini degli elementi dell'altra

$$|j_1, j_2, J; M \rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2, J; M \rangle \quad (2.14.615)$$

$$|j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle = \sum_{J, M} |j_1, j_2, J; M \rangle \langle j_1, j_2, J; M | j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle \quad (2.14.616)$$

Occorre adesso osservare un aspetto che riguarda la convenzione di fase relativa agli autovettori $|j_1, j_2, J; M \rangle$. Per quanto abbiamo già visto, in ogni multipletto con J definito, le fasi relative dei vari autovettori corrispondenti a diversi valori di M sono fissate dalla scelta di "realità" dei coefficienti N_M^J . Però, la fase di ciascun capostipite dei vari multipletti è, a priori, ancora arbitraria. Essa viene fissata imponendo che

$$\langle j_1, j_2; j_1, J - j_1 | j_1, j_2, J; J \rangle \text{ reale positivo} \quad (2.14.617)$$

In questo modo, si dimostra che *tutti* i coefficienti di Clebsch-Gordan sono reali e dunque

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2, J; M \rangle = \langle j_1, j_2, J; M | j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle \quad (2.14.618)$$

$$\Rightarrow C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} = \left(C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} \right)^* \quad (2.14.619)$$

per cui risulta

$$|j_1, j_2, J; M \rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} \quad (2.14.620)$$

$$|j_1, j_2; m_1, m_2 \rangle = \sum_{J, M} |j_1, j_2, J; M \rangle C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} \quad (2.14.621)$$

Poichè le due basi sono ortonormali, i coefficienti di Clebsch-Gordan costituiscono gli elementi di una matrice unitaria che, essendo fatta di soli elementi reali, è ortogonale. Risulta così che

$$\begin{aligned} & \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} = \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; m'_1, m'_2 \rangle = \\ & = \sum_{J, M} C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} C_{m'_1 m'_2; JM}^{j_1 j_2} \end{aligned} \quad (2.14.622)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} = \langle j_1, j_2, J, M | j_1, j_2, J', M' \rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2; JM}^{j_1 j_2} C_{m_1 m_2; J'M'}^{j_1 j_2} \end{aligned} \quad (2.14.623)$$

Vediamo adesso alcune importanti proprietà legate ai coefficienti di Clebsch-Gordan e alle matrici di rotazione \mathcal{D} .

Abbiamo visto che

$$|k, a \rangle |j, m \rangle \equiv |k, j; a, m \rangle = \sum_{J, M} |k, j, J; M \rangle C_{am; JM}^{kj} \quad (2.14.624)$$

Dunque avremo altresì che, se R è una generica rotazione e $U(R)$ è l'operatore lineare che la rappresenta nello spazio che stiamo considerando, sarà

$$U(R)|k, a \rangle |j, m \rangle = \sum_{J, M} U(R)|k, j, J; M \rangle C_{am; JM}^{kj} \quad (2.14.625)$$

ovvero, indicando per comodità con \mathcal{D} le matrici di rotazione corrispondenti alla rotazione R (invece di $\mathcal{D}(R)$), avremo

$$\sum_{b, m'} \mathcal{D}_{ba}^k \mathcal{D}_{m'm}^j |k, b \rangle |j, m' \rangle = \sum_{J, M, M'} \mathcal{D}_{M'M}^J |k, j, J; M' \rangle C_{am; JM}^{kj} \quad (2.14.626)$$

ma, per la (2.14.620) abbiamo che

$$|k, j, J; M' \rangle = \sum_{b, m'} |k, j; b, m' \rangle C_{bm'; JM'}^{kj} \quad (2.14.627)$$

dunque

$$\sum_{b, m'} \mathcal{D}_{ba}^k \mathcal{D}_{m'm}^j |k, j; b, m' \rangle = \sum_{J, M, M'} \mathcal{D}_{M'M}^J C_{am; JM}^{kj} \sum_{b, m'} |k, j; b, m' \rangle C_{bm'; JM'}^{kj} \quad (2.14.628)$$

Poiché i vettori $|k, j; b, m' \rangle$ costituiscono una base, ne segue che deve essere

$$\mathcal{D}_{ba}^k \mathcal{D}_{m'm}^j = \sum_{J, M, M'} \mathcal{D}_{M'M}^J C_{am; JM}^{kj} C_{bm'; JM'}^{kj} \quad (2.14.629)$$

ovvero, più esplicitamente, che, qualunque sia la rotazione R , risulta

$$\mathcal{D}_{ba}^k(R) \mathcal{D}_{m'm}^j(R) = \sum_{J, M, M'} \mathcal{D}_{M'M}^J(R) C_{am; JM}^{kj} C_{bm'; JM'}^{kj} \quad (2.14.630)$$

Può essere utile, infine, ricordare la proprietà di ortogonalità delle matrici \mathcal{D} di cui alla (2.13.547), ovvero che

$$\int dR \mathcal{D}_{ab}^j(R)^* \mathcal{D}_{a'b'}^{j'}(R) = \frac{1}{2j+1} \delta_{j'j} \delta_{a'a} \delta_{b'b} \int dR \quad (2.14.631)$$

dove la parametrizzazione è quella di Eulero e $dR = d\alpha \sin \beta d\beta d\gamma$.

2.15 Operatori tensoriali e teorema di Wigner-Eckart

Consideriamo uno spazio di Hilbert \mathcal{E} e immaginiamo che sia assegnata una rappresentazione⁶⁹ unitaria $U(R)$ del gruppo delle rotazioni, da \mathcal{E} in \mathcal{E} .

Un operatore tensoriale di rango k è costituito dall'insieme delle sue $2k + 1$ componenti T_a^k , con $-k \leq a \leq k$. Ciascuna componente T_a^k è un operatore lineare agente da \mathcal{E} in sé e accade che⁷⁰

$$U(R) T_a^k U^{-1}(R) = \mathcal{D}_{ba}^k(R) T_b^k \quad (2.15.632)$$

Supponiamo adesso di aver scelto una base ortonormale dello spazio \mathcal{E} fatta da autovettori simultanei di J^2 e J_z , ovvero appartenenti a multipletti di spin j opportuno. Per garantire la possibilità di più di un multipletto con lo stesso spin, indicheremo i vettori della base con

$$|j, m, \alpha \rangle \quad (2.15.633)$$

dove α sarà l'autovalore (o gli autovalori ...) di un altro opportuno operatore che, insieme a J^2 e J_z , costituiscono insieme un set completo di osservabili che commutano.

Consideriamo adesso i vettori di un multipletto generico su cui agiscono gli operatori tensoriali di cui sopra e studiamone le proprietà di trasformazione per rotazione.

$$T_a^k |j_1, m_1, \alpha \rangle \quad (2.15.634)$$

Abbiamo⁷¹

$$\begin{aligned} U(R) T_a^k |j_1, m_1, \alpha \rangle &= U(R) T_a^k U^{-1}(R) U(R) |j_1, m_1, \alpha \rangle = \\ &= \sum_{b, m'} \mathcal{D}_{ba}^k T_b^k \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{j_1} |j_1, m'_1, \alpha \rangle = \\ &= \sum_{b, m'} \mathcal{D}_{ba}^k \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{j_1} T_b^k |j_1, m'_1, \alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.15.635)$$

dove abbiamo posto, per semplicità di notazione, $\mathcal{D}_{mm'}^j(R) = \mathcal{D}_{mm'}^j$.

Supponiamo adesso che $|j_2, m_2, \beta \rangle$ sia un altro vettore della base considerata e interessiamoci all'elemento di matrice $\langle j_2, m_2, \beta | T_a^k |j_1, m_1, \alpha \rangle$.

⁶⁹Salvo diverso avviso, individueremo la generica rotazione R con i tre angoli di Eulero (α, β, γ) e, quando necessario, useremo il differenziale dR per indicare l'elemento di "volume" angolare $d\alpha \sin \beta d\beta d\gamma$, con α e γ da 0 a 2π e β da 0 a π .

⁷⁰A voler essere precisi, occorrerebbe dire che nello spazio vettoriale dei $2k+1$ operatori, si può scegliere una base per i cui elementi accade quanto riportato nella (2.15.632). Si tratta della base "sferica". Scegliendo altre basi, la legge (2.15.632) cambia per una trasformazione di verosimiglianza ...

⁷¹Poiché α , per ipotesi, è autovalore di un operatore che commuta con \vec{J} , ecco che $U(R)|j, m, \alpha \rangle$ può "mescolare" solo i vettori del multipletto definito tanto dallo spin j che dallo stesso α .

Evidentemente (si ricordi che la rappresentazione $U(R)$ è unitaria) abbiamo

$$\begin{aligned}
 \langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle &= \langle j_2, m_2, \beta | U^{-1}(R) U(R) T_a^k U^{-1}(R) U(R) | j_1, m_1, \alpha \rangle = \\
 &= \sum_{b, m'_1} \langle U(R)(j_2, m_2, \beta) | \mathcal{D}_{ba}^k T_b^k \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{j_1} | j_1, m'_1, \alpha \rangle = \\
 &= \sum_{b, m'_1, m'_2} (\mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{j_2})^* \mathcal{D}_{ba}^k \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{j_1} \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle \quad (2.15.636)
 \end{aligned}$$

Ma, come abbiamo visto (cfr.(2.14.629)), si ha

$$\mathcal{D}_{ba}^k \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{j_1} = \sum_{J, M, M'} \mathcal{D}_{M' M}^J C_{a, m_1; J, M}^{k j_1} C_{b, m'_1; J, M'}^{k j_1} \quad (2.15.637)$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 \langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle &= \\
 &= \sum_{b, m'_1, m'_2} (\mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{j_2})^* \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle \sum_{J, M, M'} \mathcal{D}_{M' M}^J C_{a, m_1; J, M}^{k j_1} C_{b, m'_1; J, M'}^{k j_1} = \\
 &= \sum_{b, m'_1, m'_2} \sum_{J, M, M'} (\mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{j_2})^* \mathcal{D}_{M' M}^J C_{a, m_1; J, M}^{k j_1} C_{b, m'_1; J, M'}^{k j_1} \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle \quad (2.15.638)
 \end{aligned}$$

dove, evidentemente, solo le \mathcal{D} dipendono dalle rotazioni R .

Integrando in $dR = d\alpha \sin \beta d\beta d\gamma$, quanto al primo membro della (2.15.638), ovviamente abbiamo

$$\int dR \langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle = 8\pi^2 \langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle \quad (2.15.639)$$

Circa il secondo membro, occorre per prima cosa ricordare la (2.14.631), secondo la quale

$$\begin{aligned}
 \int dR (\mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{j_2}(R))^* \mathcal{D}_{M' M}^J(R) &= \frac{1}{2j_2 + 1} \delta_{j_2 J} \delta_{m'_2 M'} \delta_{m_2 M} \int dR = \\
 &= \frac{8\pi^2}{2j_2 + 1} \delta_{j_2 J} \delta_{m'_2 M'} \delta_{m_2 M} \quad (2.15.640)
 \end{aligned}$$

per cui, dividendo ambo i membri per $\int dR = 8\pi^2$, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle &= \sum_{b, m'_1, m'_2} \sum_{J, M, M'} \frac{1}{2j_2 + 1} \delta_{j_2 J} \delta_{m'_2 M'} \delta_{m_2 M} \cdot \\
 &\cdot C_{a, m_1; J, M}^{k j_1} C_{b, m'_1; J, M'}^{k j_1} \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle = \\
 &= \sum_{b, m'_1, m'_2} \frac{1}{2j_2 + 1} C_{a, m_1; j_2, m_2}^{k j_1} C_{b, m'_1; j_2, m'_2}^{k j_1} \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle \quad (2.15.641)
 \end{aligned}$$

2.15. OPERATORI TENSORIALI E TEOREMA DI WIGNER-ECKART 139

ovvero, poiché il coefficiente di Clebsch-Gordan $C_{a,m_1;j_2,m_2}^{kj_1}$ non dipende dagli indici b, m'_1, m'_2 su cui si somma, risulta

$$\begin{aligned} \langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle &= C_{a,m_1;j_2,m_2}^{kj_1} \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{b,m'_1,m'_2} \frac{1}{2j_2+1} C_{b,m'_1;j_2,m'_2}^{kj_1} \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle \right\} \end{aligned} \quad (2.15.642)$$

La quantità entro parentesi graffa, data la somma presente su tutti i possibili valori di b, m'_1, m'_2 , potrà dipendere solo da j_2 e β , dal tensore T^k come un tutto e non dalle sue componenti, da j_1 e α : essa viene chiamata *elemento di matrice ridotto* e indicato con il simbolo $\langle j_2, \beta || T^k || j_1, \alpha \rangle$

$$\langle j_2, \beta || T^k || j_1, \alpha \rangle \equiv \sum_{b,m'_1,m'_2} \frac{1}{2j_2+1} C_{b,m'_1;j_2,m'_2}^{kj_1} \langle j_2, m'_2, \beta | T_b^k | j_1, m'_1, \alpha \rangle \quad (2.15.643)$$

per cui abbiamo infine che

$$\langle j_2, m_2, \beta | T_a^k | j_1, m_1, \alpha \rangle = \langle j_2, \beta || T^k || j_1, \alpha \rangle C_{a,m_1;j_2,m_2}^{kj_1} \quad (2.15.644)$$

Questo risultato è noto come *teorema di Wigner-Eckart*.

Esso stabilisce che la dipendenza dagli autovalori m_1, a, m_2 di J_3 è descritta unicamente attraverso il coefficiente di Clebsch-Gordan $C_{a,m_1;j_2,m_2}^{kj_1}$.

Una conseguenza è che, noto l'elemento di matrice per una componente T_a^k fra $|j_1, m_1, \alpha \rangle$ e $|j_2, m_2, \beta \rangle$, purché questo non sia nullo, possiamo immediatamente determinare l'elemento di matrice relativo a qualunque componente sferica del tensore dato, fra qualunque coppia di stati appartenenti, rispettivamente, al multipletto definito da j_1 e a quello definito da j_2 , usando solo i coefficienti di Clebsch-Gordan.

2.16 Il gruppo $SU(3)$

Dopo il gruppo $SU2$, $SU3$ è certamente uno dei gruppi di simmetria più importanti che ricorrono nella Fisica delle particelle elementari.

La prima realizzazione del gruppo, che indicheremo con il simbolo $SU(3)$, è fatta dalle matrici unitarie 3×3 con determinante uguale a 1, pensate come operatori lineari⁷² che agiscono nello spazio vettoriale \mathbb{C}^3 . Dunque $SU(3)$ può essere visto come il sottogruppo di $GL(3, \mathbb{C})$ definito dalle condizioni

$$U \in SU(3) \Leftrightarrow U^{-1} = U^\dagger; \det(U) = +1 \quad (2.16.645)$$

Abbiamo già detto che ogni matrice unitaria U può essere posta in forma esponenziale, in modo che risulti

$$U = e^{iH} \quad (2.16.646)$$

dove H è una opportuna matrice hermitiana.

La condizione sul determinante, essendo

$$\det(U) = e^{iTr(H)} \quad (2.16.647)$$

implica che la matrice H debba avere traccia nulla.

La più generale matrice 3×3 a coefficienti complessi, hermitiana e con traccia nulla è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha^* & b & \gamma \\ \beta^* & \gamma^* & c \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a + b + c = 0 \quad (2.16.648)$$

Risulta allora evidente come il gruppo di Lie $SU(3)$ sia un gruppo a otto parametri: sei necessari per descrivere i generatori aventi componenti fuori diagonale e due per descrivere quelli che hanno a che fare con la parte diagonale.

Come sempre, esiste un'ampia scelta per definire una base dell'algebra di Lie associata al gruppo: iniziamo osservando che se \tilde{U} è una qualsiasi matrice di $SU(2)$, allora la matrice 3×3 così definita

$$U = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{11} & \tilde{U}_{12} & 0 \\ \tilde{U}_{21} & \tilde{U}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16.649)$$

⁷²Da un punto di vista strettamente matematico, questo gruppo di matrici, e quindi di operatori, costituisce l'immagine di una rappresentazione fedele del gruppo $SU3$ astratto. Usualmente, questa rappresentazione è indicata con il simbolo $\mathbf{3}$, a indicare la dimensione dello spazio vettoriale sul corpo complesso su cui questi operatori agiscono.

A completamento di quanto detto sopra, ricordiamo che la rappresentazione complessa coniugata, che alla matrice U associa la matrice U^* , anch'essa ovviamente di dimensione tre, è usualmente indicata con il simbolo $\bar{\mathbf{3}}$ e non è equivalente alla $\mathbf{3}$, ovvero non esiste una trasformazione di verosimiglianza che mandi una rappresentazione nell'altra, ovvero non esiste una matrice invertibile V tale che $U^* = AVA^{-1}$.

appartiene certamente a $SU(3)$.

Possiamo iniziare allora assumendo fra i generatori di $SU(3)$ quelli che generano il sottogruppo isomorfo a $SU(2)$ di cui sopra, ovvero le matrici⁷³

$$\Sigma_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_{32} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.650)$$

$$\Sigma_{33} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.651)$$

dove il primo indice (= 3...) ricorda che questi generatori definiscono matrici che lasciano invariata la terza componente dei vettori a cui vengono applicate.

E' però evidente che possiamo ugualmente decidere di lasciare invariata la seconda o la prima componente dei vettori e avremo ancora dei sottogruppi $SU(2)$ aventi come generatori, rispettivamente

$$\Sigma_{21} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_{22} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.652)$$

$$\Sigma_{23} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.16.653)$$

$$\Sigma_{11} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.654)$$

$$\Sigma_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.16.655)$$

Però ... in questo modo abbiamo individuato nove generatori: sei che riguardano la parte non diagonale della matrice hermitiana H e tre che si riferiscono alla sua parte diagonale. Avevamo invece concluso che essi dovevano essere solo otto La spiegazione sta nel fatto che le Σ_{ij} definite sopra **non** sono tutte indipendenti fra loro. Osserviamo infatti che

$$\Sigma_{13} + \Sigma_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma_{23} \quad (2.16.656)$$

⁷³I generatori del sottogruppo in questione, isomorfo a $SU(2)$, sono, in realtà $\frac{1}{2}\Sigma_{31}$, $\frac{1}{2}\Sigma_{32}$ e $\frac{1}{2}\Sigma_{33}$, così come per $SU(2)$ lo sono $\frac{1}{2}\sigma_1$, $\frac{1}{2}\sigma_2$ e $\frac{1}{2}\sigma_3$.

Una scelta abbastanza consueta relativa alla descrizione della parte diagonale della matrice hermitiana H è quella di usare Σ_{33} e la somma $\Sigma_{23} + \Sigma_{13}$.

Più propriamente, la base dell'algebra di Lie di $SU(3)$ più comunemente usata in Fisica è definita a partire dalle otto matrici di Gell-Mann seguenti

$$\lambda_1 \equiv \Sigma_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 \equiv \Sigma_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.657)$$

$$\lambda_3 \equiv \Sigma_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 \equiv \Sigma_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.658)$$

$$\lambda_5 \equiv \Sigma_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 \equiv \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.659)$$

$$\lambda_7 \equiv \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16.660)$$

$$\lambda_8 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (\Sigma_{13} + \Sigma_{23}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.16.661)$$

scalate nel modo seguente

$$\hat{A}_j \equiv \frac{1}{2} \lambda_j; \quad j = 1, \dots, 8 \quad (2.16.662)$$

Per queste matrici (hermitiane) risulta

$$Tr \left(\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \right) = Tr \left(\hat{A}_i \hat{A}_j \right) = D \delta_{ij} \quad \text{dove} \quad D = \frac{1}{2} \quad (2.16.663)$$

ovvero esse costituiscono una base ortogonale dell'algebra, ma non ortonormale.

Usando questa definizione dei generatori \hat{A}_j , il generico elemento di $SU(3)$ (o, più propriamente, il generico elemento della rappresentazione $\mathbf{3}$ di $SU(3)$...) può essere scritto nella forma

$$U = e^{i a_j \hat{A}_j}; \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, 8 \quad (2.16.664)$$

2.17 I pesi della $\mathbf{3}$ e della $\bar{\mathbf{3}}$

Il gruppo $SU(3)$ fu introdotto nella Fisica delle particelle dopo la scoperta della stranezza, come generalizzazione del gruppo $SU(2)$ di isospin e dunque come gruppo di simmetria (approssimata) delle interazioni forti.

Per convenzione, si identificò il sottogruppo di isospin come quello generato da \hat{A}_1 , \hat{A}_2 e \hat{A}_3 .

Risultò quindi piuttosto naturale inserire \hat{A}_3 nella sottoalgebra di Cartan del gruppo. Esiste poi un solo altro generatore degli \hat{A}_j che commuta con \hat{A}_3 ed è \hat{A}_8 , per cui la sottoalgebra di Cartan di $SU(3)$ viene definita come quella generata da

$$\hat{H}_1 \equiv \hat{A}_3; \quad \hat{H}_2 = \hat{A}_8 \quad (2.17.665)$$

Non esistendo altri generatori indipendenti da \hat{H}_1 e \hat{H}_2 che commutano con questi, la sottoalgebra di Cartan di $SU(3)$ ha, evidentemente, rango 2 e quindi, in qualsiasi rappresentazione, il vettore dei pesi sarà bidimensionale.

Consideriamo adesso la rappresentazione irriducibile fondamentale che abbiamo indicato con $\mathbf{3}$ e vediamo di determinare i vettori dei pesi a essa corrispondenti. Evidentemente, essendo \hat{H}_1 e \hat{H}_2 entrambi diagonali, ovvero tali che

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.17.666)$$

i loro autovettori simultanei normalizzati sono

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.17.667)$$

e i corrispondenti vettori dei pesi, fatti appunto dagli autovalori simultanei di \hat{H}_1 e \hat{H}_2 , sono, rispettivamente

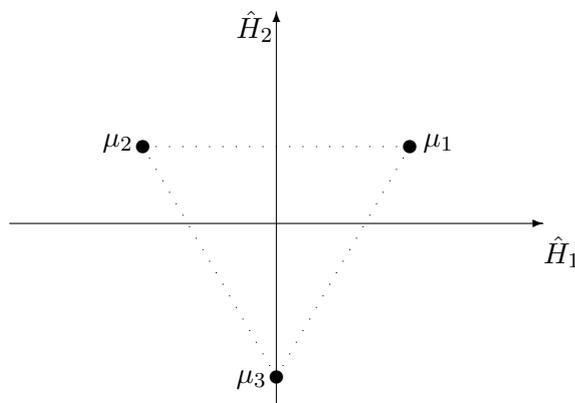
$$\mu_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.17.668)$$

$$\mu_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.17.669)$$

$$\mu_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.17.670)$$

e, secondo la definizione data, di questi tre pesi solo μ_1 è positivo.

In assi (\hat{H}_1, \hat{H}_2) questi pesi appaiono ai vertici di un triangolo equilatero centrato, di lato unitario e con il vertice rivolto verso il basso.



Questi pesi sono caratteristici della rappresentazione **3**. Essi sono non degeneri e quindi sufficienti per individuare completamente una base ortonormale dello spazio vettoriale dove agiscono gli operatori della rappresentazione data.

E' interessante vedere cosa succede, quanto ai pesi, nella rappresentazione coniugata della **3**, cioè nel caso della $\bar{\mathbf{3}}$.

Ricordiamo che, in generale, se

$$R(\mathbf{a}) = e^{ia_j \hat{A}_j} \tag{2.17.671}$$

è una rappresentazione di un gruppo dato, allora anche

$$\bar{R}(\mathbf{a}) \equiv (R(\mathbf{a}))^* = e^{-ia_j \hat{A}_j^*} = e^{ia_j (-\hat{A}_j^*)} \tag{2.17.672}$$

è una rappresentazione dello stesso gruppo, la quale può essere equivalente alla rappresentazione data se esiste una matrice M tale che

$$\forall \mathbf{a} : \bar{R}(\mathbf{a}) = M R(\mathbf{a}) M^{-1} \tag{2.17.673}$$

Come si vede, i generatori della \bar{R} sono uguali e opposti ai complessi coniugati dei generatori della R . Nel caso di rappresentazioni unitarie, essendo i generatori comunque hermitiani⁷⁴, accade evidentemente che per ciascuno di essi lo spettro dovrà cambiare di segno nel passare da R a \bar{R} .

Questo significa, in particolare che i vettori dei pesi associati a \bar{R} sono gli opposti di quelli di R . Nel caso della $\bar{\mathbf{3}}$, abbiamo dunque che

$$\bar{H}_1 = -\hat{H}_1^* = -\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17.675}$$

⁷⁴Risulta dunque che

$$A_j = A_j^\dagger = (A_j^t)^* \Rightarrow A_j^* = A_j^t \tag{2.17.674}$$

e dunque gli autovalori di A_j^* sono tutti e soli gli autovalori di A_j .

$$\bar{H}_2 = -\hat{H}_2^* = -\hat{H}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.17.676)$$

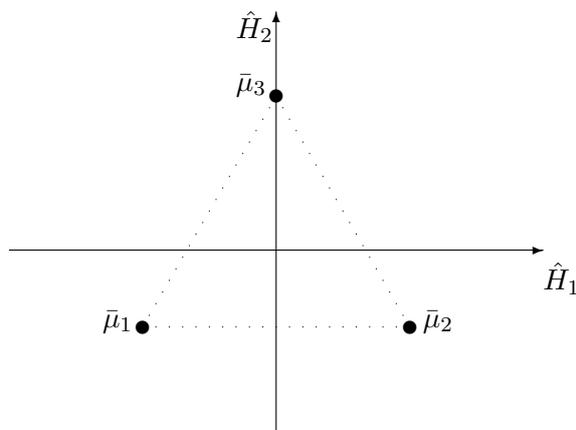
Questi due operatori ammettono ancora gli stessi autovettori di cui alla (2.17.667), ma per autovalori opposti e quindi, adesso, gli autovettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 corrispondono ai pesi seguenti

$$\bar{\mu}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.17.677)$$

$$\bar{\mu}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.17.678)$$

$$\bar{\mu}_3 = \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.17.679)$$

ovvero, in assi \hat{H}_1 , \hat{H}_2 essi sono ancora disposti ai vertici di un triangolo equilatero centrato di lato unitario che, però, stavolta, ha il vertice rivolto verso l'alto e in questo caso i pesi positivi sono due, cioè μ_2 e μ_3 .



La diversa struttura dei vettori dei pesi conferma ancora una volta il fatto che la $\mathbf{3}$ e la $\bar{\mathbf{3}}$ non possono essere equivalenti tra loro.

2.18 Le radici di $SU(3)$

Come si ricorderà, le radici sono i pesi nella rappresentazione aggiunta (RA). Per avere una specifica espressione dei generatori della RA , occorre naturalmente iniziare fissando una base⁷⁵ nell'algebra di Lie del gruppo.

Assumeremo che la base sia quella fatta dai generatori \hat{A}_j definiti dalla (2.16.662). Come sappiamo, stabilita la base, le costanti di struttura C_{jk}^m sono definite dalla relazione

$$[\hat{A}_j, \hat{A}_k] \equiv -i C_{jk}^m \hat{A}_m \quad (2.18.680)$$

e i generatori⁷⁶, della RA sono quindi rappresentati dalle matrici 8×8 seguenti

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} \equiv i C_{jk}^m \quad (2.18.681)$$

tali che

$$[\hat{T}_j, \hat{T}_k] = -i C_{jk}^m \hat{T}_m \quad (2.18.682)$$

Un modo per esplicitare le costanti di struttura è quello di far uso della condizione di ortogonalità degli \hat{A}_j , ovvero dal fatto che

$$Tr \left(\hat{A}_j \hat{A}_k \right) = \frac{1}{2} \delta_{jk} \quad (2.18.683)$$

Osserviamo infatti che

$$\begin{aligned} Tr \left(\hat{A}_m^\dagger \left[\hat{A}_j, \hat{A}_k \right] \right) &= Tr \left(\hat{A}_m^\dagger (-i) C_{jk}^l \hat{A}_l \right) = -i C_{jk}^l Tr \left(\hat{A}_m^\dagger \hat{A}_l \right) = \\ &= -i C_{jk}^l \frac{1}{2} \delta_{ml} = \frac{-i}{2} C_{jk}^m \end{aligned} \quad (2.18.684)$$

Possiamo quindi concludere che

$$C_{jk}^m = 2i Tr \left(\hat{A}_m^\dagger \left[\hat{A}_j, \hat{A}_k \right] \right) \quad (2.18.685)$$

e quindi che

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} = i C_{jk}^m = -2 Tr \left(\hat{A}_m^\dagger \left[\hat{A}_j, \hat{A}_k \right] \right) \quad (2.18.686)$$

⁷⁵Cambiando la base dell'algebra, le diverse rappresentazioni che si originano sono comunque tutte equivalenti fra loro.

⁷⁶Ricordiamo che la dimensione dello spazio nel quale agisce la RA è uguale alla dimensione dell'algebra di Lie e quindi, nel caso di $SU(3)$, ha dimensione 8.

ovvero, ricordando le proprietà della traccia e che le \hat{A}_j sono hermitiane, possiamo concludere che⁷⁷

$$\left(\hat{T}_j\right)_{km} = -2Tr \left(\left[\hat{A}_j, \hat{A}_k \right] \hat{A}_m \right) \quad (2.18.688)$$

Come sappiamo, possiamo vedere la RA come agente nello spazio vettoriale \mathcal{T} che ha per base ortonormale i suoi stessi generatori $|\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{k}}\rangle$ e risulta

$$\hat{T}_j |\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{k}}\rangle \equiv |[\hat{T}_j, \hat{T}_k]\rangle = -i \bar{C}_{jk}^m |\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}\rangle \quad (2.18.689)$$

Quanto poi alle *radici*, ricordiamo che esse sono semplicemente gli autovalori degli operatori \hat{H}_1 e \hat{H}_2 , i quali costituiscono la base scelta per la sottoalgebra di Cartan, ovvero, nel nostro caso

$$\hat{H}_1 \equiv \hat{T}_3; \quad \hat{H}_2 \equiv \hat{T}_8 \quad (2.18.690)$$

Iniziamo esplicitando \hat{H}_1 e \hat{H}_2 . Facendo uso della (2.18.688), ricaviamo che

$$\hat{H}_1 = \hat{T}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.691)$$

$$\hat{H}_2 = \hat{T}_8 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.692)$$

La struttura molto semplice delle due matrici \hat{H}_j facilita la determinazione dei rispettivi autovalori ρ_j e dunque del vettore delle radici (ρ_1, ρ_2) .

⁷⁷Con la scelta della base dell'algebra di cui alla (2.16.662) e quindi con i coefficienti di struttura che ne conseguono, il tensore di Killing vale

$$\gamma_{jk} = Tr \left(\hat{T}_j \hat{T}_k \right) = \Gamma \delta_{jk} \quad \text{dove} \quad \Gamma = 3 \quad (2.18.687)$$

Le tre radici *positive*⁷⁸ hanno modulo unitario⁷⁹ e sono le seguenti

$$\mathbf{a} = (1, 0) \quad (2.18.693)$$

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.18.694)$$

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.18.695)$$

a cui corrispondono gli autovettori simultanei di \hat{H}_1 e \hat{H}_2 di componenti⁸⁰

$$v_{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_{\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_{\mathbf{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.696)$$

mentre le componenti degli autovettori corrispondenti alle radici negative sono

$$v_{-\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_{-\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_{-\mathbf{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.697)$$

La base dello spazio è completata con i due autovettori corrispondenti agli autovalori entrambi nulli, i quali hanno come unica componente non nulla e uguale all'unità, rispettivamente, la terza e l'ottava: questi autovettori relativi agli autovalori nulli definiscono semplicemente lo spazio vettoriale \mathcal{H} dell'algebra di Cartan, generato appunto da $|\hat{\mathbf{T}}_3\rangle$ e $|\hat{\mathbf{T}}_8\rangle$.

⁷⁸Ricordiamo che con questo termine intendiamo che il vettore delle radici ha la prima componente non nulla che è positiva. A ogni radice positiva corrisponde una radice opposta.

⁷⁹Questo è uno dei motivi per cui abbiamo scelto come base gli \hat{A}_j definiti attraverso la (2.16.662).

⁸⁰Come ben noto, un autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa. La scelta fatta delle componenti riportate sotto corrisponde ad autovettori ortonormali in \mathbb{C}^8 .

I vettori associati alle radici di cui sopra costituiscono invece una base ortonormale⁸¹ dello spazio lineare \mathcal{E} , complemento ad \mathcal{A} (nel campo complesso) dell'algebra di Cartan stessa, ovvero sono del tipo

$$|\tilde{E}\rangle = \alpha_1|\hat{\mathbf{T}}_1\rangle + \alpha_2|\hat{\mathbf{T}}_2\rangle + \alpha_4|\hat{\mathbf{T}}_4\rangle + \alpha_5|\hat{\mathbf{T}}_5\rangle + \alpha_6|\hat{\mathbf{T}}_6\rangle + \alpha_7|\hat{\mathbf{T}}_7\rangle \quad (2.18.698)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Esplicitamente risulta

$$|\tilde{E}_a\rangle = \frac{|\hat{\mathbf{T}}_1\rangle + i|\hat{\mathbf{T}}_2\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.699)$$

$$|\tilde{E}_{-a}\rangle = \frac{|\hat{\mathbf{T}}_1\rangle - i|\hat{\mathbf{T}}_2\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.700)$$

$$|\tilde{E}_b\rangle = \frac{|\hat{\mathbf{T}}_4\rangle + i|\hat{\mathbf{T}}_5\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.701)$$

$$|\tilde{E}_{-b}\rangle = \frac{|\hat{\mathbf{T}}_4\rangle - i|\hat{\mathbf{T}}_5\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.702)$$

$$|\tilde{E}_c\rangle = \frac{|\hat{\mathbf{T}}_6\rangle - i|\hat{\mathbf{T}}_7\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.703)$$

$$|\tilde{E}_{-c}\rangle = \frac{|\hat{\mathbf{T}}_6\rangle + i|\hat{\mathbf{T}}_7\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.704)$$

Se indichiamo genericamente con $\mathbf{r} = (\rho_1, \rho_2)$ il vettore delle radici, evidentemente sar\`a

$$\hat{H}_1|\tilde{E}_\mathbf{r}\rangle \equiv \hat{T}_3|\tilde{E}_\mathbf{r}\rangle = [[\hat{T}_3, \tilde{E}_\mathbf{r}]] = \rho_1|\tilde{E}_\mathbf{r}\rangle \Rightarrow [\hat{T}_3, \tilde{E}_\mathbf{r}] = \rho_1\tilde{E}_\mathbf{r} \quad (2.18.705)$$

$$\hat{H}_2|\tilde{E}_\mathbf{r}\rangle \equiv \hat{T}_8|\tilde{E}_\mathbf{r}\rangle = [[\hat{T}_8, \tilde{E}_\mathbf{r}]] = \rho_2|\tilde{E}_\mathbf{r}\rangle \Rightarrow [\hat{T}_8, \tilde{E}_\mathbf{r}] = \rho_2\tilde{E}_\mathbf{r} \quad (2.18.706)$$

Per conoscere l'azione degli operatori \hat{T}_j sui vettori $|E_\mathbf{r}\rangle$ naturalmente si pu\`o procedere in modo diretto (vedi paragrafo seguente), usando la forma esplicita delle matrici \hat{T}_j di cui alle (2.18.762)-(2.18.765) e ricordando che

$$\begin{aligned} \hat{T}_j|\hat{\mathbf{T}}_k\rangle &= |[\hat{T}_j, \hat{\mathbf{T}}_k]\rangle = -iC_{jk}^m|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = -\left(\hat{T}_j\right)_{km}|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle = \\ &= \left(\hat{T}_j\right)_{mk}|\hat{\mathbf{T}}_m\rangle \end{aligned} \quad (2.18.707)$$

⁸¹Ricordiamo che, per definizione, la metrica nello spazio \mathcal{T} \`e quella per cui i $|\hat{\mathbf{T}}_j\rangle$ costituiscono una base ortonormale e dunque $\langle \hat{\mathbf{T}}_j | \hat{\mathbf{T}}_k \rangle = \delta_{jk}$.

Risulta comunque più immediato usare il fatto che le costanti di struttura di cui ai commutatori delle matrici \hat{T}_j sono le stesse costanti C_{jk}^m definite dai commutatori delle matrici \hat{A}_j di cui alla (2.16.662) che sono i generatori della rappresentazione **3**.

Riprendiamo dunque i generatori \hat{A}_j e definiamo le matrici seguenti

$$I_{\pm} \equiv \frac{\hat{A}_1 \pm i \hat{A}_2}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda_1 \pm i \lambda_2}{2\sqrt{2}} \quad (2.18.708)$$

$$U_{\pm} \equiv \frac{\hat{A}_4 \pm i \hat{A}_5}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda_4 \pm i \lambda_5}{2\sqrt{2}} \quad (2.18.709)$$

$$V_{\pm} \equiv \frac{\hat{A}_6 \mp i \hat{A}_7}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda_6 \mp i \lambda_7}{2\sqrt{2}} \quad (2.18.710)$$

Esplicitamente risulta

$$I_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.711)$$

$$U_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.712)$$

$$V_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.713)$$

Determiniamo adesso i commutatori di questi operatori con i generatori della sottoalgebra di Cartan in questa rappresentazione, ovvero con gli operatori

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.18.714)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{H}_1, I_+ \\ \hat{H}_1, I_- \\ \hat{H}_1, U_+ \\ \hat{H}_1, U_- \\ \hat{H}_1, V_+ \\ \hat{H}_1, V_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_+ \\ -I_- \\ \frac{1}{2}U_+ \\ -\frac{1}{2}U_- \\ \frac{1}{2}V_+ \\ -\frac{1}{2}V_- \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix} \hat{H}_2, I_+ \\ \hat{H}_2, I_- \\ \hat{H}_2, U_+ \\ \hat{H}_2, U_- \\ \hat{H}_2, V_+ \\ \hat{H}_2, V_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}U_+ \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}U_- \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}V_+ \\ \frac{\sqrt{3}}{2}V_- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18.715)$$

Questi operatori, nella RA ($\lambda_j \leftrightarrow \hat{T}_j$), evidentemente diventano

$$|\mathbf{I}_\pm\rangle \equiv \frac{|\hat{\mathbf{T}}_1\rangle \pm i|\hat{\mathbf{T}}_2\rangle}{\sqrt{2}} = \tilde{E}_{\pm\mathbf{a}} \quad (2.18.716)$$

$$|\mathbf{U}_\pm\rangle \equiv \frac{|\hat{\mathbf{T}}_4\rangle \pm i|\hat{\mathbf{T}}_5\rangle}{\sqrt{2}} = \tilde{E}_{\pm\mathbf{b}} \quad (2.18.717)$$

$$|\mathbf{V}_\pm\rangle \equiv \frac{|\hat{\mathbf{T}}_6\rangle \mp i|\hat{\mathbf{T}}_7\rangle}{\sqrt{2}} = \tilde{E}_{\pm\mathbf{c}} \quad (2.18.718)$$

risultando

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 |\mathbf{I}_\pm\rangle &= \pm |\mathbf{I}_\pm\rangle; & \hat{H}_2 |\mathbf{I}_\pm\rangle &= 0 \\ \hat{H}_1 |\mathbf{U}_\pm\rangle &= \pm \frac{1}{2} |\mathbf{U}_\pm\rangle; & \hat{H}_2 |\mathbf{U}_\pm\rangle &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} |\mathbf{U}_\pm\rangle \\ \hat{H}_1 |\mathbf{V}_\pm\rangle &= \pm \frac{1}{2} |\mathbf{V}_\pm\rangle; & \hat{H}_2 |\mathbf{V}_\pm\rangle &= \pm \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) |\mathbf{V}_\pm\rangle \end{aligned} \quad (2.18.719)$$

Si ritrova così, per questa strada che, nella RA

- gli autovettori simultanei degli operatori di Cartan $\hat{H}_1 = \hat{\mathbf{T}}_3$ e $\hat{H}_2 = \hat{\mathbf{T}}_8$ sono i vettori

$$|\hat{\mathbf{I}}_\pm\rangle \equiv \frac{|\hat{\mathbf{T}}_1 \pm i\hat{\mathbf{T}}_2\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |\hat{\mathbf{U}}_\pm\rangle \equiv \frac{|\hat{\mathbf{T}}_4 \pm i\hat{\mathbf{T}}_5\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |\hat{\mathbf{V}}_\pm\rangle \equiv \frac{|\hat{\mathbf{T}}_6 \mp i\hat{\mathbf{T}}_7\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.18.720)$$

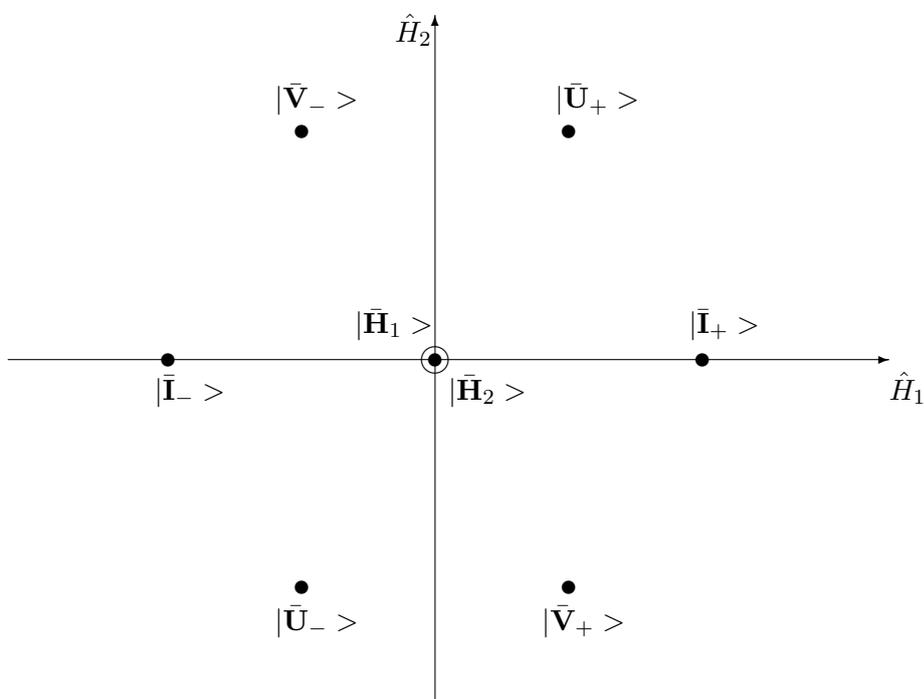
- le **radici** a essi corrispondenti sono le seguenti

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_+\rangle &\rightarrow \mathbf{a} = (1, 0); & |\mathbf{I}_-\rangle &\rightarrow -\mathbf{a} \\ |\mathbf{U}_+\rangle &\rightarrow \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); & |\mathbf{U}_-\rangle &\rightarrow -\mathbf{b} \\ |\mathbf{V}_+\rangle &\rightarrow \mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & |\mathbf{V}_-\rangle &\rightarrow -\mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.18.721)$$

A questi sei vettori, per completare la base dello spazio dove agisce la RA , occorre poi aggiungere, come sappiamo, i vettori $|\hat{\mathbf{H}}_1\rangle$ e $|\hat{\mathbf{H}}_2\rangle$, i quali, però, sono autovettori dei generatori \hat{H}_1 e \hat{H}_2 della sottolgebra di Cartan per l'autovalore nullo, visto che questi operatori commutano fra loro.

Questi otto vettori possono essere visualizzati nel piano (\hat{H}_1, \hat{H}_2) , attraverso i valori delle radici corrispondenti.

I due autovettori corrispondenti agli operatori di Cartan, avendo coordinate $(0,0)$, sono situati entrambi nell'origine degli assi, mentre gli altri sono ai vertici di un esagono regolare di lato unitario (poiché i vettori delle radici hanno modulo unitario).



Usando le definizioni (2.18.711)-(2.18.713), poiché le costanti di struttura rimangono le stesse passando da questi generatori della rappresentazione $\mathbf{3}$ ai corrispondenti generatori \hat{T}_j della RA , è immediato ottenere anche i commutatori (indipendenti) fra gli autovettori associati alle sei radici, che

sono⁸²

$$\begin{aligned}
[I_+, U_+] &= 0; & [I_+, U_-] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} V_+ \\
[I_+, V_+] &= 0; & [I_+, V_-] &= \frac{1}{\sqrt{2}} U_+ \\
[I_-, U_+] &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_-; & [I_-, U_-] &= 0 \\
[I_-, V_+] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} U_-; & [I_-, V_-] &= 0 \\
[U_+, V_+] &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_+; & [U_+, V_-] &= 0 \\
[U_-, V_+] &= 0; & [U_-, V_-] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} I_-
\end{aligned} \tag{2.18.724}$$

insieme a

$$\begin{aligned}
[I_+, I_-] &= a_j \hat{H}_j = \hat{H}_1; \\
[U_+, U_-] &= b_j \hat{H}_j = \frac{\hat{H}_1 + \sqrt{3} \hat{H}_2}{2}; \\
[V_+, V_-] &= c_j \hat{H}_j = \frac{\hat{H}_1 - \sqrt{3} \hat{H}_2}{2};
\end{aligned} \tag{2.18.725}$$

in accordo con (2.18.786)-(2.18.797) e (2.18.799).

Un altro aspetto importante della trattazione generale delle radici è poi quello che mostra come, per ogni radice \mathbf{r} , attraverso la coppia $\tilde{E}_{\pm\mathbf{r}}$ si può determinare una sottoalgebra di Lie che soddisfa le regole di commutazione dei generatori di $SU(2)$.

Infatti, posto (cfr.(2.10.268))

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{r_j r_j} \tag{2.18.726}$$

se definiamo (cfr. (2.10.269) e (2.10.270))

$$E^\pm \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}|} \tilde{E}_{\pm\mathbf{r}}; \quad E_3 = \frac{r_j \hat{H}_j}{|\mathbf{r}|^2} \tag{2.18.727}$$

e quindi (cfr.(2.10.274))

$$E_1 \equiv \frac{E^+ + E^-}{\sqrt{2}}; \quad E_2 \equiv \frac{-i(E^+ - E^-)}{\sqrt{2}} \tag{2.18.728}$$

risulta

$$[E_3, E^\pm] = \pm E^\pm \tag{2.18.729}$$

$$[E^+, E^-] = E_3 \tag{2.18.730}$$

$$[E_i, E_j] = i \epsilon_{ijk} E_k \tag{2.18.731}$$

⁸²Si ricordi che, indicando genericamente con F_\pm e G_\pm gli operatori \mathbf{I}_\pm , \mathbf{U}_\pm e \mathbf{V}_\pm , abbiamo che

$$[F_\pm, G_\pm] = [G_\mp, F_\mp]^\dagger \tag{2.18.722}$$

$$(F_\pm)^\dagger = F_\mp; \quad (G_\pm)^\dagger = G_\mp \tag{2.18.723}$$

Nel nostro caso, se partiamo dalla radice positiva $\mathbf{a} = (1, 0)$, ne segue che

$$|\mathbf{a}| = 1; \quad E^\pm = \tilde{E}_{\pm\mathbf{a}} = I_\pm; \quad E_3 = \hat{H}_1 \quad (2.18.732)$$

ovvero, esplicitamente

$$E^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_+; \quad E^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_- \quad (2.18.733)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv I_3 \quad (2.18.734)$$

e quindi

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv I_1; \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv I_2 \quad (2.18.735)$$

I tre generatori $E_j \equiv I_j$ agiscono solo sulle prime due componenti dei vettori e, su queste, evidentemente operano come le matrici $\frac{1}{2}\sigma_j$.

Dunque, nel sottospazio bidimensionale dei vettori $(\alpha, \beta, 0)$, essi definiscono una rappresentazione irriducibile di $SU2$ di spin $j = \frac{1}{2}$; mentre, nello spazio unidimensionale fatto dai vettori $(0, 0, \gamma)$, danno luogo alla rappresentazione di spin nullo, in cui ogni elemento di $SU2$ è proiettato nell'identità.

Passiamo adesso a considerare la radice positiva $\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Abbiamo

$$|\mathbf{b}| = 1; \quad E^\pm = \tilde{E}_{\pm\mathbf{b}} = U_\pm \quad (2.18.736)$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\hat{H}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{H}_2 \quad (2.18.737)$$

ovvero

$$E^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv U_+; \quad E^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv U_- \quad (2.18.738)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv U_3 \quad (2.18.739)$$

e dunque

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv U_1; \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv U_2 \quad (2.18.740)$$

In questo caso i tre generatori $E_j \equiv U_j$ agiscono sulla prima e la terza componente dei vettori, di nuovo come le matrici $\frac{\sigma_j}{2}$; dunque, nello spazio dei vettori $(\alpha, 0, \beta)$ questi generatori definiscono una rappresentazione di $SU2$ di spin $j = \frac{1}{2}$, mentre nello spazio unidimensionale $(0, \gamma, 0)$ i tre generatori E_i definiscono la rappresentazione di spin $j = 0$.

Consideriamo infine la terza radice positiva $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Abbiamo

$$|\mathbf{c}| = 1; \quad E^\pm = \tilde{E}_{\pm\mathbf{c}} = V_\pm \quad (2.18.741)$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\hat{H}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{H}_2 \quad (2.18.742)$$

ovvero

$$E^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv V_+; \quad E^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv V_- \quad (2.18.743)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv V_3 \quad (2.18.744)$$

e dunque

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv V_1; \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \equiv V_2 \quad (2.18.745)$$

In questo caso l'azione dei tre generatori $E_j \equiv V_j$ è non banale solo sui vettori dello spazio bidimensionale $(0, \alpha, \beta)$. Su questi vettori la loro azione non è esattamente quella dei generatori canonici di $SU2$, cioè i $\frac{\sigma_j}{2}$, bensì quella a essi riconducibile con una rotazione di 180° intorno al primo asse.

Comunque, si tratta sempre di una rappresentazione di $SU2$ di spin $j = \frac{1}{2}$. Sui vettori dello spazio unidimensionale $(\gamma, 0, 0)$, la rappresentazione definita dagli attuali E_j è di nuovo quella scalare.

Per completezza delle (2.18.724) e (2.18.725), tenuto conto che

$$I_3 = \hat{H}_1; \quad U_3 = \frac{1}{2}(\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_2); \quad V_3 = \frac{1}{2}(\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_2) \quad (2.18.746)$$

riportiamo di seguito le regole di commutazione degli operatori I_3, U_3 e V_3 con gli operatori I_\pm, U_\pm e V_\pm . Data la (2.18.715), abbiamo

$$\begin{aligned} [I_3, I_\pm] &= \pm I_\pm; & [U_3, I_\pm] &= \pm \frac{1}{2}I_\pm; & [V_3, I_\pm] &= \pm \frac{1}{2}I_\pm \\ [I_3, U_\pm] &= \pm \frac{1}{2}U_\pm; & [U_3, U_\pm] &= \pm U_\pm; & [V_3, U_\pm] &= \mp \frac{1}{2}U_\pm \\ [I_3, V_\pm] &= \pm \frac{1}{2}V_\pm; & [U_3, V_\pm] &= \mp \frac{1}{2}V_\pm; & [V_3, V_\pm] &= \pm V_\pm \end{aligned} \quad (2.18.747)$$

Prima di lasciare l'argomento dei sottogruppi *nascosti* in $SU(3)$, osserviamo che degli otto generatori \hat{A}_i , cinque sono fatti da matrici reali simmetriche $\{R_1 = \lambda_1, R_2 = \lambda_3, R_3 = \lambda_4, R_4 = \lambda_6, R_5 = \lambda_8\}$, mentre tre sono definiti da matrici immaginarie pure e antisimmetriche, cioè $\{I_1 = \lambda_2, I_2 = \lambda_5, I_3 = \lambda_7\}$.

Gli elementi del gruppo $SU(3)$ ottenuti per esponenziazione di parametrizzazioni (reali!) dei soli generatori immaginari puri, essendo tali che

$$U = e^{ia_k I_k} \quad (2.18.748)$$

sono puramente reali e quindi possiamo attenderci che formino un sottogruppo, nel qual caso i generatori I_k dovranno costituire una sottoalgebra di Lie. Esplicitamente abbiamo

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.749)$$

e possiamo riconoscere in essi i tre generatori di $SO(3)$, ovvero $L_k = -i \epsilon_{kmn}$. Infatti risulta immediato che

$$L_1 = I_3; \quad L_2 = -I_2; \quad L_3 = I_1 \quad (2.18.750)$$

Il fatto che $SO(3)$ sia un sottogruppo di $SU(3)$ è, di per sé, abbastanza ovvio, come pure naturale è che $SO(n)$ sia sottogruppo di $SU(n)$, qualunque sia $n \geq 1$.

2.18.1 Il gruppo di Weyl

Si tratta del gruppo di simmetria delle radici.

Come abbiamo visto, le radici sono i pesi degli autovettori nella RA dei due operatori di Cartan H_1 e H_2 , direttamente legati agli operatori di salita/discesa nel modo seguente

$$\begin{aligned} I_+ &\rightarrow \mathbf{a} = (1, 0); & I_- &\rightarrow -\mathbf{a} \\ U_+ &\rightarrow \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); & U_- &\rightarrow -\mathbf{b} \\ V_+ &\rightarrow \mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); & V_- &\rightarrow -\mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.18.751)$$

Gli operatori I_{\pm} , U_{\pm} , V_{\pm} definiscono attraverso i versori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , tre direzioni nel piano (H_1, H_2) a ciascuna delle quali è associata una rappresentazione di $SU2$. Come sappiamo, nelle rappresentazioni irriducibili di $SU2$ l'autovalore di E_3 è simmetrico rispetto allo zero. Da questo ne segue che lo spettro di una rappresentazione irriducibile di $SU3$ risulta pari rispetto all'asse H_I passante per l'origine e ortogonale al versore \mathbf{a} (e dunque coincidente con $H_2\dots$), come pure sarà pari rispetto all'asse H_U ortogonale a \mathbf{b} e all'asse H_V ortogonale a \mathbf{c} . Esplicitamente le direzioni di questi assi, tutti passanti per l'origine, sono

$$H_I \parallel (0, 1), \quad H_U \parallel \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right); \quad H_V \parallel \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (2.18.752)$$

L'insieme fatto dalla trasformazione identica, delle tre parità menzionate sopra e dai loro prodotti che si traducono in rotazioni di $\pm 120^\circ$, costituisce il gruppo di Weyl.

Questo gruppo di simmetria fornisce la spiegazione diretta del motivo per cui le rappresentazioni di $SU3$ hanno forma esagonale o a triangolo equilatero.

2.18.2 Forma esplicita dei generatori della RA di SU3

Abbiamo visto che, se partiamo dalle matrici λ_j di cui alle (2.16.657)-(2.16.661) e definiamo i generatori dell'algebra di $SU(3)$ come dati da

$$\hat{A}_j \equiv \frac{1}{2} \lambda_j; \quad j = 1, \dots, 8 \quad (2.18.753)$$

allora

$$Tr \left(\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \right) = Tr \left(\hat{A}_i \hat{A}_j \right) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.18.754)$$

e le costanti di struttura definite in questa base, ovvero

$$\left[\hat{A}_j, \hat{A}_k \right] = -i C_{jk}^m \hat{A}_m \quad (2.18.755)$$

attraverso la relazione di ortogonalità (2.18.754), sono date da (cfr.(2.18.686))

$$(T_j)_{km} = i C_{jk}^m = -2 Tr \left(\left[\hat{A}_j, \hat{A}_k \right] \hat{A}_m \right) \quad (2.18.756)$$

Attraverso la (2.18.756) abbiamo ottenuto, per esempio, che (cfr.(2.18.691)-(2.18.692))

$$\hat{T}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.757)$$

$$\hat{T}_8 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.758)$$

Riportiamo di seguito l'espressione di tutti i generatori \hat{T}_j dove, per comodità di notazione, abbiamo posto

$$\alpha \equiv 1 \quad ; \quad \bar{\alpha} \equiv -1 \quad (2.18.759)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2} \quad ; \quad \bar{\beta} \equiv -\frac{1}{2} \quad (2.18.760)$$

$$\gamma \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \bar{\gamma} \equiv -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.18.761)$$

$$\hat{T}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.762)$$

$$\hat{T}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_4 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.763)$$

$$\hat{T}_5 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_6 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.764)$$

$$\hat{T}_7 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_8 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18.765)$$

Si può verificare direttamente che, quanto al tensore di Killing, risulta

$$\gamma_{jk} \equiv \frac{1}{2} Tr(\hat{T}_j \hat{T}_k) = \frac{3}{2} \delta_{jk} \quad (2.18.766)$$

Inoltre, come abbiamo già detto,

$$[\hat{T}_j, \hat{T}_k] = -i C_{jk}^m \hat{T}_m = - \left(\hat{T}_j \right)_{km} \hat{T}_m \quad (2.18.767)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \left[\hat{T}_1, \hat{T}_2 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{2s} \hat{T}_s = i \hat{T}_3; \\ \left[\hat{T}_1, \hat{T}_4 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{4s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_7; \\ \left[\hat{T}_1, \hat{T}_6 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{6s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_5; \\ \left[\hat{T}_1, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{8s} \hat{T}_s = 0; \\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_4 \right] &= - \left(\hat{T}_2 \right)_{4s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_6; \\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_6 \right] &= - \left(\hat{T}_2 \right)_{6s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_4; \\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_2 \right)_{8s} \hat{T}_s = 0; \\ \left[\hat{T}_3, \hat{T}_5 \right] &= - \left(\hat{T}_3 \right)_{5s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_4; \\ \left[\hat{T}_3, \hat{T}_7 \right] &= - \left(\hat{T}_3 \right)_{7s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_6; \\ \left[\hat{T}_4, \hat{T}_5 \right] &= - \left(\hat{T}_4 \right)_{5s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \left(\hat{T}_3 + \sqrt{3} \hat{T}_8 \right); \\ \left[\hat{T}_4, \hat{T}_7 \right] &= - \left(\hat{T}_4 \right)_{7s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_1; \\ \left[\hat{T}_5, \hat{T}_6 \right] &= - \left(\hat{T}_5 \right)_{6s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_1; \\ \left[\hat{T}_5, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_5 \right)_{8s} \hat{T}_s = \frac{i\sqrt{3}}{2} \hat{T}_4; \\ \left[\hat{T}_6, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_6 \right)_{8s} \hat{T}_s = -\frac{i\sqrt{3}}{2} \hat{T}_7; \\ \left[\hat{T}_1, \hat{T}_3 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{3s} \hat{T}_s = -i \hat{T}_2 \\ \left[\hat{T}_1, \hat{T}_5 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{5s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_6 \\ \left[\hat{T}_1, \hat{T}_7 \right] &= - \left(\hat{T}_1 \right)_{7s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_4 \\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_3 \right] &= - \left(\hat{T}_2 \right)_{3s} \hat{T}_s = i \hat{T}_1 \\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_5 \right] &= - \left(\hat{T}_2 \right)_{5s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_7 \\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_7 \right] &= - \left(\hat{T}_2 \right)_{7s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_5 \\ \left[\hat{T}_3, \hat{T}_4 \right] &= - \left(\hat{T}_3 \right)_{4s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_5 \\ \left[\hat{T}_3, \hat{T}_6 \right] &= - \left(\hat{T}_3 \right)_{6s} \hat{T}_s = -\frac{i}{2} \hat{T}_7 \\ \left[\hat{T}_3, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_3 \right)_{8s} \hat{T}_s = 0 \\ \left[\hat{T}_4, \hat{T}_6 \right] &= - \left(\hat{T}_4 \right)_{6s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_2 \\ \left[\hat{T}_4, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_4 \right)_{8s} \hat{T}_s = -\frac{i\sqrt{3}}{2} \hat{T}_5 \\ \left[\hat{T}_5, \hat{T}_7 \right] &= - \left(\hat{T}_5 \right)_{7s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \hat{T}_2 \\ \left[\hat{T}_6, \hat{T}_7 \right] &= - \left(\hat{T}_6 \right)_{7s} \hat{T}_s = \frac{i}{2} \left(-\hat{T}_3 + \sqrt{3} \hat{T}_8 \right) \\ \left[\hat{T}_7, \hat{T}_8 \right] &= - \left(\hat{T}_7 \right)_{7s} \hat{T}_s = \frac{i\sqrt{3}}{2} \hat{T}_6 \end{aligned} \quad (2.18.768)$$

Passiamo quindi alla verifica diretta della (2.18.705), ovvero che⁸³

$$\begin{aligned} \left[\hat{T}_3, \tilde{E}_{\mathbf{a}} \right] &= a_1 \tilde{E}_{\mathbf{a}} = \tilde{E}_{\mathbf{a}}; & \left[\hat{T}_3, \tilde{E}_{-\mathbf{a}} \right] &= -a_1 \tilde{E}_{-\mathbf{a}} = -\tilde{E}_{-\mathbf{a}} \\ \left[\hat{T}_3, \tilde{E}_{\mathbf{b}} \right] &= b_1 \tilde{E}_{\mathbf{b}} = \frac{1}{2} \tilde{E}_{\mathbf{b}}; & \left[\hat{T}_3, \tilde{E}_{-\mathbf{b}} \right] &= -b_1 \tilde{E}_{-\mathbf{b}} = -\frac{1}{2} \tilde{E}_{-\mathbf{b}} \\ \left[\hat{T}_3, \tilde{E}_{\mathbf{c}} \right] &= c_1 \tilde{E}_{\mathbf{c}} = \frac{1}{2} \tilde{E}_{\mathbf{c}}; & \left[\hat{T}_3, \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \right] &= -c_1 \tilde{E}_{-\mathbf{c}} = -\frac{1}{2} \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \end{aligned} \quad (2.18.770)$$

⁸³Si ricordi che

$$\mathbf{a} = (1, 0); \quad \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.18.769)$$

Usando i commutatori di cui alla (2.18.768), otteniamo infatti

$$[\hat{T}_3, \tilde{E}_a] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_3, \hat{T}_1 + i\hat{T}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \{i\hat{T}_2 + i(-i\hat{T}_1)\} = \frac{\hat{T}_1 + i\hat{T}_2}{\sqrt{2}} = \tilde{E}_a \quad (2.18.771)$$

$$[\hat{T}_3, \tilde{E}_{-a}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_3, \hat{T}_1 - i\hat{T}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \{i\hat{T}_2 - i(-i\hat{T}_1)\} = -\frac{\hat{T}_1 - i\hat{T}_2}{\sqrt{2}} = -\tilde{E}_{-a} \quad (2.18.772)$$

$$[\hat{T}_3, \tilde{E}_b] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_3, \hat{T}_4 + i\hat{T}_5] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_5 + i\left(-\frac{i}{2}\hat{T}_4\right) \right\} = \frac{1}{2} \frac{\hat{T}_4 + i\hat{T}_5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \tilde{E}_b \quad (2.18.773)$$

$$[\hat{T}_3, \tilde{E}_{-b}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_3, \hat{T}_4 - i\hat{T}_5] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_5 - i\left(-\frac{i}{2}\hat{T}_4\right) \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\hat{T}_4 - i\hat{T}_5}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \tilde{E}_{-b} \quad (2.18.774)$$

$$[\hat{T}_3, \tilde{E}_c] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_3, \hat{T}_6 - i\hat{T}_7] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-i}{2}\hat{T}_7 - i\left(\frac{i}{2}\hat{T}_6\right) \right\} = \frac{1}{2} \frac{\hat{T}_6 - i\hat{T}_7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \tilde{E}_c \quad (2.18.775)$$

$$[\hat{T}_3, \tilde{E}_{-c}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_3, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-i}{2}\hat{T}_7 + i\left(\frac{i}{2}\hat{T}_6\right) \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\hat{T}_6 + i\hat{T}_7}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \tilde{E}_{-c} \quad (2.18.776)$$

Veniamo quindi alla verifica esplicita della (2.18.706), ovvero che risulta

$$\begin{cases} [\hat{T}_8, \tilde{E}_a] = a_2 \tilde{E}_a = 0; & [\hat{T}_8, \tilde{E}_{-a}] = -a_2 \tilde{E}_{-a} = 0 \\ [\hat{T}_8, \tilde{E}_b] = b_2 \tilde{E}_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_b; & [\hat{T}_8, \tilde{E}_{-b}] = -b_2 \tilde{E}_{-b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_{-b} \\ [\hat{T}_8, \tilde{E}_c] = c_2 \tilde{E}_c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_c; & [\hat{T}_8, \tilde{E}_{-c}] = -c_2 \tilde{E}_{-c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_{-c} \end{cases} \quad (2.18.777)$$

Infatti

$$[\hat{T}_8, \tilde{E}_a] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_8, \hat{T}_1 + i\hat{T}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \{0 + i0\} = 0 \quad (2.18.778)$$

$$[\hat{T}_8, \tilde{E}_{-a}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_8, \hat{T}_1 - i\hat{T}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \{0 - i0\} = 0 \quad (2.18.779)$$

$$[\hat{T}_8, \tilde{E}_b] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_8, \hat{T}_4 + i\hat{T}_5] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_5 + i\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_4\right) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hat{T}_4 + i\hat{T}_5}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_b \quad (2.18.780)$$

$$[\hat{T}_8, \tilde{E}_{-b}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_8, \hat{T}_4 - i\hat{T}_5] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_5 - i\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_4\right) \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hat{T}_4 - i\hat{T}_5}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_{-b} \quad (2.18.781)$$

$$[\hat{T}_8, \tilde{E}_c] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_8, \hat{T}_6 - i\hat{T}_7] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{T}_7 - i\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_6\right) \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hat{T}_6 - i\hat{T}_7}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_c \quad (2.18.782)$$

$$[\hat{T}_8, \tilde{E}_{-c}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{T}_8, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_7 + i\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\hat{T}_6\right) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hat{T}_6 + i\hat{T}_7}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{E}_{-c} \quad (2.18.783)$$

Passiamo adesso a considerare i commutatori fra operatori \tilde{E} differenti. Prima di iniziare, ricordiamo che, date le radici \mathbf{r} e \mathbf{s} , se esiste la radice $\mathbf{r} + \mathbf{s}$ allora (cfr.(2.10.320))

$$\left[\tilde{E}_{\mathbf{r}}, \tilde{E}_{\mathbf{s}} \right] \propto \tilde{E}_{\mathbf{r}+\mathbf{s}} \quad (2.18.784)$$

altrimenti il commutatore è nullo.

Nel caso che stiamo considerando, avremo dunque che

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \cancel{\mathbf{r}} & \rightarrow & \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{\mathbf{b}} \right] = 0 \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \mathbf{c} & \rightarrow & \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{b}} \right] \propto \tilde{E}_{\mathbf{c}} \\ \mathbf{a} + \mathbf{c} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \cancel{\mathbf{r}} & \rightarrow & \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{\mathbf{c}} \right] = 0 \\ \mathbf{a} - \mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \mathbf{b} & \rightarrow & \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \right] \propto \tilde{E}_{\mathbf{b}} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} = (1, 0) = \mathbf{a} & \rightarrow & \left[\tilde{E}_{\mathbf{b}}, \tilde{E}_{\mathbf{c}} \right] \propto \tilde{E}_{\mathbf{a}} \\ \mathbf{b} - \mathbf{c} = (0, \sqrt{3}) = \cancel{\mathbf{r}} & \rightarrow & \left[\tilde{E}_{\mathbf{b}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \right] = 0 \end{array} \quad (2.18.785)$$

La verifica diretta fornisce

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{\mathbf{b}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \hat{T}_4 + i\hat{T}_5 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_7 + i \left(-\frac{i}{2}\hat{T}_6 \right) + i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_6 \right) + i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_7 \right) \right\} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.786)$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{b}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \hat{T}_4 - i\hat{T}_5 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_7 - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_6 \right) + i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_6 \right) - i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_7 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ i\hat{T}_7 - \hat{T}_6 \right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{T}_6 - i\hat{T}_7}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{E}_{\mathbf{c}} \end{aligned} \quad (2.18.787)$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{\mathbf{c}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \hat{T}_6 - i\hat{T}_7 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_5 - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) + i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) - i^2 \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_5 \right) \right\} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.788)$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_5 + i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) + i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) + i^2 \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_5 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ i\hat{T}_5 + \hat{T}_4 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{T}_4 + i\hat{T}_5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{E}_{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.18.789)$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{\mathbf{b}}, \tilde{E}_{\mathbf{c}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{T}_4 + i\hat{T}_5, \hat{T}_6 - i\hat{T}_7 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_2 - i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_1 \right) + i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_1 \right) - i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_2 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ i\hat{T}_2 + \hat{T}_1 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{T}_1 + i\hat{T}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{E}_{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (2.18.790)$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{\mathbf{b}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{T}_4 + i\hat{T}_5, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7 \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_2 + i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_1 \right) + i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_1 \right) + i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_2 \right) \right\} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.791)$$

insieme a

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{-\mathbf{a}}, \tilde{E}_{\mathbf{b}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_1 - i\hat{T}_2, \hat{T}_4 + i\hat{T}_5] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_7 + i \left(-\frac{i}{2}\hat{T}_6 \right) - i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_6 \right) - i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_7 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\hat{T}_7 + \hat{T}_6}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{E}_{-\mathbf{c}} \end{aligned} \quad (2.18.792)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{-\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{b}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_1 - i\hat{T}_2, \hat{T}_4 - i\hat{T}_5] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_7 - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_6 \right) - i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_6 \right) + i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_7 \right) \right\} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.793)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{-\mathbf{a}}, \tilde{E}_{\mathbf{c}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_1 - i\hat{T}_2, \hat{T}_6 - i\hat{T}_7] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_5 - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) + i^2 \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_5 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\hat{T}_5 - \hat{T}_4}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{E}_{-\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.18.794)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{-\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_1 - i\hat{T}_2, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_5 + i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_4 \right) - i^2 \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_5 \right) \right\} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.795)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{-\mathbf{b}}, \tilde{E}_{\mathbf{c}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_4 - i\hat{T}_5, \hat{T}_6 - i\hat{T}_7] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_2 - i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_1 \right) - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_1 \right) + i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_2 \right) \right\} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.796)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{-\mathbf{b}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_4 - i\hat{T}_5, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{2}\hat{T}_2 + i \left(\frac{i}{2}\hat{T}_1 \right) - i \left(\frac{-i}{2}\hat{T}_1 \right) - i^2 \left(\frac{i}{2}\hat{T}_2 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-\hat{T}_1 + i\hat{T}_2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{E}_{-\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (2.18.797)$$

L'ultima verifica riguarda infine i commutatori degli $\tilde{E}_{\mathbf{r}}$ con $\tilde{E}_{-\mathbf{r}}$.
Abbiamo visto, in generale (cfr.(2.10.267)), che vale la relazione

$$[\tilde{E}_{\mathbf{r}}, \tilde{E}_{-\mathbf{r}}] = r_j \hat{H}_j \quad (2.18.798)$$

la quale, nel nostro caso, si traduce in

$$\begin{cases} [\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{a}}] &= a_1 \hat{T}_3 + a_2 \hat{T}_8 &= \hat{T}_3 \\ [\tilde{E}_{\mathbf{b}}, \tilde{E}_{-\mathbf{b}}] &= b_1 \hat{T}_3 + b_2 \hat{T}_8 &= \frac{1}{2} \hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{T}_8 \\ [\tilde{E}_{\mathbf{c}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}}] &= c_1 \hat{T}_3 + c_2 \hat{T}_8 &= \frac{1}{2} \hat{T}_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{T}_8 \end{cases} \quad (2.18.799)$$

Infatti

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{\mathbf{a}}, \tilde{E}_{-\mathbf{a}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \hat{T}_1 - i\hat{T}_2] = \frac{1}{2} \left\{ -i \left(i\hat{T}_3 \right) + i \left(-i\hat{T}_3 \right) \right\} = \\ &= \hat{T}_3 \end{aligned} \tag{2.18.800}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{\mathbf{b}}, \tilde{E}_{-\mathbf{b}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_4 + i\hat{T}_5, \hat{T}_4 - i\hat{T}_5] = \frac{1}{2} \left\{ -i \left(\frac{i}{2} \left(\hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{T}_8 \right) \right) + i \left(-\frac{i}{2} \left(\hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{T}_8 \right) \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{T}_8 \right\} = \frac{1}{2}\hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{T}_8 \end{aligned} \tag{2.18.801}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{\mathbf{c}}, \tilde{E}_{-\mathbf{c}}] &= \frac{1}{2} [\hat{T}_6 - i\hat{T}_7, \hat{T}_6 + i\hat{T}_7] = \frac{1}{2} \left\{ i \left(\frac{i}{2} \left(-\hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{T}_8 \right) \right) - i \left(-\frac{i}{2} \left(-\hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{T}_8 \right) \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{T}_3 - \sqrt{3}\hat{T}_8 \right\} = \frac{1}{2}\hat{T}_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{T}_8 \end{aligned} \tag{2.18.802}$$

Poiché le relazioni di commutazione di cui sopra, pur ottenute nell'ambito della RA , hanno richiesto unicamente la conoscenza dei coefficienti di struttura, esse valgono nella stessa forma per qualsiasi rappresentazione del gruppo, purché gli operatori che rappresentano i generatori dell'algebra \hat{A}_j corrispondano ai \hat{T}_j , ovvero soddisfino le loro stesse regole di commutazione.

2.19 Rappresentazioni irriducibili

Prima di caratterizzare le rappresentazioni irriducibili di SU_3 , è opportuno premettere alcune considerazioni generali.

2.19.1 Generalità

Nella trattazione delle radici, abbiamo visto che

- data una qualsiasi radice \mathbf{r} ;
- data una qualsiasi rappresentazione irriducibile del gruppo;
- se E_3 è definito attraverso la (2.19.818);
- se $|\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle$ è un autovettore simultaneo⁸⁴ dei generatori \hat{H}_j dell'algebra di Cartan per gli autovalori (pesi) $\mathbf{h} = (h_j)$

allora accade che

$$E_3 |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{r}|^2} |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle \quad (2.19.803)$$

dove

$$q \equiv \frac{2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{r}|^2} \quad (2.19.804)$$

è un numero intero.

Consideriamo adesso le *radici semplici*, che indicheremo⁸⁵ con ρ^j dove $j = 1, \dots, m$, essendo m il rango dell'algebra di Cartan che stiamo considerando. Supponiamo che $|\mathbf{h}_M \rangle$ sia un autovettore simultaneo dei generatori di Cartan \hat{H}_j della rappresentazione considerata, il quale abbia il *peso più alto*. Siccome gli $E_{\rho_j} \equiv E_j^+$ agiscono come operatori di salita, esso dovrà necessariamente essere tale che

$$\forall j : E_j^+ |\mathbf{h}_M \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.805)$$

Se indichiamo con $E_{(3)}^j$ l'operatore definito attraverso la (2.19.817), ecco che sarà

$$E_{(3)}^j |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{\rho^j \cdot \mathbf{h}_M}{|\rho^j|^2} |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.806)$$

⁸⁴E' bene ricordare a questo punto che, per lo spazio vettoriale dove agiscono gli operatori della rappresentazione R , si può sempre trovare una base ortonormale fatta da autovettori simultanei degli (\hat{H}_j) , ovvero del tipo $|\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle$.

⁸⁵L'indice in alto rappresenta qui semplicemente un'etichetta. Ciascuna radice è un vettore che ha m componenti, quindi ρ_k^j rappresenta la componente k -esima della radice semplice j -esima e sia k che j vanno da 1 a m .

dove

$$\frac{2\rho^j \cdot \mathbf{h}_M}{|\rho^j|^2} = s_j \quad (2.19.807)$$

è un numero intero o semidispari non negativo.

I coefficienti s_j sono chiamati *coefficienti di Dynkin*.

Poiché le radici semplici ρ^j sono linearmente indipendenti, i coefficienti di Dynkin definiscono univocamente il valore di \mathbf{h}_M a cui corrisponde una opportuna rappresentazione irriducibile il cui spazio vettoriale è ottenuto a partire dall'autovettore $|\mathbf{h}_M\rangle$, attraverso successive applicazioni degli operatori di discesa: dunque, per qualunque loro valore intero o semidispari non negativo, è definita univocamente una rappresentazione irriducibile.

E' utile introdurre adesso i *pesi fondamentali*, che indicheremo con $\mu^{(k)}$, definiti da

$$\frac{2\rho^j \cdot \mu^{(k)}}{|\rho^j|^2} = \delta_{jk} \quad (2.19.808)$$

Le m rappresentazioni irriducibili definite dai pesi fondamentali sono chiamate *rappresentazioni fondamentali*. Evidentemente il peso \mathbf{h}_M che caratterizza una qualsiasi rappresentazione irriducibile R potrà essere sempre scritto come

$$\mathbf{h}_M = \sum_{k=1}^m s_k \mu^{(k)} \quad (2.19.809)$$

e poiché nel prodotto diretto di due rappresentazioni (irriducibili) i pesi sono additivi, ecco che potremo costruire la rappresentazione definita da \mathbf{h}_M come prodotto diretto di rappresentazioni fondamentali: s_1 con più alto peso $\mu^{(1)}$, s_2 con più alto peso $\mu^{(2)}$, etc

2.19.2 Ancora SU_2

Nel caso di SU_2 , abbiamo visto che le rappresentazioni irriducibili sono caratterizzate univocamente attraverso un numero intero o semidispari j , che abbiamo indicato con il nome di *spin* della rappresentazione. La scelta canonica per i suoi generatori \hat{A}_s dove $s = 1, 2, 3$, è quella di prendere $\hat{A}_s = \frac{1}{2} \sigma_s$, da cui le regole di commutazione

$$[\hat{A}_s, \hat{A}_t] = i \epsilon_{stk} \hat{A}_k \quad (2.19.810)$$

e quindi i seguenti generatori della RA associata alla scelta fatta

$$\left(\hat{T}_s\right)_{tk} \equiv -i \epsilon_{stk} \quad (2.19.811)$$

ovvero, esplicitamente

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19.812)$$

La sottoalgebra di Cartan risulta essere unidimensionale.

A priori possiamo scegliere ciascuno dei tre generatori \hat{T}_j della RA come generatore della sottoalgebra di Cartan, ma, usualmente, si sceglie $\hat{H} = \hat{T}_3$. Quanto agli autovalori di \hat{H} essi sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm 1$, a cui corrispondono, rispettivamente, i seguenti gli autovettori normalizzati

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda = +1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19.813)$$

e dunque, circa la base dello spazio dove agisce la RA , individuata dagli autovettori normalizzati di $\hat{H} = \hat{T}_3$, abbiamo

$$|\tilde{\mathbf{E}}_{+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{\mathbf{T}}_1 \rangle + i |\hat{\mathbf{T}}_2 \rangle \right) \quad (2.19.814)$$

$$|\tilde{\mathbf{E}}_{-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\hat{\mathbf{T}}_1 \rangle - i |\hat{\mathbf{T}}_2 \rangle \right) \quad (2.19.815)$$

$$|0 \rangle = |\hat{\mathbf{T}}_3 \rangle \quad (2.19.816)$$

costituita dagli autovettori associati alle due radici (± 1) e da quello corrispondente all'autovalore nullo.

La radice positiva $\mathbf{r} = (+1)$ è, ovviamente, anche una radice semplice.

Venendo ora ai generatori individuati in modo canonico a partire da $\tilde{E}_{\pm 1}$, che nel caso generico di $\tilde{E}_{\pm \mathbf{r}}$ erano

$$E^{\pm} \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}|} \tilde{E}_{\pm \mathbf{r}}; \quad E^{(3)} = \frac{r_j \hat{H}_j}{|\mathbf{r}|^2} \quad (2.19.817)$$

nel nostro caso, in cui $\mathbf{r} = 1$, diventano

$$E^\pm = \tilde{E}_{\pm 1}; \quad E^{(3)} = \hat{H} \quad (2.19.818)$$

e dunque, esplicitamente abbiamo che

$$E^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{T}_1 + i\hat{T}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19.819)$$

$$E^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{T}_1 - i\hat{T}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19.820)$$

$$E^{(3)} = \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{T}_3 \quad (2.19.821)$$

da cui

$$E_1 = \frac{E^+ + E^-}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \hat{T}_1 \quad (2.19.822)$$

$$E_2 = -i \frac{E^+ - E^-}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{T}_2 \quad (2.19.823)$$

ovvero ritroviamo gli stessi generatori da cui siamo partiti.

Risulta altresì che

$$[E^{(3)}, E^\pm] = \pm E^\pm \quad (2.19.824)$$

e dunque E^+ svolge il ruolo di operatore di salita, mentre E^- quello di discesa, ovvero quello degli operatori che, nella trattazione generale, avevamo indicato con J^\pm .

Poiché l'unica radice semplice è $\mathbf{r} = (+1)$, in questo caso avremo evidentemente che

$$E^{(3)} |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle = h |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R \rangle \quad (2.19.825)$$

con h intero o semidispari.

Poiché il rango dell'algebra di Cartan è uguale a uno, ci sarà un solo coefficiente di Dynkin s e siccome l'unica radice semplice è $\rho = +1$, avremo

$$\frac{2\rho \cdot h_M}{\rho^2} = s \quad \Rightarrow \quad h_M = \frac{s}{2} \quad (2.19.826)$$

Evidentemente esiste un solo *peso fondamentale* corrispondente al coefficiente di Dynkin $s = 1$, uguale a $\mu = \frac{1}{2}$ e, di conseguenza, ci sarà una sola

rappresentazione fondamentale definita da questo peso, ovvero appunto la rappresentazione di spin $j = \frac{1}{2}$, agente in uno spazio lineare bidimensionale. Prendendo il prodotto tensoriale di s rappresentazioni fondamentali, otteniamo una rappresentazione, di solito riducibile e dunque completamente riducibile, che agisce in uno spazio vettoriale di dimensione $2s$, nella quale esiste però un unico autovettore per il quale $E^+|h_M\rangle = 0$ avente $h_M = \frac{s}{2}$. Per quanto visto a suo tempo, h_M coincide quindi con lo spin j della rappresentazione irriducibile definito dall'autovalore $j(j+1)$ dell'operatore $E^2 = (E_1)^2 + (E_2)^2 + (E^{(3)})^2$ ovvero, nei simboli consueti $|j, m\rangle$, abbiamo

$$|h_M, \mathbf{p}; R\rangle = |j, j\rangle \quad (2.19.827)$$

Procedendo adesso con potenze dell'operatore di discesa E^- si può costruire tutta la catena degli autovettori simultanei di $E^{(3)}$ ed E^2

$$|j, j-1\rangle, \dots |j, -j\rangle \quad (2.19.828)$$

Lo spazio lineare di dimensione $2j+1$ così ottenuto, che è contenuto nello spazio di dimensione $2s = 4j$ dove agisce il prodotto tensoriale delle s rappresentazioni fondamentali, è trasformato in sé dai generatori E_1 , E_2 ed $E^{(3)}$ per cui gli operatori ottenuti per esponenziazione da questi generatori costituiscono una rappresentazione⁸⁶ irriducibile. Il prodotto tensoriale in questione si decompone quindi nella rappresentazione (unica) di spin $j = \frac{s}{2}$ e quindi in rappresentazioni irriducibili di spin inferiore⁸⁷.

Le regole di commutazione consentono poi di stabilire una forma esplicita per l'azione di questi generatori sui vettori (normalizzati) della catena di cui sopra e dunque di determinare completamente la rappresentazione.

⁸⁶Poichè gli autovettori di $E^{(3)}$ risultano così essere non degeneri in qualsiasi rappresentazione irriducibile, si conferma lo spazio degli autovettori di peso più alto, se la rappresentazione è irriducibile, non può che essere unidimensionale.

⁸⁷Come esempio, consideriamo il caso di $s = 6$. In termini di spin della rappresentazione, abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes (1 \oplus 0) \otimes (1 \oplus 0) = \\ & = (2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0) \otimes (1 \oplus 0) = \\ & = 3 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \quad (2.19.829) \end{aligned}$$

2.19.3 SU3

Veniamo alle rappresentazioni irriducibili di SU3.

In questo caso, come sappiamo, l'algebra di Cartan è bidimensionale e la scelta che abbiamo fatto è quella per cui

$$\hat{H}_1 = \hat{T}_3; \quad \hat{H}_2 = \hat{T}_8 \quad (2.19.830)$$

Le radici sono sei, tra le quali le (uniche) tre seguenti radici positive

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (1, 0); & |\mathbf{a}| &= 1 \\ \mathbf{b} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); & |\mathbf{b}| &= 1 \\ \mathbf{c} &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); & |\mathbf{c}| &= 1 \end{aligned} \quad (2.19.831)$$

da cui

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\pm\mathbf{a}} &= \frac{\hat{T}_1 \pm i \hat{T}_2}{\sqrt{2}} = I_{\pm} \equiv \frac{I_1 \pm i I_2}{\sqrt{2}}; & I_3 &= a_j \hat{H}_j = \hat{T}_3 \\ \tilde{E}_{\pm\mathbf{b}} &= \frac{\hat{T}_4 \pm i \hat{T}_5}{\sqrt{2}} = U_{\pm} \equiv \frac{U_1 \pm i U_2}{\sqrt{2}}; & U_3 &= b_j \hat{H}_j = \frac{\hat{T}_3 + \sqrt{3} \hat{T}_8}{2} \\ \tilde{E}_{\pm\mathbf{c}} &= \frac{\hat{T}_6 \mp i \hat{T}_7}{\sqrt{2}} = V_{\pm} \equiv \frac{V_1 \pm i V_2}{\sqrt{2}}; & V_3 &= c_j \hat{H}_j = \frac{\hat{T}_3 - \sqrt{3} \hat{T}_8}{2} \end{aligned} \quad (2.19.832)$$

Sia dunque R una rappresentazione irriducibile di SU3 e $|\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle$ una base ortonormale dello spazio vettoriale in cui agisce R , dove \mathbf{h} è il vettore dei pesi e \mathbf{p} è un vettore di parametri previsto per risolvere l'eventuale degenerazione se ci sono autovettori indipendenti con lo stesso peso.

Se \mathbf{r} è una qualsiasi radice, come sappiamo, se esiste la radice $\mathbf{r} + \mathbf{h}$, allora

$$\tilde{E}_{\mathbf{r}} |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle = (\mathbf{r} + \mathbf{h}) |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle \quad (2.19.833)$$

altrimenti il vettore $\tilde{E}_{\mathbf{r}} |\mathbf{h}, \mathbf{p}; R\rangle$ è nullo.

Date le definizioni (2.19.832), l'azione degli operatori $\tilde{E}_{\mathbf{r}}$, ovvero degli operatori di salita e di discesa $I_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$, è rappresentata graficamente nel piano (H_1, H_2) nella figura che segue.

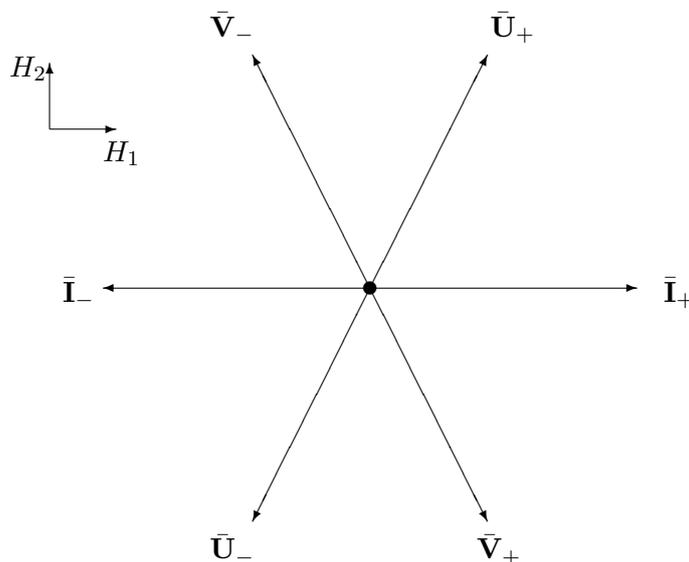


Fig.2.19.3 : Azione degli operatori di salita/discesa

Si noti che il cambiamento di peso determinato da questi operatori sul peso dell'autovettore a cui sono applicati ha comunque modulo unitario. Sappiamo inoltre che, data una qualsiasi radice \mathbf{r} , se E_3 è definito attraverso la (2.19.817) allora accade che

$$E_3 |\mathbf{h}, \mathbf{p}, R \rangle = \frac{r_j h_j}{|\mathbf{r}|^2} |\mathbf{h}, \mathbf{p}, R \rangle \quad (2.19.834)$$

dove la quantità $2 \frac{r_j h_j}{|\mathbf{r}|^2}$ è intera.

Abbiamo poi visto che le radici sono comunque linearmente dipendenti dalle radici semplici, le quali, nel caso attuale, sono due, come la dimensione (rango) dell'algebra di Cartan, ovvero

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \equiv \rho^{(1)} \quad (2.19.835)$$

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \equiv \rho^{(2)} \quad (2.19.836)$$

Scegliamo adesso, fra tutti gli autovettori $|\mathbf{h}, \mathbf{p}, R \rangle$, quello⁸⁸ con peso più alto, ovvero quello che ha h_1 massimo⁸⁹ e lo indicheremo con $|\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle$. Come sappiamo, tutti gli $\tilde{E}_{\mathbf{r}}$ dovranno annichilare questo vettore, ovvero, date le (2.18.732), (2.18.736) e (2.18.741), sarà

$$\tilde{E}_{\mathbf{a}} |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle = I_+ |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.837)$$

$$\tilde{E}_{\mathbf{b}} |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle = U_+ |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.838)$$

$$\tilde{E}_{\mathbf{c}} |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle = V_+ |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.839)$$

Questo autovettore, per la (2.19.834), sarà poi tale che

$$\begin{aligned} U_3 |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle &= \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_M}{|\mathbf{b}|^2} |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle; \quad \text{con} \quad 2 \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_M}{|\mathbf{b}|^2} \equiv 2 \frac{\rho^{(1)} \cdot \mathbf{h}_M}{|\rho^{(1)}|^2} \equiv s_1 \\ V_3 |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle &= \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_M}{|\mathbf{c}|^2} |\mathbf{h}_M, \mathbf{p}, R \rangle; \quad \text{con} \quad 2 \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_M}{|\mathbf{c}|^2} \equiv 2 \frac{\rho^{(2)} \cdot \mathbf{h}_M}{|\rho^{(2)}|^2} \equiv s_2 \end{aligned} \quad (2.19.840)$$

dove s_1 e s_2 sono i coefficienti di Dynkin, che, come sappiamo, caratterizzano la rappresentazione irriducibile considerata.

Veniamo adesso ai pesi e alle rappresentazioni fondamentali.

Il peso fondamentale $\mu^{(1)}$ è definito, attraverso la (2.19.808), dalla coppia di Dynkin $(s_1, s_2) = (1, 0)$. Si ha

$$\frac{2\rho^{(1)} \cdot \mu^{(1)}}{|\rho^{(1)}|^2} = 1; \quad \frac{2\rho^{(2)} \cdot \mu^{(1)}}{|\rho^{(2)}|^2} = 0 \quad (2.19.841)$$

⁸⁸Nel caso ce ne siano più di uno con lo stesso peso massimo, ne sceglieremo uno qualsiasi. Come si vedrà, se la rappresentazione è irriducibile come abbiamo supposto, questa degenerazione non è possibile.

⁸⁹Se h_1 è nullo, l'ordinamento è fatto passando a considerare h_2 , che non può essere anch'esso nullo perchè, in questo caso, la rappresentazione sarebbe quella banale.

Avendo le radici modulo unitario, posto $\mu^{(1)} = (x, y)$, otteniamo che

$$\begin{aligned} 1 &= 2\rho^{(1)} \cdot \mu^{(1)} \equiv 2\mathbf{b} \cdot \mu^{(1)} = (1, \sqrt{3}) \cdot (x, y) &= x + \sqrt{3}y \\ 0 &= 2\rho^{(2)} \cdot \mu^{(1)} \equiv 2\mathbf{c} \cdot \mu^{(1)} = (1, -\sqrt{3}) \cdot (x, y) &= x - \sqrt{3}y \end{aligned} \quad (2.19.842)$$

e dunque

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad \mu^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.19.843)$$

L'altro peso fondamentale $\mu^{(2)}$ corrisponde alla coppia di Dynkin $(s_1, s_2) = (0, 1)$ e dunque è definito da

$$\frac{2\rho^{(1)} \cdot \mu^{(2)}}{|\rho^{(1)}|^2} = 0; \quad \frac{2\rho^{(2)} \cdot \mu^{(2)}}{|\rho^{(2)}|^2} = 1 \quad (2.19.844)$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &= 2\rho^{(1)} \cdot \mu^{(2)} \equiv 2\mathbf{b} \cdot \mu^{(2)} = (1, \sqrt{3}) \cdot (x, y) &= x + \sqrt{3}y \\ 1 &= 2\rho^{(2)} \cdot \mu^{(2)} \equiv 2\mathbf{c} \cdot \mu^{(2)} = (1, -\sqrt{3}) \cdot (x, y) &= x - \sqrt{3}y \end{aligned} \quad (2.19.845)$$

e dunque

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad \mu^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.19.846)$$

Venendo alle rappresentazioni fondamentali, vogliamo dimostrare adesso che al peso fondamentale $\mu^{(1)}$ corrisponde la rappresentazione $\mathbf{3}$, mentre al peso fondamentale $\mu^{(2)}$ corrisponde la rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$.

2.19.4 La rappresentazione $\mathbf{3}$

Abbiamo già studiato questa rappresentazione, la quale opera in uno spazio vettoriale di dimensione 3. I suoi generatori sono gli \hat{A}_k di cui alla (2.16.662) e l'algebra di Cartan è generata da $\hat{H}_1 = \hat{A}_3$ e $\hat{H}_2 = \hat{A}_8$, definiti da

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.19.847)$$

I loro autovettori simultanei normalizzati sono i seguenti

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19.848)$$

a cui corrispondono, rispettivamente, i pesi

$$\nu_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.19.849)$$

$$\nu_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (2.19.850)$$

$$\nu_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.19.851)$$

Nelle notazioni per cui la base ortonormale dello spazio è scritta come $|\mathbf{h}, \mathbf{p}, R\rangle$, abbiamo (non c'è degenerazione, dunque \mathbf{p} è assente)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &\Leftrightarrow |\nu_1; \mathbf{3}\rangle \\ \mathbf{v}_2 &\Leftrightarrow |\nu_2; \mathbf{3}\rangle \\ \mathbf{v}_3 &\Leftrightarrow |\nu_3; \mathbf{3}\rangle \end{aligned} \quad (2.19.852)$$

ed evidentemente l'autovettore con il peso più alto è \mathbf{v}_1 , a cui corrisponde il peso $\mathbf{h}_M = \nu_1$.

Determiniamo adesso la coppia dei coefficienti di Dynkin (s_1, s_2) che caratterizzano la rappresentazione. Per definizione⁹⁰ risulta

$$\begin{aligned} s_1 = 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_M &= (1, \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ s_2 = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_M &= (1, -\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.19.853)$$

Dunque la rappresentazione $\mathbf{3}$ individua, nello schema che abbiamo descritto, la coppia di Dynkin $(1, 0)$, coerentemente con il fatto che il suo peso più alto ν_1 coincide con il peso fondamentale $\mu^{(1)}$.

La $\mathbf{3}$, quindi, è una delle due *rappresentazioni fondamentali* di SU_3 .

⁹⁰Si ricordi che le due radici semplici $\mathbf{b} = \rho^{(1)}$ e $\mathbf{c} = \rho^{(2)}$ sono normalizzate all'unità.

Vediamo adesso come, partendo *unicamente* dalla coppia di Dynkin (1, 0), si possa ricostruire la rappresentazione **3**.

Come sappiamo (cfr.(2.19.843)), il peso fondamentale definito da (1, 0) è

$$\mu^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \equiv \mathbf{h}_M \quad (2.19.854)$$

Dunque, essendo per ipotesi \mathbf{h}_M il peso più alto nella rappresentazione, l'autovettore corrispondente $|\mathbf{h}_M\rangle$, che supporremo normalizzato, sarà annichilato dagli operatori di salita legati alle radici semplici e conseguentemente da *tutti* gli operatori di salita, per cui

$$I_+ |\mathbf{h}_M\rangle = |0\rangle; \quad U_+ |\mathbf{h}_M\rangle = |0\rangle; \quad V_+ |\mathbf{h}_M\rangle = |0\rangle \quad (2.19.855)$$

D'altronde

$$I_3 = \hat{H}_1; \quad U_3 = \frac{1}{2} (\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_3); \quad V_3 = \frac{1}{2} (\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_3) \quad (2.19.856)$$

e dunque risulta

$$\begin{aligned} I_3 |\mathbf{h}_M\rangle &= \frac{1}{2} |\mathbf{h}_M\rangle \equiv \frac{1}{2} |\mu^{(1)}\rangle && \equiv \frac{1}{2} |\nu_1\rangle \\ U_3 |\mathbf{h}_M\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{6} \right) |\mathbf{h}_M\rangle = \frac{s_1}{2} |\mathbf{h}_M\rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{h}_M\rangle \equiv \frac{1}{2} |\nu_1\rangle \\ V_3 |\mathbf{h}_M\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{6} \right) |\mathbf{h}_M\rangle = \frac{s_2}{2} |\mathbf{h}_M\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.19.857)$$

Questo risultato ci dice che il vettore $|\nu_1\rangle \equiv |\mathbf{h}_M\rangle \equiv |\mu^{(1)}\rangle$, riguardo agli operatori I_j e U_j , è il capostipite di una rappresentazione di SU_2 di spin $j = \frac{1}{2}$, mentre, essendo annichilato dai V_j , costituisce un singoletto di V-spin.

Dovrà dunque esistere sia il vettore $I_-|\nu_1\rangle$ come pure $U_-|\nu_1\rangle$ e sarà

$$I_-|\nu_1\rangle = \tilde{E}_{-\mathbf{a}}|\nu_1\rangle = A|\nu_1 - \mathbf{a}\rangle = A|\nu_2\rangle \quad (2.19.858)$$

$$U_-|\nu_1\rangle = \tilde{E}_{-\mathbf{b}}|\nu_1\rangle = B|\nu_1 - \mathbf{b}\rangle = B|\nu_3\rangle \quad (2.19.859)$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\begin{aligned} \nu_1 - \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) - (1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \nu_2 \\ \nu_1 - \mathbf{b} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \nu_3 \end{aligned} \quad (2.19.860)$$

mentre A e B sono costanti reali scelte in modo che $|\nu_2\rangle$ e $|\nu_3\rangle$ risultino normalizzati. Riguardo a queste costanti, si ha

$$\begin{aligned} |A|^2 \langle \nu_2 | \nu_2 \rangle &= \langle \nu_1 | (I_-)^\dagger I_- | \nu_1 \rangle = \langle \nu_1 | I_+ I_- | \nu_1 \rangle = \\ &= \langle \nu_1 | [I_+, I_-] | \nu_1 \rangle + \langle \nu_1 | I_- I_+ | \nu_1 \rangle = \\ &= \langle \nu_1 | I_3 | \nu_1 \rangle = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.19.861)$$

$$\begin{aligned} |B|^2 \langle \nu_3 | \nu_3 \rangle &= \langle \nu_1 | (U_-)^\dagger U_- | \nu_1 \rangle = \langle \nu_1 | U_+ U_- | \nu_1 \rangle = \\ &= \langle \nu_1 | [U_+, U_-] | \nu_1 \rangle + \langle \nu_1 | U_- U_+ | \nu_1 \rangle = \\ &= \langle \nu_1 | U_3 | \nu_1 \rangle = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.19.862)$$

e dunque, con una scelta di fase ovvia, possiamo concludere che

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_- |\nu_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\nu_2 \rangle; \quad U_- |\nu_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\nu_3 \rangle \quad (2.19.863)$$

Dimostriamo ora che lo spazio lineare tridimensionale generato dalla base ortonormale $|\nu_j \rangle$ è trasformato in sé dagli operatori I_j , U_j e V_j , dunque è sede di una rappresentazione di $SU3$ di dimensione 3.

Iniziamo dall'azione di questi operatori su $|\nu_1 \rangle$ che già conosciamo: si ha

$$\begin{aligned} I_+ |\nu_1 \rangle &= |0 \rangle; & I_- |\nu_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\nu_2 \rangle; & I_3 |\nu_1 \rangle &= \frac{1}{2} |\nu_1 \rangle \\ U_+ |\nu_1 \rangle &= |0 \rangle; & U_- |\nu_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\nu_3 \rangle; & U_3 |\nu_1 \rangle &= \frac{1}{2} |\nu_1 \rangle \\ V_+ |\nu_1 \rangle &= |0 \rangle; & V_- |\nu_1 \rangle &= |0 \rangle; & V_3 |\nu_1 \rangle &= |0 \rangle \end{aligned} \quad (2.19.864)$$

Vediamo adesso qual è l'azione di questi operatori su $|\nu_2 \rangle$.
Iniziamo dagli I_j : abbiamo (cfr. anche (2.18.725))

$$\begin{aligned} I_+ |\nu_2 \rangle &= \sqrt{2} I_+ I_- |\nu_1 \rangle = \sqrt{2} [I_+, I_-] |\nu_1 \rangle + \sqrt{2} I_- I_+ |\nu_1 \rangle = \\ &= \sqrt{2} I_3 |\nu_1 \rangle + |0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |\nu_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\nu_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.19.865)$$

$$I_- |\nu_2 \rangle = \sqrt{2} I_- I_- |\nu_1 \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.866)$$

$$I_3 |\nu_2 \rangle \equiv \hat{H}_1 |\nu_2 \rangle = -\frac{1}{2} |\nu_2 \rangle \quad (2.19.867)$$

dove la (2.19.866) discende dal fatto che, essendo $|\nu_1 \rangle$ il capostipite di un doppietto di $I - spin$, l'azione su di esso dell'operatore di discesa I_- al quadrato conduce al vettore nullo.

Passiamo a considerare l'azione degli U_j su $|\nu_2 \rangle$: abbiamo (cfr. anche (2.18.724))

$$\begin{aligned} U_+ |\nu_2 \rangle &= \sqrt{2} U_+ I_- |\nu_1 \rangle = \sqrt{2} [U_+, I_-] |\nu_1 \rangle + \sqrt{2} I_- U_+ |\nu_1 \rangle = \\ &= \sqrt{2} \frac{-1}{\sqrt{2}} V_- |\nu_1 \rangle + |0 \rangle = |0 \rangle + |0 \rangle = |0 \rangle \end{aligned} \quad (2.19.868)$$

$$U_3 |\nu_2 \rangle \equiv \frac{\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_2}{2} |\nu_2 \rangle = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{6} \right) |\nu_2 \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.869)$$

$$U_- |\nu_2 \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.870)$$

dove la (2.19.870) discende dal fatto che, poiché lo spettro delle rappresentazioni irriducibili di $SU2$ è simmetrico rispetto allo zero, date le (2.19.868) e la (2.19.869), il vettore $|\nu_2 \rangle$ costituisce necessariamente un singoletto di $U - spin$.

Quanto, infine, all'azione dei V_j su $|\nu_2\rangle$, abbiamo (cfr. anche (2.18.724))

$$\begin{aligned} V_+|\nu_2\rangle &= \sqrt{2}V_+I_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}[V_+, I_-]|\nu_1\rangle + \sqrt{2}I_-V_+|\nu_1\rangle = \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}U_-|\nu_1\rangle + |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_3\rangle \end{aligned} \quad (2.19.871)$$

$$\begin{aligned} V_3|\nu_2\rangle &\equiv \frac{1}{2}(\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_2)|\nu_2\rangle = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)|\nu_2\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}|\nu_2\rangle \end{aligned} \quad (2.19.872)$$

$$\begin{aligned} V_-|\nu_2\rangle &= \sqrt{2}V_-I_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}[V_-, I_-]|\nu_1\rangle + \sqrt{2}I_-V_-|\nu_1\rangle = \\ &= |0\rangle + \sqrt{2}I_-V_-|\nu_1\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.19.873)$$

Riguardo infine all'azione degli operatori I_j , U_j e V_j su $|\nu_3\rangle$, abbiamo

$$\begin{aligned} I_+|\nu_3\rangle &= \sqrt{2}I_+U_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}[I_+, U_-]|\nu_1\rangle + \sqrt{2}U_-I_+|\nu_1\rangle = \\ &= \sqrt{2}\frac{-1}{\sqrt{2}}V_+|\nu_1\rangle + |0\rangle = -V_+|\nu_1\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.19.874)$$

$$I_3|\nu_3\rangle \equiv \hat{H}_1|\nu_3\rangle = |0\rangle \quad (2.19.875)$$

$$I_-|\nu_3\rangle = |0\rangle \quad (2.19.876)$$

$$\begin{aligned} U_+|\nu_3\rangle &= \sqrt{2}U_+U_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}[U_+, U_-]|\nu_1\rangle + \sqrt{2}U_-U_+|\nu_1\rangle = \\ &= \sqrt{2}U_3|\nu_1\rangle = \sqrt{2}\frac{1}{2}(\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_2)|\nu_1\rangle = \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)|\nu_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_1\rangle \end{aligned} \quad (2.19.877)$$

$$\begin{aligned} U_3|\nu_3\rangle &\equiv \frac{1}{2}(\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_2)|\nu_3\rangle = \frac{1}{2}\left(0 - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)|\nu_3\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}|\nu_3\rangle \end{aligned} \quad (2.19.878)$$

$$U_-|\nu_3\rangle = \sqrt{2}U_-U_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}(U_-)^2|\nu_1\rangle = |0\rangle \quad (2.19.879)$$

$$\begin{aligned} V_+|\nu_3\rangle &= \sqrt{2}V_+U_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}[V_+, U_-]|\nu_1\rangle + \sqrt{2}U_-V_+|\nu_1\rangle = \\ &= |0\rangle + |0\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.19.880)$$

$$V_3|\nu_3\rangle \equiv \frac{1}{2}(\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_2)|\nu_3\rangle = \frac{1}{2}\left(0 + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)|\nu_3\rangle = \frac{1}{2}|\nu_3\rangle$$

$$\begin{aligned} V_-|\nu_3\rangle &= \sqrt{2}V_-U_-|\nu_1\rangle = \sqrt{2}[V_-, U_-]|\nu_1\rangle + \sqrt{2}U_-V_-|\nu_1\rangle = \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}I_-|\nu_1\rangle + |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_2\rangle \end{aligned} \quad (2.19.881)$$

dove, in particolare, la (2.19.876) discende dal fatto che le (2.19.874) e (2.19.875) indicano che il vettore $|\nu_3\rangle$ costituisce un singoletto per l' I -spin.

La figura riportata sotto mostra l'azione degli operatori di salita/discesa sui vettori $|\nu_j\rangle$. Quelli non indicati danno come risultato il vettore nullo.

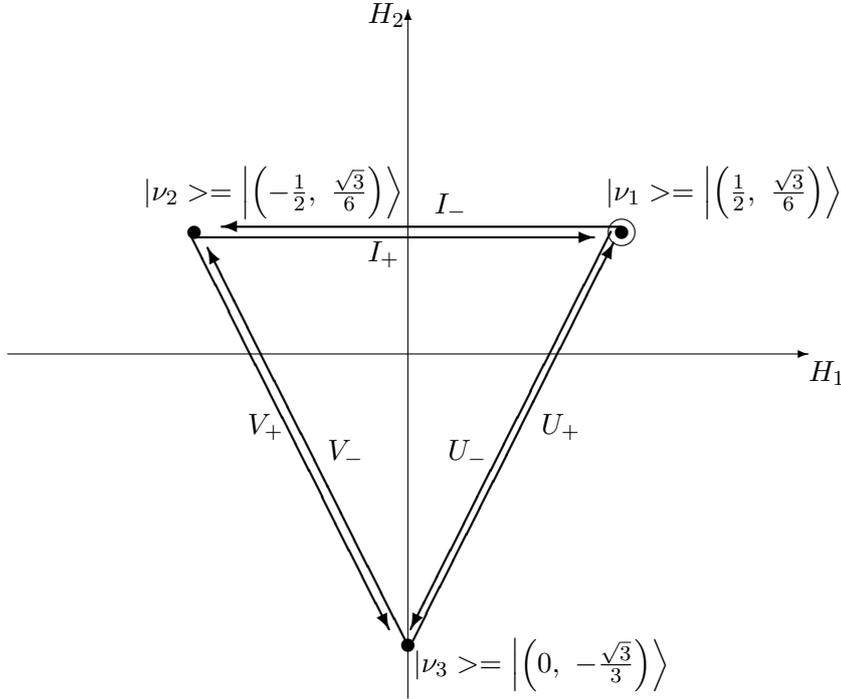


Fig.2.19.4 : azione degli operatori di salita/discesa sui $|\nu_j\rangle$

Come si vede, lo spazio che ha per base ortonormale i $|\nu_j\rangle$ è trasformato in sé dai generatori I_j, U_j e V_j ed è facile verificare dai risultati ottenuti sopra che la rappresentazione di SU_3 a cui essi danno luogo è proprio la rappresentazione **3**.

Limitandoci ai casi con risultato non nullo, possiamo riassumere quanto ottenuto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 I_-|\nu_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_2\rangle; & U_-|\nu_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_3\rangle; & V_+|\nu_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_3\rangle \\
 I_+|\nu_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_1\rangle; & U_+|\nu_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_1\rangle; & V_-|\nu_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\nu_2\rangle \\
 I_3|\nu_1\rangle &= \frac{1}{2}|\nu_1\rangle; & U_3|\nu_1\rangle &= \frac{1}{2}|\nu_1\rangle; & V_3|\nu_2\rangle &= -\frac{1}{2}|\nu_2\rangle \\
 I_3|\nu_2\rangle &= -\frac{1}{2}|\nu_2\rangle; & U_3|\nu_3\rangle &= -\frac{1}{2}|\nu_3\rangle; & V_3|\nu_3\rangle &= \frac{1}{2}|\nu_3\rangle
 \end{aligned}
 \tag{2.19.882}$$

I vettori $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_2\rangle$ costituiscono un doppietto di I -spin, mentre $|\nu_3\rangle$ è un singoletto. Analogamente $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_3\rangle$ sono un doppietto di U -spin e $|\nu_2\rangle$ è un singoletto mentre $|\nu_2\rangle$ e $|\nu_3\rangle$ sono un doppietto di V -spin e $|\nu_1\rangle$ è un singoletto.

La rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$

Abbiamo visto che al peso fondamentale $\mu^{(1)}$, definito dalla coppia di Dynkin $(1, 0)$, corrisponde la rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$.

Vogliamo dimostrare che all'altro peso fondamentale $\mu^{(2)}$, definito dalla coppia di Dynkin $(0, 1)$, corrisponde la rappresentazione fondamentale $\bar{\mathbf{3}}$.

Come sappiamo

$$\mu^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \equiv \mathbf{h}_M \equiv \bar{\nu}_2 \quad (2.19.883)$$

Poiché il vettore $|\mathbf{h}_M\rangle = |\mu^{(2)}\rangle = |\bar{\nu}_2\rangle$ è, per definizione, quello con il peso più alto nella rappresentazione, esso è necessariamente annichilato da tutti gli operatori di salita, ovvero

$$I_+|\bar{\nu}_2\rangle = U_+|\bar{\nu}_2\rangle = V_+|\bar{\nu}_2\rangle = |0\rangle \quad (2.19.884)$$

Inoltre, essendo $|\bar{\nu}_2\rangle$ autovettore simultaneo di \hat{H}_1 e \hat{H}_2 , risulta

$$\begin{aligned} I_3|\bar{\nu}_2\rangle &= \hat{H}_1|\bar{\nu}_2\rangle &&= \frac{1}{2}|\bar{\nu}_2\rangle \\ U_3|\bar{\nu}_2\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_2)|\bar{\nu}_2\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)|\bar{\nu}_2\rangle = |0\rangle \\ V_3|\bar{\nu}_2\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_2)|\bar{\nu}_2\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)|\bar{\nu}_2\rangle = \frac{1}{2}|\bar{\nu}_2\rangle \end{aligned} \quad (2.19.885)$$

Abbiamo poi che

$$\begin{aligned} V_-|\bar{\nu}_2\rangle &\equiv \tilde{E}_{-\mathbf{c}}|\bar{\nu}_2\rangle = |\bar{\nu}_2 - \mathbf{c}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left| \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{\nu}_3\rangle \\ I_-|\bar{\nu}_2\rangle &\equiv \tilde{E}_{-\mathbf{a}}|\bar{\nu}_2\rangle = |\bar{\nu}_2 - \mathbf{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{\nu}_1\rangle \end{aligned} \quad (2.19.886)$$

e risulta

$$\begin{aligned} I_3|\bar{\nu}_1\rangle &= \hat{H}_1|\bar{\nu}_1\rangle &&= -\frac{1}{2}|\bar{\nu}_1\rangle \\ U_3|\bar{\nu}_1\rangle &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)|\bar{\nu}_1\rangle = -\frac{1}{2}|\bar{\nu}_1\rangle \\ V_3|\bar{\nu}_1\rangle &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)|\bar{\nu}_1\rangle = |0\rangle \\ I_3|\bar{\nu}_3\rangle &= \hat{H}_1|\bar{\nu}_3\rangle &&= |0\rangle \\ U_3|\bar{\nu}_3\rangle &= \frac{1}{2}\left(0 + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)|\bar{\nu}_3\rangle = \frac{1}{2}|\bar{\nu}_3\rangle \\ V_3|\bar{\nu}_3\rangle &= \frac{1}{2}\left(0 - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)|\bar{\nu}_3\rangle = -\frac{1}{2}|\bar{\nu}_3\rangle \end{aligned} \quad (2.19.887)$$

Per gli altri operatori non indicati, il risultato è nullo.

In conclusione abbiamo che

- il vettore $|\bar{\nu}_2\rangle$ è il capostipite di un doppietto di I -spin di cui il secondo elemento è $|\bar{\nu}_1\rangle$, mentre $|\bar{\nu}_3\rangle$ è un singoletto;
- il vettore $|\bar{\nu}_3\rangle$ è il capostipite di un doppietto di U -spin di cui il secondo elemento è $|\bar{\nu}_1\rangle$, mentre $|\bar{\nu}_2\rangle$ è un singoletto;
- $|\bar{\nu}_2\rangle$ è il capostipite di un doppietto di V -spin di cui il secondo elemento è $|\bar{\nu}_3\rangle$, mentre $|\bar{\nu}_1\rangle$ è un singoletto.

E' facile convincersi che si tratta della rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$, complessa coniugata della $\mathbf{3}$. Lo spettro degli autovalori degli operatori di Cartan dell'una si ottiene da quello dell'altra per parità nel piano (H_1, H_2) . Questo è il motivo per cui abbiamo chiamato $|\bar{\nu}_2\rangle$ il vettore di peso più alto in quanto trasformato per parità di $|\nu_2\rangle$ della $\mathbf{3}$.

Si osservi infine che gli spettri della $\mathbf{3}$ e della $\bar{\mathbf{3}}$ sono trasformati in sé per rotazioni di 120° intorno all'origine degli assi (H_1, H_2) , come pure per parità rispetto all'asse H_2 , ovvero per $H_1 \rightarrow -H_1$.

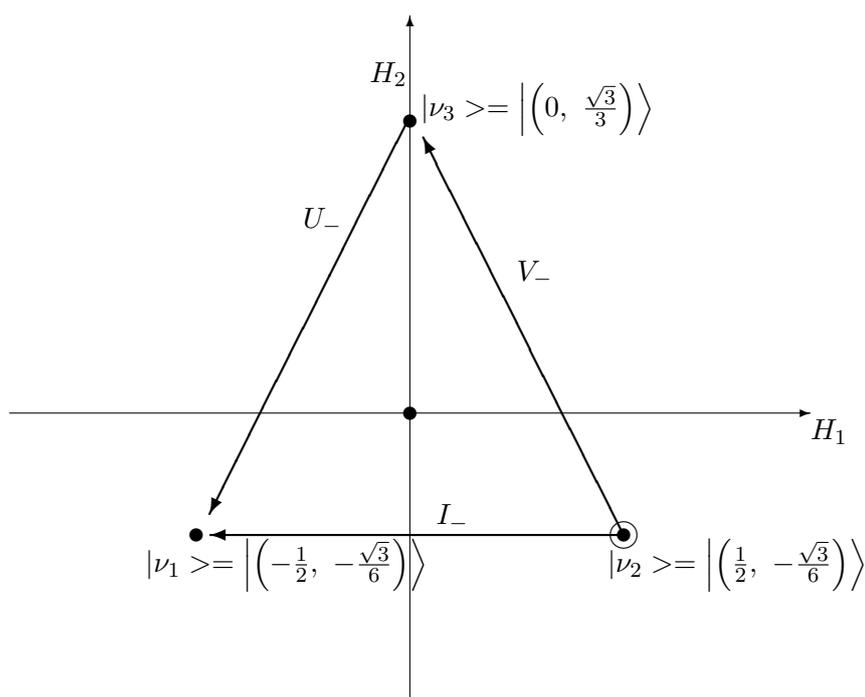


Fig.2.19.4 : Azione degli operatori di discesa sui $|\bar{\nu}_j\rangle$

Le rappresentazioni triangolari $(n, 0)$

Il peso più alto \mathbf{h}_M per la rappresentazione irriducibile descritta dalla coppia $(n, 0)$ (dove n è un intero strettamente positivo) è tale che

$$\begin{aligned} s_1 = n &= 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_M = (1, \sqrt{3}) \cdot (x, y) \Rightarrow x + \sqrt{3}y = n \\ s_2 = 0 &= 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_M = (1, -\sqrt{3}) \cdot (x, y) \Rightarrow x - \sqrt{3}y = 0 \end{aligned} \quad (2.19.888)$$

da cui

$$x = \frac{n}{2}; \quad y = x \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{n}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{n}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\mathbf{h}_M \rangle = \left| \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle \quad (2.19.889)$$

Poiché $|\mathbf{h}_M \rangle$ ha il peso più alto, sarà

$$I_+ |\mathbf{h}_M \rangle = U_+ |\mathbf{h}_M \rangle = V_+ |\mathbf{h}_M \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.890)$$

mentre avremo

$$\begin{aligned} I_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \hat{H}_1 |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{n}{2} |\mathbf{h}_M \rangle \\ U_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 + \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{s_1}{2} |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{n}{2} |\mathbf{h}_M \rangle \\ V_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 - \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{s_2}{2} |\mathbf{h}_M \rangle = |0 \rangle \end{aligned} \quad (2.19.891)$$

Dunque risulta che $|\mathbf{h}_M \rangle$

1. è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $I - spin$ con $j = \frac{n}{2}$;
2. è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $U - spin$ con $j = \frac{n}{2}$;
3. è un singoletto di $V - spin$

Per evidenziare quanto sopra, introduciamo nella descrizione di $|\mathbf{h}_M \rangle$ anche il vettore $\mathbf{p} \equiv (I, U, V)$, fatto dagli autovalori degli operatori I^2, U^2, V^2 , ovvero

$$|\mathbf{h}_M \rangle \rightarrow |\mathbf{h}_M, \mathbf{p} \rangle \quad (2.19.892)$$

per cui, nel caso attuale, $|\mathbf{h}_M \rangle$ diventa

$$|\mathbf{h}_M \rangle \equiv \left| \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0 \right) \right\rangle \quad (2.19.893)$$

Dato il punto 1. di cui sopra, successive applicazioni di I_- al vettore $|\mathbf{h}_M \rangle$ definiscono la catena degli $n + 1$ vettori appartenenti alla rappresentazione irriducibile di $I - spin$ di cui il vettore $|\mathbf{h}_M \rangle \equiv |i_0 \rangle$ è capostipite superiore, ovvero

$$|i_k \rangle \equiv \left| \left(\frac{n}{2} - k, \frac{n}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{n}{2}, U_k, V_k \right) \right\rangle; \quad k = 0, \dots, n \quad (2.19.894)$$

dove U_k e V_k sono da determinare.

In modo del tutto analogo, dato il punto 2. di cui sopra, successive applicazioni di U_- al vettore $|\mathbf{h}_M\rangle$ definiscono la catena degli $n+1$ vettori appartenenti alla rappresentazione irriducibile di $U - spin$ di cui il vettore $|\mathbf{h}_M\rangle \equiv |u_0\rangle$ è capostipite, ovvero

$$|u_s\rangle \equiv \left| \left(\frac{n-s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \right), \left(I_s, \frac{n}{2}, V_s \right) \right\rangle; \quad s = 0, \dots, n \quad (2.19.895)$$

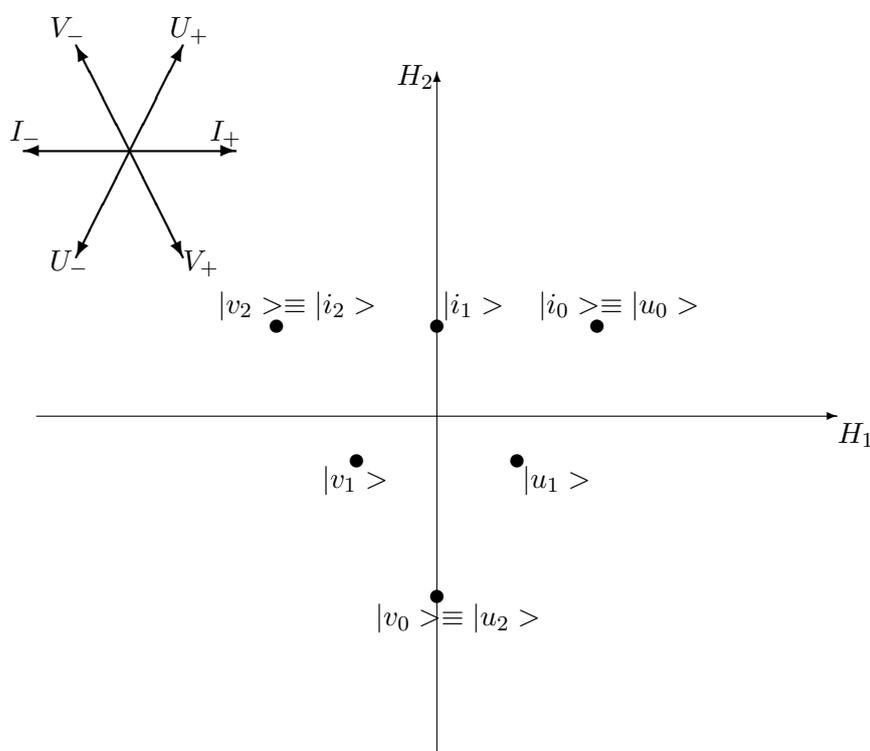
dove l'ultimo vettore della catena, è evidentemente dato da

$$|u_n\rangle = \left| \left(\frac{n-n}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - n \right) \right), \left(I_n, \frac{n}{2}, V_n \right) \right\rangle = \left| \left(0, -n\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(I_n, \frac{n}{2}, V_n \right) \right\rangle \quad (2.19.896)$$

Vogliamo adesso dimostrare che

- per i vettori $|i_k\rangle$ vale la proprietà di essere annichilati dagli operatori V_- e U_+ ;
- per i vettori $|u_s\rangle$ vale la proprietà di essere annichilati dagli operatori V_+ e I_+ .

Nella figura è mostrata la disposizione di questi autovettori nel piano H_1, H_2 , nel caso di $n=2$.



Iniziamo dagli $|i_k\rangle$.

Il vettore $|i_0\rangle = |\mathbf{h}_M\rangle$ è effettivamente annichilato da U_+ in quanto, per ipotesi, esso è annichilato da tutti gli operatori di salita, ed è annichilato anche da V_- perchè, come già osservato, $|\mathbf{h}_M\rangle$ è un singoletto di $V - spin$. Supponiamo ora che U_+ e V_- annichilino $|i_k\rangle$ ($0 < k < n$): vogliamo dimostrare che da questo discende che anche $|i_{k+1}\rangle$ è annichilato da questi due operatori. Infatti, essendo $|i_{k+1}\rangle = \alpha I_- |i_k\rangle$ con α costante di normalizzazione opportuna, ecco che risulta

$$\begin{aligned} U_+ |i_{k+1}\rangle &= \alpha U_+ I_- |i_k\rangle = \alpha [U_+, I_-] |i_k\rangle + \alpha I_- U_+ |i_k\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} V_- |i_k\rangle = |0\rangle + |0\rangle = |0\rangle \\ V_- |i_{k+1}\rangle &= \alpha V_- I_- |i_k\rangle = \alpha [V_-, I_-] |i_k\rangle + \alpha I_- V_- |i_k\rangle = |0\rangle + |0\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Questo ci dice che non ci sono vettori corrispondenti ad autovalori di \hat{H}_2 superiori a quello degli $|i_k\rangle$.

Passiamo adesso a considerare gli $|u_s\rangle$.

Il vettore $|u_0\rangle = |\mathbf{h}_M\rangle$ è ovviamente annichilato da V_+ e I_+ in quanto esso è annichilato da tutti gli operatori di salita. Supponiamo ora che I_+ e V_+ annichilino $|u_s\rangle$ ($0 < s < n$): vogliamo dimostrare che anche $|u_{s+1}\rangle$ è annichilato da questi due operatori. Sia infatti $|u_{s+1}\rangle = \beta U_- |u_s\rangle$ con β costante di normalizzazione opportuna: risulta

$$\begin{aligned} I_+ |u_{s+1}\rangle &= \beta I_+ U_- |u_s\rangle = \beta [I_+, U_-] |u_s\rangle + \beta U_- I_+ |u_s\rangle = \beta \frac{-1}{\sqrt{2}} V_+ |u_s\rangle + |0\rangle = |0\rangle \\ V_+ |u_{s+1}\rangle &= \beta V_+ U_- |u_s\rangle = \beta [V_+, U_-] |u_s\rangle + \beta U_- V_+ |u_s\rangle = |0\rangle + |0\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.19.8)$$

e questo prova che, dato il capostipite $|\mathbf{h}_M\rangle$ assegnato, non esistono autovettori simultanei di \hat{H}_1 e \hat{H}_2 con autovalori "a destra" di quelli associati agli $|u_s\rangle$.

Veniamo ora alla determinazione degli autovalori mancanti degli operatori U^2 e V^2 relativamente ai vettori $|i_k\rangle$. Abbiamo

$$\begin{aligned} U_3 |i_k\rangle &= \frac{1}{2} (\hat{H}_1 + \sqrt{3}\hat{H}_2) |i_k\rangle = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{2} - k \right) + \sqrt{3} \frac{n}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right] |i_k\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{n}{2} - k + \frac{n}{2} \right] |i_k\rangle = \frac{n-k}{2} |i_k\rangle \end{aligned} \quad (2.19.899)$$

Poiché si è anche visto che $U_+ |i_k\rangle = |0\rangle$, ne segue che $|i_k\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione di $U - spin$ con $j = \frac{n-k}{2}$, per cui possiamo concludere che $U_k = \frac{n-k}{2}$. In particolare, questo implica che $|i_n\rangle$ sia un singoletto di $U - spin$.

Quanto al $V - spin$, risulta che

$$\begin{aligned} V_3 |i_k\rangle &= \frac{1}{2} (\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_2) |i_k\rangle = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{2} - k \right) - \sqrt{3} \frac{n}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right] |i_k\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{n}{2} - k - \frac{n}{2} \right] |i_k\rangle = -\frac{k}{2} |i_k\rangle \end{aligned} \quad (2.19.900)$$

Siccome abbiamo visto anche che $V_-|i_k\rangle = |0\rangle$, questo significa che $|i_k\rangle$ è capostipite inferiore di una rappresentazione di $V - spin$ con $j = \frac{k}{2}$.

Possiamo dunque completare la (2.19.894) concludendo che

$$\begin{aligned} |i_k\rangle &\equiv |(H_1, H_2), (I_k, U_k, V_k)\rangle = \\ &= \left| \left(\frac{n}{2} - k, \frac{n\sqrt{3}}{3}, \frac{k}{2} \right), \left(\frac{n}{2}, \frac{n-k}{2}, \frac{k}{2} \right) \right\rangle; \quad k = 0, \dots, n \quad (2.19.901) \end{aligned}$$

Passiamo ora a determinare gli autovalori I_s e V_s che caratterizzano (cfr.(rap65)) i vettori $|u_s\rangle$. Abbiamo

$$I_3|u_s\rangle = \frac{n-s}{2}|u_s\rangle \quad (2.19.902)$$

e abbiamo dimostrato che $I_+|u_s\rangle = |0\rangle$, dunque $|u_s\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $I - spin$ con $j = \frac{n-s}{2}$.

Quanto al $V - spin$, risulta poi che

$$\begin{aligned} V_3|u_s\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{H}_1 - \sqrt{3}\hat{H}_2)|u_s\rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{n-s}{2} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \right] |u_s\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{n-s}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}s \right] |u_s\rangle = \frac{s}{2}|u_s\rangle \quad (2.19.903) \end{aligned}$$

e siccome si è dimostrato che $V_+|u_s\rangle = |0\rangle$, possiamo affermare che $|u_s\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $V - spin$ con $j = \frac{s}{2}$ e dunque possiamo così riscrivere la(2.19.895) come segue

$$\begin{aligned} |u_s\rangle &\equiv |(H_1, H_2), (I_s, U_s, V_s)\rangle = \\ &= \left| \left(\frac{n-s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \right), \left(\frac{n-s}{2}, \frac{n}{2}, \frac{s}{2} \right) \right\rangle; \quad s = 0, \dots, n \quad (2.19.904) \end{aligned}$$

Si osservi che, per $s = n$, ovvero al vertice inferiore del triangolo, il vettore $|u_n\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $V - spin$ con $j = \frac{n}{2}$. Se poniamo per comodità

$$|v_0\rangle \equiv |u_n\rangle = \left| \left(0, -n\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \right\rangle; \quad (2.19.905)$$

allora la catena degli $n+1$ vettori $|v_t\rangle$, definita a partire da $|v_0\rangle$ mediante successive applicazioni di $V_- = \tilde{E}_{-c}$, è fatta dai vettori

$$\begin{aligned} |v_t\rangle &\equiv |(H_1, H_2), (I_t, U_t, \frac{n}{2})\rangle = \\ &= \left| \left(-\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{2n}{3} \right) \right), \left(\frac{t}{2}, \frac{n-t}{2}, \frac{n}{2} \right) \right\rangle \quad (2.19.906) \end{aligned}$$

dove i valori di I_t e U_t sono determinati seguendo la procedura vista sopra. La catena dei $|v_t\rangle$ chiude a sinistra lo spettro degli operatori di Cartan, la cui forma è quella di un triangolo equilatero con il vertice in basso. Lo spettro di questi autovalori è riassunto nella relazione per cui, fissato l'intero non negativo n , dati m ed s interi non negativi tali che $m + s \leq n$, risulta

$$h_1 = \frac{n-s}{2} - m; \quad h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \quad (2.19.907)$$

Per ciascuno dei tre spin (I, U, V) ci sono $n+1$ rappresentazioni irriducibili con j che scende di mezza unità a partire da $\frac{n}{2}$, fino a zero, per un totale di autovalori possibili pari a

$$N = \sum_{k=0}^n (n+1-k) = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (2.19.908)$$

E' interessante ricordare che ciascuno degli autovalori (h_1, h_2) è non degenere ovvero, nello spazio lineare dove agisce la rappresentazione, per ognuno di essi esiste uno e un solo autovettore simultaneo di \hat{H}_1 e \hat{H}_2 .

Dato che

- l'azione di $U_- \equiv \tilde{E}_{-\mathbf{b}}$ sul generico autovettore degli operatori di Cartan avente peso \mathbf{h} , è quella di trasformarlo in un autovettore di peso

$$\mathbf{h} - \mathbf{b} = (h_1, h_2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.19.909)$$

a meno che questo peso sia fuori dello spettro possibile, nel qual caso il vettore viene annichilato;

- l'azione di $I_- \equiv \tilde{E}_{-\mathbf{a}}$ sul generico autovettore degli operatori di Cartan avente peso \mathbf{h} , è quella di trasformarlo in un autovettore di peso

$$\mathbf{h} - \mathbf{a} = (h_1, h_2) - (1, 0) \quad (2.19.910)$$

a meno che questo peso sia fuori dello spettro possibile, nel qual caso il vettore viene annichilato;

l'autovettore definito dal vettore dei pesi (2.19.907) può essere determinato a partire da $|\mathbf{h}_M\rangle$ il cui peso, come sappiamo, è $\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{n}{3} \right)$, nel modo seguente (a parte la normalizzazione)

$$\left| \left(\frac{n-s}{2} - m, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \right) \right\rangle \propto (I_-)^m (U_-)^s |\mathbf{h}_M\rangle \quad (2.19.911)$$

ma questo non è l'unico modo. Sempre con gli stessi operatori possiamo ottenerlo anche come

$$\left| \left(\frac{n-s}{2} - m, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \right) \right\rangle \propto (U_-)^s (I_-)^m |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.912)$$

In questo caso è facile rendersi conto che il risultato sarà lo stesso perché U_- e I_- commutano: esistono, però, anche altri modi in cui, pur ottenendo lo stesso peso, non è a priori evidente che conducano allo stesso autovettore, come per esempio se si pone

$$\left| \left(\frac{n-s}{2} - m, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n}{3} - s \right) \right) \right\rangle \propto (V_+)^s (I_-)^{s+m} |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.913)$$

Nella nota⁹¹ riportata sotto, dimostriamo che questo è vero, cioè che

$$(U_-)^s (I_-)^m |\mathbf{h}_M \rangle \propto (V_+)^s (I_-)^{s+m} |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.917)$$

⁹¹Risulta (si ricordi che $[V_+, I_-] = \frac{1}{\sqrt{2}}U_-$, $[V_+, U_-] = 0 = [I_-, U_-]$)

$$\begin{aligned} & (V_+)^s (I_-)^{s+m} = (V_+)^{s-1} V_+ I_- (I_-)^{s+m-1} = \\ & = (V_+)^{s-1} [V_+, I_-] (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} I_- V_+ (I_-)^{s+m-1} = \\ & (V_+)^{s-1} \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} I_- V_+ (I_-)^{s+m-1} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} I_- V_+ I_- (I_-)^{s+m-2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} I_- [V_+, I_-] (I_-)^{s+m-2} + (V_+)^{s-1} I_- I_- V_+ (I_-)^{s+m-2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} I_- \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (I_-)^{s+m-2} + (V_+)^{s-1} (I_-)^2 V_+ (I_-)^{s+m-2} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} (I_-)^2 V_+ (I_-)^{s+m-2} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} (I_-)^2 V_+ I_- (I_-)^{s+m-3} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} (I_-)^2 [V_+, I_-] (I_-)^{s+m-3} + (V_+)^{s-1} (I_-)^2 I_- V_+ (I_-)^{s+m-3} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} (I_-)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (I_-)^{s+m-3} + (V_+)^{s-1} (I_-)^3 V_+ (I_-)^{s+m-3} = \\ & = \frac{3}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} (I_-)^3 V_+ (I_-)^{s+m-3} = \\ & = \dots = \frac{s+m}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} + (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m} V_+ \end{aligned} \quad (2.19.914)$$

Poiché V_+ annichila $|\mathbf{h}_M \rangle$, possiamo trarre una prima conclusione secondo cui

$$(V_+)^s (I_-)^{s+m} |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{s+m}{\sqrt{2}} U_- (V_+)^{s-1} (I_-)^{s+m-1} |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.915)$$

e quindi, iterando per s passi fino a portare tutti i V_+ a destra, otteniamo infine che

$$(V_+)^s (I_-)^{s+m} |\mathbf{h}_M \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^s (s+m)(s+m-1)\dots(m+1) (U_-)^s (I_-)^m |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.916)$$

Vediamo ora cosa succede nel caso generale.

Vogliamo dimostrare che, qualunque sia la successione di operatori di salita/discesa che conducono da $|\mathbf{h}_M\rangle$ a un autovettore corrispondente all'autovalore (h_1, h_2) , con

$$(h_1, h_2) = \left(\frac{n-s}{2} - m, \frac{\sqrt{3}n}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}s \right) \quad (2.19.918)$$

finiamo sempre per ottenere lo stesso autovettore.

Iniziamo osservando che se assumiamo, in generale, che la successione sia costituita da

- a operatori I_+ e \bar{a} operatori I_- ,
- b operatori U_+ e \bar{b} operatori U_- ,
- c operatori V_+ e \bar{c} operatori V_-

disposti in un prodotto a priori casuale, allora, se il risultato conduce da $|\mathbf{h}_M\rangle$ a $|(h_1, h_2)\rangle$ deve accadere che, essendo $\mathbf{h}_M = \left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{n}{3}\right)$ e (h_1, h_2) dato dalla (2.19.918), risulti

$$\begin{aligned} (a - \bar{a})(1, 0) + (b - \bar{b})\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (c - \bar{c})\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \left(-m - \frac{s}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -m - \frac{s}{2} &= (a - \bar{a}) + \frac{1}{2}[(b - \bar{b}) + (c - \bar{c})]; \quad -s = (b - \bar{b}) - (c - \bar{c}) \end{aligned} \quad (2.19.919)$$

ovvero deve aversi che, posto

$$\alpha \equiv \bar{a} - a; \quad \beta \equiv \bar{b} - b; \quad \gamma \equiv \bar{c} - c \quad (2.19.920)$$

si ha

$$m = \alpha - \gamma; \quad s = \beta - \gamma \quad (2.19.921)$$

Poiché gli operatori I_+ , U_+ , V_+ e V_- annichilano $|\mathbf{h}_M\rangle$, procederemo alla riduzione della successione S di operatori data, $S = S(\alpha, \beta, \gamma)$, usando le regole di commutazione per spostare via via verso destra ciascuno degli operatori I_+ , U_+ , V_+ e V_- , in modo da giungere a una successione che annichila $|\mathbf{h}_M\rangle$.

Vediamo esplicitamente che cosa intendiamo.

Sia dunque X l'operatore fra i quattro indicati sopra che si trova più a destra nella successione S . Esso non può trovarsi alla fine della catena perché, altrimenti, avremmo che $S|\mathbf{h}_M\rangle = |0\rangle$. Dunque sarà

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = P_1 X Y P_2 \quad (2.19.922)$$

dove la successione P_2 può essere costituita solo dagli operatori I_- e U_- che, poiché commutano, assumeremo sia tale $P_2 = (U_-)^p (I_-)^q = P_2(q, p, 0)$, dove p, q sono interi non negativi opportuni. Quanto a XY , le possibilità sono solo le seguenti: I_+I_- , I_+U_- , U_+I_- , U_+U_- , V_+I_- , V_+U_- , V_-I_- , V_-U_- . Per spostare verso destra l'operatore X , facciamo uso dei commutatori, che forniscono

$$\begin{aligned} I_+I_- &= I_-I_+ + I_3; & I_+U_- &= U_-I_+ - \frac{1}{\sqrt{2}}V_+ \\ U_+I_- &= I_-U_+ - \frac{1}{\sqrt{2}}V_-; & U_+U_- &= U_-U_+ + U_3 \\ V_+I_- &= I_-V_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}U_-; & V_+U_- &= U_-V_+ + 0 \\ V_-I_- &= I_-V_- + 0; & V_-U_- &= U_-V_- + \frac{1}{\sqrt{2}}I_- \end{aligned} \quad (2.19.923)$$

Dunque

$$S = P_1 XY P_2 = S = P_1 YX P_2 + S = P_1 C P_2 \equiv S_1 + S'_1 \quad (2.19.924)$$

dove abbiamo indicato con C il commutatore $[X, Y]$.

Si osservi che S_1 contiene gli stessi operatori di S ma con l'operatore X un passo più vicino all'estremo destro, mentre $S'_1 \equiv P_1 C P_2$ ha comunque un operatore di tipo X in meno rispetto a S . Riguardo a S e S_1 , essi sono caratterizzati dalla stessa terna (α, β, γ) e dunque risulterà che

$$S|\mathbf{h}_M \rangle \equiv |(h_1, h_2) \rangle; \quad S_1|\mathbf{h}_M \rangle = A|(h_1, h_2) \rangle \quad (2.19.925)$$

dove A sarà un'opportuna costante. Quindi

$$S'_1|\mathbf{h}_M \rangle = (S - S_1)|\mathbf{h}_M \rangle = (1 - A)|(h_1, h_2) \rangle \quad (2.19.926)$$

ovvero anche $S'_1|\mathbf{h}_M \rangle$ sarà proporzionale a $|(h_1, h_2) \rangle$, cioè

$$S'_1|\mathbf{h}_M \rangle \equiv P_1 C P_2 |\mathbf{h}_M \rangle = A' |(h_1, h_2) \rangle \quad (2.19.927)$$

Circa il commutatore C , consideriamo adesso tutti i casi possibili.

- $C = 0$
In questo caso il termine S'_1 è nullo.

- $C = I_3$ oppure $C = U_3$
Poiché

$$\begin{aligned} [I_3, I_-] &= -I_-; & [I_3, U_-] &= -\frac{1}{2}U_- \\ [U_3, I_-] &= -\frac{1}{2}I_-; & [U_3, U_-] &= -U_3 \end{aligned} \quad (2.19.928)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} I_3 P_2 &\equiv I_3 (U_-)^p (I_-)^q = (U_-)^p (I_-)^q I_3 - \frac{p}{2} (U_-)^p (I_-)^q - q (U_-)^p (I_-)^q \\ U_3 P_2 &\equiv U_3 (U_-)^p (I_-)^q = (U_-)^p (I_-)^q U_3 - p (U_-)^p (I_-)^q - \frac{q}{2} (U_-)^p (I_-)^q \end{aligned} \quad (2.19.929)$$

Ma $|\mathbf{h}_M \rangle$ è autovettore sia di I_3 che di U_3 per l'autovalore $\frac{n}{2}$, quindi, avendo in mente che S'_1 agirà su $|\mathbf{h}_M \rangle$, possiamo concludere che

$$\begin{aligned} C = I_3 : & S'_1 = P_1 (U_-)^p (I_-)^q \left(\frac{n}{2} - \frac{p}{2} - q \right) \\ C = U_3 : & S'_1 = P_1 (U_-)^p (I_-)^q \left(\frac{n}{2} - \frac{q}{2} - p \right) \end{aligned} \quad (2.19.930)$$

- $C = \frac{1}{\sqrt{2}}I_-$ oppure $C = \frac{1}{\sqrt{2}}U_-$

In questo caso abbiamo semplicemente i due casi seguenti

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{\sqrt{2}}I_- : \quad S'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_1 (U_-)^p (I_-)^{q+1} \\ C = \frac{1}{\sqrt{2}}U_- : \quad S'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_1 (U_-)^{p+1} (I_-)^q \end{aligned} \quad (2.19.931)$$

- $C = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+$ oppure $C = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_-$

In questo caso, poiché

$$\begin{aligned} [V_+, U_-] &= 0; & [V_+, I_-] &= \frac{1}{\sqrt{2}}U_- \\ [V_-, U_-] &= \frac{1}{\sqrt{2}}I_-; & [V_-, I_-] &= 0 \end{aligned} \quad (2.19.932)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+P_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+ (U_-)^p (I_-)^q = -\frac{1}{\sqrt{2}}(U_-)^p V_+ (I_-)^q = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q}{\sqrt{2}}(U_-)^{p+1} (I_-)^{q-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(U_-)^p (I_-)^q V_+ \end{aligned} \quad (2.19.933)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}V_-P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p}{\sqrt{2}}(U_-)^{p-1} (I_-)^{q+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(U_-)^p (I_-)^q V_- \quad (2.19.934)$$

ovvero, ricordando che questi operatori agiscono su $|\mathbf{h}_M\rangle$, il quale è annichilato sia da V_+ che da V_- , possiamo affermare che

$$\begin{aligned} C = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+ : \quad S'_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q}{\sqrt{2}}P_1 (U_-)^{p+1} (I_-)^{q-1} \\ C = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_- : \quad S'_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p}{\sqrt{2}}P_1 (U_-)^{p-1} (I_-)^{q+1} \end{aligned} \quad (2.19.935)$$

Possiamo così concludere che $C P_2$ può essere considerato come costituito unicamente da un prodotto di operatori U_- e I_- e dunque in S'_1 gli operatori di tipo X , uno in meno rispetto a S , saranno presenti solo in P_1 .

Iterando la procedura elimineremo dalla successione tutti gli operatori di tipo X e quindi finiremo con una successione di soli U_- e I_- .

Poiché la procedura garantisce che la riduzione è fatta mantenendo il fatto di generare $|(h_1, h_2)\rangle$ a partire da $|\mathbf{h}_M\rangle$, la sua conclusione condurrà a un'espressione $\tilde{S} = \tilde{S}(\alpha, \beta, 0)$ che, per quanto visto, potrà solo essere tale che

$$\tilde{S}(\alpha, \beta, 0) = \tilde{S}(m, s, 0) = K (U_-)^s (I_-)^m \quad (2.19.936)$$

In altri termini, resta così dimostrato che per ciascun peso possibile (h_1, h_2)

$$(h_1, h_2) = \left(\frac{n-s}{2} - m, \frac{\sqrt{3}n}{2} - \frac{\sqrt{3}s}{2} \right) \quad (2.19.937)$$

esiste una sola sequenza di operatori di discesa che, a partire dal capostipite $|\mathbf{h}_M\rangle$ conduce all'autovettore corrispondente.

Questo naturalmente implica che nelle rappresentazioni $(n, 0)$ non c'è degenerazione.

Infine, per concludere sulle rappresentazioni triangolari di tipo $(n, 0)$, ricordiamo che, per quanto già osservato, esse costituiscono la rappresentazione irriducibile di peso più alto che si ottiene dal prodotto di n rappresentazioni fondamentali di tipo $(1, 0)$, ovvero di n rappresentazioni $\mathbf{3}$.

Come esempio consideriamo la rappresentazione caratterizzata dai coefficienti di Dynkin $(2, 0)$.

Prendiamo dunque il prodotto tensoriale $(1, 0) \otimes (1, 0) \equiv \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Poiché i pesi nella rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$, come abbiamo visto, sono

$$\nu_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right); \quad \nu_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right); \quad \nu_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.19.938)$$

ne segue che i pesi nella rappresentazione (riducibile) $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ saranno i seguenti

$$\begin{aligned} \nu_{11} = \nu_1 + \nu_1 &= \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right); & \nu_{12} = \nu_1 + \nu_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right); & \nu_{13} = \nu_1 + \nu_3 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ \nu_{21} = \nu_2 + \nu_1 &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right); & \nu_{22} = \nu_2 + \nu_2 &= \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right); & \nu_{23} = \nu_2 + \nu_3 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ \nu_{31} = \nu_3 + \nu_1 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right); & \nu_{32} = \nu_3 + \nu_2 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right); & \nu_{33} = \nu_3 + \nu_3 &= \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

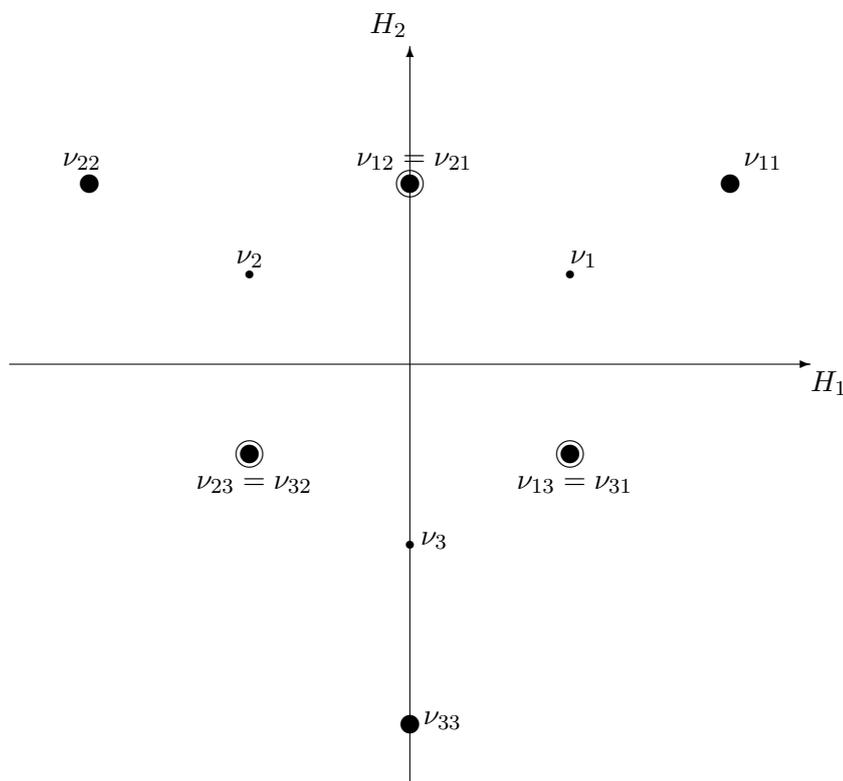


Fig.2.19.4 : $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$

Essi sono sei, di cui i tre cerchiati nella figura, ottenuti in due modi diversi, cioè

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \nu_{12} = \nu_{21} \\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= \nu_{13} = \nu_{31} \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= \nu_{23} = \nu_{32} \end{aligned} \quad (2.19.939)$$

Chiaramente la rappresentazione prodotto tensoriale ha $|\mathbf{h}_M \rangle = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = |\nu_{11} \rangle$ da cui, attraverso gli operatori di discesa I_- e U_- possiamo costruire, nel modo già ampiamente descritto, i vettori della base della rappresentazione irriducibile con coefficienti di Dynkin $(n, 0) = (2, 0)$, la quale ha dimensione $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = 6$. Riguardo ai tre vettori "doppi", la loro componente simmetrica si trova nella **6** mentre la parte antisimmetrica forma la rappresentazione irriducibile $\bar{\mathbf{3}}$. Dunque

$$(1, 0) \otimes (1, 0) \equiv \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}} \equiv (2, 0) \oplus (0, 1) \quad (2.19.940)$$

Le rappresentazioni triangolari $(0, n)$

Queste rappresentazioni hanno semplicemente lo spettro cambiato di segno rispetto alle $(n, 0)$, essendone le loro complesse coniugate. Non presentano novità di rilievo e dunque non le considereremo oltre.

Le rappresentazioni (n, m)

Si tratta delle rappresentazioni irriducibili di SU_3 più generali che possiamo avere. Esse sono presenti, una volta, nel prodotto tensoriale $(\mathbf{3})^n \otimes (\bar{\mathbf{3}})^m$. Supporremo nel seguito che $n \geq m \geq 0$. Nel caso in cui, invece, $m \geq n \geq 0$, la rappresentazione è semplicemente la complessa coniugata della rappresentazione (m, n) e dunque rientra sostanzialmente nel caso che considereremo.

Il peso più alto $\mathbf{h}_M \equiv (x, y)$, secondo quanto abbiamo visto, sarà tale che

$$\begin{aligned} s_1 &= n = 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_M = (1, \sqrt{3}) \cdot (x, y) \Rightarrow x + \sqrt{3}y = n \\ s_2 &= m = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_M = (1, -\sqrt{3}) \cdot (x, y) \Rightarrow x - \sqrt{3}y = m \end{aligned} \quad (2.19.941)$$

da cui

$$x = \frac{n+m}{2}; \quad y = \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.19.942)$$

e dunque

$$\mathbf{h}_M = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow |\mathbf{h}_M \rangle = \left| \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle \quad (2.19.943)$$

Per ipotesi, $|\mathbf{h}_M \rangle$, in quanto avente il peso più alto, sarà annichilato⁹² da I_+ , U_+ , V_+ :

$$I_+ |\mathbf{h}_M \rangle = U_+ |\mathbf{h}_M \rangle = V_+ |\mathbf{h}_M \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.944)$$

Essendo $|\mathbf{h}_M \rangle$ autovettore simultaneo degli operatori di Cartan \hat{H}_1 e \hat{H}_2 , lo è anche degli operatori I_3 , U_3 , V_3 e abbiamo

$$\begin{aligned} I_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \hat{H}_1 |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{n+m}{2} |\mathbf{h}_M \rangle \\ U_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 + \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{n}{2} |\mathbf{h}_M \rangle \\ V_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 - \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{m}{2} |\mathbf{h}_M \rangle \end{aligned} \quad (2.19.945)$$

Questi fatti implicano che $|\mathbf{h}_M \rangle$ sia capostipite superiore

- di una rappresentazione di $I - spin$ con $j = \frac{n+m}{2}$;
- di una rappresentazione di $U - spin$ con $j = \frac{n}{2}$;
- di una rappresentazione di $V - spin$ con $j = \frac{m}{2}$.

Poniamo adesso

$$|u_0 \rangle \equiv |\mathbf{h}_M \rangle \quad (2.19.946)$$

e definiamo gli autovettori simultanei (non normalizzati) di \hat{H}_1 e \hat{H}_2

$$|u_k \rangle \equiv (U_-)^k |u_0 \rangle \equiv (U_-)^k |\mathbf{h}_M \rangle; \quad k = 1, \dots, n \quad (2.19.947)$$

i cui pesi sono i seguenti

$$|u_k \rangle = \left| \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - k \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle \quad (2.19.948)$$

Vogliamo dimostrare che essi sono tutti tali per cui

$$I_+ |u_k \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.949)$$

Infatti, poiché

$$[I_+, U_-] = -\frac{1}{\sqrt{2}} V_+; \quad [V_+, U_-] = 0 \quad (2.19.950)$$

⁹²Si osservi che, rispetto a quanto succedeva nelle rappresentazioni triangolari $(n, 0)$, $|\mathbf{h}_M \rangle$ non è un singoletto di $V - spin$ e quindi non è annichilato anche da V_- .

abbiamo

$$\begin{aligned}
I_+(U_-)^k &= I_+U_-(U_-)^{k-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+(U_-)^{k-1} + U_-I_+(U_-)^{k-1} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+(U_-)^{k-1} + U_-I_+U_-(U_-)^{k-2} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+(U_-)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}U_-V_+(U_-)^{k-2} + U_-^2I_+(U_-)^{k-2} = \dots = \\
&= -\frac{k}{\sqrt{2}}(U_-)^{k-1}V_+ + (U_-)^kI_+ \tag{2.19.951}
\end{aligned}$$

ed entrambi questi operatori annichilano $|\mathbf{h}_M\rangle$, per cui, effettivamente risulta che

$$I_+|u_k\rangle = I_+(U_-)^k|\mathbf{h}_M\rangle = |0\rangle \tag{2.19.952}$$

D'altronde sappiamo anche che

$$\begin{aligned}
I_3|u_k\rangle &= \hat{H}_1|u_k\rangle = \hat{H}_1 \left| \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - k \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = \\
&= \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2} \right) \left| \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - k \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = \\
&= \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2} \right) |u_k\rangle \tag{2.19.953}
\end{aligned}$$

per cui possiamo affermare che gli $|u_k\rangle$ sono capostipiti superiori di rappresentazioni irriducibili di I - spin con $j = \frac{n+m-k}{2}$, dove $k = 0, \dots, n$.

In modo del tutto analogo, se poniamo

$$|v_0\rangle \equiv |\mathbf{h}_M\rangle \tag{2.19.954}$$

e

$$|v_k\rangle \equiv (V_-)^k |v_0\rangle \equiv (V_-)^k |\mathbf{h}_M\rangle; \quad k = 1, \dots, m \tag{2.19.955}$$

da cui

$$|v_k\rangle = \left| \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + k \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle \tag{2.19.956}$$

ecco che, evidentemente

$$I_3|v_k\rangle = \frac{n+m-k}{2} \left| \left(\frac{n+m}{2} - \frac{k}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + k \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle \tag{2.19.957}$$

mentre risulta altresì che

$$I_+ |v_k \rangle \equiv I_+ (V_-)^k |v_0 \rangle \equiv I_+ (V_-)^k |\mathbf{h}_M \rangle = |0 \rangle \quad (2.19.958)$$

Infatti, poiché

$$[I_+, V_-] = \frac{1}{\sqrt{2}} U_+; \quad [U_+, V_-] = 0 \quad (2.19.959)$$

risulta che

$$\begin{aligned} I_+ (V_-)^k &= I_+ V_- (V_-)^{k-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_+ (V_-)^{k-1} + V_- I_+ (V_-)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (V_-)^{k-1} U_+ + V_- I_+ V_- (V_-)^{k-2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (V_-)^{k-1} U_+ + V_- \frac{U_+}{\sqrt{2}} (V_-)^{k-2} + V_-^2 I_+ (V_-)^{k-2} = \\ &= \dots = \frac{k}{\sqrt{2}} (V_-)^{k-1} U_+ + (V_-)^k I_+ \end{aligned} \quad (2.19.960)$$

e siccome V_+ e I_+ annichilano \mathbf{h}_M , ecco che è dimostrata la (2.19.958). Ne segue dunque che i $|v_k \rangle$ sono capostipiti superiori di rappresentazioni irriducibili di $I - spin$ con $j = \frac{n+m-k}{2}$, dove $k = 0, \dots, m$.

Un esempio di spettro dei pesi è riportato nella figura (2.19.4) per la rappresentazione $(3, 2)$.

In una generica rappresentazione irriducibile (n, m) , con $n \neq m$, lo spettro ha forma esagonale, con il lato discendente che si origina in \mathbf{h}_M fatto da n punti (oltre il capostipite) disposti su una retta a 60° rispetto all'orizzontale (asse H_1), il lato ascendente da \mathbf{h}_M costituito da m punti su una retta a 120° rispetto all'orizzontale. I tratti sono ripetuti, alternati uno rispetto all'altro e inclinati di 60° rispetto al precedente e i punti sul bordo sono collegati in orizzontale da pesi distanti uno dall'altro di una unità.

A differenza, però, di quanto accadeva nel caso triangolare, come vedremo in seguito, nella (n, m) , solo i pesi nel layer più esterno non presentano degenerazione. I pesi nel layer successivo hanno molteplicità 2, e così via, crescendo di una unità ogni volta, finché non si arriva, eventualmente, a un layer triangolare: da quello in poi i layer restano triangolari e la molteplicità dei pesi resta costante (nel caso mostrato in figura, essa vale 3).

A partire da queste informazioni, possiamo determinare la dimensione $D(n, m)$ della rappresentazione (n, m) attraverso, per esempio, la somma delle dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di $I - spin$, avendo appunto cura di tenere conto dell'aumento di molteplicità che si realizza via via che si va verso i layers più interni dello spettro.

Come dimostreremo in generale, si ha

$$D(n, m) = \frac{1}{2} (n + 1)(m + 1)(n + m + 2) \tag{2.19.961}$$

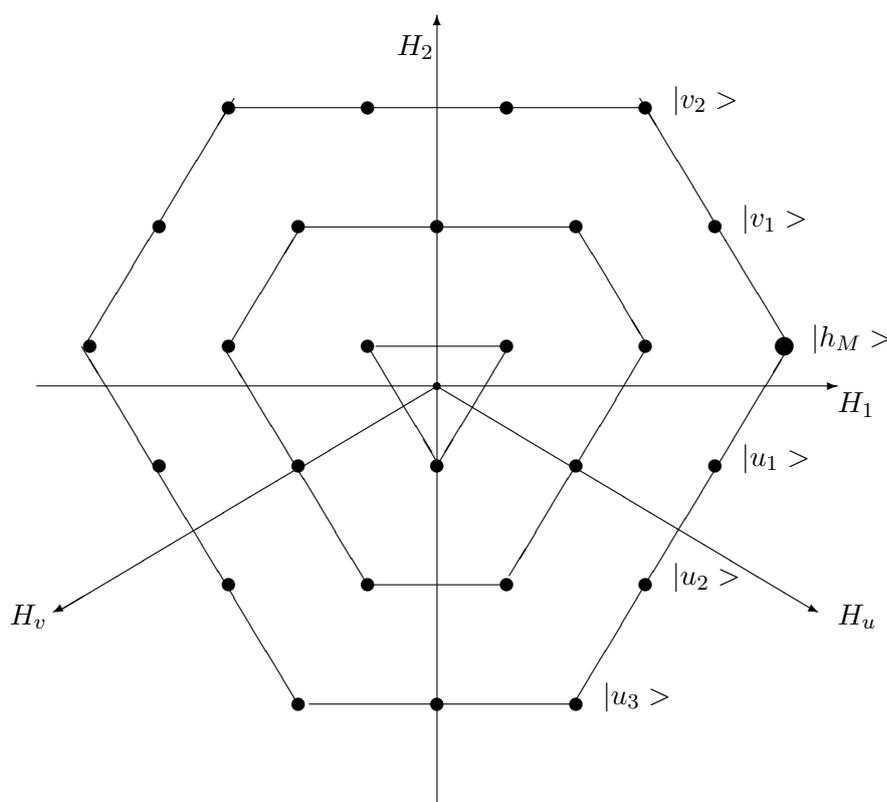


Fig.2.19.4 : Spettro della $(3, 2)$

Nel caso della rappresentazione il cui spettro è rappresentato nella figura di sopra, circa la determinazione di $D(3, 2)$, procedendo dal basso abbiamo

$ u_3 >$	$j = \frac{m}{2}$	$\rightarrow 3$	
$ u_2 >$	$j = \frac{m+1}{2} \oplus \frac{m+1}{2} - 1$	$\rightarrow 4 + 2$	
$ u_1 >$	$j = \frac{m+2}{2} \oplus \frac{m+2}{2} - 1 \oplus \frac{m+2}{2} - 2$	$\rightarrow 5 + 3 + 1$	
$ u_0 > = v_0 > = h_M >$	$j = \frac{m+3}{2} \oplus \frac{m+3}{2} - 1 \oplus \frac{m+3}{2} - 2$	$\rightarrow 6 + 4 + 2$	(2.19.962)
$ v_1 >$	$j = \frac{n+1}{2} \oplus \frac{n+1}{2} - 1$	$\rightarrow 5 + 3$	
$ v_2 >$	$j = \frac{n}{2}$	$\rightarrow 4$	
$D(3, 2)$	$\frac{1}{2}(n + 1)(m + 1)(n + m + 2) = \frac{1}{2} * 4 * 3 * 7$	$= 42$	

2.20 Il metodo tensoriale

Per descrivere le rappresentazioni irriducibili di $SU3$ è conveniente introdurre il metodo tensoriale e per questo è necessario ripartire dalla rappresentazione fondamentale $\mathbf{3} \equiv (1, 0)$.

Ricordiamo al riguardo che questa rappresentazione è definita come

$$U = e^{ia_j \hat{A}_j}; \quad j = 1, \dots, 8 \quad (2.20.963)$$

dove i generatori hermitiani a traccia nulla \hat{A}_j sono definiti dalla relazione (cfr.(2.16.662))

$$\hat{A}_j = \frac{1}{2} \lambda_j \quad (2.20.964)$$

essendo le matrici λ_j definite dalle (2.16.657)-(2.16.661).

Abbiamo altresì stabilito che l'algebra di Cartan sia generata (cfr.(2.17.665)) dalle seguenti due matrici diagonali

$$\hat{H}_1 \equiv \hat{A}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}_2 \equiv \hat{A}_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.20.965)$$

che definiscono i tre pesi μ_j seguenti, con i rispettivi autovettori simultanei

$$\mu_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \Rightarrow |\mu_1 \rangle \equiv |1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20.966)$$

$$\mu_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \Rightarrow |\mu_2 \rangle \equiv |2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20.967)$$

$$\mu_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow |\mu_3 \rangle \equiv |3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.20.968)$$

L'altra rappresentazione di $SU3$ di dimensione tre è la rappresentazione fondamentale $\bar{\mathbf{3}} = (0, 1)$ che, come abbiamo visto, è la complessa coniugata della $\mathbf{3}$, ovvero essa è fatta dalle matrici

$$U = \left(e^{ia_j \hat{A}_j} \right)^* = e^{-ia_j \hat{A}_j^*} \equiv e^{ia_j \bar{A}_j} \quad (2.20.969)$$

Poiché i generatori \hat{A}_j sono hermitiani, ecco che

$$\hat{A}_j = \left(\hat{A}_j \right)^\dagger = \left(\hat{A}_j^* \right)^t \Rightarrow \hat{A}_j^* = \hat{A}_j^t \quad (2.20.970)$$

e dunque

$$U \equiv e^{ia_j \bar{A}_j} = e^{-ia_j \hat{A}_j^t} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_j = -\hat{A}_j^t \quad (2.20.971)$$

ovvero i generatori della $\bar{\mathfrak{3}}$ risultano i traposti dei generatori della $\mathfrak{3}$, cambiati di segno. In particolare, nel caso dei generatori dell'algebra di Cartan, essendo \hat{A}_3 e \hat{A}_8 matrici diagonali e quindi coincidendo con le rispettive trasposte, abbiamo (cfr.(2.17.675)-(2.17.676))

$$\bar{H}_1 = \bar{A}_3 = -\hat{A}_3^t = -\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20.972)$$

$$\bar{H}_2 = \bar{A}_8 = -\hat{A}_8^t = -\hat{H}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.20.973)$$

Evidentemente, in questo caso i pesi risultano opposti a quelli di prima e si ha

$$\bar{\mu}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad \Rightarrow \quad |\bar{\mu}_1 \rangle \equiv |^1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20.974)$$

$$\bar{\mu}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad \Rightarrow \quad |\bar{\mu}_2 \rangle \equiv |^2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20.975)$$

$$\bar{\mu}_3 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \Rightarrow \quad |\bar{\mu}_3 \rangle \equiv |^3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.20.976)$$

Chiameremo adesso *vettore controvariante* il vettore

$$|\mathbf{v} \rangle = \alpha^k |^k \rangle, \quad \alpha^k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.20.977)$$

mentre parleremo di *vettore covariante* per

$$|\bar{\mathbf{v}} \rangle = \beta_k |^k \rangle, \quad \beta_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.20.978)$$

I vettori $|\mathbf{v} \rangle$ costituiscono lo spazio vettoriale dove agisce la rappresentazione $\mathfrak{3}$, mentre i vettori $|\bar{\mathbf{v}} \rangle$ quello dove agisce la $\bar{\mathfrak{3}}$.

Per comodità di notazione, per una generica rappresentazione unitaria R , indichiamo nel seguito con G_j la matrice hermitiana a traccia nulla che costituisce il suo generatore j -esimo, tale che

$$U = e^{ia_j G_j} \quad (2.20.979)$$

Definiamo quindi, a partire dalle matrici di Gell-Mann λ_j , le seguenti matrici Λ_j , aventi un indice in basso e uno alto

$$[\Lambda_j]_n^m \equiv \frac{1}{2} (\lambda_j)_{mn} \quad (2.20.980)$$

Esplicitiamo ora l'azione dei generatori della rappresentazione $\mathbf{3}$ sui vettori $|\mathbf{v}\rangle$: abbiamo

$$\begin{aligned} G_j |\mathbf{v}\rangle &\equiv \hat{A}_j |\mathbf{v}\rangle = \hat{A}_j \alpha^k |k\rangle = \alpha^k \hat{A}_j |k\rangle = \alpha^k \left(\hat{A}_j \right)_{mk} |m\rangle = \\ &= \alpha^k [\Lambda_j]_k^m |m\rangle \end{aligned} \quad (2.20.981)$$

ovvero i vettori della base controvariante si trasformano, sotto i generatori della rappresentazione $\mathbf{3}$ secondo la legge

$$G_j |k\rangle = [\Lambda_j]_k^m |m\rangle \quad (2.20.982)$$

da cui otteniamo, in termini degli operatori di cui alle (2.18.733)-(2.18.734), (2.18.738)-(2.18.739) e (2.18.743)-(2.18.744) che

$$\begin{aligned} I_3 |1\rangle &= \frac{1}{2} |1\rangle; & I_3 |2\rangle &= -\frac{1}{2} |2\rangle; & I_3 |3\rangle &= |0\rangle \\ I_+ |1\rangle &= |0\rangle; & I_+ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle; & I_+ |3\rangle &= |0\rangle \\ I_- |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle; & I_- |2\rangle &= |0\rangle; & I_- |3\rangle &= |0\rangle \\ U_3 |1\rangle &= \frac{1}{2} |1\rangle; & U_3 |2\rangle &= |0\rangle; & U_3 |3\rangle &= -\frac{1}{2} |3\rangle \\ U_+ |1\rangle &= |0\rangle; & U_+ |2\rangle &= |0\rangle; & U_+ |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \\ U_- |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle; & U_- |2\rangle &= |0\rangle; & U_- |3\rangle &= |0\rangle \\ V_3 |1\rangle &= |0\rangle; & V_3 |2\rangle &= -\frac{1}{2} |2\rangle; & V_3 |3\rangle &= \frac{1}{2} |3\rangle \\ V_+ |1\rangle &= |0\rangle; & V_+ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle; & V_+ |3\rangle &= |0\rangle \\ V_- |1\rangle &= |0\rangle; & V_- |2\rangle &= |0\rangle; & V_- |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle \end{aligned} \quad (2.20.983)$$

Nella Tabella (2.2) che segue, sono riassunti i valori dei parametri caratterizzanti i vettori della base $|k\rangle$.

Rappresentazione $\mathbf{3} \equiv (1, 0)$							
vettore	\mathbf{h}	I_3	I	U_3	U	V_3	V
$ 1\rangle$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$ 2\rangle$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$ 3\rangle$	$\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabella 2.2: Caratteristiche dei vettori della base controvariante

Veniamo ora all'azione dei generatori della rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$ sui vettori covarianti $|\bar{\mathbf{v}}\rangle$: in questo caso, ricordando che $\bar{A}_j = -\hat{A}_j^t$, risulta

$$\begin{aligned} G_j |\bar{\mathbf{v}}\rangle &\equiv \bar{A}_j |\bar{\mathbf{v}}\rangle = \bar{A}_j \beta_r |^r\rangle = \beta_r \bar{A}_j |^r\rangle = \beta_r (\bar{A}_j)_{sr} |^s\rangle = \\ &= -\beta_r \left(\hat{A}_j \right)_{rs} |^s\rangle = -\beta_r [\Lambda_j]_s^r |^s\rangle \end{aligned} \quad (2.20.984)$$

ovvero i vettori della base covariante si trasformano, sotto i generatori della rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$ secondo la legge

$$G_j |^r\rangle = -[\Lambda_j]_s^r |^s\rangle \quad (2.20.985)$$

In particolare questo significa che, poiché come sappiamo i generatori della $\bar{\mathbf{3}}$ sono tali per cui $\bar{A}_j = -\hat{A}_j^t$, ne segue che

$$\begin{aligned} I_3 &\rightarrow -I_3; & I_+ &\rightarrow -I; & I_- &\rightarrow I_+ \\ U_3 &\rightarrow -U_3; & U_+ &\rightarrow -U; & U_- &\rightarrow U_+ \\ V_3 &\rightarrow -V_3; & V_+ &\rightarrow -V; & V_- &\rightarrow V_+ \end{aligned} \quad (2.20.986)$$

e dunque

$$\begin{aligned} I_3 |^1\rangle &= -\frac{1}{2} |^1\rangle; & I_3 |^2\rangle &= \frac{1}{2} |^2\rangle; & I_3 |^3\rangle &= |0\rangle \\ I_+ |^1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |^2\rangle; & I_+ |^2\rangle &= |0\rangle; & I_+ |^3\rangle &= |0\rangle \\ I_- |^1\rangle &= |0\rangle; & I_- |^2\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |^1\rangle; & I_- |^3\rangle &= |0\rangle \\ U_3 |^1\rangle &= -\frac{1}{2} |^1\rangle; & U_3 |^2\rangle &= |0\rangle; & U_3 |^3\rangle &= \frac{1}{2} |^3\rangle \\ U_+ |^1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |^3\rangle; & U_+ |^2\rangle &= |0\rangle; & U_+ |^3\rangle &= |0\rangle \\ U_- |^1\rangle &= |0\rangle; & U_- |^2\rangle &= |0\rangle; & U_- |^3\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |^1\rangle \\ V_3 |^1\rangle &= |0\rangle; & V_3 |^2\rangle &= \frac{1}{2} |^2\rangle; & V_3 |^3\rangle &= -\frac{1}{2} |^3\rangle \\ V_+ |^1\rangle &= |0\rangle; & V_+ |^2\rangle &= |0\rangle; & V_+ |^3\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |^2\rangle \\ V_- |^1\rangle &= |0\rangle; & V_- |^2\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |^3\rangle; & V_- |^3\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \quad (2.20.987)$$

Nella Tabella (2.2) che segue, sono riassunti i valori dei parametri caratterizzanti i vettori della base $|^k\rangle$.

Rappresentazione $\bar{\mathbf{3}} \equiv (0, 1)$							
vettore	\mathbf{h}	I_3	I	U_3	U	V_3	V
$ ^1\rangle$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$ ^2\rangle$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$ ^3\rangle$	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabella 2.3: Caratteristiche dei vettori della base covariante

2.20.1 La rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$

Consideriamo, alla luce di quanto sopra, il prodotto diretto della $\mathbf{3}$ con la $\bar{\mathbf{3}}$, ovvero la rappresentazione⁹³ $R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ definita come

$$R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \equiv (1, 0) \otimes (0, 1) \equiv \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \quad (2.20.988)$$

La base canonica dello spazio vettoriale di dimensione *nove* dove agisce questa rappresentazione è, naturalmente, la base

$$|_k \rangle |^r \rangle \equiv |^r_k \rangle \quad (2.20.989)$$

Esplicitiamo adesso il modo di agire degli elementi $\Pi(\mathbf{a})$ della $R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sulla base (2.20.989): abbiamo

$$\Pi(\mathbf{a})|^r_k \rangle \equiv \Pi(\mathbf{a})|_k \rangle |^r \rangle \equiv e^{ia_j G_j} |_k \rangle |^r \rangle = \left(e^{ia_j \hat{A}_j} |_k \rangle \right) \left(e^{ia_j \bar{A}_j} |^r \rangle \right) \quad (2.20.990)$$

Volendo determinare l'azione dei generatori G_j della $R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sugli $|^r_k \rangle$ basta differenziare rispetto ai parametri a_j la (2.20.990), moltiplicare per $-i$ e calcolare il risultato per $\mathbf{a} = \mathbf{0}$: si ottiene

$$\begin{aligned} G_j |^r_k \rangle &= G_j |_k \rangle |^r \rangle = \left(\hat{A}_j |_k \rangle \right) |^r \rangle + |_k \rangle \left(\bar{A}_j |^r \rangle \right) = \\ &= [\Lambda_j]_k^m |^r_m \rangle - |_k \rangle ([\Lambda_j]_s^r |^s \rangle) = \\ &= [\Lambda_j]_k^m |^r_m \rangle - [\Lambda_j]_s^r |^s_k \rangle \end{aligned} \quad (2.20.991)$$

Per studiare la rappresentazione, iniziamo osservando che il vettore $|\mathbf{h}_M \rangle$ con peso più alto nella $R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, dato che nella $\mathbf{3}$ questo è il vettore $|_1 \rangle \equiv \left| \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right\rangle$, mentre nella $\bar{\mathbf{3}}$ si tratta del vettore $|^2 \rangle \equiv \left| \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right\rangle$, è il vettore $|^2_1 \rangle \equiv |\mathbf{h}_M = (1, 0)\rangle$.

In termini dei coefficienti di Dynkin, questo vettore sarà il capostipite della rappresentazione irriducibile $(1, 1)$, che adesso vogliamo studiare.

I vettori della base della $(1, 1)$ saranno tutti e soli quelli che potremo costruire a partire dal capostipite $|^2_1 \rangle$ usando i sei ben noti operatori di salita/discesa la cui azione sulle componenti controvarianti e covarianti sono riportate, rispettivamente nella (2.20.983) e nella (2.20.987).

Iniziamo osservando che, come deve essere per la definizione stessa di $|\mathbf{h}_M \rangle$, risulta

$$I_+ |^2_1 \rangle = U_+ |^2_1 \rangle = V_+ |^2_1 \rangle = |0 \rangle \quad (2.20.992)$$

⁹³Non si confonda la rappresentazione $R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, che è appunto il prodotto diretto della $\mathbf{3} \equiv (1, 0)$ con la $\bar{\mathbf{3}} \equiv (0, 1)$ ed è riducibile, con la rappresentazione irriducibile $(1, 1)$ la quale è presente nella $R\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ insieme, come vedremo, alla rappresentazione scalare.

mentre si ha

$$I_- |^2_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |^2_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |^1_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|^2_2\rangle - |^1_1\rangle) \quad (2.20.993)$$

$$(I_-)^2 |^2_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} I_- (|^2_2\rangle - |^1_1\rangle) = -\frac{1}{2} (|^1_2\rangle + |^1_2\rangle) = -|^1_2\rangle \quad (2.20.994)$$

$$(I_-)^3 |^2_1\rangle = -I_- |^1_2\rangle = |0\rangle \quad (2.20.995)$$

I tre vettori $|^2_1\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}} (|^2_2\rangle - |^1_1\rangle)$ e $|^1_2\rangle$ costituiscono una rappresentazione di $I - spin$ con $j = 1$, di cui $|^2_1\rangle$ è il capostipite.

Consideriamo ora l'azione di U_- sul capostipite: abbiamo

$$U_- |^2_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |^2_3\rangle \quad (2.20.996)$$

$$(U_-)^2 |^2_1\rangle = U_- |^2_3\rangle = |0\rangle \quad (2.20.997)$$

e questi vettori $|^2_1\rangle$ e $|^2_3\rangle$ costituiscono un doppietto di $U - spin$ avente $|^2_1\rangle$ come capostipite.

Quanto al vettore $|^2_3\rangle$, esso è annichilato da I_+ , infatti, dal commutatore $[I_+, U_-] = -\frac{1}{\sqrt{2}} V_+$ ricaviamo che l'operatore $I_+ U_-$ può essere scritto come somma di due termini che hanno a destra, rispettivamente I_+ e V_+ e dunque annichilano $|\mathbf{h}_M\rangle$. Risulta invece che

$$I_- |^2_3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |^1_3\rangle \quad (2.20.998)$$

$$(I_-)^2 |^2_3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} I_- |^1_3\rangle = |0\rangle \quad (2.20.999)$$

e dunque $|^2_3\rangle$ e $|^1_3\rangle$ costituiscono un doppietto di $I - spin$.

Proseguendo, abbiamo che

$$V_+ |^1_3\rangle = |0\rangle; \quad V_- |^1_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |^1_2\rangle; \quad V_- |^1_2\rangle = |0\rangle \quad (2.20.1000)$$

dunque $|^1_3\rangle$ e $|^1_2\rangle$ costituiscono un doppietto di $V - spin$.

Risulta poi che

$$U_- |^1_2\rangle = |0\rangle; \quad U_+ |^1_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |^3_2\rangle; \quad U_+ |^3_2\rangle = |0\rangle \quad (2.20.1001)$$

e dunque $|^1_2\rangle$ e $|^3_2\rangle$ costituiscono un doppietto di $U - spin$.

Abbiamo quindi che

$$I_- |^3_2\rangle = |0\rangle; \quad I_+ |^3_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |^3_1\rangle; \quad I_+ |^3_1\rangle = |0\rangle \quad (2.20.1002)$$

e dunque $|\frac{3}{2}\rangle$ e $|\frac{3}{1}\rangle$ costituiscono un doppietto di $I - spin$.
Infine

$$V_- |\frac{3}{1}\rangle = |0\rangle; \quad V_+ |\frac{3}{1}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{2}{1}\rangle; \quad V_+ |\frac{2}{1}\rangle = |0\rangle \quad (2.20.1003)$$

così da chiudere il perimetro esterno dello spettro.

Abbiamo così individuato (vedi figura) 7 vettori, cioè i sei vettori sul bordo esterno dello spettro, cioè

$$|\frac{2}{1}\rangle; \quad |\frac{2}{3}\rangle; \quad |\frac{1}{3}\rangle; \quad |\frac{1}{2}\rangle; \quad |\frac{3}{2}\rangle; \quad |\frac{3}{1}\rangle \quad (2.20.1004)$$

insieme a un vettore al centro dello spettro, cioè

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{2}{2}\rangle - |\frac{1}{1}\rangle) \quad (2.20.1005)$$

che fa parte del tripletto di $I - spin$.

Ma al centro dello spettro, ovvero al vettore con pesi identicamente nulli, oltre che attraverso I_- applicato a $|\frac{2}{1}\rangle$ si può arrivare anche, per esempio, attraverso U_- partendo da $|\frac{3}{1}\rangle$ oppure con V_- partendo da $|\frac{2}{3}\rangle$. Abbiamo

$$U_- |\frac{3}{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{3}{3}\rangle - |\frac{1}{1}\rangle) \quad (2.20.1006)$$

$$V_- |\frac{2}{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{2}{2}\rangle - |\frac{3}{3}\rangle) \quad (2.20.1007)$$

La molteplicità del peso $\mathbf{h} = (0, 0)$, comunque, non è uguale a tre poiché i tre vettori di cui sopra non sono indipendenti. Come vuole la regola generale, la molteplicità associata a questo peso è uguale a due e quindi la dimensione della rappresentazione definita dai coefficienti di Dynkin $(1, 1)$ risulta pari a otto; per cui possiamo concludere affermando che

$$(1, 0) \otimes (0, 1) \equiv \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (2.20.1008)$$

dove lo stato di singoletto corrispondente alla rappresentazione $\mathbf{1}$ è costituito dal vettore completamente simmetrico per scambio degli indici

$$|s\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] \quad (2.20.1009)$$

il quale è palesemente ortogonale ai vettori di cui alle (2.20.1005), (2.20.1006) e (2.20.1007) e risulta tale che

$$\begin{aligned} I_3 |s\rangle &= U_3 |s\rangle = V_3 |s\rangle = |0\rangle \\ \sqrt{3} I_+ |s\rangle &= I_+ [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-|\frac{2}{1}\rangle + |\frac{2}{1}\rangle + |0\rangle] = |0\rangle \\ \sqrt{3} I_- |s\rangle &= I_- [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}\rangle + |0\rangle] = |0\rangle \\ \sqrt{3} U_+ |s\rangle &= U_+ [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-|\frac{3}{1}\rangle + |0\rangle + |\frac{3}{1}\rangle] = |0\rangle \\ \sqrt{3} U_- |s\rangle &= U_- [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{3}\rangle + |0\rangle - |\frac{1}{3}\rangle] = |0\rangle \\ \sqrt{3} V_+ |s\rangle &= V_+ [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + |\frac{2}{3}\rangle - |\frac{2}{3}\rangle] = |0\rangle \\ \sqrt{3} V_- |s\rangle &= V_- [|\frac{1}{1}\rangle + |\frac{2}{2}\rangle + |\frac{3}{3}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle - |\frac{3}{2}\rangle + |\frac{3}{2}\rangle] = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.20.1010)$$

Tornando ai vettori dell'ottetto che hanno peso $\mathbf{h} = (0, 0)$, evidentemente, come abbiamo già detto, il vettore

$$|(0, 0); 1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|{}^2_2\rangle - |{}^1_1\rangle) \quad (2.20.1011)$$

appartiene al tripletto di $I - spin$. Abbiamo visto anche che

$$|(0, 0); 2\rangle \equiv U_- |{}^3_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|{}^3_3\rangle - |{}^1_1\rangle) \quad (2.20.1012)$$

appartiene al tripletto di $U - spin$, ma non è ortogonale a $|(0, 0); 1\rangle$, infatti

$$\langle(0, 0); 1| (0, 0); 2\rangle = \frac{1}{2} [\langle{}^2_2| - \langle{}^1_1|] [|{}^3_3\rangle - |{}^1_1\rangle] = \frac{1}{2} \quad (2.20.1013)$$

Questo significa che $|(0, 0); 2\rangle$ non è un elemento di una rappresentazione irriducibile di $I - spin$ (e nemmeno di $V - spin$...) mentre lo è quanto all' $U - spin$. In modo analogo accade che, posto

$$|(0, 0); 3\rangle \equiv V_- |{}^2_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|{}^2_2\rangle - |{}^3_3\rangle) \quad (2.20.1014)$$

questo vettore appartiene al tripletto di $V - spin$ e risulta ancora che

$$\langle(0, 0); 1| (0, 0); 3\rangle = \frac{1}{2} [\langle{}^2_2| - \langle{}^1_1|] [|{}^2_2\rangle - |{}^3_3\rangle] = \frac{1}{2} \quad (2.20.1015)$$

mentre abbiamo che

$$\langle(0, 0); 2| (0, 0); 3\rangle = \frac{1}{2} [\langle{}^3_3| - \langle{}^1_1|] [|{}^2_2\rangle - |{}^3_3\rangle] = -\frac{1}{2} \quad (2.20.1016)$$

Nella tabella (2.4) viene riportata la caratterizzazione più completa che possiamo fare riguardo ai vettori della base $|{}^r_k\rangle$.

Abbiamo indicato nella colonna R la rappresentazione irriducibile di $SU3$ a cui il vettore appartiene: quando essa non è unica, abbiamo riportato la somma diretta delle rappresentazioni coinvolte.

Abbiamo trattato nello stesso modo il caso di I, U e V , cioè delle quantità che individuano le rappresentazioni irriducibili di $SU2$ concernenti lo spin corrispondente.

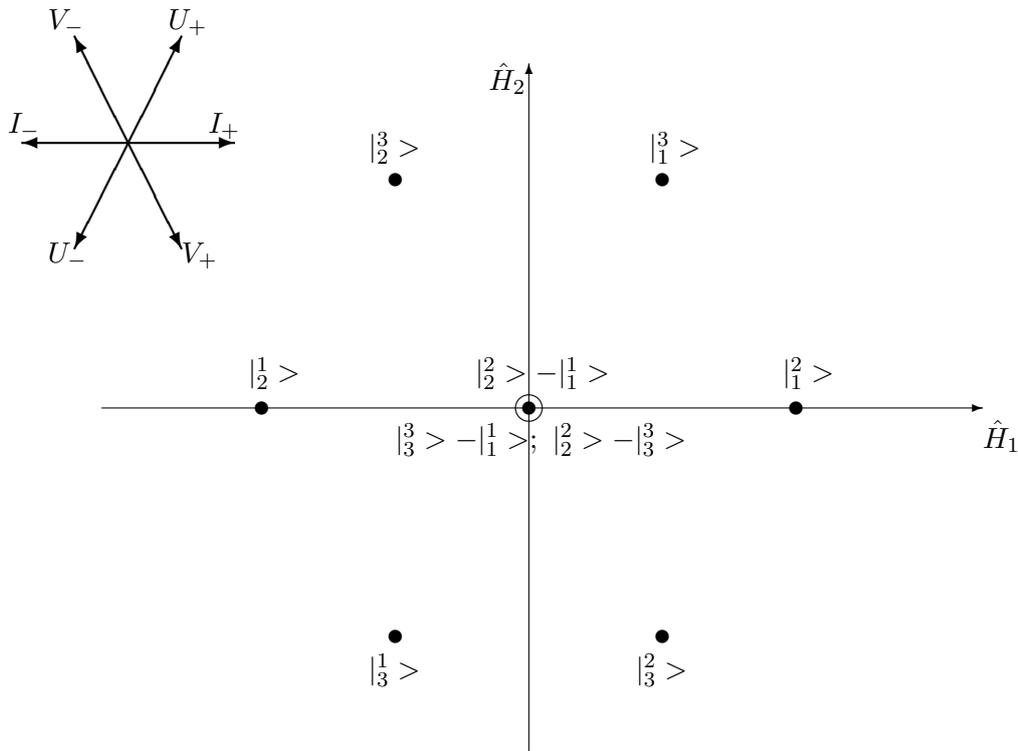


Fig.2.20.1 : Spettro della rappresentazione $(1,0) \equiv \mathbf{8}$

Rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \equiv (1,0) \otimes (0,1) = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$								
vettore	\mathbf{h}	I_3	I	U_3	U	V_3	V	R
$ \frac{2}{1}\rangle$	$(1,0)$	+1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{8}$
$ \frac{2}{3}\rangle$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	1	$\mathbf{8}$
$ \frac{1}{3}\rangle$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{8}$
$ \frac{1}{2}\rangle$	$(-1,0)$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{8}$
$ \frac{3}{2}\rangle$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$\mathbf{8}$
$ \frac{3}{1}\rangle$	$(+\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{8}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{2}{2}\rangle - -\frac{1}{1}\rangle)$	$(0,0)$	0	1	0	$1 \oplus 0$	0	$0 \oplus 1$	$\mathbf{8}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{3}{3}\rangle - -\frac{1}{1}\rangle)$	$(0,0)$	0	$0 \oplus 1$	0	1	0	$1 \oplus 0$	$\mathbf{8}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{2}{2}\rangle - -\frac{3}{3}\rangle)$	$(0,0)$	0	$1 \oplus 0$	0	$0 \oplus 1$	0	1	$\mathbf{8}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{1}{1}\rangle + -\frac{2}{2}\rangle + -\frac{3}{3}\rangle)$	$(0,0)$	0	0	0	0	0	0	$\mathbf{1}$
$ \frac{1}{1}\rangle$	$(0,0)$	0	1	0	1	0	0	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$
$ \frac{2}{2}\rangle$	$(0,0)$	0	1	0	0	0	1	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$
$ \frac{3}{3}\rangle$	$(0,0)$	0	0	0	1	0	1	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$

Tabella 2.4:

2.20.2 La rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$

Di questa rappresentazione ne abbiamo già parlato, concludendo che

$$R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (1, 0) \otimes (1, 0) = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}} \quad (2.20.1017)$$

E' comunque opportuno e istruttivo riprendere l'argomento nell'ambito del metodo tensoriale. Anche in questo caso, come per la $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$, lo spazio vettoriale dove agisce la $R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha dimensione *nove*.

Quanto alla sua base canonica, essa sarà fatta dai vettori

$$|_{k_1} \rangle > |_{k_2} \rangle \equiv |_{k_1 k_2} \rangle \quad (2.20.1018)$$

e dunque, in accordo con la (2.20.990), l'azione dei generatori G_j della rappresentazione $R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sui vettori della base di cui sopra sarà espressa dalla relazione generale

$$G_j |_{k_1 k_2} \rangle = [\Lambda_j]_{k_1}^m |_{mk_2} \rangle + [\Lambda_j]_{k_2}^m |_{k_1 m} \rangle \quad (2.20.1019)$$

dove, in accordo con quanto già definito, è

$$[\Lambda_j]_m^n = \left(\hat{A}_j \right)_{nm} \quad (2.20.1020)$$

Ricordiamo adesso che, circa i pesi, questi nella $\mathbf{3}$ sono i seguenti

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \rightarrow |_1 \rangle; \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \rightarrow |_2 \rangle; \quad \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \rightarrow |_3 \rangle \quad (2.20.1021)$$

ed evidentemente l'autovettore simultaneo dei generatori dell'algebra di Cartan avente peso più alto è proprio il vettore $|_1 \rangle$ a cui corrisponde il vettore dei pesi $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$. Nel prodotto tensoriale $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, l'autovettore con peso più alto sarà dunque il vettore

$$|\mathbf{h}_M \rangle = |_{11} \rangle \equiv \left| \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\rangle \quad (2.20.1022)$$

Abbiamo evidentemente che, per la definizione stessa di peso più alto, sarà

$$I_+ |_{11} \rangle = U_+ |_{11} \rangle = V_+ |_{11} \rangle = |0 \rangle \quad (2.20.1023)$$

mentre, per quanto già visto (cfr.(2.20.983)) risulta

$$\begin{aligned}
I_- |_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{21}\rangle + |_{12}\rangle) \\
I_-^2 |_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_- (|_{21}\rangle + |_{12}\rangle) = \frac{1}{2} (|_{22}\rangle + |_{22}\rangle) = |_{22}\rangle \\
I_-^3 |_{11}\rangle &= I_- |_{22}\rangle = |0\rangle \\
U_- |_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{31}\rangle + |_{13}\rangle) \\
U_-^2 |_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} U_- (|_{31}\rangle + |_{13}\rangle) = \frac{1}{2} (|_{33}\rangle + |_{33}\rangle) = |_{33}\rangle \\
U_-^3 |_{11}\rangle &= U_- |_{33}\rangle = |0\rangle \\
V_- |_{11}\rangle &= |0\rangle \\
V_- |_{22}\rangle &= |0\rangle \\
V_+ |_{22}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{32}\rangle + |_{23}\rangle) \\
V_+^2 |_{22}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_+ (|_{32}\rangle + |_{23}\rangle) = \frac{1}{2} (|_{33}\rangle + |_{33}\rangle) = |_{33}\rangle
\end{aligned} \tag{2.20.1024}$$

Questi risultati ci dicono che

- il vettore con peso più alto $|_{11}\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $I - spin$ avente $j = 1$, di cui fanno parte anche i vettori $\frac{1}{\sqrt{2}} (|_{21}\rangle + |_{12}\rangle)$ e $|_{22}\rangle$;
- il vettore con peso più alto $|_{11}\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $U - spin$ ancora con $j = 1$, di cui fanno parte anche i vettori $\frac{1}{\sqrt{2}} (|_{31}\rangle + |_{13}\rangle)$ e $|_{33}\rangle$;
- il vettore con peso più alto $|_{11}\rangle$ è un singoletto di $V - spin$;
- il vettore $|_{22}\rangle$ è capostipite inferiore di una rappresentazione irriducibile di $V - spin$ sempre con $j = 1$, di cui fanno parte anche i vettori $\frac{1}{\sqrt{2}} (|_{32}\rangle + |_{23}\rangle)$ e $|_{33}\rangle$;

In questo modo abbiamo individuato *sei* vettori, ovvero

$$|_{11}\rangle; \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{31}\rangle + |_{13}\rangle); |_{33}\rangle; \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{32}\rangle + |_{23}\rangle); |_{22}\rangle; \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{21}\rangle + |_{12}\rangle) \tag{2.20.1025}$$

i quali sono trasformati in sé dai generatori di una rappresentazione evidentemente irriducibile, che identifichiamo facilmente con la $(2, 0) \equiv \mathbf{6}$.

Trattandosi di una rappresentazione triangolare, la molteplicità associata ai pesi, come sappiamo, è sempre uguale a uno.

Si osservi ora che questi vettori sono tutti *simmetrici* per scambio degli indici, e questa è l'informazione nuova più importante che ci viene dall'uso dello schema tensoriale.

La base dello spazio vettoriale dove agisce il prodotto tensoriale $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ però è fatta da *nove* vettori indipendenti: gli altri tre, ortogonali ai precedenti, sono i seguenti

$$\begin{aligned}
|a_1\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{23}\rangle - |_{32}\rangle) \\
|a_2\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{31}\rangle - |_{13}\rangle) \\
|a_3\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{21}\rangle - |_{12}\rangle)
\end{aligned} \tag{2.20.1026}$$

evidentemente *antisimmetrici* nello scambio degli indici.

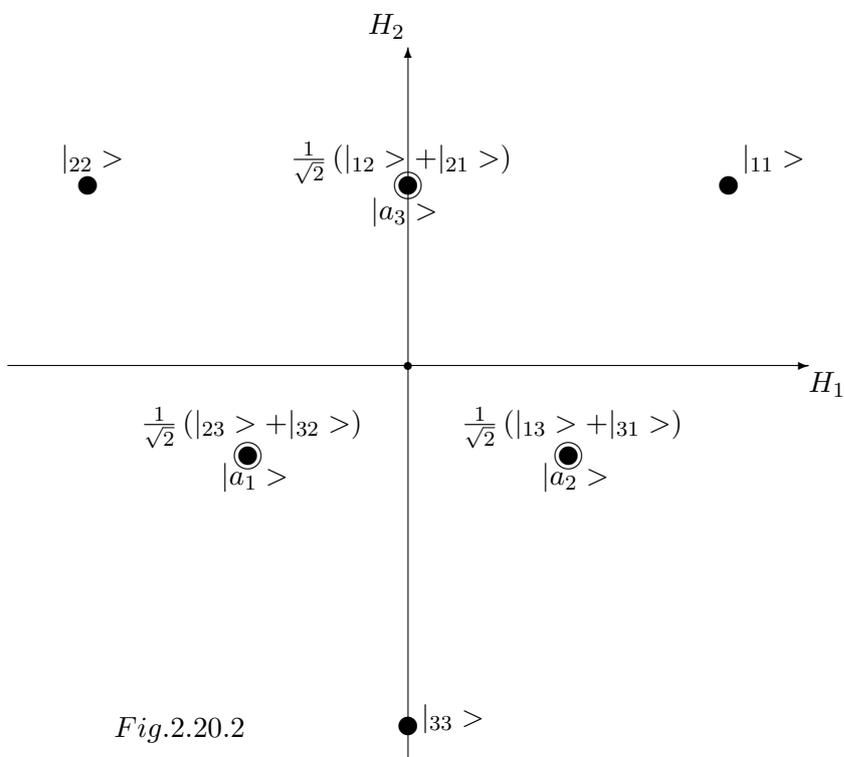


Fig.2.20.2

Rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \equiv (1, 0) \otimes (1, 0) = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$								
vettore	\mathbf{h}	I_3	I	U_3	U	V_3	V	R
$ 11\rangle$	$\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	+1	1	+1	1	0	0	$\mathbf{6}$
$\frac{1}{2}(12\rangle + 21\rangle)$	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	0	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{6}$
$\frac{1}{2}(12\rangle - 21\rangle) \equiv a_3$	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$ 22\rangle$	$\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	-1	1	0	0	-1	1	$\mathbf{6}$
$\frac{1}{2}(13\rangle + 31\rangle)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{6}$
$\frac{1}{2}(13\rangle - 31\rangle) \equiv a_2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$ 33\rangle$	$\left(0, -2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	0	0	-1	1	1	1	$\mathbf{6}$
$\frac{1}{2}(23\rangle + 32\rangle)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\mathbf{6}$
$\frac{1}{2}(23\rangle - 32\rangle) \equiv a_1$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\bar{\mathbf{3}}$

Tabella 2.5:

Fra i tre vettori di cui alla (2.20.1026), quello che, di nuovo, ha peso più alto è il vettore $|a_2\rangle$ a cui corrisponde $\mathbf{h}_M = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. E' facile ora verificare che, a partire da questo vettore e usando gli operatori di creazione/distruzione, si ottengono gli altri due e non si esce dalla terna antisimmetrica che, visto il valore di \mathbf{h}_M , identifichiamo immediatamente come quella associata alla rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$.

Concludendo, data la base $|r_1 r_2\rangle$, i sei vettori che costituiscono la parte simmetrica per lo scambio degli indici sono una base per la rappresentazione irriducibile $(2, 0) \equiv \mathbf{6}$, mentre i tre vettori che costituiscono la parte antisimmetrica per scambio degli indici sono una base per la rappresentazione irriducibile $(0, 1) \equiv \bar{\mathbf{3}}$.

2.20.3 La rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \equiv (1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0)$

Si tratta di una rappresentazione di particolare interesse, essendo quella che concerne le terne dei quarks e quindi, per esempio, la composizione dei nucleoni.

Iniziamo determinando i pesi dei vettori della base tensoriale $|r_i r_j r_k \rangle$. I rispettivi valori sono riportati nella tabella che segue.

Pesi dei vettori della base della $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$		
vettore	contributi	peso
$ 111 \rangle$	$3 \times \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$ 112 \rangle, 121 \rangle, 211 \rangle$	$2 \times \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$ 122 \rangle, 212 \rangle, 221 \rangle$	$2 \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$ 222 \rangle$	$3 \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$ 113 \rangle, 131 \rangle, 311 \rangle$	$2 \times \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$(1, 0)$
$ 123 \rangle, 132 \rangle, 213 \rangle,$ $ 231 \rangle, 312 \rangle, 321 \rangle$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$(0, 0)$
$ 223 \rangle, 232 \rangle, 322 \rangle$	$2 \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$(-1, 0)$
$ 133 \rangle, 313 \rangle, 331 \rangle$	$2 \times \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$ 233 \rangle, 323 \rangle, 332 \rangle$	$2 \times \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$ 333 \rangle$	$3 \times \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$(0, -\sqrt{3})$

Tabella 2.6: Pesi dei vettori $|r_i r_j r_k \rangle$

Tabella 2.7:

Come si vede, a fronte dei 27 vettori della base, i possibili pesi sono solo *dieci*. Soltanto tre di essi hanno molteplicità pari a *uno*, cioè $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(0, -\sqrt{3})$, corrispondenti ai vettori definiti da un solo indice ripetuto tre volte, come $|111 \rangle$, $|222 \rangle$ e $|333 \rangle$.

I vettori con due indici uguali hanno pesi con molteplicità *tre*, mentre quelli aventi tutti gli indici differenti, corrispondenti al peso $(0, 0)$, hanno molteplicità *sei*.

Venendo alla decomposizione della rappresentazione $R\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, per quanto si è già detto, essa deve contenere una sola volta la rappresentazione triangolare $(3, 0)$ che, per quanto già visto (cfr.(2.19.961)) avrà dimensione 10.

Procediamo alla individuazione dei vettori che la compongono.

Il vettore con peso più alto fra i $|r_i r_j r_k \rangle$ è, naturalmente, il vettore $|111 \rangle$ ed è il capostipite della $(3, 0) \equiv \mathbf{10}$.

Trattandosi di una rappresentazione triangolare, ogni peso ha molteplicità *uno* per cui, usando gli operatori di salita/discesa consueti, è particolarmente semplice determinare i vettori⁹⁴ della rappresentazione. Essi, come mostriamo nel seguito, sono completamente simmetrici per scambio degli indici.

Iniziamo osservando che, per definizione di vettore con peso più alto, risulta

$$I_+ |111 \rangle = U_+ |111 \rangle = V_+ |111 \rangle = |0 \rangle \quad (2.20.1028)$$

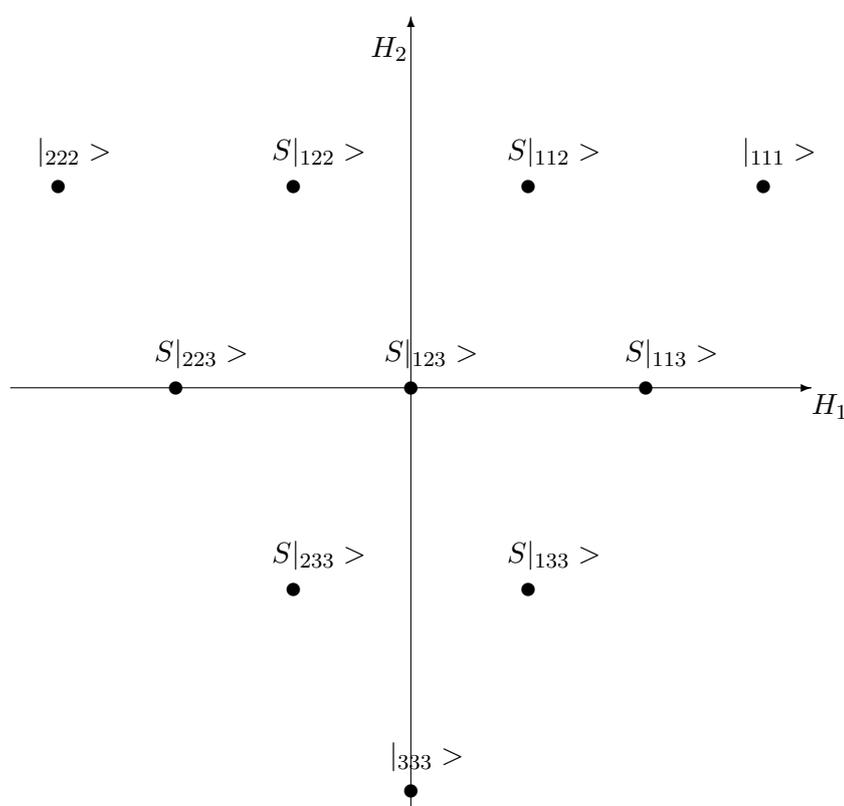


Fig.2.20.3 : I vettori della $(3, 0) = \mathbf{10}$

⁹⁴Con il simbolo $S|abc \rangle$ intendiamo il vettore completamente simmetrico per scambio degli indici, costruito a partire da $|abc \rangle$, ovvero

$$S|abc \rangle = N (|abc \rangle + |acb \rangle + |bca \rangle + |bac \rangle + |cab \rangle + |cba \rangle) \quad (2.20.1027)$$

dove N è il coefficiente di normalizzazione.

mentre risulta

$$\begin{aligned} I_3|_{111} > &= \hat{H}_1|_{111} > = \frac{3}{2}|_{111} > \\ U_3|_{111} > &= \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 + \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) |_{111} > = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) |_{111} > = \frac{3}{2}|_{111} > \\ V_3|_{111} > &= \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 - \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) |_{111} > = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) |_{111} > = |0 > \end{aligned} \quad (2.20.1029)$$

da cui discende appunto che $|_{111} >$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $I - spin$ con $j = \frac{3}{2}$, in cui gli altri vettori sono i seguenti:

$$I_-|_{111} > \propto \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{211} > + |_{121} > + |_{112} >) = S|_{112} > \quad (2.20.1030)$$

$$(I_-)^2|_{111} > \propto \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{221} > + |_{212} > + |_{122} >) = S|_{122} > \quad (2.20.1031)$$

$$(I_-)^3|_{111} > \propto |_{222} > \quad (2.20.1032)$$

Sempre dalle conclusioni di cui sopra, segue anche che il vettore $|_{111} >$ risulta capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $U - spin$ ancora con $j = \frac{3}{2}$, in cui gli altri vettori sono i seguenti:

$$U_-|_{111} > \propto \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{311} > + |_{131} > + |_{113} >) = S|_{113} > \quad (2.20.1033)$$

$$(U_-)^2|_{111} > \propto \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{331} > + |_{313} > + |_{133} >) = S|_{133} > \quad (2.20.1034)$$

$$(U_-)^3|_{111} > \propto |_{333} > \quad (2.20.1035)$$

mentre $|_{111} >$ risulta un singoletto di $V - spin$.

Si può procedere al completamento della base del decupletto osservando, per esempio, che il vettore $|_{333} >$ è tale per cui

$$V_+|_{333} > = |0 >; \quad V_3|_{333} > = 3 \times \frac{1}{2} \left(\hat{H}_1 - \sqrt{3} \hat{H}_2 \right) = \frac{3}{2}(0 + 1)|_{333} > = \frac{3}{2}|_{333} > \quad (2.20.1036)$$

e dunque risulta capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $V - spin$ con $j = \frac{3}{2}$, in cui gli altri vettori sono i seguenti

$$V_-|_{333} > \propto \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{233} > + |_{323} > + |_{332} >) = S|_{233} > \quad (2.20.1037)$$

$$(V_-)^2|_{333} > \propto \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{223} > + |_{232} > + |_{322} >) = S|_{223} > \quad (2.20.1038)$$

$$(V_-)^3|_{333} > \propto |_{222} > \quad (2.20.1039)$$

Abbiamo così determinato il *bordo* dello spettro.

Manca il vettore *interno*, a cui corrisponde il peso $(0, 0)$, che sappiamo essere

unico dato che la rappresentazione è triangolare.

Per esplicitarlo consideriamo, per esempio, il vettore $S|_{113} \rangle$. Risulta

$$I_+ S|_{113} \rangle = |0 \rangle; \quad I_3 S|_{113} \rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \right) S|_{113} \rangle = S|_{113} \rangle \quad (2.20.1040)$$

Dunque $S|_{113} \rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di I -spin avente $j = 1$, di cui, gli altri vettori sono

$$\begin{aligned} I_- S|_{113} \rangle &= I_- \frac{1}{\sqrt{3}} (|_{113} \rangle + |_{131} \rangle + |_{311} \rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|_{213} \rangle + |_{123} \rangle + |_{231} \rangle + |_{132} \rangle + |_{321} \rangle + |_{312} \rangle) = \\ &= S|_{123} \rangle \end{aligned} \quad (2.20.1041)$$

$$\begin{aligned} I_-^2 S|_{113} \rangle &= I_- \frac{1}{\sqrt{6}} (|_{213} \rangle + |_{123} \rangle + |_{231} \rangle + |_{132} \rangle + |_{321} \rangle + |_{312} \rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} (|_{223} \rangle + |_{232} \rangle + |_{232} \rangle + |_{232} \rangle + |_{322} \rangle + |_{322} \rangle) = \\ &= S|_{223} \rangle \end{aligned} \quad (2.20.1042)$$

In questo modo risultano esplicitati tutti i dieci vettori della base del decupletto. Ancora una volta vogliamo mettere in evidenza il fatto che la base del decupletto è costituita da tutti e soli i vettori *simmetrici* per scambio dei tre indici.

Restando in tema di simmetria degli indici, consideriamo adesso il vettore *completamente antisimmetrico*

$$A|_{123} \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} (|_{123} \rangle + |_{231} \rangle + |_{312} \rangle - |_{213} \rangle - |_{321} \rangle - |_{132} \rangle) \quad (2.20.1043)$$

corrispondente al peso $\mathbf{h} = (0, 0)$ e dunque ovviamente tale che

$$I_3 A|_{123} \rangle = U_3 A|_{123} \rangle = V_3 A|_{123} \rangle = |0 \rangle \quad (2.20.1044)$$

e inoltre si ha

$$\begin{aligned} I_+ A|_{123} \rangle &\propto (|_{113} \rangle + |_{131} \rangle + |_{311} \rangle - |_{113} \rangle - |_{311} \rangle - |_{131} \rangle) = |0 \rangle \\ I_- A|_{123} \rangle &\propto (|_{223} \rangle + |_{232} \rangle + |_{322} \rangle - |_{223} \rangle - |_{322} \rangle - |_{232} \rangle) = |0 \rangle \\ U_+ A|_{123} \rangle &\propto (|_{121} \rangle + |_{211} \rangle + |_{112} \rangle - |_{211} \rangle - |_{121} \rangle - |_{112} \rangle) = |0 \rangle \\ U_- A|_{123} \rangle &\propto (|_{323} \rangle + |_{233} \rangle + |_{332} \rangle - |_{233} \rangle - |_{323} \rangle - |_{332} \rangle) = |0 \rangle \\ V_+ A|_{123} \rangle &\propto (|_{133} \rangle + |_{331} \rangle + |_{313} \rangle - |_{313} \rangle - |_{331} \rangle - |_{133} \rangle) = |0 \rangle \\ V_- A|_{123} \rangle &\propto (|_{122} \rangle + |_{221} \rangle + |_{212} \rangle - |_{212} \rangle - |_{221} \rangle - |_{122} \rangle) = |0 \rangle \end{aligned} \quad (2.20.1045)$$

dunque il vettore $A|_{123} \rangle$ costituisce, da solo, un singoletto di SU_3 .

Dei 27 vettori della base tensoriale ne abbiamo assegnati $10 + 1$: ne restano quindi 16.

Nella figura (2.20.3) sono riportati i pesi dei vettori restanti con le relative molteplicità.

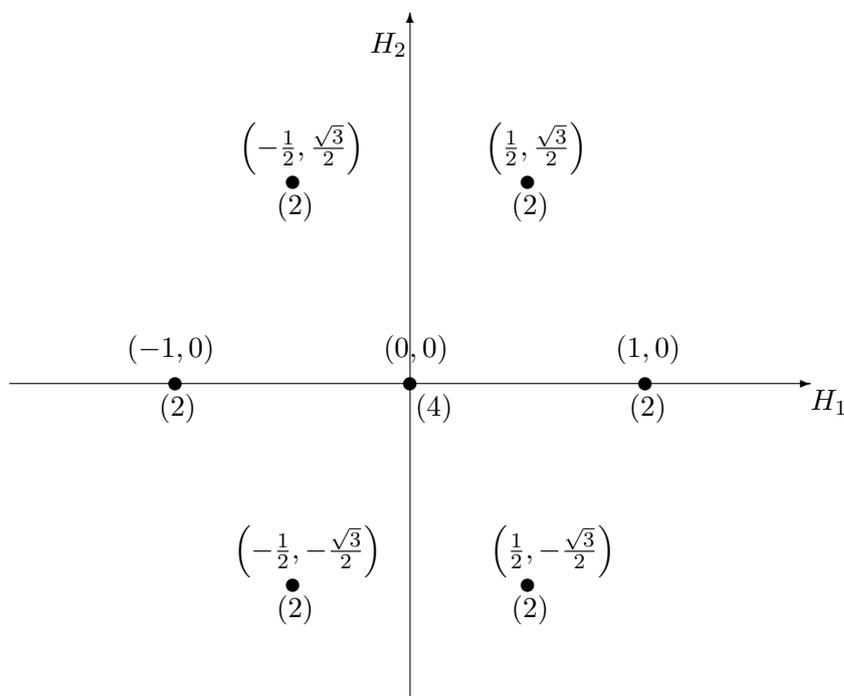


Fig.2.20.3 : Pesi e molteplicità' della $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ tolti quelli della $\mathbf{10}$ e della $\mathbf{1}$

E' evidente che in questo spettro restante, si trovano due vettori indipendenti con peso più alto $\mathbf{h}_M = (1, 0)$.

Questo implica che nella $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ ci saranno **due** rappresentazioni irriducibili indipendenti, basate su quei due vettori presi come capostipite.

Abbiamo già visto che il peso più alto $\mathbf{h}_M = (1, 0)$ individua univocamente l'ottetto, cioè, in termini dei coefficienti di Dynkin, la rappresentazione $(1, 1)$, per cui possiamo infine concludere che

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} = (3, 0) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0) \quad (2.20.1046)$$

Quanto al modo in cui i due ottetti sono distinti, osserviamo che i due capostipite saranno costruiti con i vettori $|_{113} \rangle$, $|_{131} \rangle$ e $|_{311} \rangle$ e dovranno essere ortogonali a $S|_{113} \rangle$ che appartiene al decupletto.

Una scelta possibile è

$$|W_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|_{131} \rangle - |_{311} \rangle) \quad (2.20.1047)$$

$$|W_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|_{131} \rangle + |_{311} \rangle - 2|_{113} \rangle) \quad (2.20.1048)$$

ma, dal punto di vista di SU_3 , una qualsiasi combinazione lineare ortogonale di $|W_1 \rangle$ e $|W_2 \rangle$ va altrettanto bene.

Nella tabelle che seguono riportiamo la composizione non normalizzata dei due ottetti ottenuti a partire da $|W_1 \rangle$ e $|W_2 \rangle$, distinti fra loro attraverso il peso.

		Ottetto $\mathbf{8}_1$						
vettore	peso	Combinazione	I_3	I	U_3	U	V_3	V
$ W_1 \rangle$	(1, 0)	$ _{131} \rangle - _{311} \rangle$	+1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$ \alpha_1 \rangle = I_- W_1 \rangle$	(0, 0)	$ _{231} \rangle + _{132} \rangle - _{321} \rangle - _{312} \rangle$	0	1	0		0	
$I_-^2 W_1 \rangle$	(-1, 0)	$ _{232} \rangle - _{322} \rangle$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$U_- W_1 \rangle$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$ _{133} \rangle - _{313} \rangle$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	1
$V_- W_1 \rangle$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$ _{121} \rangle - _{211} \rangle$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$I_- V_- W_1 \rangle$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$ _{122} \rangle - _{212} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
$I_- U_- W_1 \rangle$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$ _{233} \rangle - _{323} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$ \beta_1 \rangle = U_+ I_- U_- W_1 \rangle$	(0, 0)	$ _{213} \rangle + _{231} \rangle - _{123} \rangle - _{321} \rangle$	0		0	1	0	
$ \gamma_1 \rangle = V_+ I_- V_- W_1 \rangle$	(0, 0)	$ _{132} \rangle + _{123} \rangle - _{312} \rangle - _{213} \rangle$	0		0		0	1
$ s_{\alpha_1} \rangle = \beta_1 \rangle - \gamma_1 \rangle$	(0, 0)	$2 _{213} \rangle - 2 _{123} \rangle + _{231} \rangle + _{312} \rangle - _{321} \rangle - _{132} \rangle$	0	0	0		0	
$ s_{\beta_1} \rangle = \alpha_1 \rangle + \gamma_1 \rangle$	(0, 0)	$2 _{132} \rangle - 2 _{312} \rangle + _{231} \rangle + _{123} \rangle - _{321} \rangle - _{213} \rangle$	0		0	0	0	
$ s_{\gamma_1} \rangle = \alpha_1 \rangle + \beta_1 \rangle$	(0, 0)	$2 _{231} \rangle - 2 _{321} \rangle + _{132} \rangle + _{213} \rangle - _{312} \rangle - _{123} \rangle$	0		0		0	0

Tabella 2.8:

Con lo stesso peso (0, 0), come avevamo anche già visto parlando dell'ottetto in generale, ci sono solo due vettori indipendenti.

Nelle tabelle (2.8) e (2.7) riportiamo sia i tre vettori $|\alpha_i \rangle$, $|\beta_i \rangle$ e $|\gamma_i \rangle$ ottenuti nell'ambito, rispettivamente, dei tre tripletti di I , U e V -spin come pure, per completezza riportiamo anche la composizione dei tre singoletti s_{α_i} , s_{β_i} e s_{γ_i} rispettivamente di I , U e V -spin. Risulta

$$\forall i = 1, 2: \quad \beta_i + \gamma_i - \alpha_i = 0; \quad s_{\alpha_i} + s_{\beta_i} - s_{\gamma_i} = 0 \quad (2.20.1049)$$

Ottetto $\mathbf{8}_2$								
vettore	peso	Combinazione	I_3	I	U_3	U	V_3	V
$ W_2 \rangle$	$(1, 0)$	$ _{131} \rangle + _{311} \rangle - 2 _{113} \rangle$	+1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$ \alpha_2 \rangle = I_- W_2 \rangle$	$(0, 0)$	$ _{231} \rangle + _{132} \rangle + _{321} \rangle + _{312} \rangle - 2 _{213} \rangle - 2 _{123} \rangle$	0	1	0		0	
$I_-^2 W_2 \rangle$	$(-1, 0)$	$ _{232} \rangle + _{322} \rangle - 2 _{223} \rangle$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$U_- W_2 \rangle$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$2 _{331} \rangle - _{133} \rangle - _{313} \rangle$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	1
$V_- W_2 \rangle$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$ _{121} \rangle + _{211} \rangle - 2 _{112} \rangle$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$I_- V_- W_2 \rangle$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$2 _{221} \rangle - _{122} \rangle - _{212} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
$I_- U_- W_2 \rangle$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$2 _{332} \rangle - _{233} \rangle - _{323} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$ \beta_2 \rangle = U_+ I_- U_- W_2 \rangle$	$(0, 0)$	$2 _{132} \rangle + 2 _{312} \rangle - _{213} \rangle - _{231} \rangle - _{123} \rangle - _{321} \rangle$	0		0	1	0	
$ \gamma_2 \rangle = V_+ I_- V_- W_2 \rangle$	$(0, 0)$	$2 _{321} \rangle + 2 _{231} \rangle - _{132} \rangle - _{123} \rangle - _{312} \rangle - _{213} \rangle$	0		0		0	1
$ s_{\alpha_2} \rangle = \beta_2 \rangle - \gamma_2 \rangle$	$(0, 0)$	$ _{132} \rangle + _{312} \rangle - _{231} \rangle - _{321} \rangle$	0	0	0		0	
$ s_{\beta_2} \rangle = \alpha_2 \rangle + \gamma_2 \rangle$	$(0, 0)$	$ _{231} \rangle + _{321} \rangle - _{213} \rangle - _{123} \rangle$	0		0	0	0	
$ s_{\gamma_2} \rangle = \alpha_2 \rangle + \beta_2 \rangle$	$(0, 0)$	$ _{132} \rangle + _{312} \rangle - _{213} \rangle - _{123} \rangle$	0		0		0	0

Tabella 2.9:

2.21 La molteplicità nelle rappresentazioni (n, m)

Riprendiamo, alla luce del metodo tensoriale, la trattazione della generica rappresentazione irriducibile definita dai coefficienti di Dynkin (n, m) e quindi dal vettore con peso più alto (cfr.(2.19.943))

$$|\mathbf{h}_M \rangle = \left| \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle \quad (2.21.1050)$$

Poiché, come sappiamo, nella rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ il peso più alto che corrisponde al vettore $|^1_1 \rangle$, è $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, mentre nella rappresentazione fondamentale $\bar{\mathbf{3}}$ il peso più alto è $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ corrispondente al vettore $|^2_2 \rangle$, ecco che, nel caso del prodotto scalare fatto da n rappresentazioni $\mathbf{3}$ con m rappresentazioni $\bar{\mathbf{3}}$

$$\begin{aligned} R^{(m)}_n &\equiv \overbrace{(1,0) \otimes (1,0) \otimes \dots \otimes (1,0)}^n \otimes \overbrace{(0,1) \otimes (0,1) \otimes \dots \otimes (0,1)}^m = \\ &= \overbrace{\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \dots \otimes \mathbf{3}}^n \otimes \overbrace{\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{3}}}^m \end{aligned} \quad (2.21.1051)$$

il peso più alto sarà evidentemente dato da

$$\mathbf{h}_M = n \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + m \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1052)$$

corrispondente a un unico possibile vettore della base canonica nello spazio di dimensione $3^n \times 3^m$ dove è definita la $R^{(m)}_n$, che rappresenteremo nella forma seguente

$$\left| \begin{array}{c} r_1 r_2 \dots r_m \\ k_1 k_2 \dots k_n \end{array} \right\rangle \quad (2.21.1053)$$

Questo significa che nel prodotto tensoriale $R^{(m)}_n$ è presente una e una sola volta la rappresentazione irriducibile definita dai coefficienti di Dynkin (n, m) ovvero dal peso più alto $\mathbf{h}_M = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ e il capostipite della rappresentazione è

$$|\mathbf{h}_M \rangle = \left| \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = \left| \begin{array}{c} 22 \dots 2 \\ 11 \dots 1 \end{array} \right\rangle \quad (2.21.1054)$$

dove gli 1 sono n mentre i 2 sono m .

Nella base tensoriale data è opportuno individuare il vettore capostipite mediante le sue componenti $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}^{k_1 k_2 \dots k_n}$ definite nel modo consueto, ovvero

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}_M \rangle &= \left| \begin{array}{c} 22 \dots 2 \\ 11 \dots 1 \end{array} \right\rangle \equiv \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}^{k_1 k_2 \dots k_n} \left| \begin{array}{c} r_1 r_2 \dots r_m \\ k_1 k_2 \dots k_n \end{array} \right\rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}^{k_1 k_2 \dots k_n} = \delta_{r_1}^2 \delta_{r_2}^2 \dots \delta_{r_m}^2 \cdot \delta_1^{k_1} \delta_1^{k_2} \dots \delta_1^{k_n} \end{aligned} \quad (2.21.1055)$$

Chiaramente il tensore $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}^{k_1 k_2 \dots k_n}$ gode delle due seguenti proprietà:

- *P1*: il tensore è completamente simmetrico per lo scambio degli indici covarianti fra loro e controvarianti fra loro;
- *P2*: il tensore è tale che (proprietà detta *di traccia nulla*)

$$\delta_{k_1}^{r_1} \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}^{k_1 k_2 \dots k_n} = 0 \quad (2.21.1056)$$

Entrambe queste proprietà restano valide anche quando ad $|\mathbf{h}_M\rangle$ vengono applicati i generatori del gruppo, infatti la proprietà *P1* è preservata perché i generatori agiscono allo stesso modo su tutti gli indici superiori come pure, anche se, in generale, in modo differente dal precedente, su tutti gli indici inferiori; mentre la proprietà *P2* è preservata a causa del segno meno nella (2.20.985), unitamente alla traccia nulla dei generatori stessi.

Questo significa che la base della rappresentazione irriducibile (n, m) costituita dai vettori ottenuti attraverso gli operatori di discesa/salita a partire da $|\mathbf{h}_M\rangle$, sarà tale che questi vettori dovranno soddisfare la proprietà di simmetria *P1* e quella di traccia nulla *P2*.

2.21.1 La molteplicità nella $(3, 2)$

Per fissare meglio le idee, è utile riprendere in considerazione, a questo punto, la rappresentazione definita dai coefficienti di Dynkin $(3, 2)$, il cui spettro (cfr.(2.19.4)) è riportato di seguito.

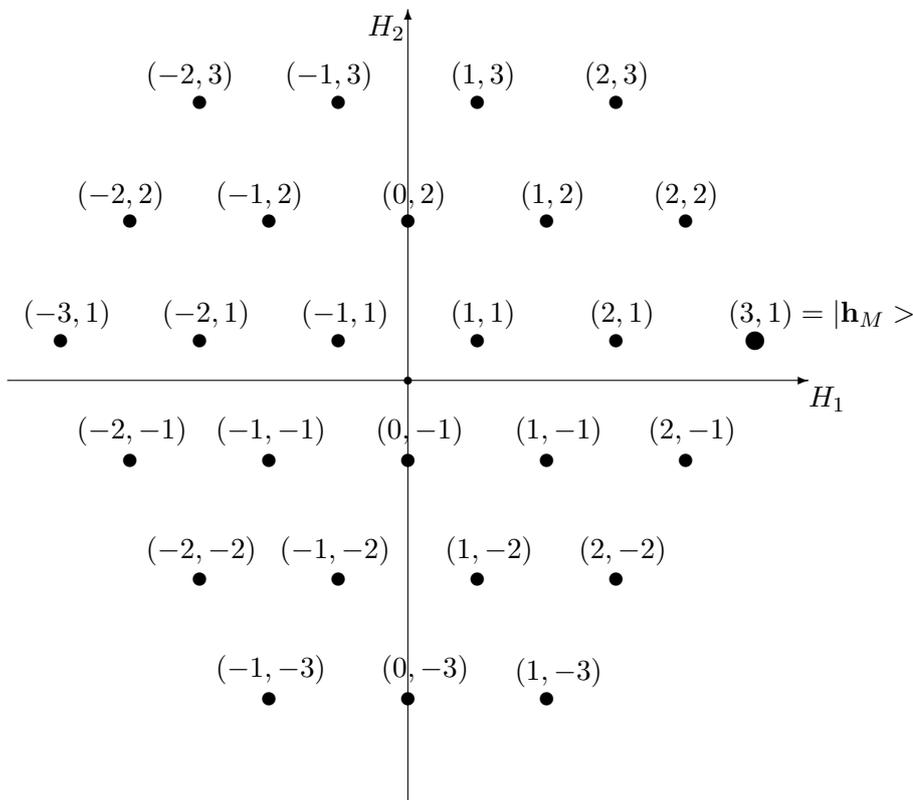


Fig.2.21.1 : Spettro della $(3, 2)$

Nella figura (2.21.1) abbiamo identificato i vari pesi con una coppia ID di interi, definita a partire dalla figura in maniera intuitiva, per righe dal basso in alto e per posizione sulla riga da destra a sinistra.

Nella tabella (2.10) che segue, utilizzando $|\mathbf{h}_M >$ come capostipite, attraverso l'applicazione degli operatori di discesa, riportiamo, insieme ai loro pesi, i vettori (non normalizzati) presenti sul ramo superiore del perimetro dello spettro, fino al peso del vettore speculare a $|\mathbf{h}_M >$ rispetto all'asse \hat{H}_2 e quindi, allo stesso modo, sul ramo inferiore, sempre a partire da $|\mathbf{h}_M >$, verso la sua immagine speculare.

perimetro della (3, 2)						
ID	Def.	Vettore	Peso	I	U	V
(3, 1)	$ \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 22 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(2, 2)	$V_- \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 32 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 23 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle$	$(2, \frac{4}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(2, 3)	$V_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 33 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle$	$(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(1, 3)	$I_- V_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 33 \\ 211 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 33 \\ 121 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 33 \\ 112 \end{smallmatrix}\rangle$	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-1, 3)	$I_-^2 V_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 33 \\ 221 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 33 \\ 212 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 33 \\ 122 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-2, 3)	$I_-^3 V_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 33 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-\frac{3}{2}, \frac{7}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-2, 2)	$U_- I_-^3 V_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 13 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 31 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-2, \frac{7}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-3, 1)	$U_-^2 I_-^3 V_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 11 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(2, -1)	$U_- \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 22 \\ 311 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 22 \\ 131 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 22 \\ 113 \end{smallmatrix}\rangle$	$(2, -\frac{2}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(2, -2)	$U_-^2 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 22 \\ 331 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 22 \\ 313 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 22 \\ 133 \end{smallmatrix}\rangle$	$(\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(1, -3)	$U_-^3 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 22 \\ 333 \end{smallmatrix}\rangle$	$(1, -\frac{8}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(0, -3)	$I_- U_-^3 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 12 \\ 333 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 21 \\ 333 \end{smallmatrix}\rangle$	$(0, -\frac{8}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-1, -3)	$I_-^2 U_-^3 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 11 \\ 333 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-1, -\frac{8}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-2, -2)	$V_- I_-^2 U_-^3 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 11 \\ 233 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 11 \\ 323 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 11 \\ 332 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-2, -1)	$V_-^2 I_-^2 U_-^3 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 11 \\ 223 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 11 \\ 323 \end{smallmatrix}\rangle + \begin{smallmatrix} 11 \\ 332 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-2, -\frac{2}{6}\sqrt{3})$	e	f	g
(-3, 1)	$V_-^3 I_-^2 U_-^3 \mathbf{h}_M\rangle$	$\begin{smallmatrix} 11 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle$	$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$	e	f	g

Tabella 2.10:

Si osservi che, come deve essere,

- ognuno dei vettori del perimetro gode della proprietà di simmetria, detta $P1$;
- ognuno dei vettori del perimetro ha gli indici controvarianti differenti da quelli covarianti e dunque gode della proprietà $P2$, di *traccia nulla*.

Riassumendo, se percorriamo il bordo esterno dello spettro, per esempio, in senso antiorario a partire da $|\mathbf{h}_M\rangle$, abbiamo

$$|\begin{smallmatrix} 22 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle \xrightarrow{(2)} |\begin{smallmatrix} 33 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle \xrightarrow{(3)} |\begin{smallmatrix} 33 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle \xrightarrow{(2)} |\begin{smallmatrix} 11 \\ 222 \end{smallmatrix}\rangle \xrightarrow{(3)} |\begin{smallmatrix} 11 \\ 333 \end{smallmatrix}\rangle \xrightarrow{(2)} |\begin{smallmatrix} 22 \\ 333 \end{smallmatrix}\rangle \xrightarrow{(3)} |\begin{smallmatrix} 22 \\ 111 \end{smallmatrix}\rangle \quad (2.21.1057)$$

dove tra parentesi abbiamo riportato il numero di passi per effettuare la transizione, che riflette, evidentemente, il numero di indici covarianti e controvarianti nei vettori della base e dunque, in ultima analisi, i coefficienti di Dynkin. Ogni stato è simmetrico negli indici in alto e in quelli in basso (proprietà $P1$) e soddisfa la proprietà $P2$ di traccia nulla poiché gli indici controvarianti e covarianti sono sempre diversi.

I pesi sono tutti differenti e la combinazione di indici che li determinano è unica e questo implica che **i pesi sul bordo dello spettro abbiano molteplicità uguale a uno.**

Come avremo modo di vedere, **in qualunque rappresentazione irriducibile, la molteplicità associata ai pesi sul bordo esterno dello spettro resta uguale ad uno.**

Invece, in generale, questa conclusione non resta vera quando procediamo verso l'interno dello spettro.

Iniziamo considerando il vettore del primo layer interno, raggiungibile da $|\mathbf{h}_M\rangle$ attraverso I_- . Abbiamo

$$(2, 1) : I_- |\mathbf{h}_M\rangle = I_- \left| \begin{smallmatrix} 22 \\ 111 \end{smallmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \begin{smallmatrix} 22 \\ 211 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} 22 \\ 121 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} 22 \\ 112 \end{smallmatrix} \right\rangle - \left| \begin{smallmatrix} 12 \\ 111 \end{smallmatrix} \right\rangle - \left| \begin{smallmatrix} 21 \\ 111 \end{smallmatrix} \right\rangle \right\} \quad (2.21.1058)$$

il cui peso è

$$h_{(2,1)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{6} \sqrt{3} \right) \quad (2.21.1059)$$

La completa simmetria è palesemente verificata. Riguardo alla proprietà $P2$ relativa alla traccia nulla, come si vede in questo caso sono presenti due vettori della base con il primo indice controvariante e covariante uguali, cioè $\left| \begin{smallmatrix} 22 \\ 211 \end{smallmatrix} \right\rangle$ e $\left| \begin{smallmatrix} 12 \\ 111 \end{smallmatrix} \right\rangle$. Il tensore che individua $I_- |\mathbf{h}_M\rangle$, definito come

$$I_- |\mathbf{h}_M\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \Xi_{r_1 r_2}^{k_1 k_2 k_3} \left| \begin{smallmatrix} r_1 r_2 \\ k_1 k_2 k_3 \end{smallmatrix} \right\rangle \quad (2.21.1060)$$

è evidentemente il seguente

$$\begin{aligned} \Xi_{r_1 r_2}^{k_1 k_2 k_3} &= \delta_{r_1}^2 \delta_{r_2}^2 \delta_1^{k_1} \delta_1^{k_2} \delta_1^{k_3} + \delta_{r_1}^2 \delta_{r_2}^2 \delta_1^{k_1} \delta_2^{k_2} \delta_1^{k_3} + \delta_{r_1}^2 \delta_{r_2}^2 \delta_1^{k_1} \delta_1^{k_2} \delta_2^{k_3} - \\ &- \delta_{r_1}^1 \delta_{r_2}^2 \delta_1^{k_1} \delta_1^{k_2} \delta_1^{k_3} - \delta_{r_1}^2 \delta_{r_2}^1 \delta_1^{k_1} \delta_1^{k_2} \delta_1^{k_3} \end{aligned} \quad (2.21.1061)$$

e la sua contrazione con $\delta_{k_1}^{r_1}$ fornisce solo due termini non nulli (dal primo e dal quarto termine) opposti fra loro, cioè

$$\delta_{k_1}^{r_1} \Xi_{r_1 r_2}^{k_1 k_2 k_3} = \delta_{r_2}^2 \delta_1^{k_2} \delta_1^{k_3} - \delta_{r_2}^2 \delta_1^{k_2} \delta_1^{k_3} = 0 \quad (2.21.1062)$$

che verifica la condizione di traccia nulla ($P2$).

Il risultato è dovuto al fatto che, quando i due indici sono uguali, essi lo sono per l'azione dello stesso operatore sull'indice covariante e controvariante, con segno opposto per come è definita la $\bar{\mathbf{3}}$ rispetto alla $\mathbf{3}$; mentre gli altri indici restano invariati, come nel caso considerato, dove abbiamo appunto la coppia

$$\left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\rangle \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\rangle - \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\rangle \quad (2.21.1063)$$

Quando abbiamo trattato il caso delle rappresentazioni triangolari $(n, 0)$, abbiamo visto che la molteplicità associata al peso del vettore $I_-|\mathbf{h}_M\rangle$, come per tutti gli altri, era sempre uguale a uno.

Questo, da un punto di vista algebrico, discendeva dal fatto che $|\mathbf{h}_M\rangle$ era annichilato ovviamente da I_+, U_+, V_+ ma anche da V_- , poiché, nel caso $(n, 0)$, $|\mathbf{h}_M\rangle$ è un singoletto di $V - spin$.

Nel caso generale (n, m) (con $n \geq m > 0$) il capostipite $|\mathbf{h}_M\rangle$ non è annichilato⁹⁵ da V_- . Vediamone una conseguenza.

Riprendiamo il vettore $I_-|\mathbf{h}_M\rangle$ il cui peso $h_{(2,1)}$ è dato dalla (2.21.1059). Possiamo giungere allo stesso peso, per esempio, seguendo una strada diversa, come quella di determinare il vettore $V_-U_-|\mathbf{h}_M\rangle$ e cioè facendo il percorso $(3, 1) \rightarrow (2, -1) \rightarrow (2, 1)$.

Vogliamo dimostrare che $I_-|\mathbf{h}_M\rangle$ e $V_-U_-|\mathbf{h}_M\rangle$ non sono proporzionali e dunque sono indipendenti fra loro, significando che la molteplicità associata al peso $h_{(2,1)}$ è almeno uguale a due.

Per dimostrarlo, ricordiamo che se $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono due vettori di uno spazio dove è presente un prodotto scalare, allora essi sono proporzionali se e solo se accade che

$$\rho \equiv \frac{|\langle a|b\rangle|^2}{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle} = 1 \quad (2.21.1064)$$

Facciamo allora

$$|A\rangle \equiv I_-|\mathbf{h}_M\rangle; \quad |B\rangle \equiv V_-U_-|\mathbf{h}_M\rangle \quad (2.21.1065)$$

abbiamo⁹⁶

$$\begin{aligned} \langle A|A\rangle &= \langle \mathbf{h}_M|I_+I_-|\mathbf{h}_M\rangle = \langle \mathbf{h}_M|[I_+, I_-]|\mathbf{h}_M\rangle + \langle \mathbf{h}_M|I_-I_+|\mathbf{h}_M\rangle = \\ &= \langle \mathbf{h}_M|I_3|\mathbf{h}_M\rangle = \frac{5}{2} \langle \mathbf{h}_M|\mathbf{h}_M\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1066)$$

così come

$$\begin{aligned} \langle A|B\rangle &= \langle \mathbf{h}_M|I_+V_-U_-|\mathbf{h}_M\rangle = \langle \mathbf{h}_M|[I_+, V_-]U_-|\mathbf{h}_M\rangle + \langle \mathbf{h}_M|V_-I_+U_-|\mathbf{h}_M\rangle = \\ &= \langle \mathbf{h}_M|\frac{1}{\sqrt{2}}U_+U_-|\mathbf{h}_M\rangle + \langle \mathbf{h}_M|V_-[I_+U_-]|\mathbf{h}_M\rangle + \langle \mathbf{h}_M|V_-U_-I_+|\mathbf{h}_M\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \mathbf{h}_M|U_3|\mathbf{h}_M\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \mathbf{h}_M|U_-U_+|\mathbf{h}_M\rangle - \langle \mathbf{h}_M|V_- \frac{1}{\sqrt{2}}V_+|\mathbf{h}_M\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3}{2} \langle \mathbf{h}_M|\mathbf{h}_M\rangle = \frac{3\sqrt{2}}{4} \langle \mathbf{h}_M|\mathbf{h}_M\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1067)$$

⁹⁵Come, per esempio, nel caso considerato della $(3, 2)$ dove $|\mathbf{h}_M\rangle$ è capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $V - spin$ avente $j = 1$.

⁹⁶Si ricordi che, per aggiunta, gli operatori di salita e di discesa si scambiano fra loro e che gli operatori di salita annichilano $|\mathbf{h}_M\rangle$.

mentre risulta $([V_+, U_-] = 0 \dots)$

$$\begin{aligned}
 \langle B|B \rangle &= \langle \mathbf{h}_M | U_+ V_+ V_- U_- | \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \langle \mathbf{h}_M | U_+ [V_+, V_-] U_- | \mathbf{h}_M \rangle + \langle \mathbf{h}_M | U_+ V_- V_+ U_- | \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \langle \mathbf{h}_M | U_+ V_3 U_- | \mathbf{h}_M \rangle + \langle \mathbf{h}_M | U_+ V_- [V_+, U_-] | \mathbf{h}_M \rangle + \\
 &\quad + \langle \mathbf{h}_M | U_+ V_- U_- V_+ | \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \langle \mathbf{h}_M | U_+ [V_3, U_-] | \mathbf{h}_M \rangle + \langle \mathbf{h}_M | U_+ U_- V_3 | \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \langle \mathbf{h}_M | U_+ \frac{1}{2} U_- | \mathbf{h}_M \rangle + \langle \mathbf{h}_M | U_+ U_- \cdot 1 | \mathbf{h}_M \rangle = \frac{3}{2} \langle \mathbf{h}_M | U_+ U_- | \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \frac{3}{2} \langle \mathbf{h}_M | [U_+, U_-] | \mathbf{h}_M \rangle + \frac{3}{2} \langle \mathbf{h}_M | U_- U_+ | \mathbf{h}_M \rangle = \frac{3}{2} \langle \mathbf{h}_M | U_3 | \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \langle \mathbf{h}_M | \mathbf{h}_M \rangle = \frac{9}{4} \langle \mathbf{h}_M | \mathbf{h}_M \rangle \tag{2.21.1068}
 \end{aligned}$$

Dunque

$$\rho = \frac{|\langle A|B \rangle|^2}{\langle A|A \rangle \langle B|B \rangle} = \frac{\left(3\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \langle \mathbf{h}_M | \mathbf{h}_M \rangle^2}{\frac{5}{2} \langle \mathbf{h}_M | \mathbf{h}_M \rangle \cdot \frac{9}{4} \langle \mathbf{h}_M | \mathbf{h}_M \rangle} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{4}} = \frac{1}{5} \tag{2.21.1069}$$

Usando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, possiamo adesso definire, a partire dai vettori di cui alla (2.21.1065), il vettore $|\tilde{B}\rangle$ ortogonale ad $|A\rangle$. Risulta

$$|\tilde{B}\rangle \equiv |B\rangle - \frac{\langle A|B\rangle}{\langle A|A\rangle} |A\rangle \tag{2.21.1070}$$

ovvero

$$|\tilde{B}\rangle = \left(V_- U_- - \frac{3\sqrt{2}}{\frac{5}{2}} I_- \right) | \mathbf{h}_M \rangle = \left(V_- U_- - \frac{3\sqrt{2}}{10} I_- \right) | \mathbf{h}_M \rangle \tag{2.21.1071}$$

Questo vettore, che ovviamente ha lo stesso peso $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$ dei due che lo definiscono e quindi è anch'esso, per esempio, autovettore di I_3 per l'autovalore $\frac{3}{2}$, a differenza dei due, è annichilato⁹⁷ da I_+ , ovvero costituisce il

⁹⁷Infatti, se poniamo $|B'\rangle \equiv |B\rangle - \alpha|A\rangle$ e imponiamo che $I_+|B'\rangle = |0\rangle$, poiché

$$I_+|A\rangle = I_+I_-| \mathbf{h}_M \rangle = [I_+, I_-]| \mathbf{h}_M \rangle = I_3| \mathbf{h}_M \rangle = \frac{5}{2}| \mathbf{h}_M \rangle \tag{2.21.1072}$$

$$\begin{aligned}
 I_+|B\rangle &= I_+V_-U_-| \mathbf{h}_M \rangle = [I_+, V_-]U_-| \mathbf{h}_M \rangle + V_-I_+U_-| \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}U_+U_-| \mathbf{h}_M \rangle + V_-[I_+, U_-]| \mathbf{h}_M \rangle + V_-U_-I_+| \mathbf{h}_M \rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[U_+, U_-]| \mathbf{h}_M \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U_-U_+| \mathbf{h}_M \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U_3| \mathbf{h}_M \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3}{2}| \mathbf{h}_M \rangle \tag{2.21.1073}
 \end{aligned}$$

ne ricaviamo che

$$I_+|B'\rangle = |0\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3}{2} - \alpha\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \tag{2.21.1074}$$

ovvero $|B'\rangle = |\tilde{B}\rangle$.

capostipite superiore di una rappresentazione irriducibile di $I - spin$ avente $j = \frac{3}{2}$, indipendente da quella a cui appartiene $|\mathbf{h}_M \rangle$.

Questo significa che i pesi $(2, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, 1)$ hanno molteplicità⁹⁸ almeno uguale a due, distinti, per un fissato I_3 , dal valore di I .

Determiniamo ora la forma tensoriale del vettore $|B \rangle$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 |B \rangle &= V_- U_- |\mathbf{h}_M \rangle = V_- U_- |{}^{22}_{111} \rangle = V_- \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \{ |{}^{22}_{311} \rangle + |{}^{22}_{131} \rangle + |{}^{22}_{113} \rangle \} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ V_- |{}^{22}_{311} \rangle + V_- |{}^{22}_{131} \rangle + V_- |{}^{22}_{113} \rangle \} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (|{}^{22}_{211} \rangle - |{}^{32}_{311} \rangle - |{}^{23}_{311} \rangle) + (|{}^{22}_{121} \rangle - |{}^{32}_{131} \rangle - |{}^{23}_{131} \rangle) + \\
 &+ (|{}^{22}_{112} \rangle - |{}^{32}_{113} \rangle - |{}^{23}_{113} \rangle) \} = \\
 &= \frac{1}{2} \{ |{}^{22}_{211} \rangle + |{}^{22}_{121} \rangle + |{}^{22}_{112} \rangle - |{}^{32}_{311} \rangle - |{}^{32}_{131} \rangle - |{}^{32}_{113} \rangle - |{}^{23}_{311} \rangle - |{}^{23}_{131} \rangle - |{}^{23}_{113} \rangle \} \quad (2.21.1075)
 \end{aligned}$$

Come si vede, i tre termini positivi coincidono con quelli di $|A \rangle$ mentre in quelli negativi la coppia $\frac{1}{1}$ è sostituita dalla $\frac{3}{3}$ e la simmetria fa il resto. Immediato poi è il calcolo del prodotto scalare $\langle A|B \rangle$ per cui

$$\langle A|B \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (2.21.1076)$$

Per completezza, determiniamo anche la forma tensoriale di $|\tilde{B} \rangle$.

Risulta

$$\begin{aligned}
 |\tilde{B} \rangle &= |B \rangle - \frac{3\sqrt{2}}{10} |A \rangle = \\
 &= \frac{1}{2} \{ |{}^{22}_{211} \rangle + |{}^{22}_{121} \rangle + |{}^{22}_{112} \rangle - |{}^{32}_{311} \rangle - |{}^{32}_{131} \rangle - |{}^{32}_{113} \rangle - |{}^{23}_{311} \rangle - |{}^{23}_{131} \rangle - |{}^{23}_{113} \rangle \} - \\
 &- \frac{3\sqrt{2}}{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |{}^{22}_{211} \rangle + |{}^{22}_{121} \rangle + |{}^{22}_{112} \rangle - |{}^{12}_{111} \rangle - |{}^{21}_{111} \rangle \} = \\
 &= \frac{1}{2} \{ |{}^{22}_{211} \rangle + |{}^{22}_{121} \rangle + |{}^{22}_{112} \rangle - |{}^{32}_{311} \rangle - |{}^{32}_{131} \rangle - |{}^{32}_{113} \rangle - |{}^{23}_{311} \rangle - |{}^{23}_{131} \rangle - |{}^{23}_{113} \rangle \} - \\
 &- \frac{3}{10} \{ |{}^{22}_{211} \rangle + |{}^{22}_{121} \rangle + |{}^{22}_{112} \rangle - |{}^{12}_{111} \rangle - |{}^{21}_{111} \rangle \} \quad (2.21.1077)
 \end{aligned}$$

⁹⁸Come vedremo nell'ambito della teoria generale delle rappresentazioni (n, m) , si può dimostrare che il valore della molteplicità associata ai pesi $(2, 1)$ e $(-2, 1)$ è effettivamente *due*, mentre essa vale *tre* per i pesi $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

2.21.2 La molteplicità sul primo layer dei pesi della (n, m)

Torniamo al caso generale e cerchiamo di capire meglio il legame fra componenti tensoriali, pesi e molteplicità.

Riassumiamo.

- Dato il prodotto tensoriale $R \binom{m}{n} = (\mathbf{3})^n \otimes (\bar{\mathbf{3}})^m$ delle due rappresentazioni fondamentali, nello spazio lineare a 3^{n+m} dimensioni dove la rappresentazione prodotto agisce, il vettore con peso più alto $|\mathbf{h}_M \rangle$ è

$$|\mathbf{h}_M \rangle = \left| \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = | \begin{smallmatrix} 22\dots 2 \\ 11\dots 1 \end{smallmatrix} \rangle \quad (2.21.1078)$$

dove gli 1 sono n mentre i 2 sono m .

- A partire da $|\mathbf{h}_M \rangle$, usando U_- , trasformiamo via via l'indice controvariante 1 nell'indice 3, mantenendo comunque la simmetria completa degli indici controvarianti e producendo, in n passi, la catena di autovettori di U_3 corrispondenti a un autovalore che va da $\frac{n}{2}$ a $-\frac{n}{2}$, costituenti la base di una rappresentazione irriducibile di $U - spin$ per l'autovalore $j = \frac{n}{2}$. In questa trasformazione la struttura tensoriale e i pesi cambiano nel modo seguente

$$| \begin{smallmatrix} 22\dots 2 \\ 11\dots 1 \end{smallmatrix} \rangle \xrightarrow{U_-} | \begin{smallmatrix} 22\dots 2 \\ 33\dots 3 \end{smallmatrix} \rangle; \quad \frac{n}{2} \geq U_3 \geq -\frac{n}{2}; \quad U = \frac{n}{2} \quad (2.21.1079)$$

$$h : \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{m}{2}, \frac{-2n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1080)$$

e i punti rappresentativi dei pesi di cui sopra si dispongono nel piano (H_1, H_2) su una retta posta a 60° rispetto all'orizzontale, con i punti da $|\mathbf{h}_M \rangle$ verso il basso (ramo $R1$).

- Sempre da $|\mathbf{h}_M \rangle$, ma usando V_- , trasformiamo via via l'indice covariante 2 nell'indice 3, mantenendo sempre la simmetria completa di questi indici. In m passi, la catena di autovettori di V_3 assume autovalori che vanno da $\frac{m}{2}$ a $-\frac{m}{2}$, e i rispettivi autovettori costituiscono la base di una rappresentazione irriducibile di $V - spin$ per l'autovalore $j = \frac{m}{2}$. In questa trasformazione abbiamo

$$| \begin{smallmatrix} 22\dots 2 \\ 11\dots 1 \end{smallmatrix} \rangle \xrightarrow{V_-} | \begin{smallmatrix} 33\dots 3 \\ 11\dots 1 \end{smallmatrix} \rangle; \quad \frac{m}{2} \geq V_3 \geq -\frac{m}{2}; \quad V = \frac{m}{2} \quad (2.21.1081)$$

$$h : \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{n}{2}, \frac{n+2m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1082)$$

e i punti rappresentativi dei pesi di cui sopra si dispongono nel piano (H_1, H_2) su una retta posta a 120° rispetto all'orizzontale, a 60° rispetto alla precedente, con i punti da $|\mathbf{h}_M \rangle$ verso l'alto (ramo $R2$).

Riflettendo rispetto all'asse H_2 i due rami $R1$ e $R2$ così ottenuti, otteniamo una struttura che, unita in alto e in basso, costituisce un **esagono convesso** (un triangolo equilatero, se m oppure n sono nulli) che contiene tutti i punti dello spettro della rappresentazione irriducibile definita da \mathbf{h}_M , distanziati in orizzontale di una unità. Abbiamo

- ramo $R3$ orizzontale superiore (da destra a sinistra)

$$|_{33...3}^{11...1}\rangle \xrightarrow{I_-} |_{22...2}^{33...3}\rangle; \quad \frac{n}{2} \geq I_3 \geq -\frac{n}{2}; \quad I = \frac{n}{2} \quad (2.21.1083)$$

$$h : \left(\frac{n}{2}, \frac{n+2m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \left(-\frac{n}{2}, \frac{n+2m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1084)$$

$$(2.21.1085)$$

- ramo $R4$ speculare a $R2$ (dall'alto in basso)

$$|_{22...2}^{33...3}\rangle \xrightarrow{U_-} |_{11...1}^{22...2}\rangle; \quad \frac{m}{2} \geq U_3 \geq -\frac{m}{2}; \quad U = \frac{m}{2} \quad (2.21.1086)$$

$$h : \left(-\frac{n}{2}, \frac{n+2m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{-n-m}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1087)$$

$$(2.21.1088)$$

- ramo $R5$ speculare a $R1$ (dall'alto in basso)

$$|_{11...1}^{22...2}\rangle \xrightarrow{V_+} |_{33...3}^{11...1}\rangle; \quad -\frac{n}{2} \leq V_3 \leq \frac{n}{2}; \quad V = \frac{n}{2} \quad (2.21.1089)$$

$$h : \left(\frac{-n-m}{2}, \frac{n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{-m}{2}, \frac{-2n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1090)$$

$$(2.21.1091)$$

- ramo $R6$ orizzontale in basso (da sinistra a destra)

$$|_{33...3}^{11...1}\rangle \xrightarrow{I_+} |_{22...2}^{33...3}\rangle; \quad -\frac{m}{2} \leq I_3 \leq \frac{m}{2}; \quad I = \frac{m}{2} \quad (2.21.1092)$$

$$h : \left(\frac{-n}{2}, \frac{-2n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{m}{2}, \frac{-2n-m}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1093)$$

Come si vede, tutti i vettori sul bordo dello spettro, espressi per costruzione da tensori completamente simmetrici, coinvolgono sempre *indici covarianti diversi da quelli controvarianti*, per cui soddisfano automaticamente anche la proprietà di traccia nulla.

Verifichiamo adesso che, come già anticipato, **la molteplicità associata a tutti i pesi presenti sul bordo dello spettro è comunque sempre uguale a uno.**

Consideriamo un vettore generico della base tensoriale che abbia l'indice $|_1 >$ ripetuto a volte, l'indice $|_2 >$ ripetuto b volte, l'indice $|_3 >$ ripetuto c volte, l'indice $|\bar{1} >$ ripetuto \bar{a} volte, l'indice $|\bar{2} >$ ripetuto \bar{b} volte e l'indice $|\bar{3} >$ ripetuto \bar{c} volte. Evidentemente dovrà essere

$$a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \geq 0 \quad (2.21.1094)$$

$$a + b + c = n; \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m \quad (2.21.1095)$$

e il peso associato al vettore in questione sarà dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= a \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + b \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + c \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \\ &+ \bar{a} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \bar{b} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \bar{c} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\ &= (a - \bar{a}) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + (b - \bar{b}) \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + (c - \bar{c}) \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.21.1096)$$

e quindi, se poniamo

$$\alpha \equiv a - \bar{a}; \quad \beta \equiv b - \bar{b}; \quad \gamma \equiv c - \bar{c} \quad (2.21.1097)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = (a + b + c) - (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = n - m \quad (2.21.1098)$$

avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \beta \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \gamma \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.21.1099)$$

Ma, come sappiamo, a ogni peso \mathbf{h} si può associare una coppia di interi (coefficienti di Dynkin) (s_1, s_2) nel modo seguente⁹⁹

$$s_1 = \frac{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{b}|^2} = (1, \sqrt{3}) \cdot \mathbf{h} \quad (2.21.1100)$$

$$s_2 = \frac{2\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{c}|^2} = (1, -\sqrt{3}) \cdot \mathbf{h} \quad (2.21.1101)$$

per cui, nel nostro caso, abbiamo

$$s_1 = \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} = \alpha - \gamma \quad (2.21.1102)$$

$$s_2 = \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} = \gamma - \beta \quad (2.21.1103)$$

⁹⁹Ricordiamo che s_1 e s_2 sono, rispettivamente, il doppio dell'autovalore di U_3 e V_3 che corrispondono al vettore dato.

Dunque, data la rappresentazione tensoriale $R \binom{m}{n}$ e un peso \mathbf{h} nel suo spettro a cui corrisponde la coppia di Dynkin (s_1, s_2) , le quantità α, β, γ devono soddisfare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = n - m \\ \alpha - \gamma = s_1 \\ \gamma - \beta = s_2 \end{cases} \quad (2.21.1104)$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} \\ \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} \\ \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} \end{cases} \quad (2.21.1105)$$

Consideriamo adesso un vettore della base tensoriale avente peso sul bordo dello spettro della rappresentazione irriducibile (n, m) e iniziamo dal ramo $R1$. Per la (2.21.1080) questo peso sarà espresso dalla relazione

$$\mathbf{h} = \left(\frac{m+t}{2}, \frac{-2n-m+3t}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \text{dove } 0 \leq t \leq n \quad (2.21.1106)$$

e dunque per questo peso avremo

$$s_1 = \frac{m+t}{2} + \frac{-2n-m+3t}{2} = 2t - n \quad (2.21.1107)$$

$$s_2 = \frac{m+t}{2} - \frac{-2n-m+3t}{2} = m + n - t \quad (2.21.1108)$$

da cui, alla luce di quanto sopra, ricaviamo

$$\alpha = (a - \bar{a}) = t; \quad \beta = (b - \bar{b}) = -m; \quad \gamma = (c - \bar{c}) = n - t \quad (2.21.1109)$$

Poiché b e \bar{b} sono necessariamente non negativi e non superiori a m , la condizione su β implica che $b = 0$ e $\bar{b} = m$ ovvero richiede che gli indici covarianti del vettore siano tutti uguali a $|^2 >$.

Questo, a sua volta, richiede che $\bar{a} = \bar{c} = 0$ e dunque che

$$\alpha = t \Rightarrow a = t; \quad \gamma = n - t \Rightarrow c = n - t \quad (2.21.1110)$$

per cui gli indici controvarianti saranno costituiti da $t |^1 >$ e da $(n - t) |^3 >$ dove $0 \leq t \leq n$: questa, una volta simmetrizzata, è la sola soluzione possibile e poiché gli indici covarianti e controvarianti sono comunque differenti, il vincolo di traccia nulla è certamente soddisfatto.

Resta così dimostrato che **la molteplicità associata ai pesi sul ramo $R1$ del bordo dello spettro è uguale a uno.**

Vediamo ora che succede per i pesi sul ramo $R2$ dove abbiamo che

$$\mathbf{h} = \left(\frac{n+m-t}{2}, \frac{n-m+3t}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad 0 \leq t \leq m \quad (2.21.1111)$$

e dunque

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n+m-t}{2} + \frac{n-m+3t}{2} = n+t \\ s_2 &= \frac{n+m-t}{2} - \frac{n-m+3t}{2} = m-2t \end{aligned} \quad (2.21.1112)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-m)+2(n+t)+(m-2t)}{3} = n \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-m)-(n+t)-2(m-2t)}{3} = -m+t \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-m)-(n+t)+(m-2t)}{3} = -t \end{cases} \quad (2.21.1113)$$

Evidentemente l'equazione relativa ad α è risolta solo da $a = n, \bar{a} = 0$. Poiché $a + b + c = n$ deve poi essere $b = c = 0$ e dunque $\bar{b} = m - t, \bar{c} = t$.

Per questi pesi, esiste dunque una sola soluzione possibile simmetrizzata, la quale ha n indici $|^1 >$, $(m - t)$ indici $|^2 >$ e t indici $|^3 >$, con $0 \leq t \leq m$.

Essa verifica senz'altro la proprietà $P2$ poiché gli indici covarianti e controvarianti sono comunque diversi. Quindi anche **la molteplicità associata ai pesi sul ramo $R2$ del bordo dello spettro risulta uguale a uno.**

Venendo al ramo $R3$, abbiamo

$$\mathbf{h} = \left(\frac{n-2t}{2}, \frac{n+2m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad 0 \leq t \leq n \quad (2.21.1114)$$

e dunque

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n-2t}{2} + \frac{n+2m}{2} = n+m-t \\ s_2 &= \frac{n-2t}{2} - \frac{n+2m}{2} = -m-t \end{aligned} \quad (2.21.1115)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-m)+2(n+m-t)+(-m-t)}{3} = n-t \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-m)-(n+m-t)-2(-m-t)}{3} = t \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-m)-(n+m-t)+(-m-t)}{3} = -m \end{cases} \quad (2.21.1116)$$

In questo caso, l'equazione relativa a γ implica che sia $\bar{c} = m$ e $c = 0$; poi, visto che $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m$, deve essere $\bar{a} = \bar{b} = 0$ e quindi $\alpha = a = n - t, \beta = b = t$. Esiste quindi una sola soluzione simmetrizzata possibile, avente m indici $|^3 >$, $(n - t)$ indici $|^1 >$ e t indici $|^2 >$ con $0 \leq t \leq n$, la quale soddisfa automaticamente la proprietà $P2$. Ne segue che anche **la molteplicità associata ai pesi sul ramo $R3$ del bordo dello spettro risulta pari a uno.**

Non tratteremo esplicitamente i casi degli altri rami $R4, R5$ e $R6$ perchè non possono aggiungere nulla di nuovo a causa della simmetria dello spettro che stabilisce che qualunque conclusione tratta per il peso (h_1, h_2) si estende automaticamente anche al peso $(-h_1, h_2)$.

Quanto visto sopra dimostra evidentemente che, in una qualunque rappresentazione irriducibile di $SU3$, **la molteplicità associata ai pesi sul bordo esterno dello spettro è sempre uguale a uno.**

2.21.3 La molteplicità nel secondo layer della (n, m)

La molteplicità, in generale, non resta uguale a uno per i pesi interni dello spettro, a eccezione di quanto accade, come si è visto, per le rappresentazioni triangolari.

Supponiamo quindi di considerare una rappresentazione irriducibile (n, m) non triangolare e dunque tale che risultino tanto $n \neq 0$ che $m \neq 0$ e consideriamo il caso nel quale abbiamo già visto che la molteplicità non resta uguale a uno, ovvero il caso del vettore $I_- |\mathbf{h}_M \rangle$ a cui, come sappiamo, corrisponde un peso

$$\mathbf{h}' = \mathbf{h}_M - \mathbf{a} = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - (1, 0) = \left(\frac{n+m-2}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.117)$$

Per questo peso \mathbf{h}' abbiamo

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n+m-2}{2} + \frac{n-m}{2} = n-1 \\ s_2 &= \frac{n+m-2}{2} - \frac{n-m}{2} = m-1 \end{aligned} \quad (2.21.118)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-m)+2(n-1)+(m-1)}{3} = n-1 \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-m)-(n-1)-2(m-1)}{3} = -m+1 \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-m)-(n-1)+(m-1)}{3} = 0 \end{cases} \quad (2.21.119)$$

con i vincoli (2.21.1094) e (2.21.1095).

Poiché si tratta di quantità intere non negative, le equazioni per α e β hanno, ciascuna, solo due soluzioni (indipendenti), ovvero

$$\begin{aligned} \alpha = n-1 &\Rightarrow a = n-1, \quad \bar{a} = 0 && \text{oppure} && a = n, \quad \bar{a} = 1 \\ \beta = 1-m &\Rightarrow b = 0, \quad \bar{b} = m-1 && \text{oppure} && b = 1, \quad \bar{b} = m \end{aligned} \quad (2.21.1120)$$

Nella tabella (2.11) che segue, sono riportati i quattro casi possibili, avendo aggiunto i valori di c e \bar{c} necessari per garantire che $a+b+c=n$ e $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=m$. Come si vede il caso *IV* non è accettabile perché richiederebbe valori negativi di c e \bar{c} .

Abbiamo quindi solo tre soluzioni possibili. Significa questo che la molteplicità per \mathbf{h}' è tre?

No, perchè abbiamo dimenticato che le soluzioni devono rispettare *P1* e *P2*. Quanto a *P1*, questa proprietà non è un problema perchè, se prendiamo, per esempio, la soluzione *I* in cui ci sono $n-1$ $|_1 \rangle$, $(m-1)$ $|^2 \rangle$ e un $|^3 \rangle$, basterà simmetrizzare il vettore $|\begin{smallmatrix} 3^2 \dots 2 \\ 3^1 \dots 1 \end{smallmatrix} \rangle$. C'è però la proprietà *P2* che non è soddisfatta perchè proprio la componente tensoriale associata a $|\begin{smallmatrix} 3^2 \dots 2 \\ 3^1 \dots 1 \end{smallmatrix} \rangle$ non ha traccia nulla. Per questo occorre sottrargli una delle altre soluzioni, per esempio la soluzione *II* simmetrizzata $|\begin{smallmatrix} 2^2 \dots 2 \\ 2^1 \dots 1 \end{smallmatrix} \rangle$. Lo stesso accade per la *III*. Quindi il vincolo della traccia nulla riduce da tre a due le soluzioni possibili e dunque, **per il peso \mathbf{h}' , la molteplicità risulta essere uguale a due.**

Casi possibili				
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>a</i>	$n - 1$	$n - 1$	n	n
\bar{a}	0	0	1	1
<i>b</i>	0	1	0	1
\bar{b}	$m - 1$	m	$m - 1$	m
<i>c</i>	1	0	0	-1
\bar{c}	1	0	0	-1
	$\left\langle \begin{smallmatrix} 32\dots 2 \\ 31\dots 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left\langle \begin{smallmatrix} 22\dots 2 \\ 21\dots 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left\langle \begin{smallmatrix} 12\dots 2 \\ 11\dots 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$	

Tabella 2.11:

Questo stesso risultato vale per tutti i pesi del secondo layer, come adesso dimostreremo nell'ipotesi che la rappresentazione irriducibile definita dai coefficienti di Dynkin (n, m) sia tale che $n \geq m \geq 1$.

Abbiamo visto che il peso \mathbf{h}' del vettore $I_-|\mathbf{h}_M\rangle$ vale

$$\mathbf{h}' = \left(\frac{n+m-2}{2}, \frac{n-m}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.21.1121)$$

Consideriamo ora i pesi associati ai vettori $(U_-)^t|\mathbf{h}'\rangle$ dove $0 \leq t \leq n-1$, i quali si trovano nel primo layer interno¹⁰⁰ allo spettro, sul ramo parallelo a R_1 . Questi n pesi sono parametrizzati nel modo seguente¹⁰¹

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}' - t \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{n+m-2-t}{2}, \frac{n-m-3t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad 0 \leq t \leq n-1 \quad (2.21.1123)$$

e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n+m-2-t}{2} + \frac{n-m-3t}{2} = n-1-2t \\ s_2 &= \frac{n+m-2-t}{2} - \frac{n-m-3t}{2} = m-1+t \end{aligned} \quad (2.21.1124)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-m)+2(n-1-2t)+(m-1+t)}{3} = n-1-t \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-m)-(n-1-2t)-2(m-1+t)}{3} = -m+1 \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-m)-(n-1-2t)+(m-1+t)}{3} = t \end{cases} \quad (2.21.1125)$$

¹⁰⁰Si osservi che il massimo valore di t previsto è $t = n-1$ perchè per $t = n$ non siamo più all'interno dello spettro, bensì sul bordo.

¹⁰¹Ricordiamo che, vista la simmetria dello spettro, basta considerare i pesi per cui $h_1 \equiv I_3 \geq 0$. Nel caso attuale, poiché abbiamo

$$\frac{m-1}{2} \leq I_3 \leq \frac{n+m-2}{2} \quad (2.21.1122)$$

avendo assunto $n \geq m \geq 1$, i pesi $\mathbf{h}(t)$ risultano tutti non negativi.

Iniziamo osservando che l'equazione relativa a β ha solo due soluzioni intere non negative, ovvero $b = 0; \bar{b} = m - 1$ oppure $b = 1; \bar{b} = m$.

Nel primo caso, poiché $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m$, dovrà essere $\bar{a} + \bar{c} = 1$ e dunque, di nuovo, due soluzioni, cioè $\bar{a} = 1, \bar{c} = 0$ oppure $\bar{a} = 0, \bar{c} = 1$.

Abbiamo così le soluzioni *I* e *II* riportate nella tabella (2.12), dove questi parametri sono riportati in grassetto mentre i valori di a e c sono determinati di conseguenza, in base alle equazioni per α e γ .

Nel secondo caso, in cui $b = 1$, poiché questo richiede che $\bar{b} = m$, ne segue che $\bar{a} + \bar{c} = 0$ e dunque ciascuna di queste quantità dovrà essere nulla.

In questo caso, quindi, è possibile una sola soluzione, la *III*.

Come abbiamo già visto, però, mentre la simmetrizzazione di ciascuna delle tre soluzioni è possibile senza problemi, la condizione sulla traccia nulla richiede che si sottragga una soluzione dall'altra, per cui il numero di soluzioni indipendenti diviene uguale a due.

Per i pesi¹⁰² di cui alla (2.21.1123), quindi, **la molteplicità è uguale a due.**

	Casi possibili		
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
a	$n - t$	$n - t - 1$	$n - t - 1$
\bar{a}	1	0	0
b	0	0	1
\bar{b}	m - 1	m - 1	m
c	t	$t + 1$	t
\bar{c}	0	1	0
	$\left\{ \begin{smallmatrix} 12\dots\dots 2 \\ 11\dots 13\dots 3 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} 32\dots\dots 2 \\ 31\dots 13\dots 3 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} 22\dots\dots 2 \\ 21\dots 13\dots 3 \end{smallmatrix} \right\}$

Tabella 2.12:

¹⁰²Se lasciamo che t assuma il valore n , uscendo quindi dall'interno dello spettro per andare sul bordo dello stesso, le soluzioni *II* e *III* perdono di significato perché prevederebbero $a = -1$. Resta quindi solo la soluzione *I* la quale diviene espressa da $\left\{ \begin{smallmatrix} 12\dots\dots 2 \\ 33\dots\dots 3 \end{smallmatrix} \right\}$, ovvero senza $|_1 \rangle$, soddisfacendo così direttamente la proprietà di traccia nulla. Per questo peso abbiamo, come già visto, molteplicità uguale a uno.

Come ulteriore esempio, consideriamo gli m pesi del primo layer interno che sono associati ai vettori $(V_-)^r I_- |h_M\rangle$ ovvero¹⁰³

$$\mathbf{h}(r) = \mathbf{h}' - r \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad 0 \leq r \leq m - 1 \quad (2.21.1127)$$

$$= \left(\frac{n + m - 2 - r}{2}, \frac{n - m + 3r}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1128)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n+m-2-r}{2} + \frac{n-m+3r}{2} = n - 1 + r \\ s_2 &= \frac{n+m-2-r}{2} - \frac{n-m+3r}{2} = m - 1 - 2r \end{aligned} \quad (2.21.1129)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-m)+2(n-1+r)+(m-1-2r)}{3} = n - 1 \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-m)-(n-1+r)-2(m-1-2r)}{3} = -m + 1 + r \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-m)-(n-1+r)+(m-1-2r)}{3} = -r \end{cases} \quad (2.21.1130)$$

L'equazione per α ha due soluzioni, cioè $a = n$, $\bar{a} = 1$ oppure $a = n - 1$, $\bar{a} = 0$.

Nel primo caso ($a = n$), necessariamente dovrà essere $b = c = 0$ e quindi siamo condotti alla sola possibile soluzione *I* della tabella (2.13) riportata sotto.

Nel secondo caso ($a = n - 1$) possiamo avere sia la soluzione *II* in cui $b = 1$, $c = 0$ che la soluzione *III* in cui $b = 0$, $c = 1$, con le altre quantità univocamente determinate dalle equazioni per β e γ .

Casi possibili			
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
a	n	n - 1	n - 1
\bar{a}	1	0	0
b	0	1	0
\bar{b}	$m - 1 - r$	$m - r$	$m - 1 - r$
c	0	0	1
\bar{c}	r	r	$r + 1$
	$\left \begin{smallmatrix} 12..23...3 \\ 11.....1 \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} 22..23...3 \\ 21.....1 \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} 32..23...3 \\ 31.....1 \end{smallmatrix} \right\rangle$

Tabella 2.13:

¹⁰³Anche in questo caso, essendo

$$\frac{n - 1}{2} \leq I_3 \leq \frac{n + m - 2}{2} \quad (2.21.1126)$$

avendo assunto $n \geq m \geq 1$, i valori di $h_1 = I_3$ sono tutti non negativi.

Di nuovo, la necessità di rispettare il vincolo della traccia nulla fa scendere da tre a due le soluzioni possibili. Non serve adesso considerare altri casi anche perchè la simmetria ci aiuta e possiamo concludere, **se $n \geq m \geq 1$, i pesi che appartengono al primo layer interno dello spettro hanno associata una molteplicità che è uguale a due.**

Osserviamo adesso che se $m = 1$ allora i pesi $\mathbf{h}(r)$ di cui alla (2.21.1127) si riducono a uno solo, corrispondente a $r = 0$.

In questo caso, la forma del primo layer interno passa da una forma esagonale definita da n e m punti a quella di un triangolo equilatero costituito da lati di n punti, il quale, se $n \geq 4$, possiede comunque altri punti interni. Verificheremo adesso che la molteplicità resta uguale a due sia per i punti sul bordo del triangolo che per quelli a esso interni.

Supponiamo¹⁰⁴ dunque che $n > m = 1$.

Il lato del triangolo parallelo a $R1$ è fatto dai pesi di cui alla (2.21.1123), ovvero tali che (si ricordi che per ipotesi $m = 1$)

$$\mathbf{h}(t) = \left(\frac{n-1-t}{2}, \frac{n-1-3t}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right); \quad 0 \leq t \leq n-1 \quad (2.21.1131)$$

definiti a partire dal peso del vettore $I_-|\mathbf{h}_M \rangle$.

Attraverso questi pesi¹⁰⁵ possiamo definire **tutti** i restanti pesi dello spettro presenti sul bordo o dentro il triangolo, attraverso l'applicazione di $(I_-)^r$, ottenendo così i pesi seguenti

$$\mathbf{h}(t, r) \equiv \mathbf{h}(t) - r(1, 0); \quad 0 \leq r \leq n-1-t \quad (2.21.1132)$$

$$= \left(\frac{n-1-t-2r}{2}, \frac{n-1-3t}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1133)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n-1-t-2r}{2} + \frac{n-1-3t}{2} = n-1-2t-r \\ s_2 &= \frac{n-1-t-2r}{2} - \frac{n-1-3t}{2} = t-r \end{aligned} \quad (2.21.1134)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-1)+2(n-1-2t-r)+(t-r)}{3} = n-1-t-r \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-1)-(n-1-2t-r)-2(t-r)}{3} = r \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-1)-(n-1-2t-r)+(t-r)}{3} = t \end{cases} \quad (2.21.1135)$$

¹⁰⁴Il caso in cui $n = m = 1$ corrisponde alla rappresentazione dell'ottetto e lo abbiamo già considerato. In questa rappresentazione c'è un solo punto interno con peso $h = (0, 0)$ che, coerentemente con quanto detto fin'ora, ha associata una molteplicità uguale a due.

¹⁰⁵Si osservi che, poiché $0 \leq t \leq n-1$, questi pesi individuano vettori con autovalore di I_3 dato da $I_3 = \frac{n-1-3t}{2} \geq 0$ ovvero non negativo.

Poiché $a + b + c = n$ e $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m = 1$, sono possibili solo tre casi, ovvero che $\bar{a} = 1, \bar{b} = \bar{c} = 0$, oppure che $\bar{a} = 0, \bar{b} = 1, \bar{c} = 0$, o infine che $\bar{a} = \bar{b} = 0, \bar{c} = 1$, corrispondenti, rispettivamente ai casi *I*, *II* e *III* della tabella (2.14) riportata sotto.

La condizione sulla traccia riduce al solito i casi possibili a solo due soluzioni per cui **per tutti i pesi del triangolo la molteplicità è uguale a due.**

Siamo adesso in grado di determinare facilmente la dimensione della rappresentazione $(n, 1)$. I pesi presenti sul bordo esterno dello spettro sono

$$p_e = [(n + 1) + (m + 1)] * 3 - 6 = 3n + 3 \quad (2.21.1136)$$

mentre i pesi all'interno dello spettro, quelli del triangolo di lato n sono

$$p_i = n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (2.21.1137)$$

Poiché per i pesi p_e la molteplicità vale uno mentre per i pesi p_i vale due, la dimensione della rappresentazione $(n, 1)$ è pari a

$$D(n, 1) = 3(n + 1) + n(n + 1) = (n + 1)(n + 3) \quad (2.21.1138)$$

Casi possibili			
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
a	$n - t - r$	$n - t - r - 1$	$n - t - r - 1$
\bar{a}	1	0	0
b	r	$r + 1$	r
\bar{b}	0	1	0
c	t	t	$t + 1$
\bar{c}	0	0	1
	$\left \begin{smallmatrix} 1 \\ 11\dots 12\dots 23\dots 3 \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} 2 \\ 21\dots 12\dots 23\dots 3 \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} 3 \\ 31\dots 12\dots 23\dots 3 \end{smallmatrix} \right\rangle$

Tabella 2.14:

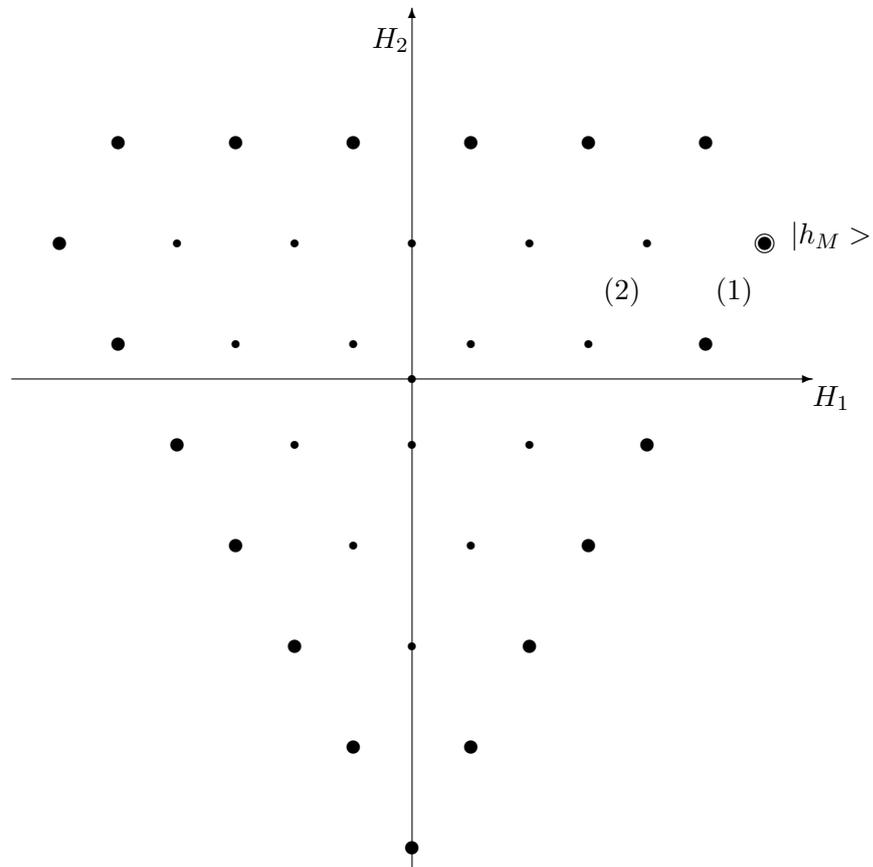


Fig.2.21.3 : Spettro della $(5,1)$

Per fissare meglio le idee, abbiamo riportato nella figura (2.21.3) l'esempio dello spettro della $(5,1)$ dove abbiamo evidenziato il vettore $|h_M \rangle$ e il bordo esterno dello spettro (fatto di pesi, come sappiamo, con molteplicità uno) così come è evidenziata la parte triangolare interna, in cui la molteplicità è ovunque uguale a due.

2.21.4 La molteplicità nella (n, m) in generale

Prima parte

Consideriamo il caso generale di una rappresentazione irriducibile (n, m) , per la quale supporremo unicamente che risulti¹⁰⁶ $n \geq m > 0$.

Iniziamo osservando che solo la struttura dei primi m layers resta esagonale, mentre il restante dei pesi risulta distribuito in un triangolo equilatero avente il lato fatto da $n - m + 1$ pesi.

Come esempio, tanto per fissare le idee, riportiamo nella figura (2.21.4) lo spettro dei pesi della rappresentazione $(7, 3)$ in cui è stato evidenziato sia il vettore $|h_M\rangle$ come pure i pesi che fanno parte del triangolo equilatero interno.

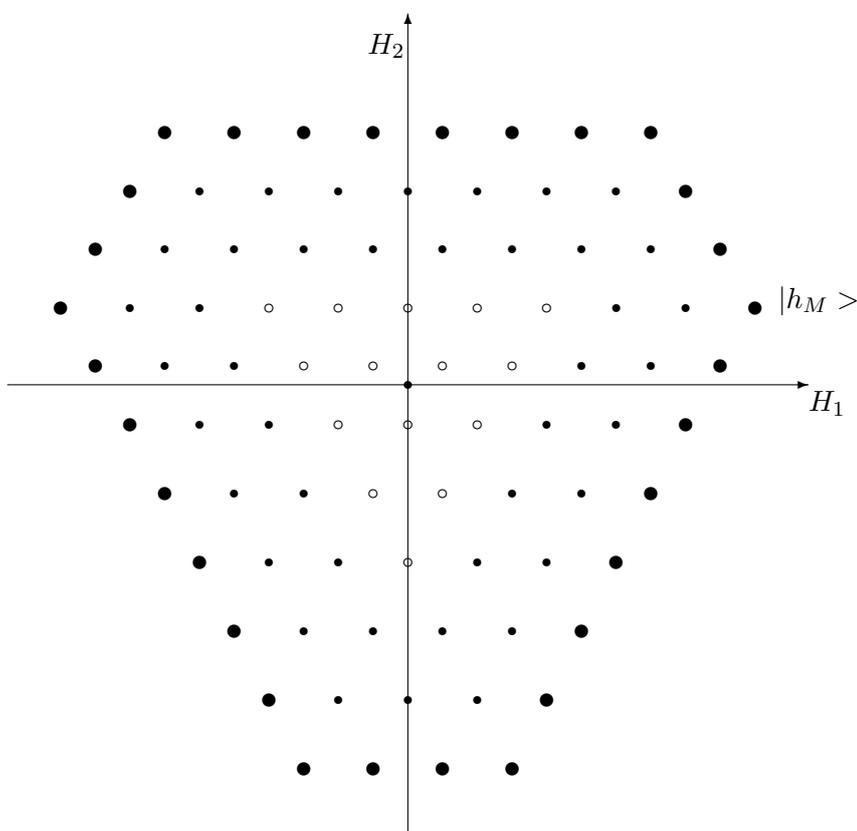


Fig.2.21.4 : Spettro della $(7, 3)$

¹⁰⁶Se $m = 0$ lo spettro è triangolare e in questo caso, come abbiamo già visto, la molteplicità vale *uno* per tutti i pesi della rappresentazione.

Per determinare la molteplicità dei pesi nei vari layers, inizieremo considerando i pesi della forma

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_r &\equiv \mathbf{h}_M - r \mathbf{a} = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - r (1, 0) = \\ &= \left(\frac{n+m-2r}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ con } 0 \leq r \leq m-1 \end{aligned} \quad (2.21.1139)$$

ciascuno dei quali appartiene a un layer di forma esagonale e lo individua in modo univoco, a partire da quello relativo al bordo, a cui corrisponde $r = 0$, fino a quello più interno, determinato da $r = m - 1$ (che potrebbe anche non essere distinto da quello relativo al bordo, se $m = 1$).

In seguito confermeremo quanto già visto in qualche caso particolare, che la molteplicità resta la stessa per tutti i pesi appartenenti a uno stesso layer.

Dato il peso \mathbf{h}_r , abbiamo

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n+m-2r}{2} + \frac{n-m}{2} = n - r \\ s_2 &= \frac{n+m-2r}{2} - \frac{n-m}{2} = m - r \end{aligned} \quad (2.21.1140)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - \bar{a} = \frac{(n-m)+2(n-r)+(m-r)}{3} = n - r \\ \beta = b - \bar{b} = \frac{(n-m)-(n-r)-2(m-r)}{3} = -m + r \\ \gamma = c - \bar{c} = \frac{(n-m)-(n-r)+(m-r)}{3} = 0 \end{cases} \quad (2.21.1141)$$

Procediamo ora al conteggio delle soluzioni per un assegnato valore di r , corrispondente al layer $L = r + 1$.

Poiché $\alpha \equiv a - \bar{a} = n - r$, limitatamente a queste due sole quantità a e \bar{a} , i loro possibili valori sono i seguenti¹⁰⁷

	valori	
N	a	\bar{a}
1	n	r
2	$n - 1$	$r - 1$
3	$n - 2$	$r - 2$
...
$r + 1$	$n - r$	0

Tabella 2.15:

dove N è un numero progressivo introdotto solo per identificare le diverse soluzioni per a e \bar{a} .

¹⁰⁷Si ricordi che $0 \leq r \leq m - 1$ e $m \leq n$ per cui $n - r$ è certamente positivo.

Quanto ai possibili valori dei parametri b e c , essi sono determinati dalle possibili coppie (b, c) per le quali

$$(b, c) : b \geq 0; \quad c \geq 0; \quad a + b + c = n \quad (2.21.1142)$$

mentre i valori di \bar{b} e \bar{c} seguono poi da quelli di b, c e dalle due equazioni per β e γ , che forniscono

$$\beta \equiv b - \bar{b} = -m + r \Rightarrow \bar{b} = m - r + b \quad (2.21.1143)$$

$$\gamma \equiv c - \bar{c} = 0 \Rightarrow \bar{c} = c \quad (2.21.1144)$$

Casi possibili				
N	a	$b + c$	(b, c)	S
1	n	0	(0, 0)	1
2	$n - 1$	1	(1, 0); (0, 1)	2
3	$n - 2$	2	(2, 0); (1, 1); (0, 2)	3
...
$r + 1$	$n - r$	r	$(r, 0); (r - 1, 1); \dots; (1, r - 1); (0, r)$	$r + 1$

Tabella 2.16:

Nella tabella (2.16), in funzione del numero progressivo N , sono riportate le coppie (b, c) compatibili con a , dato n , insieme al loro numero indicato con S . Come si vede, il totale delle possibili scelte è uguale a

$$T = 1 + 2 + 3 + \dots + (r + 1) = \frac{(r + 1)(r + 2)}{2} \quad (2.21.1145)$$

A ciascuna di queste possibili scelte, nella base tensoriale, corrisponde in modo univoco un vettore di peso \mathbf{h}_r , ma *non* necessariamente questo è un vettore della rappresentazione irriducibile (n, m) .

Affinché questo possa accadere è necessario, come sappiamo, che siano soddisfatte le due condizioni $P1$ (simmetria completa sia sugli indici covarianti che su quelli controvarianti) e $P2$ (traccia nulla).

Mentre la simmetrizzazione è sempre possibile e non conduce a limitazioni, la condizione sulla traccia, come abbiamo anche già visto in precedenza, costituisce un vincolo che può ridurre il numero dei vettori accettabili.

Per comodità di notazione, decidiamo adesso di rappresentare il vettore definito dai parametri a, b, c e $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nel modo seguente

$$\left| \begin{matrix} (\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{c}) \\ (a), (b), (c) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1146)$$

intendendo così che gli indici in basso (indici controvarianti) sono fatti da un totale a di "1", da un totale b di "2" e da un totale c di "3", mentre quelli

in alto (indici covarianti) sono fatti da un totale \bar{a} di "1", da un totale \bar{b} di "2" e da un totale \bar{c} di "3". Quanto alla posizione di questi indici nella stringa, sia in alto che in basso, essa è del tutto irrilevante poiché il vettore deve comunque essere poi simmetrizzato e questo comporta, alla fine, una unica possibilità indipendente da questa posizione.

Consideriamo dunque il layer L , con $1 \leq L \leq m$, individuato da $|\mathbf{h}_r \rangle$ con $r = L - 1$. Abbiamo visto sopra che il numero totale dei vettori della base tensoriale aventi peso $\mathbf{h}_r \rangle$ è

$$T = \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{L(L+1)}{2} \tag{2.21.1147}$$

Nella tabella (2.17) riportata sotto è dato il dettaglio¹⁰⁸ di come sono fatti questi vettori. Abbiamo

Casi possibili								
N	a	\bar{a}	b	\bar{b}	c	\bar{c}	vet	$ (n, m, r; N)_p \rangle$
1	n	r	0	$m - r$	0	0	$\left \begin{matrix} (r), (m-r), (0) \\ (n), (0), (0) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; 1)_1 \rangle$
2	$n - 1$	$r - 1$	1	$m - r + 1$	0	0	$\left \begin{matrix} (r-1), (m-r+1), (0) \\ (n-1), (1), (0) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; 2)_1 \rangle$
			0	$m - r$	1	1	$\left \begin{matrix} (r-1), (m-r), (1) \\ (n-1), (0), (1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; 2)_2 \rangle$
3	$n - 2$	$r - 2$	2	$m - r + 2$	0	0	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r+2), (0) \\ (n-2), (2), (0) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; 3)_1 \rangle$
			1	$m - r + 1$	1	1	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r+1), (1) \\ (n-2), (1), (1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; 3)_2 \rangle$
			0	$m - r$	2	2	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r), (2) \\ (n-2), (0), (2) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; 3)_3 \rangle$
...	
r	$n - r + 1$	1	$r - 1$	$m - 1$	0	0	$\left \begin{matrix} (1), (m-1), (0) \\ (n-r+1), (r-1), (0) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; r)_1 \rangle$
			$r - 2$	$m - 2$	1	1	$\left \begin{matrix} (1), (m-2), (1) \\ (n-r+1), (r-2), (1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; r)_2 \rangle$
...
			0	$m - r$	$r - 1$	$r - 1$	$\left \begin{matrix} (1), (m-r), (r-1) \\ (n-r+1), (0), (r-1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; r)_r \rangle$
$r + 1$	$n - r$	0	r	m	0	0	$\left \begin{matrix} (0), (m), (0) \\ (n-r), (r), (0) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; r + 1)_1 \rangle$
			$r - 1$	$m - 1$	1	1	$\left \begin{matrix} (0), (m-1), (1) \\ (n-r), (r-1), (1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; r + 1)_2 \rangle$
...
			0	$m - r$	r	r	$\left \begin{matrix} (0), (m-r), (r) \\ (n-r), (0), (r) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n, m, r; r + 1)_{r+1} \rangle$

Tabella 2.17:

¹⁰⁸Con il simbolo $|(n, m, r; N)_p \rangle$ indichiamo il vettore che, nella rappresentazione $R\left(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right)$, corrisponde al peso $\mathbf{h}_M - r\mathbf{a}$ (cfr.(2.21.1139)), definito dal progressivo N (cfr.(2.16)) legato al valore del parametro a , e di progressivo p nell'ambito di N fissato.

E' opportuno ricordare adesso che questi vettori $|(n, m, r; N)_p \rangle$ devono essere simmetrizzati e, quanto alla loro traccia, dato che in generale hanno componenti sia covarianti che controvarianti uguali¹⁰⁹, la loro traccia non è nulla.

La contrazione del primo indice covariante con il primo indice controvariante di questi vettori (simmetrizzati) conduce in modo ovvio ai vettori¹¹⁰ seguenti, dove abbiamo definito

$$n' = n - 1; \quad m' = m - 1; \quad r' = r - 1 \quad (2.21.1148)$$

$ (n, m, r; N)_p \rangle$	Casi possibili		
	<i>vettore</i>	<i>contrazione</i>	<i>short</i>
$ (n, m, r; 1)_1 \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r), (m-r), (0) \\ (n), (0), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r), (0) \\ (n-1), (0), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; 1)_1 \rangle$
$ (n, m, r; 2)_1 \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r+1), (0) \\ (n-1), (1), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+1), (0) \\ (n-2), (1), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r), (0) \\ (n-1), (0), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; 2)_1 \rangle +$ $+ (n', m', r'; 1)_1 \rangle$
$ (n, m, r; 2)_2 \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r), (1) \\ (n-1), (0), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r), (1) \\ (n-2), (0), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r), (0) \\ (n-1), (0), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; 2)_2 \rangle +$ $+ (n', m', r'; 1)_1 \rangle$
$ (n, m, r; 3)_1 \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+2), (0) \\ (n-2), (2), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-3), (m-r+2), (0) \\ (n-3), (2), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+1), (0) \\ (n-2), (1), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; 3)_1 \rangle +$ $+ (n', m', r'; 2)_1 \rangle$
$ (n, m, r; 3)_2 \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+1), (1) \\ (n-2), (1), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-3), (m-r+1), (1) \\ (n-3), (1), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r), (1) \\ (n-2), (0), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+1), (0) \\ (n-2), (1), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; 3)_2 \rangle +$ $+ (n', m', r'; 2)_2 \rangle +$ $+ (n', m', r'; 2)_1 \rangle$
$ (n, m, r; 3)_3 \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r), (2) \\ (n-2), (0), (2) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (r-3), (m-r), (2) \\ (n-3), (0), (2) \end{smallmatrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r), (1) \\ (n-2), (0), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; 3)_3 \rangle +$ $+ (n', m', r'; 2)_2 \rangle$
...
$ (n, m, r; r+1)_{r+1} \rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-r), (r) \\ (n-r), (0), (r) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-r), (r-1) \\ (n-r), (0), (r-1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n', m', r'; r'+1)_{r'+1} \rangle$

Tabella 2.18:

Come si vede, la contrazione della traccia sui vettori $|(n, m, r; N)_p \rangle$ conduce ai vettori $|(n', m', r'; N')_q \rangle$.

¹⁰⁹Se $m = 1$ e dunque il solo possibile valore di r è $r = 0$ è dunque abbiamo solo $N = 1$, il vettore $|(n, 1, 0; 1)_1 \rangle$ ha traccia nulla e la molteplicità è *uno*: è questo il caso del layer al bordo dello spettro ...

¹¹⁰E' inteso che se in un vettore un qualunque coefficiente a , b o c , oppure \bar{a} , \bar{b} o \bar{c} risulta negativo, quel vettore va semplicemente considerato nullo.

D'altronde i vettori della base della rappresentazione irriducibile (n, m) con peso \mathbf{h}_r saranno combinazioni lineari degli $|(n, m, r; N)_p \rangle$ tali da avere traccia nulla. Ma partendo da una combinazione lineare qualsiasi fra gli $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ vettori $|(n, m, r; N)_p \rangle$ si ottiene in genere una espressione fatta dagli $\frac{(r'+1)(r'+2)}{2} = \frac{r(r+1)}{2}$ vettori indipendenti $|(n', m', r'; N')_q \rangle$, ovvero ricaviamo $\frac{r(r+1)}{2}$ vincoli sugli $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ coefficienti della combinazione lineare, e dunque ne concludiamo che le soluzioni cercate con traccia nulla, ovvero la molteplicità associata al peso \mathbf{h}_r , vale

$$M_r = \frac{(r+1)(r+2)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} = r+1 = L \quad (2.21.1149)$$

cioè coincide con il numero progressivi di layer¹¹¹.

Vediamo adesso un'applicazione di quanto abbiamo ricavato sopra in generale, considerando il caso della rappresentazione $(7, 3)$, il cui spettro è riportato in fig.(2.21.4).

- $r = 0$

Questo valore di r implica il peso pari a \mathbf{h}_M che si trova al bordo dello spettro. L'unico valore possibile di N risulta $N = 1$ a cui corrisponde il vettore (cfr. tavola (2.17))

$$|(7, 3, 0; 1)_1 \rangle = \left| \begin{matrix} (0),(3),(0) \\ (7),(0),(0) \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} 222 \\ 1111111 \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1150)$$

che ha traccia nulla, avendo gli indici covarianti e controvarianti tutti distinti.

La molteplicità, quindi, per il peso $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_M$ è uguale a **uno**.

- $r = 1$

Questo valore di r definisce il peso $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_M - \mathbf{a}$ a cui corrispondono i tre vettori seguenti, di cui riportiamo anche il vettore che si origina dalla contrazione della loro traccia:

$$|(7, 3, 1; 1)_1 \rangle = \left| \begin{matrix} (1),(2),(0) \\ (7),(0),(0) \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} 122 \\ 1111111 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{matrix} (0),(2),(0) \\ (6),(0),(0) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1151)$$

$$|(7, 3, 1; 2)_1 \rangle = \left| \begin{matrix} (0),(3),(0) \\ (6),(1),(0) \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} 222 \\ 1111112 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{matrix} (0),(2),(0) \\ (6),(0),(0) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1152)$$

$$|(7, 3, 1; 2)_2 \rangle = \left| \begin{matrix} (0),(2),(1) \\ (6),(0),(1) \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} 223 \\ 1111113 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{matrix} (0),(2),(0) \\ (6),(0),(0) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1153)$$

Come si vede, la contrazione conduce a un solo vettore, ovvero

$$\left| \begin{matrix} 223 \\ 1111113 \end{matrix} \right\rangle = |(6, 2, 0; 1)_1 \rangle \quad (2.21.1154)$$

gli altri vettori previsti nella tabella (2.18) non ci sono perchè, in questo caso in cui abbiamo assunto $r = 1$, i vettori che avrebbero $\bar{a} = r - 2 < 0$

¹¹¹Ricordiamo che questo vale finché stiamo su layers di forma esagonale.

sono assenti (nulli).

Se consideriamo dunque una generica combinazione lineare dei tre vettori

$$c_1 |(7, 3, 1; 1)_1\rangle + c_2 |(7, 3, 1; 2)_1\rangle + c_3 |(7, 3, 1; 2)_2\rangle \quad (2.21.1155)$$

e imponiamo che la sua traccia sia nulla, ricaviamo una unica condizione sui coefficienti per cui deve essere che

$$(c_1 + c_2 + c_3) |(6, 2, 0; 1)_1\rangle = |0\rangle \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad (2.21.1156)$$

e quindi lo spazio vettoriale delle soluzioni dovrà soddisfare quanto sopra e dunque avrà dimensione due per cui la molteplicità per il peso $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_M - \mathbf{a}$ è uguale a **due**. Una possibile scelta della base è

$$c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1 \Rightarrow |(7, 3, 1)_a\rangle = |(7, 3, 1; 1)_1\rangle - |(7, 3, 1; 2)_2\rangle \quad (2.21.1157)$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1 \Rightarrow |(7, 3, 1)_b\rangle = |(7, 3, 1; 2)_1\rangle - |(7, 3, 1; 2)_2\rangle \quad (2.21.1158)$$

- $r = 2$

Questo valore di r definisce il peso $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_M - 2 \cdot \mathbf{a}$ a cui corrispondono i sei vettori seguenti, di cui riportiamo anche il vettore che si origina dalla contrazione della loro traccia:

$$|(7, 3, 2; 1)_1\rangle = \left| \begin{smallmatrix} (2, (1), (0)) \\ (7, (0), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{smallmatrix} (1, (1), (0)) \\ (6, (0), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle = |(6, 2, 1; 1)_1\rangle \quad (2.21.1159)$$

$$\begin{aligned} |(7, 3, 2; 2)_1\rangle &= \left| \begin{smallmatrix} (1, (2), (0)) \\ (6, (1), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{smallmatrix} (0, (2), (0)) \\ (5, (1), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} (1, (1), (0)) \\ (6, (0), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle = \\ &= |(6, 2, 1; 2)_1\rangle + |(6, 2, 1; 1)_1\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1160)$$

$$\begin{aligned} |(7, 3, 2; 2)_2\rangle &= \left| \begin{smallmatrix} (1, (1), (1)) \\ (6, (0), (1)) \end{smallmatrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{smallmatrix} (0, (1), (1)) \\ (5, (0), (1)) \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} (1, (1), (0)) \\ (6, (0), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle = \\ &= |(6, 2, 1; 2)_2\rangle + |(6, 2, 1; 1)_1\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1161)$$

$$|(7, 3, 2; 3)_1\rangle = \left| \begin{smallmatrix} (0, (3), (0)) \\ (5, (2), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{smallmatrix} (0, (2), (0)) \\ (5, (1), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle = |(6, 2, 1; 2)_1\rangle \quad (2.21.1162)$$

$$\begin{aligned} |(7, 3, 2; 3)_2\rangle &= \left| \begin{smallmatrix} (0, (2), (1)) \\ (5, (1), (1)) \end{smallmatrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{smallmatrix} (0, (1), (1)) \\ (5, (0), (1)) \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} (0, (2), (0)) \\ (5, (1), (0)) \end{smallmatrix} \right\rangle = \\ &= |(6, 2, 1; 2)_2\rangle + |(6, 2, 1; 2)_1\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1163)$$

$$|(7, 3, 2; 3)_3\rangle = \left| \begin{smallmatrix} (0, (1), (2)) \\ (5, (0), (2)) \end{smallmatrix} \right\rangle \rightarrow \left| \begin{smallmatrix} (0, (1), (1)) \\ (5, (0), (1)) \end{smallmatrix} \right\rangle = |(6, 2, 1; 2)_2\rangle \quad (2.21.1164)$$

Coerentemente con quanto visto, in questo caso la contrazione conduce ai tre vettori di $(n', m') = (n - 1, m - 1) = (6, 2)$ corrispondenti a $r' = r - 1 = 1$.

Se consideriamo quindi il generico vettore dello spazio a sei dimensioni corrispondente al peso \mathbf{h}_2

$$\begin{aligned} &c_1 |(7, 3, 2; 1)_1\rangle + c_2 |(7, 3, 2; 2)_1\rangle + c_3 |(7, 3, 2; 2)_2\rangle + \\ &+ c_4 |(7, 3, 2; 3)_1\rangle + c_5 |(7, 3, 2; 3)_2\rangle + c_6 |(7, 3, 2; 3)_3\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1165)$$

e imponiamo che la sua traccia sia nulla, ne ricaviamo che deve risultare

$$\begin{aligned} & c_1 |(6, 2, 1; 1)_1\rangle + c_2 |(6, 2, 1; 2)_1\rangle + c_2 |(6, 2, 1; 1)_1\rangle + \\ & + c_3 |(6, 2, 1; 2)_2\rangle + c_3 |(6, 2, 1; 1)_1\rangle + c_4 |(6, 2, 1; 2)_1\rangle + \\ & + c_5 |(6, 2, 1; 2)_2\rangle + c_5 |(6, 2, 1; 2)_1\rangle + c_6 |(6, 2, 1; 2)_2\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1166)$$

e dunque deve aversi che

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_4 + c_5 = 0 \\ c_3 + c_5 + c_6 = 0 \end{cases} \quad (2.21.1167)$$

Queste tre equazioni riducono i gradi di libertà da sei a tre, per cui la molteplicità per il peso $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_M - 2 \cdot \mathbf{a}$ è uguale a **tre**.

Una possibile scelta della base, conseguente alla scelta delle soluzioni per i coefficienti c_i che soddisfano il sistema (2.21.1167), è la seguente

$$(c_i) = (1, 0, -1, 0, 0, 1) \Rightarrow |(7, 3, 2)_a\rangle = |(7, 3, 2; 1)_1\rangle - |(7, 3, 2; 2)_2\rangle + |(7, 3, 2; 3)_3\rangle \quad (2.21.1168)$$

$$(c_i) = (1, -1, 0, 1, 0, 0) \Rightarrow |(7, 3, 2)_b\rangle = |(7, 3, 2; 1)_1\rangle - |(7, 3, 2; 2)_1\rangle + |(7, 3, 2; 3)_1\rangle \quad (2.21.1169)$$

$$(c_i) = (0, 0, 0, 1, -1, 1) \Rightarrow |(7, 3, 2)_c\rangle = |(7, 3, 2; 3)_1\rangle - |(7, 3, 2; 3)_2\rangle + |(7, 3, 2; 3)_3\rangle \quad (2.21.1170)$$

Seconda parte

Nella prima parte del paragrafo abbiamo dimostrato che per i pesi

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_M - r\mathbf{a} \quad \text{con } 0 \leq r \leq m - 1 \quad (2.21.1171)$$

la molteplicità M_r vale

$$M_r = r + 1 = L \quad (2.21.1172)$$

dove L è il numero progressivo che individua il layer a cui appartiene \mathbf{h}_r come peso più alto.

Vogliamo dimostrare adesso, in generale (lo abbiamo dimostrato solo per il layer posto al bordo dello spettro, definito dal valore di $r = 0 \dots$), che la molteplicità *non* varia da un peso all'altro nello stesso layer.

Il punto di partenza è, naturalmente, il peso \mathbf{h}_r per il quale ricordiamo che si ha

$$\mathbf{h}_r = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - r(1, 0) = \left(\frac{n+m-2r}{2}, \frac{n-m}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1173)$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} s_1 = 2\mathbf{h}_r \cdot \mathbf{b} = \mathbf{h}_r \cdot (1, \sqrt{3}) &= \frac{n+m-2r}{2} + \frac{n-m}{2} = n - r \\ s_2 = 2\mathbf{h}_r \cdot \mathbf{c} = \mathbf{h}_r \cdot (1, -\sqrt{3}) &= \frac{n+m-2r}{2} - \frac{n-m}{2} = m - r \end{aligned} \quad (2.21.1174)$$

e quindi

$$\begin{cases} a - \bar{a} \equiv \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} = \frac{n-m+2n-2r+m-r}{3} = n-r \\ b - \bar{b} \equiv \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} = \frac{n-m-n+r-2m+2r}{3} = r-m \\ c - \bar{c} \equiv \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} = \frac{n-m-n+r+m-r}{3} = 0 \end{cases} \quad (2.21.1175)$$

e queste sono le quantità da cui abbiamo determinato il numero di vettori di $R \binom{m}{n}$ con questo peso e quindi quelli che appartengono alla rappresentazione (n, m) .

Consideriamo adesso un peso della rappresentazione (n, m) che appartiene al layer definito da r e si trova nel ramo discendente R_{\downarrow} che origina in \mathbf{h}_r , ovvero un peso della forma

$$\mathbf{h}_{ru} \equiv \mathbf{h}_r - u \mathbf{b} = \mathbf{h}_r - u \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{con } 0 \leq u \leq n-r \quad (2.21.1176)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{ru} &= \left(\frac{n+m-2r}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - u \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{n+m-2r-u}{2}, \frac{n-m-3u}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.21.1177)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} s_1 &= \mathbf{h}_{ru} \cdot (1, \sqrt{3}) = \frac{n+m-2r-u}{2} + \frac{n-m-3u}{2} = n-r-2u \\ s_2 &= \mathbf{h}_{ru} \cdot (1, -\sqrt{3}) = \frac{n+m-2r-u}{2} - \frac{n-m-3u}{2} = m-r+u \end{aligned} \quad (2.21.1178)$$

e quindi

$$\begin{cases} a - \bar{a} \equiv \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} = \frac{n-m+2n-2r-4u+m-r+u}{3} = n-r-u \\ b - \bar{b} \equiv \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} = \frac{n-m-n+r+2u-2m+2r-2u}{3} = r-m \\ c - \bar{c} \equiv \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} = \frac{n-m-n+r+2u+m-r+u}{3} = u \end{cases} \quad (2.21.1179)$$

Prima di procedere alla determinazione e al conteggio dei vettori della rappresentazione $R \binom{m}{n}$ che soddisfano la (2.21.1179), ovvero che hanno peso \mathbf{h}_{ru} (cfr. la tabella (2.19), premettiamo le osservazioni seguenti:

- essendo $u \leq n-r$ ne segue che $\alpha = n-r-u \geq 0$ e dunque $a \geq \bar{a}$;
- poiché $r \leq m-1$ ne segue che $\beta = r-m < 0$ e dunque $b < \bar{b}$; inoltre, essendo $\beta = b - \bar{b}$ e b non negativo, sarà $\bar{b} \geq m-r$, indipendente dal valore di u ;
- visto che $\gamma = c - \bar{c} = u$, essendo necessariamente $\bar{c} \geq 0$, ne segue che $c \geq u$, indipendentemente dal valore di r .
Essendo $a + b + c = n$ sarà $a + b = n - c \leq n - u$ e dunque, potendo b essere solo non negativo, avremo che
 $a \leq n - u \Rightarrow \bar{a} = a - n + r + u \leq r$

Riassumendo, le condizioni da soddisfare sono le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = n \\ \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m \\ \alpha = a - \bar{a} = n - r - u \\ \beta = b - \bar{b} = -m + r \\ \gamma = c - \bar{c} = u \\ n \geq m > 0 \\ 0 \leq r \leq m - 1 \\ 0 \leq u \leq n - r \end{array} \right. \quad (2.21.1180)$$

Abbiamo

Casi possibili									
N	a	\bar{a}	$b + c$	b	\bar{b}	c	\bar{c}	vettore	short
1	$n - u$	r	u	0	$m - r$	u	0	$\left \begin{smallmatrix} (r), (m-r), (0) \\ (n-u), (0), (u) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; 1)_1 >$
2	$n - u - 1$	$r - 1$	$u + 1$	1	$m - r + 1$	u	0	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r+1), (0) \\ (n-u-1), (1), (u) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; 2)_1 >$
				0	$m - r$	$u + 1$	1	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r), (1) \\ (n-u-1), (0), (u+1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; 2)_2 >$
3	$n - u - 2$	$r - 2$	$u + 2$	2	$m - r + 2$	u	0	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+2), (0) \\ (n-u-2), (2), (u) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; 3)_1 >$
				1	$m - r + 1$	$u + 1$	1	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r+1), (1) \\ (n-u-2), (1), (u+1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; 3)_2 >$
				0	$m - r$	$u + 2$	2	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r), (2) \\ (n-u-2), (0), (u+2) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; 3)_3 >$
...	
$r + 1$	$n - u - r$	0	$u + r$	r	m	u	0	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m), (0) \\ (n-u-r), (r), (u) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; r + 1)_1 >$
				$r - 1$	$m - 1$	$u + 1$	1	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-1), (1) \\ (n-u-r), (r-1), (u+1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; r + 1)_2 >$
				
				0	$m - r$	$u + r$	r	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-r), (r) \\ (n-u-r), (0), (u+r) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; r + 1)_{r+1} >$

Tabella 2.19:

Come si vede, il numero dei vettori che soddisfano le condizioni richieste (2.21.1180) vale ancora $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$, ovvero è indipendente dal valore di u . Inoltre esiste una evidente corrispondenza biunivoca con quanto visto nel caso del peso \mathbf{h}_r , infatti¹¹² basta osservare che

$$|(n, m, r, 0; N)_j > = |(n, m, r; N)_j > \in \{\mathbf{h}_r\} \iff |(n, m, r, u; N)_j > \in \{\mathbf{h}_{ru}\} \quad (2.21.1181)$$

¹¹² $(0 \leq j \leq N; 1 \leq N \leq r + 1)$

Questa corrispondenza permane anche per quanto riguarda i vettori che originano dalle contrazioni¹¹³ legate alla traccia, infatti abbiamo¹¹⁴

	Casi possibili		
$ (n, m, r, u; N)_p \rangle$	<i>vettore</i>	<i>contrazione</i>	<i>short</i>
$ (n, m, r, u; 1)_1 \rangle$	$\left \begin{matrix} (r), (m-r), (0) \\ (n-u), (0), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (r-1), (m-r), (0) \\ (n-u-1), (0), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; 1)_1 \rangle$
$ (n, m, r, u; 2)_1 \rangle$	$\left \begin{matrix} (r-1), (m-r+1), (0) \\ (n-u-1), (1), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r+1), (0) \\ (n-u-2), (1), (u) \end{matrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{matrix} (r-1), (m-r), (0) \\ (n-u-1), (0), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; 2)_1 \rangle +$ $+ (n', m', r', u; 1)_1 \rangle$
$ (n, m, r, u; 2)_2 \rangle$	$\left \begin{matrix} (r-1), (m-r), (1) \\ (n-u-1), (0), (u+1) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r), (1) \\ (n-u-2), (0), (u+1) \end{matrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{matrix} (r-1), (m-r), (0) \\ (n-u-1), (0), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; 2)_2 \rangle +$ $+ (n', m', r', u; 1)_1 \rangle$
$ (n, m, r, u; 3)_1 \rangle$	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r+2), (0) \\ (n-u-2), (2), (0) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (r-3), (m-r+2), (0) \\ (n-u-3), (2), (u) \end{matrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{matrix} (r-2), (m-r+1), (0) \\ (n-u-2), (1), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; 3)_1 \rangle +$ $+ (n', m', r', u; 2)_1 \rangle$
$ (n, m, r, u; 3)_2 \rangle$	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r+1), (1) \\ (n-u-2), (1), (u+1) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (r-3), (m-r+1), (1) \\ (n-u-3), (1), (u+1) \end{matrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{matrix} (r-2), (m-r), (1) \\ (n-u-2), (0), (u+1) \end{matrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{matrix} (r-2), (m-r+1), (0) \\ (n-u-2), (1), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; 3)_2 \rangle +$ $+ (n', m', r', u; 2)_2 \rangle +$ $+ (n', m', r', u; 2)_1 \rangle$
$ (n, m, r, u; 3)_3 \rangle$	$\left \begin{matrix} (r-2), (m-r), (2) \\ (n-u-2), (0), (u+2) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (r-3), (m-r), (2) \\ (n-u-3), (0), (u+2) \end{matrix} \right\rangle +$ $+ \left \begin{matrix} (r-2), (m-r), (1) \\ (n-u-2), (0), (u+1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; 3)_3 \rangle +$ $+ (n', m', r', u; 2)_2 \rangle$
...
$ (n, m, r, u; r+1)_1 \rangle$	$\left \begin{matrix} (0), (m), (0) \\ (n-u-r), (r), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (0), (m-1), (0) \\ (n-u-r), (r-1), (u) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; r'+1)_1 \rangle$
...
$ (n, m, r, u; r+1)_{r+1} \rangle$	$\left \begin{matrix} (0), (m-r), (r) \\ (n-u-r), (0), (u+r) \end{matrix} \right\rangle$	$\left \begin{matrix} (0), (m-r), (r-1) \\ (n-u-r), (0), (u+r-1) \end{matrix} \right\rangle$	$ (n', m', r', u; r'+1)_{r'+1} \rangle$

Tabella 2.20:

I tensori indipendenti risultanti dalla contrazione di traccia risultano così ancora essere $\frac{r(r+1)}{2}$ e dunque la base dei vettori i cui tensori associati hanno traccia nulla sono ancora $r+1$, indipendentemente da u .

La molteplicità associata a questi pesi, quindi, **non cambia** al variare di u , cioè nel ramo R_\downarrow del layer $L = r+1$ il quale trae origine in \mathbf{h}_r .

¹¹³Con questa locuzione intendiamo i vettori definiti dai tensori ottenuti per contrazione di traccia a partire dai tensori associati al vettore considerato, una volta simmetrizzato.

¹¹⁴Come nel caso della (2.21.1148), abbiamo posto $n' = n-1$, $m' = m-1$, $r' = r-1$ e abbiamo lasciato u uguale a se stesso. Si osservi in particolare che la disuguaglianza che lo riguarda, cioè $u \leq n-r$ continua naturalmente a valere anche per $n' - r' \dots$.

Verifichiamo adesso che, come possiamo ben aspettarci, lo stesso risultato di indipendenza della molteplicità dal peso si ottiene per quelli presenti nel ramo ascendente R_{\uparrow} del layer $L = r + 1$ (questo ramo esiste poiché stiamo trattando il caso di layer esagonale ...) originantesi in \mathbf{h}_r , i quali sono definiti attraverso la relazione

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{rv} &\equiv \mathbf{h}_r - v \mathbf{c} = \left(\frac{n+m-2r}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - v \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{n+m-2r-v}{2}, \frac{n-m+3v}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{con } 0 \leq v \leq m-r \quad (2.21.1182) \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} s_1 = \mathbf{h}_{ru} \cdot (1, \sqrt{3}) &= \frac{n+m-2r-v}{2} + \frac{n-m+3v}{2} = n-r+v \\ s_2 = \mathbf{h}_{ru} \cdot (1, -\sqrt{3}) &= \frac{n+m-2r-v}{2} - \frac{n-m+3v}{2} = m-r-2v \end{aligned} \quad (2.21.1183)$$

e quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} a - \bar{a} \equiv \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} = \frac{n-m+2n-2r+2v+m-r-2v}{3} = n-r \\ b - \bar{b} \equiv \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} = \frac{n-m-n+r-v-2m+2r+4v}{3} = r-m+v \\ c - \bar{c} \equiv \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} = \frac{n-m-n+r-v+m-r-2v}{3} = -v \end{array} \right. \quad (2.21.1184)$$

Le condizioni da soddisfare, in questo caso, sono

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = n \\ \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m \\ \alpha = a - \bar{a} = n - r \\ \beta = b - \bar{b} = -m + r + v \\ \gamma = c - \bar{c} = -v \\ n \geq m > 0 \\ 0 \leq r \leq m - 1 \\ 0 \leq v \leq m - r \end{array} \right. \quad (2.21.1185)$$

per cui ne risulta il quadro riportato nella tabella (2.21), la quale mostra, appunto, come il numero di vettori di $R \binom{m}{n}$ aventi peso \mathbf{h}_{rv} resti indipendente da v . Ripetendo quanto già visto riguardo alla imposizione della condizione di traccia, arriviamo di nuovo alla conclusione secondo la quale anche la molteplicità associata ai pesi presenti nel ramo R_{\uparrow} del layer $L = r + 1$ originantesi in \mathbf{h}_r resta comunque uguale a L .

Casi possibili									
N	a	\bar{a}	$b+c$	b	\bar{b}	c	\bar{c}	vettore	short
1	n	r	0	0	$m-r-v$	0	v	$\left \begin{smallmatrix} (r), (m-r-v), (0) \\ (n), (0), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; 1)_1 \rangle$
2	$n-1$	$r-1$	1	1	$m-r-v+1$	0	v	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r-v+1), (v) \\ (n-1), (1), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; 2)_1 \rangle$
				0	$m-r-v$	1	$v+1$	$\left \begin{smallmatrix} (r-1), (m-r-v), (v+1) \\ (n-1), (0), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; 2)_2 \rangle$
3	$n-2$	$r-2$	2	2	$m-r-v+2$	0	v	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r-v+2), (v) \\ (n-2), (2), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; 3)_1 \rangle$
				1	$m-r-v+1$	1	$v+1$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r-v+1), (v+1) \\ (n-2), (1), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; 3)_2 \rangle$
				0	$m-r-v$	2	$v+2$	$\left \begin{smallmatrix} (r-2), (m-r-v), (v+2) \\ (n-2), (0), (2) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; 3)_3 \rangle$
...	
$r+1$	$n-r$	0	r	r	$m-v$	0	v	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-v), (v) \\ (n-r), (r), (0) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; r+1)_1 \rangle$
				$r-1$	$m-v-1$	1	$v+1$	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-v-1), (v+1) \\ (n-r), (r-1), (1) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, u; r+1)_2 \rangle$
			
				0	$m-v-r$	r	$v+r$	$\left \begin{smallmatrix} (0), (m-v-r), (v+r) \\ (n-r), (0), (r) \end{smallmatrix} \right\rangle$	$ (n, m, r, v; r+1)_{r+1} \rangle$

Tabella 2.21:

Prima di trattare il caso degli altri quattro rami del layer esagonale L , è opportuno ricordare che i vettori dei pesi relativi alla rappresentazione $R_n^{(m)}$ godono di alcune proprietà di simmetria (teorema di Weyl), in particolare quella secondo cui lo spettro di questi pesi risulta invariante per rotazioni di $\pm 120^\circ$ nel piano (H_1, H_2) .

Partiamo dai pesi relativi alle rappresentazioni $(1, 0) \equiv \mathbf{3}$ e $(0, 1) \equiv \bar{\mathbf{3}}$, ovvero relativi alle due rappresentazioni fondamentali. Abbiamo

$$|_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}; \quad |_2\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}; \quad |_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \quad (2.21.1186)$$

$$|^1\rangle = -|_1\rangle; \quad |^2\rangle = -|_2\rangle; \quad |^3\rangle = -|_3\rangle \quad (2.21.1187)$$

Le rotazioni \mathcal{R}_\pm di $\pm 120^\circ$ nel piano (H_1, H_2) sono descritte dalle matrici

$$\mathcal{R}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_- = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.21.1188)$$

e risulta chiaramente che

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ |_1\rangle &= |_2\rangle; & \mathcal{R}_+ |_2\rangle &= |_3\rangle; & \mathcal{R}_+ |_3\rangle &= |_1\rangle \\ \mathcal{R}_+ |^1\rangle &= |^2\rangle; & \mathcal{R}_+ |^2\rangle &= |^3\rangle; & \mathcal{R}_+ |^3\rangle &= |^1\rangle \\ \mathcal{R}_- |_1\rangle &= |_3\rangle; & \mathcal{R}_- |_2\rangle &= |_1\rangle; & \mathcal{R}_- |_3\rangle &= |_2\rangle \\ \mathcal{R}_- |^1\rangle &= |^3\rangle; & \mathcal{R}_- |^2\rangle &= |^1\rangle; & \mathcal{R}_- |^3\rangle &= |^2\rangle \end{aligned} \quad (2.21.1189)$$

Dato quindi un generico vettore¹¹⁵ di $R \binom{m}{n}$

$$|vet\rangle \equiv \left| \begin{matrix} (\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{c}) \\ (a), (b), (c) \end{matrix} \right\rangle \quad \text{con } a + b + c = n; \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m \quad (2.21.1190)$$

le rotazioni \mathcal{R}_\pm lo trasformano, rispettivamente, nei vettori

$$\mathcal{R}_+ |vet\rangle = \left| \begin{matrix} (\bar{c}), (\bar{a}), (\bar{b}) \\ (c), (a), (b) \end{matrix} \right\rangle; \quad \mathcal{R}_- |vet\rangle = \left| \begin{matrix} (\bar{b}), (\bar{c}), (\bar{a}) \\ (b), (c), (a) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1191)$$

Riguardo ai pesi, abbiamo

$$\begin{aligned} |vet\rangle: \mathbf{h} &= \left(\frac{a - \bar{a}}{2} - \frac{b - \bar{b}}{2}, \frac{a - \bar{a}}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b - \bar{b}}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} + (c - \bar{c}) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.21.1192)$$

da cui

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} = \alpha - \gamma \\ s_2 &= \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} = \gamma - \beta \end{aligned} \quad (2.21.1193)$$

Chiaramente, quanto ai vettori $\mathcal{R}_\pm |vet\rangle$, vista la (2.21.1191), con ovvio significato di simboli abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \gamma; & \beta_+ &= \alpha; & \gamma_+ &= \beta \\ \alpha_- &= \beta; & \beta_- &= \gamma; & \gamma_- &= \alpha \end{aligned} \quad (2.21.1194)$$

e dunque

$$\begin{aligned} s_1^+ &= \alpha_+ - \gamma_+ = \gamma - \beta = s_2 \\ s_2^+ &= \gamma_+ - \beta_+ = \beta - \alpha = -(s_1 + s_2) \\ s_1^- &= \alpha_- - \gamma_- = \beta - \alpha = -(s_1 + s_2) \\ s_2^- &= \gamma_- - \beta_- = \alpha - \gamma = s_1 \end{aligned} \quad (2.21.1195)$$

per cui, vista la (2.21.1192), risulta

$$\mathbf{h}_+ \equiv \left(\frac{\alpha_+ - \beta_+}{2}, \frac{\alpha_+ + \beta_+ - 2\gamma_+}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \left(\frac{\gamma - \alpha}{2}, \frac{\gamma + \alpha - 2\beta}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1196)$$

$$\mathbf{h}_- \equiv \left(\frac{\alpha_- - \beta_-}{2}, \frac{\alpha_- + \beta_- - 2\gamma_-}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \left(\frac{\beta - \gamma}{2}, \frac{\beta + \gamma - 2\alpha}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1197)$$

Evidentemente questi pesi possono essere ricavati anche direttamente, attraverso la relazione

$$\mathbf{h}_\pm = \mathcal{R}_\pm \mathbf{h} \equiv \mathcal{R}_\pm \left(\begin{matrix} \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix} \right) \quad (2.21.1198)$$

¹¹⁵ Espliciteremo solo il numero dei diversi indici 1, 2, 3 e non la loro posizione relativa: per quanto riguarda il peso associato al vettore questo, naturalmente, è sufficiente.

Un caso interessante è quello del vettore corrispondente al peso \mathbf{h}_M ovvero al vettore

$$|\mathbf{h}_M \rangle = \left| \begin{matrix} (0), (m), (0) \\ (n), (0), (0) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1199)$$

che, come sappiamo, è il capostipite da cui sono ricavati tutti i vettori della rappresentazione irriducibile (n, m) e per il quale abbiamo

$$s_1 = n; \quad s_2 = m; \quad \alpha = n, \quad \beta = -m, \quad \gamma = 0 \quad (2.21.1200)$$

$$\mathbf{h}_M = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \left(\frac{n + m}{2}, \frac{n - m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1201)$$

Venendo ora ai due vettori che si originano da questo per rotazione di $\pm 120^\circ$, abbiamo

• $|\mathbf{h}_M^+ \rangle$:

$$|\mathbf{h}_M^+ \rangle \equiv \mathcal{R}_+ \left| \begin{matrix} (0), (m), (0) \\ (n), (0), (0) \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} (0), (0), (m) \\ (0), (n), (0) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1202)$$

per il quale risulta

$$s_1^+ = s_2 = m; \quad s_2^+ = -s_1 - s_2 = -n - m; \quad \alpha_+ = 0, \quad \beta_+ = n, \quad \gamma_+ = -m \quad (2.21.1203)$$

$$\mathbf{h}_M^+ = \left(\frac{\alpha_+ - \beta_+}{2}, \frac{\alpha_+ + \beta_+ - 2\gamma_+}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \left(-\frac{n}{2}, \frac{n + 2m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1204)$$

• $|\mathbf{h}_M^- \rangle$:

$$|\mathbf{h}_M^- \rangle \equiv \mathcal{R}_- \left| \begin{matrix} (0), (m), (0) \\ (n), (0), (0) \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} (m), (0), (0) \\ (0), (0), (n) \end{matrix} \right\rangle \quad (2.21.1205)$$

per il quale risulta

$$s_1^- = -s_1 - s_2 = -n - m; \quad s_2^- = s_1 = n; \quad \alpha_- = -m, \quad \beta_- = 0, \quad \gamma_- = n \quad (2.21.1206)$$

$$\mathbf{h}_M^- = \left(\frac{\alpha_- - \beta_-}{2}, \frac{\alpha_- + \beta_- - 2\gamma_-}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \left(-\frac{m}{2}, \frac{-m - 2n}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1207)$$

Ricordiamo che, riguardo ad $|\mathbf{h}_M \rangle$, abbiamo

$$\begin{aligned} I_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= H_1 |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{n+m}{2} |\mathbf{h}_M \rangle & \Rightarrow I &= \frac{n+m}{2} \\ U_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \frac{s_1}{2} |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{n}{2} |\mathbf{h}_M \rangle & \Rightarrow U &= \frac{n}{2} \\ V_3 |\mathbf{h}_M \rangle &= \frac{s_2}{2} |\mathbf{h}_M \rangle = \frac{m}{2} |\mathbf{h}_M \rangle & \Rightarrow V &= \frac{m}{2} \end{aligned} \quad (2.21.1208)$$

dove I, U, V sono gli spin delle rappresentazioni irriducibili di SU_2 di cui $|\mathbf{h}_M \rangle$ è capostipite superiore.

Venendo al vettore $|\mathbf{h}_M^+\rangle$, esso si trova al vertice superiore sinistro dell'esagono ed è caratterizzato da

$$\begin{aligned} I_3|\mathbf{h}_M^+\rangle &= H_1|\mathbf{h}_M^+\rangle = -\frac{n}{2}|\mathbf{h}_M^+\rangle & \Rightarrow I = \frac{n}{2} \\ U_3|\mathbf{h}_M^+\rangle &= \frac{s_1^+}{2}|\mathbf{h}_M^+\rangle = \frac{m}{2}|\mathbf{h}_M^+\rangle & \Rightarrow U = \frac{m}{2} \\ V_3|\mathbf{h}_M^+\rangle &= \frac{s_2^+}{2}|\mathbf{h}_M^+\rangle = \frac{-n-m}{2}|\mathbf{h}_M^+\rangle & \Rightarrow V = \frac{n+m}{2} \end{aligned} \quad (2.21.1209)$$

Come si vede, esso è capostipite inferiore della rappresentazione di I -spin corrispondente a $I = \frac{n}{2}$, mentre è capostipite superiore per le altre due.

Riguardo infine al vettore $|\mathbf{h}_M^-\rangle$, esso si trova al vertice inferiore sinistro dell'esagono ed è caratterizzato da

$$\begin{aligned} I_3|\mathbf{h}_M^-\rangle &= H_1|\mathbf{h}_M^-\rangle = -\frac{m}{2}|\mathbf{h}_M^-\rangle & \Rightarrow I = \frac{m}{2} \\ U_3|\mathbf{h}_M^-\rangle &= \frac{s_1^-}{2}|\mathbf{h}_M^-\rangle = \frac{-n-m}{2}|\mathbf{h}_M^-\rangle & \Rightarrow U = \frac{n+m}{2} \\ V_3|\mathbf{h}_M^-\rangle &= \frac{s_2^-}{2}|\mathbf{h}_M^-\rangle = \frac{n}{2}|\mathbf{h}_M^-\rangle & \Rightarrow V = \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (2.21.1210)$$

Come si vede, esso è capostipite inferiore sia della rappresentazione di I -spin corrispondente a $I = \frac{m}{2}$ che di quella di U -spin corrispondente a $\frac{n+m}{2}$, mentre è capostipite superiore per l'altra.

Dovrebbe risultare piuttosto chiaro che ciascuno dei vettori $|\mathbf{h}_M^\pm\rangle$ potrebbe fungere da capostipite della rappresentazione (n, m) di SU_3 . La scelta di usare $|\mathbf{h}_M\rangle$ è dettata unicamente dalla maggior facilità circa la sua individuazione.

Ma torniamo adesso al layer esagonale $L = r + 1$, per il quale abbiamo dimostrato che la molteplicità vale L per tutti i pesi presenti sui due rami che si originano in \mathbf{h}_r

$$\mathbf{h}_r = \left(\frac{n+m-2r}{2}, \frac{n-m}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right); \quad 0 \leq r \leq m-1 \quad (2.21.1211)$$

Per dimostrare che questa proprietà della molteplicità vale su tutto il layer, un modo è quello di considerare, per esempio, i due rami che si originano¹¹⁶ in \mathbf{h}_r^+ , dove abbiamo che

$$\mathbf{h}_r^+ \equiv \mathcal{R}_+ \mathbf{h}_r = \left(\frac{r-n}{2}, \frac{n+2m-3r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1212)$$

per il quale risulta

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{r-n}{2} + \frac{n+2m-3r}{2} = m-r \\ s_2 &= \frac{r-n}{2} - \frac{n+2m-3r}{2} = 2r-n-m \end{aligned} \quad (2.21.1213)$$

¹¹⁶Data la simmetria di rotazione di $\pm 120^\circ$ dello spettro, è evidente che $|\mathbf{h}_M^\pm\rangle$ sono pesi che appartengono al layer L .

e quindi

$$\begin{cases} a - \bar{a} \equiv \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} = \frac{n-m+2m-2r+2r-n-m}{3} = 0 \\ b - \bar{b} \equiv \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} = \frac{n-m-m+r-4r+2n+2m}{3} = n-r \\ c - \bar{c} \equiv \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} = \frac{n-m-m+r+2r-n-m}{3} = r-m \end{cases} \quad (2.21.1214)$$

Si osservi che, come dev'essere, questi valori di α, β, γ coincidono rispettivamente con quelli di γ, α, β relativi a \mathbf{h}_r .

Consideriamo dunque i pesi distribuiti sul ramo orizzontale del layer L fra \mathbf{h}_r^+ e l'estremo superiore del ramo ascendente che origina in \mathbf{h}_r , cioè \mathbf{h}_{rv} con $v = m - r \equiv \tilde{v}$, ovvero (cfr.(2.21.1182))

$$\mathbf{h}_{r\tilde{v}} = \left(\frac{n-r}{2}, \frac{n+2m-3r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.21.1215)$$

Essi sono i seguenti

$$\mathbf{h}_{rj}^+ \equiv \mathbf{h}_r^+ + j \mathbf{a} = \left(\frac{r-n+2j}{2}, \frac{n+2m-3r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right); \quad 0 \leq j \leq n-r \quad (2.21.1216)$$

per i quali

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{r-n+2j}{2} + \frac{n+2m-3r}{2} = m-r+j \\ s_2 &= \frac{r-n+2j}{2} - \frac{n+2m-3r}{2} = 2r-n-m+j \end{aligned} \quad (2.21.1217)$$

e quindi

$$\begin{cases} a - \bar{a} \equiv \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} = \frac{n-m-2r+2m+2j+2r-n-m+j}{3} = j \\ b - \bar{b} \equiv \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} = \frac{n-m+r-m-j-4r+2n+2m-2j}{3} = n-r-j \\ c - \bar{c} \equiv \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} = \frac{n-m+r-m-j+2r-n-m+j}{3} = r-m \end{cases} \quad (2.21.1218)$$

per cui le condizioni da soddisfare, in questo caso, sono

$$\begin{cases} a + b + c & = n \\ \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} & = m \\ \alpha = a - \bar{a} & = j \\ \beta = b - \bar{b} & = n-r-j \\ \gamma = c - \bar{c} & = r-m \\ n \geq m > 0 \\ 0 \leq r \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n-r \end{cases} \quad (2.21.1219)$$

Basta un confronto con quanto ottenuto per i pesi nel primo tratto discendente considerato (cfr.(2.21.1180)) per renderci conto che, pur di scambiare la variabile muta j con u e ruotare la terna $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\gamma, \alpha, \beta)$, le due situazioni sono sovrapponibili e quindi possiamo senz'altro dire che anche in

questo tratto di layer la molteplicità è L .

L'altro tratto che origina in \mathbf{h}_r^+ è equivalente al tratto ascendente che origina in \mathbf{h}_r e lo stesso procedimento si può applicare ai due tratti che originano in \mathbf{h}_r^- per cui **risulta così completata la dimostrazione che la molteplicità sul layer L vale L .**

Per concludere la trattazione del problema, resta solo da dimostrare che la molteplicità relativa ai pesi che si trovano nel triangolo equilatero che ha come estremo destro il peso $\mathbf{h}_m = \mathbf{h}_M - m\mathbf{a}$ e per tutti uguale e vale $m + 1 \equiv T$.

Una parametrizzazione di questi pesi "triangolari" è la seguente

$$\mathbf{h}_{xy}^m = \mathbf{h}_m - x\mathbf{a} - y\mathbf{b}; \quad \text{dove } x, y \geq 0; \quad x + y \leq n - m \quad (2.21.1220)$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{xy}^m &= \mathbf{h}_M - m\mathbf{a} - x\mathbf{a} - y\mathbf{b} = \\ &= \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - (m+x, 0) - y \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{n+m-2m-2x-y}{2}, \frac{n-m-3y}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{n-m-2x-y}{2}, \frac{n-m-3y}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.21.1221)$$

e dunque

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{n-m-2x-y}{2} + \frac{n-m-3y}{2} = n - m - x - 2y \\ s_2 &= \frac{n-m-2x-y}{2} - \frac{n-m-3y}{2} = -x + y \end{aligned} \quad (2.21.1222)$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(n-m)+2s_1+s_2}{3} = \frac{n-m+2n-2m-2x-4y-x+y}{3} = n - m - x - y \\ \beta = \frac{(n-m)-s_1-2s_2}{3} = \frac{n-m-n+m+x+2y+2x-2y}{3} = x \\ \gamma = \frac{(n-m)-s_1+s_2}{3} = \frac{n-m-n+m+x+2y-x+y}{3} = y \end{cases} \quad (2.21.1223)$$

con le condizioni seguenti

$$\begin{cases} a + b + c &= n \\ \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} &= m \\ \alpha = a - \bar{a} &= n - m - x - y \\ \beta = b - \bar{b} &= x \\ \gamma = c - \bar{c} &= y \\ n \geq m > 0 \\ x, y \geq 0 \\ 0 \leq x + y \leq n - m \end{cases} \quad (2.21.1224)$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
 \text{essendo } \beta &= b - \bar{b} = x \text{ e } \bar{b} \geq 0 \Rightarrow b \geq x \\
 \text{essendo } \gamma &= c - \bar{c} = y \text{ e } \bar{c} \geq 0 \Rightarrow c \geq y \\
 \text{poiche' } a + b + c &= n \Rightarrow a = n - b - c \leq n - x - y
 \end{aligned}
 \tag{2.21.1225}$$

I possibili valori di a, b, c e $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ che soddisfano le condizioni di cui sopra sono riportati nella tabella (cfr.(2.22)) che segue

Casi possibili								
N	a	\bar{a}	$b + c$	b	\bar{b}	c	\bar{c}	vettore
1	$n - x - y$	m	$x + y$	x	0	y	0	$\left\langle \begin{matrix} (m), (0), (0) \\ (n-x-y), (x), (y) \end{matrix} \right\rangle$
2	$n - x - y - 1$	$m - 1$	$x + y + 1$	$x + 1$	1	y	0	$\left\langle \begin{matrix} (m-1), (1), (0) \\ (n-x-y-1), (x+1), (y) \end{matrix} \right\rangle$
				x	0	$y + 1$	1	$\left\langle \begin{matrix} (m-1), (0), (1) \\ (n-x-y-1), (x), (y+1) \end{matrix} \right\rangle$
3	$n - x - y - 2$	$m - 2$	$x + y + 2$	$x + 2$	2	y	0	$\left\langle \begin{matrix} (m-2), (2), (0) \\ (n-x-y-2), (x+2), (y) \end{matrix} \right\rangle$
				$x + 1$	1	$y + 1$	1	$\left\langle \begin{matrix} (m-2), (1), (1) \\ (n-x-y-2), (x+1), (y+1) \end{matrix} \right\rangle$
				x	0	$y + 2$	2	$\left\langle \begin{matrix} (m-2), (0), (2) \\ (n-x-y-2), (x), (y+2) \end{matrix} \right\rangle$
...
$m + 1$	$n - x - y - m$	0	$x + y + m$	$x + m$	m	y	0	$\left\langle \begin{matrix} (0), (m), (0) \\ (n-x-y-m), (x+m), (y) \end{matrix} \right\rangle$
				$x + m - 1$	$m - 1$	$y + 1$	1	$\left\langle \begin{matrix} (0), (m-1), (1) \\ (n-x-y-m), (x+m-1), (y+1) \end{matrix} \right\rangle$
			
				x	0	$y + m$	m	$\left\langle \begin{matrix} (0), (0), (m) \\ (n-x-y-m), (x), (y+m) \end{matrix} \right\rangle$

Tabella 2.22:

Dalla tabella di può quindi concludere che i vettori di $R \binom{m}{n}$ completamente simmetrici che soddisfano le condizioni richieste risultano in numero di

$$\frac{(m + 1)(m + 2)}{2} = \frac{T(T + 1)}{2}
 \tag{2.21.1226}$$

Occorre però ancora applicare la condizione sulla traccia che, al solito, riduce il numero dato dalla (2.21.1226) poiché, come si è visto nei casi trattati in precedenza, questa condizione determina $\frac{(T-1)T}{2}$ vincoli e dunque porta a un numero di soluzioni dato da

$$\frac{T(T + 1)}{2} - \frac{(T - 1)T}{2} = T
 \tag{2.21.1227}$$

Possiamo quindi concludere che la molteplicità per i pesi che appartengono al triangolo equilatero interno alla rappresentazione (n, m) vale per tutti $T = m + 1$.

2.22 La dimensione della (n, m)

Partendo dai risultati ottenuti per la molteplicità, possiamo adesso determinare la *dimensione* della rappresentazione irriducibile (n, m) .

Procederemo assumendo $n \geq m$, ricordando comunque che le (n, m) e (m, n) descrivono rappresentazioni coniugate una dell'altra e quindi hanno la stessa dimensione.

Consideriamo i layers "esagonali".

Come si è visto, essi vanno da $L = 1$ a $L = m$ e i pesi loro appartenenti hanno molteplicità L . E' facile verificare che il numero di pesi che fanno parte del layer L può essere scritto come

$$N_L = 3(n + m - 2L + 2) \quad (2.22.1228)$$

Abbiamo quindi che il contributo alla dimensione della rappresentazione proveniente dai layers "esagonali" vale

$$\begin{aligned} D_E &= \sum_{L=1}^m N_L \times L = \sum_{L=1}^m 3(n + m - 2L + 2)L = \\ &= 3(n + m + 2) \sum_{L=1}^m L - 6 \sum_{L=1}^m L^2 = \\ &= 3(n + m + 2) \frac{m(m+1)}{2} - 6 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \\ &= \frac{m(m+1)}{2} [3(n + m + 2) - 2(2m + 1)] = \\ &= \frac{m(m+1)}{2} (3n - m + 4) \end{aligned} \quad (2.22.1229)$$

Veniamo alla parte triangolare.

come abbiamo visto, tutti i pesi che appartengono alla struttura triangolare hanno molteplicità $m+1$. E' facile verificare che il lato del triangolo contiene $n - m + 1$ pesi e quindi il loro numero complessivo è

$$N_T = \frac{(n - m + 1)(n - m + 2)}{2} \quad (2.22.1230)$$

e quindi il loro contributo alla dimensione della rappresentazione vale

$$D_T = N_T \times (m + 1) = \frac{(n - m + 1)(n - m + 2)}{2} (m + 1) \quad (2.22.1231)$$

La dimensione della rappresentazione (n, m) è data dalla somma di D_E con D_T e dunque vale

$$\begin{aligned} D(n, m) &= D_E + D_T = \frac{m(m+1)}{2} (3n - m + 4) + \frac{(n - m + 1)(n - m + 2)}{2} (m + 1) = \\ &= \frac{m+1}{2} [m(3n - m + 4) + (n - m + 1)(n - m + 2)] \end{aligned} \quad (2.22.1232)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} & m(3n - m + 4) + (n - m + 1)(n - m + 2) = \\ &= 3nm - m^2 + 4m + n^2 - nm + 2n - nm + m^2 - 2m + n - m + 2 = \\ &= n^2 + nm + 3n + m + 2 = (n + 1)(n + m + 2) \end{aligned} \quad (2.22.1233)$$

per cui possiamo infine concludere che

$$D(n, m) = \frac{(n + 1)(m + 1)(n + m + 2)}{2} \quad (2.22.1234)$$

Si osservi che, come già osservato, per le rappresentazioni triangolari $(n, 0)$, otteniamo

$$D(n, 0) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \quad (2.22.1235)$$

mentre per le rappresentazioni esagonali autoconiugate, nelle quali $n = m$ come nel caso dell'ottetto, si ha

$$D(n, n) = \frac{(n + 1)(n + 1)(2n + 2)}{2} = (n + 1)^3 \quad (2.22.1236)$$

Verifichiamo infine che la rappresentazione (n, m) è fatta da tutti e soli i vettori della rappresentazione $R(n)$ che soddisfano le condizioni $P1$ e $P2$ cioè sono completamente simmetriche e hanno il tensore associato con traccia nulla.

Come sappiamo, queste due condizioni sono necessarie.

Vediamo ora che sono anche sufficienti.

Determiniamo a questo scopo la dimensione $\tilde{D}(n, m)$ dello spazio fatto dai vettori che soddisfano $P1$ e $P2$ e verifichiamo che questa è proprio $D(n, m)$: poiché lo spazio dove agisce la rappresentazione (n, m) è fatto da vettori che soddisfano $P1$ e $P2$, se le due dimensioni coincidono i due spazi devono coincidere.

Iniziamo determinando la dimensione dello spazio dei vettori di $R(n)$ completamente simmetrici.

Ciascuno di questi vettori sarà del tipo $\left\langle \begin{matrix} (\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{c}) \\ (a), (b), (c) \end{matrix} \right\rangle$ dove $a + b + c = n$ e $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = m$. Non serve precisare l'ordinamento fra gli indici perché stiamo assumendo completa simmetria. Quanti sono questi vettori?

Iniziamo considerando gli indici controvarianti a, b, c di cui possiamo solo dire che devono essere non negativi e avere somma uguale a n .

Per capire quante possono essere le scelte diverse, immaginiamo di disporre di n cubetti uguali e di due pareti mobili, quindi di un totale di $n + 2$ oggetti. Ogni disposizione di questi oggetti individuerà una possibile scelta di a, b, c se conveniamo che a sia il numero di cubetti che precedono la prima parete, b il numero di cubetti fra le due pareti e c il numero di quelli dopo la seconda

parete. Queste disposizioni sono $(n+2)!$. Però le permutazioni fra cubetti (che sono $n!$) e fra pareti (che sono $2!$) conducono agli stessi valori di a, b, c e dunque il numero di possibili scelte differenti sarà dato da

$$N_n = \frac{(n+2)!}{n! 2!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (2.22.1237)$$

Lo stesso vale per gli indici covarianti $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, per cui avremo

$$N_m = \frac{(m+2)!}{m! 2!} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad (2.22.1238)$$

Poiché i due tipi di indici sono indipendenti fra loro, il numero di possibili vettori completamente simmetrici sia nella parte controvariante che covariante sarà dato da

$$N = N_n \times N_m = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad (2.22.1239)$$

Imponiamo ora la condizione sulla traccia. Riguardo alla parte controvariante, come abbiamo avuto modo di vedere in varie occasioni, il numero di vincoli che si originano da questa condizione è N_{n-1} e lo stesso per gli indici covarianti per cui la dimensione cercata è

$$\begin{aligned} \tilde{D}(n, m) &= N_n \times N_m - N_{n-1} \times N_{m-1} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(n)(n+1)}{2} \frac{(m)(m+1)}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(m+1)}{4} [(n+2)(m+2) - nm] = \\ &= \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2} \end{aligned} \quad (2.22.1240)$$

che coincide con $D(n, m)$ confermando che la rappresentazione irriducibile (n, m) agisce nello spazio vettoriale fatto da tutti e soli i vettori appartenenti alla rappresentazione $R\binom{m}{n}$ che sono completamente simmetrici nella parte controvariante e covariante e definiscono un tensore con traccia nulla.

Concludiamo riportando il numero di pesi $\mathcal{N}(n, m)$ che compaiono nello spettro della rappresentazione (n, m) , a prescindere dalla molteplicità a essi associata.

Evidentemente (cfr.(2.22.1228) e (2.22.1230)) risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(n, m) &= N_L + N_T = \sum_{L=1}^m 3(n+m+2-L) + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} = \\ &= 3 \sum_{L=1}^m (n+m+2) - 6 \sum_{L=1}^m L + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} = \\ &= 3m(n+m+2) - 3m(m+1) + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} = \\ &= 3m(n+1) + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} \end{aligned} \quad (2.22.1241)$$