

LNF 15 giugno 2007

Le Simmetrie

Argomenti trattati:

- Introduzione
- dal qualitativo a quantitativo
- le simmetrie in Fisica



Enrico Iacopini

(iacopini@fi.infn.it)

Università e INFN Firenze



Qual è l'origine della parola e che cosa significava ?

La parola simmetria è di origine greca: $\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ che è composta da $\sigma\upsilon\nu$ (sin) e $\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ (metron) con il significato di “stessa misura”.

La parola “simmetria” esprimeva dunque originariamente un concetto legato a quello della commensurabilità, della proporzione, dell'armonia ...

Per i Greci, “simmetria” significava un armonico rapporto di proporzioni ed il termine era usato, principalmente, in Architettura.

Un'opera d'arte doveva avere una sua parte contenuta nel tutto un numero intero di volte.

La proporzionalità era infatti inscindibile dalla bellezza e dalla perfezione. (Addirittura essi inserivano qualche imperfezione nelle loro opere, per non creare invidia negli dei ...).

Tutti ricordiamo il grande “scandalo” rappresentato dalla incommensurabilità della diagonale del quadrato e del suo lato, cioè dall'esistenza dei numeri irrazionali, i.e. non esprimibili come rapporti (ratio) di interi.

...E ancora oggi, “irrazionale”, nel linguaggio comune, ha anche il significato di “assurdo”, “irragionevole”, “pazzesco”...

Esempi di simmetria nell'arte greca



Partenone

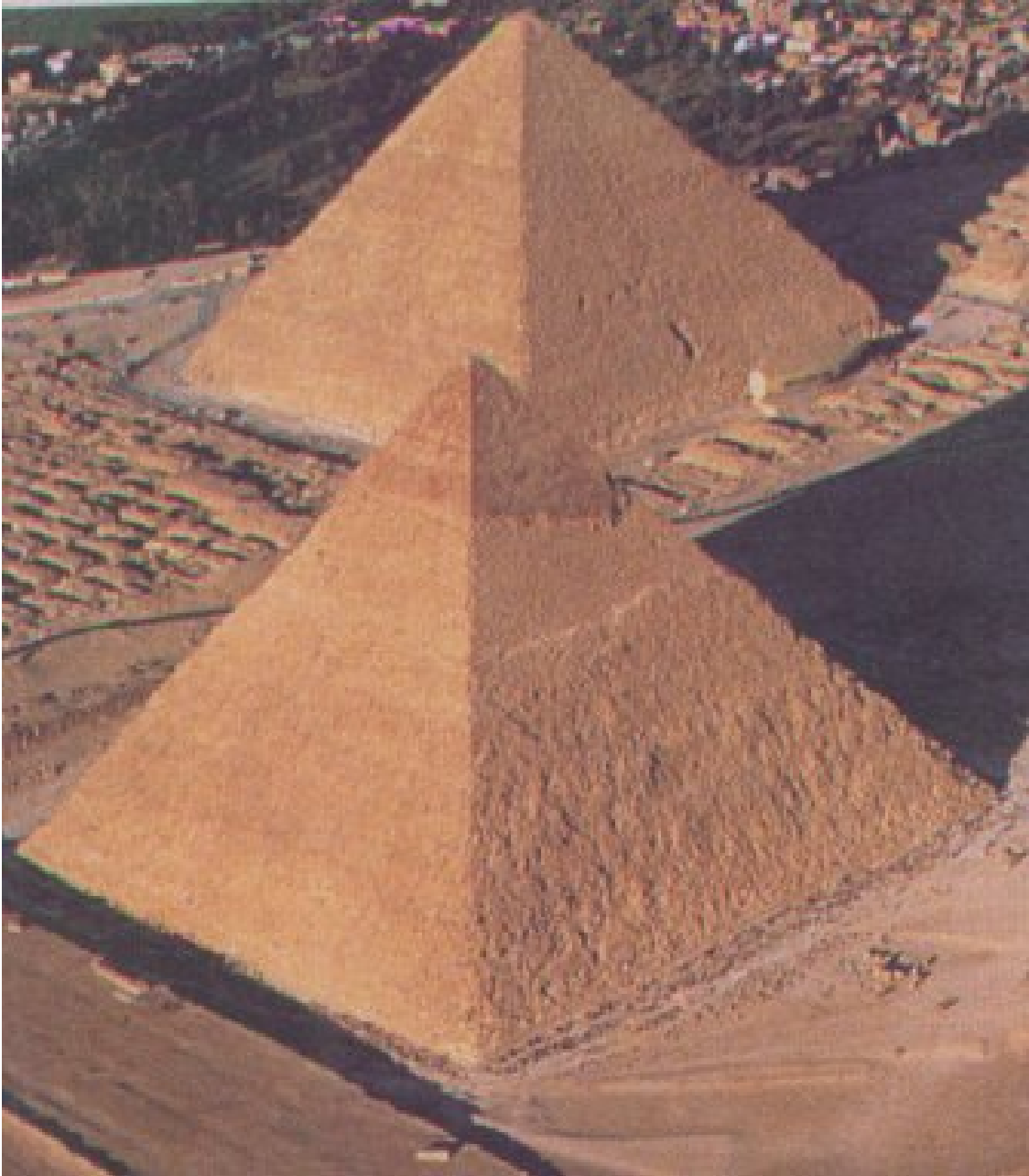


Venere
di Milo

... non sono in architettura, anche nella scultura

Simmetria $\equiv$ proporzione $\Rightarrow$ bellezza

... comunque non solo i Greci avevano a cuore la simmetria ...



**Piramidi della piana di Giza
(Cheope, Chefren, Micerino)**

Altri esempi più recenti di capolavori architettonici altamente simmetrici ...

Campanile di Giotto-Firenze



Duomo di Milano



... Anche se, va detto che, spesso una simmetria rotta è più interessante di una simmetria perfetta ...

Se la Torre di Pisa non pendesse ...
non sarebbe
"la torre pendente"
così nota e ammirata
in tutto il mondo !



La simmetria ci affascina ...

L'essere umano, dunque, è sempre stato affascinato dalla simmetria, intesa nel senso di proporzione e spesso sinonimo, appunto, di bellezza ...

... La simmetria ...
ma ne esiste una sola ?

Per es., nel caso del
volto umano, di quale
simmetria si tratta ?

Iniziamo dunque
con il darne una
definizione ...

La migliore che conosco è
quella data da Hermann Weyl:
si tratta di una definizione

operativa (cioè ci dice come si fa a capire se una cosa è simmetrica o no ...),
"Una entità possiede una simmetria, se c'è qualcosa che possiamo
fargli in modo che, dopo, che l'abbiamo fatta, l'entità continua ad
apparire esattamente come prima"

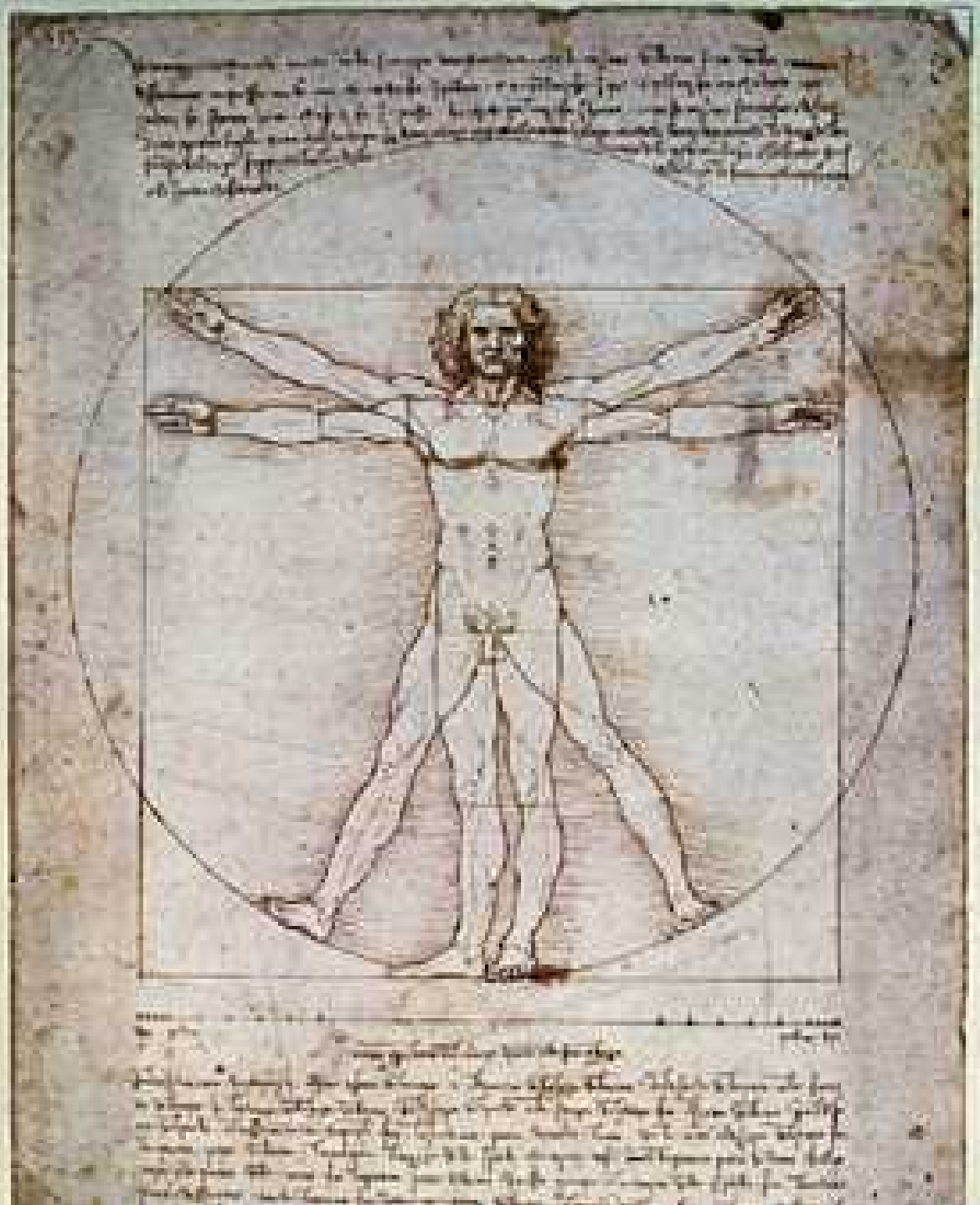


Antonia Liskova

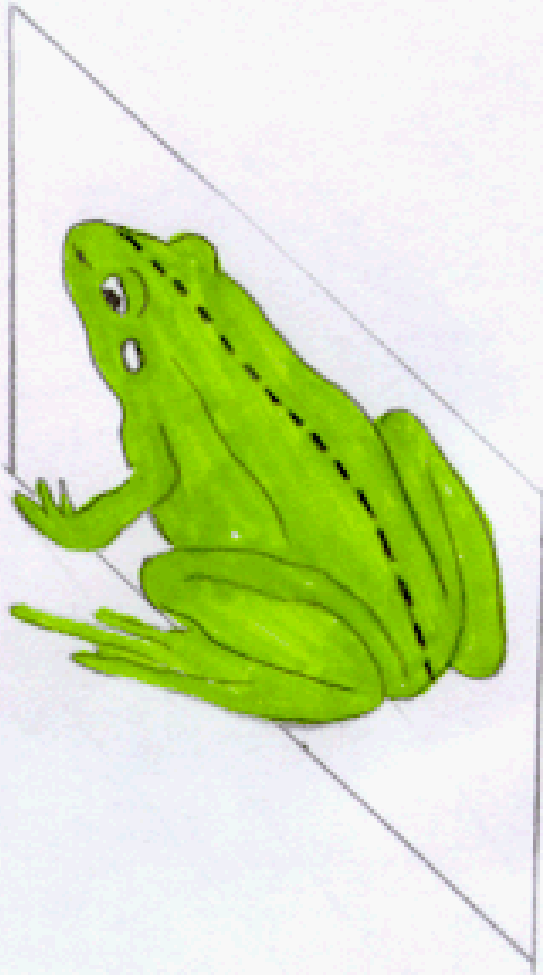
Nel caso del volto umano, si tratta della simmetria bilaterale

destra ↔ sinistra

... Nel caso dell'Uomo, non solo il volto, bensì tutto il corpo possiede esternamente la simmetria bilaterale (cosa non vera per quanto riguarda i suoi organi interni: il cuore è a sinistra, il fegato è a destra, etc...)



La simmetria bilaterale (chirale) è la più comune in Natura ...



Da $\chi\epsilon\iota\rho$ = mano:
La mano destra e sinistra
sono immagini speculari
una dell'altra ...



... E' così frequente che dobbiamo chiederci
come mai la Natura usa così frequentemente
questa simmetria ?

Forse, una spiegazione molto
prosaica può essere nel fatto
che, in questo modo, basta
metà del codice genetico per
descrivere il tutto ...

Paghi 1 e prendi 2

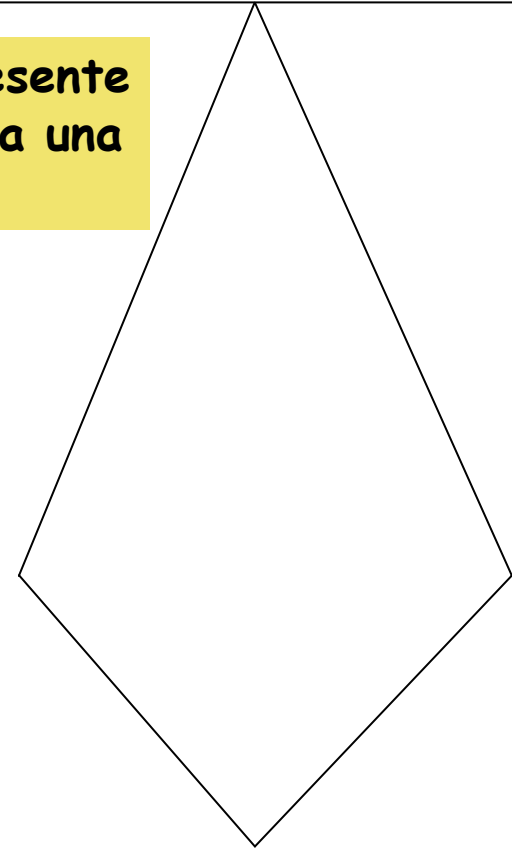
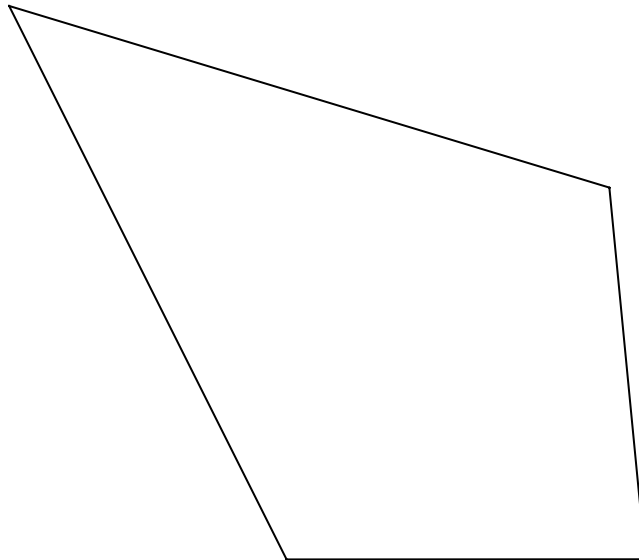
Curiosità: il nostro cervello e la simmetria

Il nostro cervello è specializzato nel riconoscere la simmetria bilaterale, dato appunto che in Natura essa è estremamente frequente.

Ma la riconosce sempre altrettanto bene ?

No ! ... dipende dalla posizione dell'asse di simmetria ...

... dopo tutto viviamo in un mondo dove è presente la gravità: nulla di strano che la verticale sia una direzione privilegiata dal nostro cervello ...



Curiosità: il nostro cervello e la simmetria

Anche nel caso di figure che possiedono la simmetria bilaterale, come il volto umano, se non sono orientate come ci aspettiamo che debbano essere, come, p.es. se sono ruotate di 180° (per la quale il volto, ovviamente, non è simmetrico...), abbiamo qualche difficoltà !



Comunque in Natura non esiste solo la simmetria bilaterale !
Esistono anche simmetrie più alte di quella ...

Il cristallo di neve, per esempio, possiede sì la simmetria bilaterale, ma questa risulta come conseguenza del fatto che esso possiede la simmetria esagonale, che appare come una simmetria "più grande" di quella bilaterale ...

Ma che vuol dire
"una simmetria
più grande" ?

E' giunto il momento di
passare dal qualitativo al
quantitativo ...



Ritorniamo alla definizione ...

Abbiamo visto la definizione di Weyl ...
Vediamo ora di precisarla meglio:

**Diremo che una simmetria è
una trasformazione
(o un insieme di trasformazioni)
che lascia un sistema uguale a
se stesso (invariante).**

Esempio:
una rotazione di 90° lascia uguale
a se stesso il quadrato (ovvio !).

La simmetria, però, va pensata
come **una trasformazione**,
svincolata quindi, in questo caso
dal quadrato; e come tale può
essere applicata anche a oggetti
diversi ... che possono risultare
o no invarianti ...



Il Gruppo

Da questa semplice idea legata all'invarianza di qualcosa sotto una trasformazione, nasce **uno strumento matematico potentissimo per descrivere le simmetrie stesse, cioè il concetto di gruppo**.

Consideriamo di nuovo le rotazioni del piano che lasciano invariato il quadrato: esse sono le rotazioni di 0° , 90° , 180° , 270° .

Questo insieme di quattro trasformazioni gode delle seguenti proprietà:

- i) La trasformazione identica appartiene all'insieme (0°);
- ii) La composizione successiva di due qualsiasi trasformazioni dell'insieme è ancora un elemento dell'insieme
(es.: $90^\circ + 180^\circ \rightarrow 270^\circ$; $180^\circ + 270^\circ \rightarrow 90^\circ$);
- iii) Per ogni trasformazione dell'insieme, ne esiste una che è in grado di "annullarla" (es. $90^\circ \rightarrow 270^\circ$; $180^\circ \rightarrow 180^\circ$; ...)

... e questi tre semplici assiomi definiscono un gruppo, ed accade che ogni simmetria individua un gruppo e viceversa !

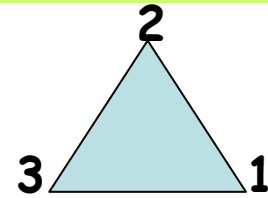
Una simmetria è "più grande" di un'altra quando il gruppo che essa definisce, contiene il gruppo definito dalla simmetria "più piccola" ...

Esempi di gruppi

Esistono **gruppi continui** e **gruppi discreti**. Gli elementi dei gruppi continui sono infiniti e sono descritti attraverso parametri reali, mentre i gruppi discreti hanno un numero finito di elementi.

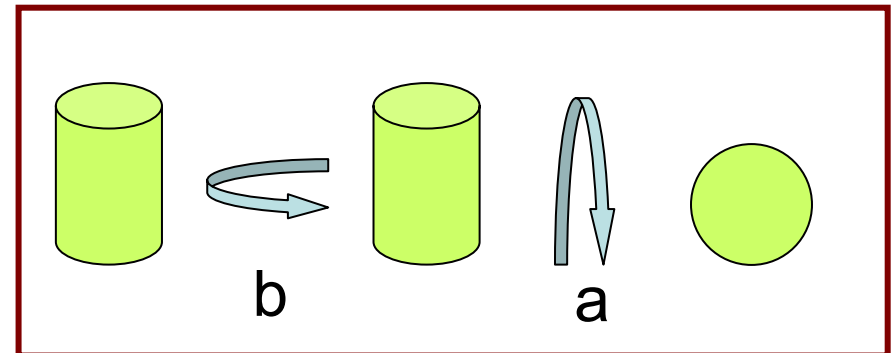
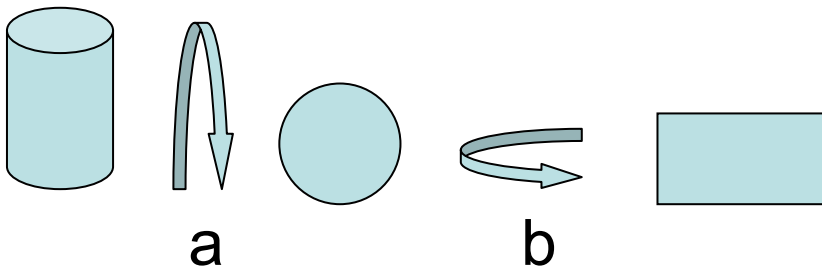
Le permutazioni cicliche di tre oggetti sono un gruppo discreto

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Le traslazioni in tre dimensioni sono un gruppo continuo e abeliano
 $T(\vec{b}) \cdot T(\vec{a}) = T(\vec{a} + \vec{b})$

Invece le rotazioni in tre dimensioni sono un gruppo continuo non abeliano !



... ma ritorniamo al concetto di simmetria ...

Vi ho detto che la simmetria ha condotto al concetto matematico di **Gruppo**, divenuto poi estremamente fecondo in ogni campo dove occorra trattare la simmetria in modo "quantitativo", ovvero in modo non semplicemente descrittivo ...

Ma come ci si è arrivati ?

Come quasi sempre accade nella Ricerca Pura (più propriamente nella ricerca cosiddetta "curiosity driven"),

si è arrivati all'idea di **Gruppo di simmetria** attraverso una strada apparentemente senza alcun legame con essa: è la strada legata al problema della risoluzione delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto...

L'avreste mai detto ?

Vediamo come è accaduto ...

Il problema dell'equazione di 5° grado

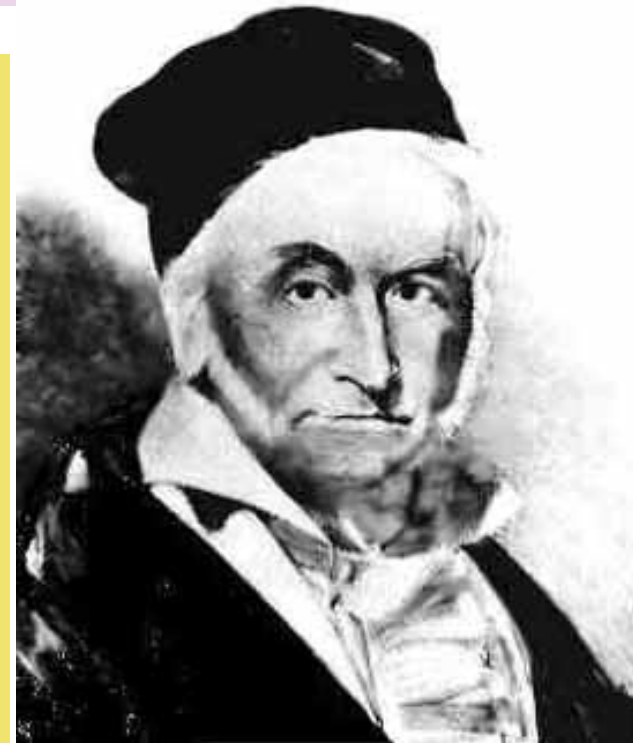
L'idea dell'incognita in una equazione di **primo grado** $ax + b = c$ era nota forse già in epoca babilonese, certamente in epoca egiziana (1650 aC, papiro di Ahmes) ed era noto anche il modo per risolverla, cioè $x = (c - b) / a$

Anche l'equazione di **secondo grado** $ax^2 + bx + c = 0$ si sapeva risolverla da tempo immemorabile, certamente da Diofanto (250 dC) in poi ... anche se allora venivano cercate soluzioni solo positive (i problemi erano pratici ed i numeri relativi non erano noti ...), per cui, talvolta, la soluzione non esisteva.

Invece, da Gauss in poi, sappiamo che **ogni equazione di grado n ammette sempre n soluzioni** (talvolta coincidenti) se le cerchiamo nel posto giusto, cioè fra i numeri complessi (1799 – tesi di dottorato) ...

E tutti ricordiamo la formula risolutiva per le soluzioni dell'equazione di II grado, data in termini dei coefficienti

dell'equazione:
$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Anche l'equazione di 3^o grado sappiamo risolverla ...

... ovvero sappiamo esprimere le soluzioni in termini dei coefficienti...

Ben prima di Gauss si conosceva la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Fu Scipione Dal Ferro, dell'Università di Bologna, a scoprire nel 1515 come risolverla (almeno nel caso particolare in cui il termine di secondo grado era assente).

Egli, però, non pubblicò il risultato che fu riscoperto da Niccolò Tartaglia nel 1535.

Nemmeno Tartaglia volle pubblicare la sua scoperta, per esserne unico depositario.

Sembra, però, che si sia poi convinto a dirlo a Gerolamo Cardano, che riuscì a estenderla al caso generale e la pubblicò.

Questo fatto portò ad una lite furibonda fra i due, perché pare che Tartaglia avesse fatto giurare a Cardano di non rivelare il metodo ...

L'equazione di 3^o grado: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$



Cardano



Tartaglia

$$x_{1,2,3} = -\frac{a}{3} + u - \frac{p}{3u}$$

$$\text{dove } u \equiv \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \quad \text{con} \quad p \equiv b - \frac{a^2}{3} \quad \text{e} \quad q \equiv \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

L'equazione di 4^o grado

Essa fu risolta, nella sua forma più generale, da un allievo di Cardano, **Ludovico Ferrari**, nel 1545, attraverso il **metodo della risolvente**, ovvero riconducendosi a risolvere una equazione di terzo grado, attraverso le cui soluzioni esprimere poi quelle dell'equazione di quarto grado ... risolvendo una ulteriore equazione (di secondo grado).

Adesso però non è importante avere la forma esplicita delle soluzioni in termini dei coefficienti dell'equazione (che è abbastanza complicata):

basti sapere che questo è possibile !

Il problema dell'equazione di 5° grado

L'appetito vien mangiando, dunque, risolto il quarto grado, si attaccò il quinto ...

Ma senza successo.

Nonostante poi Gauss avesse dimostrato che doveva avere, in generale, cinque soluzioni, il metodo per determinarle a partire dai coefficienti non si trovava.

Usando il metodo della risolvente, applicato con successo all'equazione di quarto grado, che aveva consentito di ridurla al terzo, ci si ridusse (Lagrange) al sesto !!!!

Furono Ruffini (1799) e Abel (1824) che, indipendentemente, conclusero che lo sforzo era vano.

Ma perché ?

Ed è qui che entra appunto la simmetria !

Il problema dell'equazione di 5° grado

Evariste Galois (1811-1832) affrontò il problema da un punto di vista nuovo: egli caratterizzò le equazioni studiando le **proprietà sotto permutazione delle variabili dei polinomi a coefficienti razionali**, i quali si annullavano su una combinazione opportuna delle soluzioni dell'equazione assegnata.

Sembra un discorso complicato, ma non lo è.

Prendiamo una generica equazione di secondo grado propria (dunque si può fare $a = 1$),

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad b, c \quad \text{razionali}$$

Essendo

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow b = -(x_1 + x_2), \quad c = x_1 x_2$$

ecco che ci sono almeno i due polinomi razionali

$$P_1(y, z) = y + z + b; \quad P_2(y, z) = yz - c$$

che si annullano sulle soluzioni dell'equazione ... ed essi sono **simmetrici**.



Il gruppo di Galois

L'idea di Galois fu di considerare **tutti i polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle radici** di un'equazione data.

Le permutazioni che lasciano invarianti i valori di questi polinomi quando calcolati sulle radici dell'equazione data costituiscono il Gruppo di Galois associato all'equazione.

A meno di casi particolari (soluzioni razionali), per una generica equazione di grado n , si dimostra che **questo gruppo coincide sempre con S_n** cioè con il gruppo delle permutazioni di n oggetti (le soluzioni, dell'equazione, appunto!).

Quindi, per es., nel caso della generica equazione di II grado, gli elementi del gruppo di Galois sono

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il gruppo di Galois

Vediamo ...

Iniziamo considerando, p.es. l'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$

le cui radici sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Un polinomio a coefficienti razionali che si annulla sulle radici dell'equazione è, per esempio $P(y, z) = z - 2$, come è ovvio dalla sostituzione $(y, z) \rightarrow (x_1, x_2)$

Però, se proviamo a permutare le radici, esso non resta nullo ... *per cui, in questo caso, il gruppo di Galois è fatto solo dalla trasformazione identica ...*

La ragione è che le radici dell'equazione data sono intere e dunque razionali.

Nel caso generico, però, le radici non sono razionali (c'è la radice di Δ ...) e quindi, affinché si possa scrivere un polinomio razionale che si annulli su di esse, occorre combinarle in modo da eliminare la parte irrazionale.

$$\Rightarrow P(y, z) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \equiv (y + z + b) \cdot Q_1(y, z) + (yz - c) \cdot Q_2(y, z)$$

Ed evidentemente lo scambio delle due soluzioni dell'equazione lascia invariato il valore del polinomio quando calcolato su di esse (non la sua forma ...) per cui, per la generica equazione di II grado, il gruppo di Galois è effettivamente S_2 .

Il teorema di Galois

Nel caso del terzo grado, il gruppo S_3 ha $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ elementi, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Le prime tre sono permutazioni cicliche e formano esse stesse un (sotto)gruppo che non ammette ulteriori sottogruppi, se non quello fatto dalla sola identità ... In termini di numero di elementi, abbiamo dunque:

Gruppo di Galois:	6 elementi
Sottogruppo ciclico	3 elementi
Sottosottogruppo ciclico	1 elemento

Galois dimostrò che le radici di un'equazione potevano essere espresse a partire dalle quattro operazioni ed estrazioni di radici su espressioni costruite con i suoi coefficienti, se e solo se **i rapporti fra il numero di elementi del gruppo che porta il suo nome e quello del suo sottogruppo (normale) massimale (e così a scendere) era un numero primo**.

Questo accade per S_2 , S_3 , S_4 , ma non accade da S_5 in poi: ecco perché non esiste la formula risolutiva delle equazioni di grado superiore al quarto !

E' tutta colpa della struttura dei gruppi di simmetria $S_{\geq 5}$!!!

Sperando di aver stimolato la vostra curiosità, vediamo ora l'aspetto che più ci interessa, cioè

Le Simmetrie in Fisica

...Abbiamo parlato di permutazioni: iniziamo allora studiando qualche situazione in cui questo gruppo è rilevante...

Quanti sono i modi di disporre la pallina nelle 37 (36+0) caselle della roulette ?

Ovviamente 37 ...

E nel caso si disponga di due palline uguali ?

Sono $36 \cdot 37 = 1332$?

No. Sono la metà, cioè

$$\binom{37}{2} = \frac{37!}{2! 35!} = \frac{37 \cdot 36}{2}$$

La ragione è che la permutazione fra le due palline identiche non cambia la disposizione delle stesse nella roulette ...



Venendo ora a cose attinenti le permutazioni e la Fisica ...

In MQ, lo stato di una particella è descritto attraverso una funzione della sua posizione (funzione d'onda) $\psi(x)$, il cui modulo quadro $|\psi(x)|^2$ fornisce la probabilità che la particella si trovi fra x ed $x+dx$.

... E se invece di una particella, abbiamo due particelle identiche ?

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x_1, x_2)$$

Però, siccome le due particelle sono identiche, lo scambio della prima con la seconda NON può avere conseguenze osservabili (**effetto di simmetria**), dunque lo scambio deve condurre allo stesso stato, cioè

$$\psi(x_2, x_1) = e^{i\phi} \psi(x_1, x_2)$$

Siccome applicando **due volte lo scambio** si torna, evidentemente, alla **situazione iniziale**, ne segue che può solo essere

$$\psi(x_2, x_1) = \pm \psi(x_1, x_2)$$

Accade che sistemi di particelle identiche con **spin intero** (bosoni) hanno funzioni d'onda **simmetriche** per scambio, mentre se lo **spin** è **semidispari** (fermioni), essi hanno funzioni d'onda **antisimmetriche**.

Una conseguenza importante: il principio di Pauli

L'elettrone ha spin $\frac{1}{2}$, dunque è un fermione. Supponiamo allora che

$\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$

siano due suoi stati possibili: se ne abbiamo due di elettroni e si trascura la loro interazione, lo stato dei due potrà dunque essere

$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1) \cdot \psi_2(x_2)$?

No. Perché abbiamo visto che la funzione d'onda deve essere antisimmetrica per scambio, dunque potrà solo essere piuttosto

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1) \cdot \psi_2(x_2) - \psi_1(x_2) \cdot \psi_2(x_1)]$$

E che succede se $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ ovvero se entrambi gli elettroni sono nello stesso stato ?

Evidentemente, in questo caso la funzione d'onda complessiva sarà nulla: due elettroni nello stesso stato (contando anche lo spin ...), infatti,

NON ci possono proprio stare ! E' il principio di Pauli.

Ed è grazie a questa proprietà di (anti)simmetria che gli elettroni nell'atomo non stanno tutti ammassati sul livello fondamentale, bensì si distribuiscono nel modo che sappiamo, fatto che sta alla base della chimica e **dunque della nostra stessa esistenza ...**

... Ma visto che vogliamo parlare di Simmetrie in Fisica, avendo introdotto il concetto di Simmetria, è ora opportuno domandarsi **che cosa si propone in generale la Fisica ?**

La risposta standard, come sapete, è:
la Fisica si occupa di determinare le leggi basilari della Natura

Bella frase, (... anche se un po' vaga, però ...)

Cerchiamo di capire meglio: è possibile (limitandoci alla Meccanica) che abbiate sentito parlare di

- ✓ Legge del moto rettilineo e uniforme,
- ✓ Legge del moto circolare uniforme,
- ✓ Legge del moto uniformemente accelerato,
- ✓ Legge del moto armonico,
- ✓ Legge dell'urto elastico,

...

Sono queste le leggi della Natura il cui studio costituisce lo scopo primario della Fisica ?

Fortunatamente NO !

Leggi Costituzionali e leggi ordinarie ...

Tutti conoscete la differenza fra Leggi Costituzionali e leggi ordinarie ...
Le prime fissano i principi di base, invece le seconde regolano le varie situazioni che possono determinarsi, ma sempre alla luce delle prime ...

Lo scopo della Fisica è di afferrare i principi fondamentali, le "leggi Costituzionali" della Natura, appunto !
(le leggi ordinarie, poi, servono solo a far soffrire gli studenti ...)

**Ed i Principi fondamentali sono quasi
sempre
basati su leggi di Simmetria !**

**...Riprendiamo l'esempio
della Meccanica ...**

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessât rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

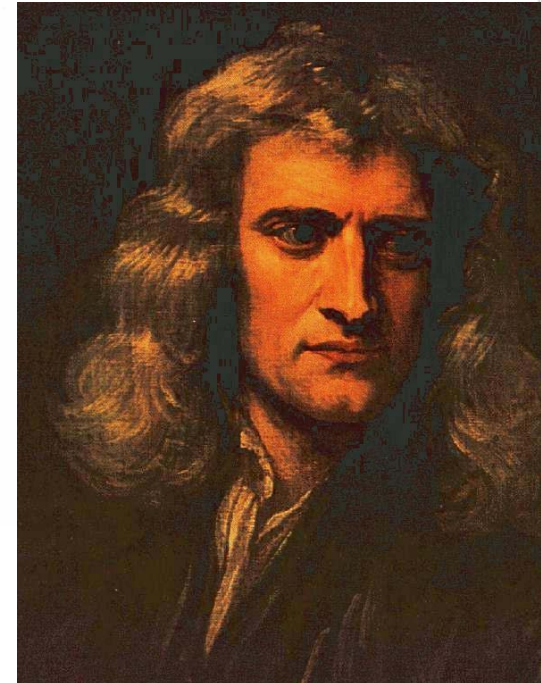
Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

[13]

Lex. III.

Actiōi contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocumque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutue) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis.) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.



E ben 2 leggi su 3 originano da principi di simmetria!

Il Primo Principio (inerzia)

Non esiste un riferimento assoluto: **due riferimenti in moto relativo a velocità costante sono equivalenti (principio di simmetria!) quanto alla descrizione dei fenomeni fisici**

(al tempo di Galileo e Newton, questo era inteso solo per i fenomeni meccanici, essendo gli altri ancora ignoti ... Oggi sappiamo che questo Principio è vero anche per tutti gli altri fenomeni fisici !).

Un osservatore in quiete in ciascuno di essi non può decidere quale dei due sia "realmente" in moto: l'avverbio "realmente" in questo contesto non ha senso !

La conseguenza della completa simmetria fra i riferimenti inerziali quanto alla descrizione delle leggi naturali è che esse devono restare formalmente identiche al cambiare del sistema di riferimento ...

Salviati:

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti.

Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma.



(1632)

DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STUDIO DI PISA.

*E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO*

GR.DVCA DI TOSCANA.

*Due ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due*

MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;

*Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali
tanto per l'una, quanto per l'altra parte.*



CON PRI

VILEGI.

IN FIRENZA, Per Gio: Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Il Terzo Principio (azione e reazione)

2 di 3 !

In un sistema isolato, per definizione, ci sono **solo forze interne**, che, per il Terzo Principio, daranno luogo ad una **forza risultante** necessariamente **nulla**.
Il **Centro di massa** del sistema, il cui moto è determinato dalla risultante (nulla) delle Forze sul sistema, **si sposterà dunque di moto rettilineo ed uniforme**:
la quantità di moto (impulso) $\vec{p} = M \vec{v}$ del sistema si conserva nel tempo !

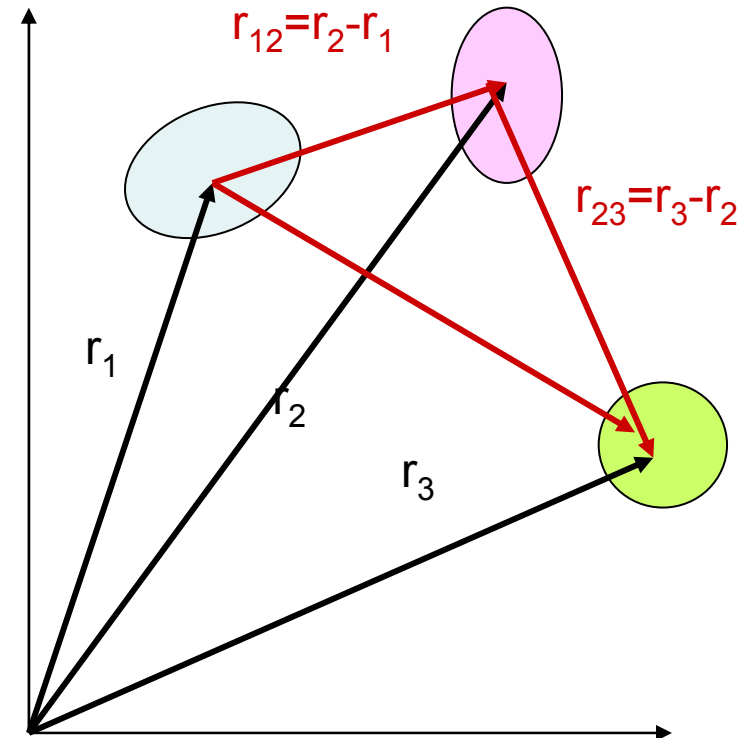
Ma dov'è qui la simmetria ?

Siccome le forze sono interne, esse dipenderanno solo dalle coordinate relative dei vari corpi che costituiscono il sistema.

La dinamica deve essere dunque indipendente dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento, cioè essa **risulta** necessariamente **invariante per traslazioni** del sistema.

... E cosa c'entra ora **l'invarianza per traslazioni con la conservazione dell'impulso** in un sistema isolato ?

Vedremo che c'entra eccome !
Ma occorre prima premettere qualche considerazione generale ...



Il teorema di Noether

Amalie Emmy Noether, allieva di David Hilbert a Gottinga, ha dimostrato (1918), che quando la dinamica di un sistema è invariante sotto un gruppo continuo di Simmetria, ad ogni parametro che descrive gli elementi del gruppo è associata una grandezza fisica che è conservata durante il moto.



Questo è un risultato di importanza fondamentale: **simmetrie e leggi di conservazione, due concetti molto amati dai fisici, sono intimamente collegate e seguono le une dalle altre !** Vediamo come ...

Il principio di minima azione

Ripartiamo dalle equazioni del moto di un punto materiale, le quali dicono che

$$\vec{F} \equiv -\frac{dV}{d\vec{x}} = m\vec{a} \equiv m\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{d(m\vec{v})}{dt} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\vec{v}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\vec{v}} + \frac{dV}{d\vec{x}} = 0$$

➡ la **dinamica** del sistema è interamente **descritta** dalle funzioni $T(v)$ (energia cinetica) e $V(r)$ (energia potenziale), anzi, **da una loro combinazione lineare** ben precisa che è detta "funzione di Lagrange" o **lagrangiana**, che è tutto quanto occorre conoscere per poter determinare le equazioni del moto !

$$L \equiv T - V \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\vec{v}} - \frac{dL}{d\vec{x}} = 0}$$



$m\vec{a}$



$\vec{F}$



... è la II legge della dinamica, espressa in forma diversa ...

Il principio di minima azione

Il punto importante è che si può dimostrare che, in questa forma, le equazioni del moto si ottengono imponendo il principio di minima azione alla lagrangiana, ovvero che la legge oraria della traiettoria fra due punti a e b dati è quella che rende minimo il seguente integrale (integrale d'azione)

$$\int_a^b L(\vec{x}, \vec{v}) dt = \min$$

L'integrale d'azione gode dunque della simmetria per cui, calcolato su una legge oraria $X(t)$ possibile, **esso è invariante per piccole variazioni della stessa legge oraria $X(t) \rightarrow X(t) + \delta X(t)$** (con a e b , ovviamente, fissi), **e si dimostra che questo è sufficiente per determinare le equazioni del moto !**

Conseguenze sulle proprietà stesse dello spazio e del tempo ...

Nel caso della particella libera ($V=0$), ovviamente, la funzione lagrangiana coinciderà con la sola espressione dell'energia cinetica, cioè

$$L = T = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Vediamo che cosa questo implica, dal punto di vista delle Simmetrie.

La lagrangiana non contiene le coordinate spaziali: la posizione assoluta è irrilevante. C'è dunque invarianza della legge di moto sotto il gruppo delle traslazioni. **Siccome la particella è libera, questa invarianza deve riflettere una proprietà dello spazio stesso $\longrightarrow$ lo spazio deve essere omogeneo. Le leggi della Fisica sono le stesse qui e su Andromeda ... !**

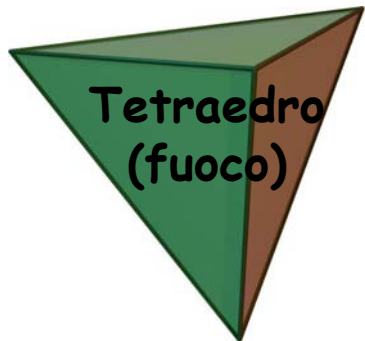
La lagrangiana non contiene neppure la coordinata temporale. dunque nemmeno l'origine sull'asse temporale deve avere rilevanza
 $\longrightarrow$ **anche il tempo deve essere omogeneo.**
Le leggi della Fisica ieri, oggi e domani non cambiano !

La lagrangiana è scalare per rotazioni: non esiste una direzione spaziale privilegiata $\longrightarrow$ **lo spazio deve essere anche isotropo.**
Le Leggi della Fisica non ammettono una direzione privilegiata assoluta !

Il bello è che, assumendo l'omogeneità dello tempo e dello spazio e l'isotropia di quest'ultimo, a meno di una costante moltiplicativa, si deve concludere che, in MC, la lagrangiana della particella libera non può che essere quella che abbiamo scritto !

La simmetria è infatti estremamente restrittiva per i vincoli che essa impone ... (e dunque è estremamente utile quando si voglia costruire una Teoria a partire da essa !)

Per avere un esempio delle restrizioni che essa impone ... ricordiamo che i poliedri regolari convessi (solidi platonici) sono solo cinque !

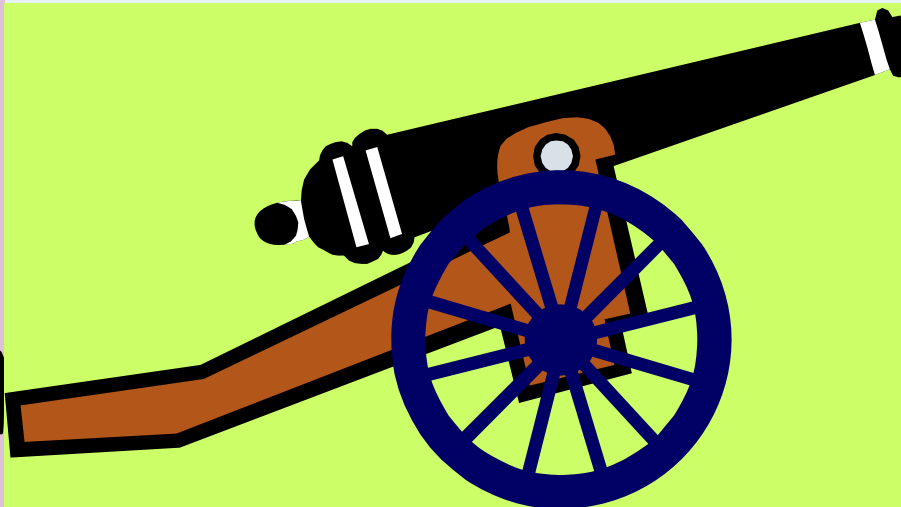
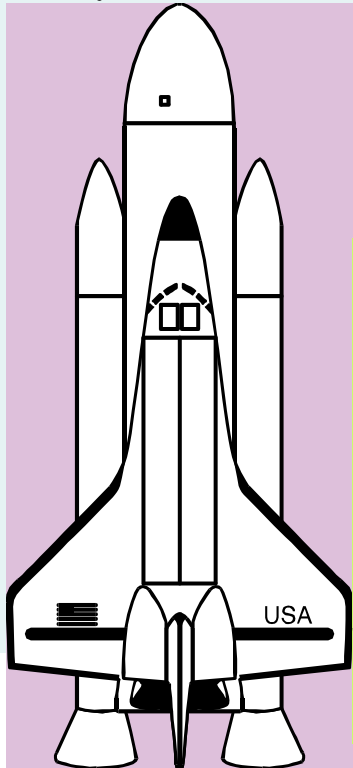


La conservazione dell'impulso per un sistema isolato (III principio ...) come conseguenza di una simmetria

Se il sistema fisico è isolato, l'omogeneità dello spazio ci garantisce che le leggi del suo moto, come avevamo già osservato, **non possono risentire del posto dove si decide di mettere l'origine del sistema di riferimento.**

Siccome il moto è determinato dalla funzione lagrangiana L , questo significa che essa deve essere **invariante sotto il gruppo delle traslazioni spaziali.** Limitiamoci a vedere che cosa accade quando questa invarianza riguardi l'asse x . L'invarianza di L significa semplicemente che L non cambia quando si effettui la trasformazione

ovvero
$$0 = \delta L = \frac{dL}{dx} \delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{dx} = 0$$



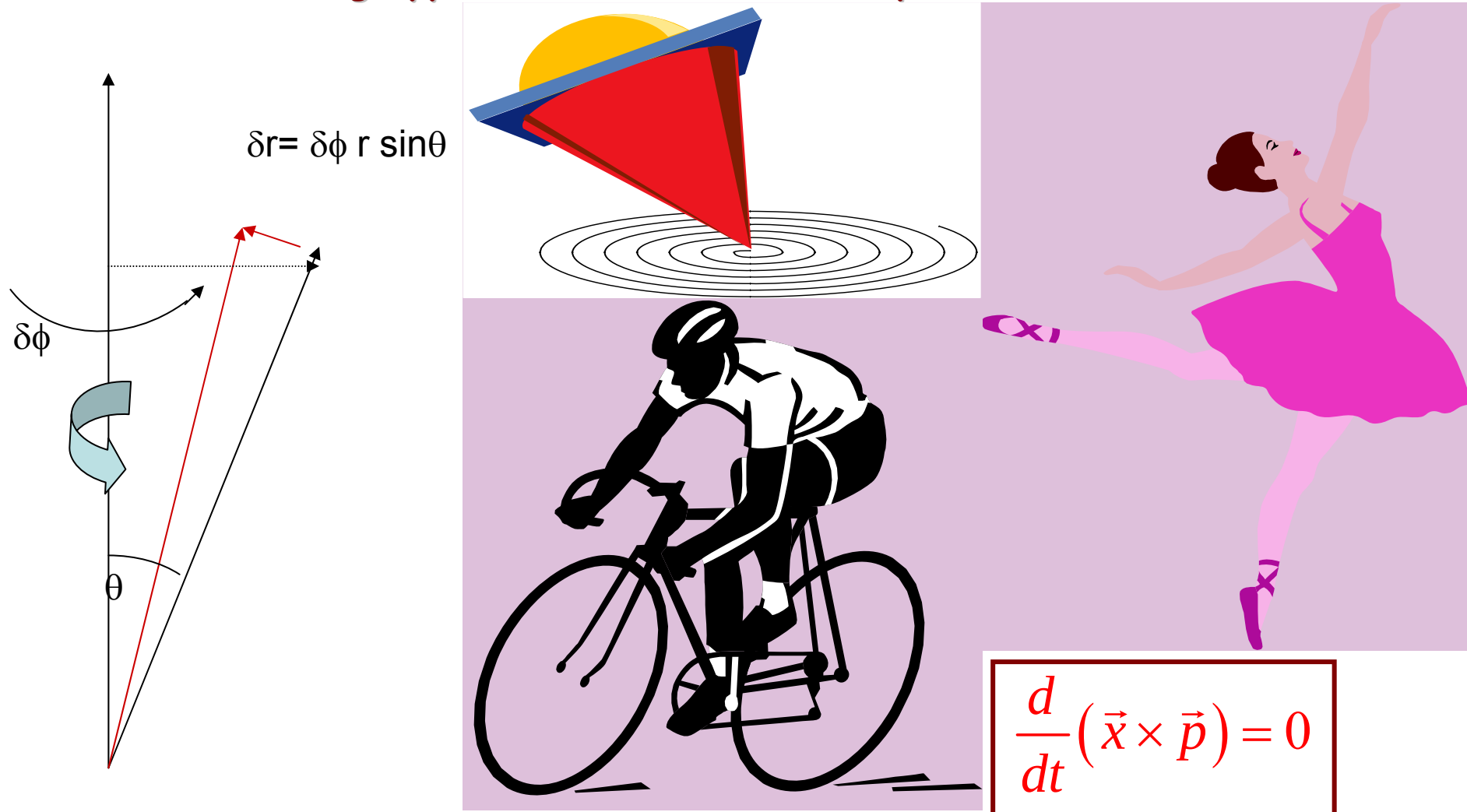
L'impulso in un sistema isolato si conserva

La conservazione dell'energia



La conservazione del momento angolare

Se il sistema è isolato, l'isotropia dello spazio (l'inesistenza di una direzione privilegiata in esso) ci garantisce che le leggi del moto non devono risentire dell'orientamento del sistema di riferimento. In altre parole, L deve essere **invariante sotto il gruppo delle rotazioni**. Dunque, sotto la trasformazione



Dalla Meccanica classica alla Meccanica relativistica

E' sempre una questione di simmetria !

In MC, per due eventi $A = (t_a, \vec{x}_a)$ e $B = (t_b, \vec{x}_b)$ accade che $(t_a - t_b)$ e $|\vec{x}_a - \vec{x}_b|$ sono separatamente invarianti per trasformazioni di riferimento.
Il gruppo di simmetria è quello delle traslazioni spazio-temporali e delle rotazioni.

Oggi sappiamo, però, che la MC non è in grado di descrivere correttamente fenomeni in cui le velocità si approssimano a quella della luce.

Serve la Relatività ristretta e quindi la Meccanica relativistica.

Essa riconosce che coordinate spaziali e temporali **devono** mescolarsi linearmente nel passare da un riferimento inerziale ad un altro, se vogliamo che la **velocità della luce sia la stessa in ogni sistema inerziale, ovvero sia invariante per trasformazioni di riferimento.**

La quantità invariante associata ai due eventi A e B di cui sopra diventa adesso

$$s^2 \equiv c^2 (t_a - t_b)^2 - |\vec{x}_a - \vec{x}_b|^2$$

e questo basta a definire **il gruppo di simmetria della RR**, cioè il **gruppo di Lorentz** (più le traslazioni spazio-temporali $\Rightarrow$ gruppo di Poincaré).

Conseguenze ...

Una relazione fra grandezze fisiche che sia compatibile con la RR deve riferirsi a grandezze che hanno le stesse proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz, così come, in MC, non potremmo accettare una relazione che uguaglia, per esempio, un vettore ad uno scalare ...

Potreste obiettare che nemmeno un letterato lo farebbe mai ... !

Dopotutto uno scalare è un numero mentre un vettore ha tre componenti ...
Come si fa a pensare che possa esserci eguaglianza ?

Attenzione però ...

Il fatto che una grandezza abbia tre componenti non lo fa un vettore !
Un terno al Lotto NON è un vettore (anche se è fatto da tre numeri ...)

Ciò che stabilisce che una certa grandezza è un vettore sono la sua legge di trasformazione sotto il gruppo delle rotazioni: per definizione, solo se si comporta come la posizione allora è un vettore, altrimenti (il terno al Lotto) non lo è !

La covarianza delle leggi fisiche (la loro compatibilità costituzionale ...) ne limita grandemente la possibile forma, ed in questo senso, come abbiamo già osservato, la Simmetria è un "rasoio di Occam" molto tagliente che conduce, talvolta, a risultati imprevisti e novità molto rilevanti.

... vediamo un esempio ...

La velocità è un vettore per rotazioni ed è quindi una grandezza fisica ben adatta a descrivere il moto in MC, dove le rotazioni sono il gruppo di simmetria che descrive l'isotropia dello Spazio.

Ma va ancora bene in MR ?

Le rotazioni sono adesso solo un sottogruppo del gruppo di Lorentz, che è il nuovo gruppo di simmetria (la nuova Legge Costituzionale ...).

Per prima cosa, esso agisce in quattro dimensioni, dunque la velocità tridimensionale dovrà essere generalizzata a quattro componenti ...

$$\vec{v} \rightarrow (\alpha(\vec{v}), \vec{\beta}(\vec{v}))$$

Ebbene, l'unica generalizzazione possibile, secondo la quale la (quadri)velocità si trasforma sotto il GdL come la (quadri)posizione, è la seguente

$$\vec{v} \rightarrow \gamma(c, \vec{v}) \equiv c\gamma(1, \vec{\beta})$$

dove

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

... vediamo le conseguenze ...

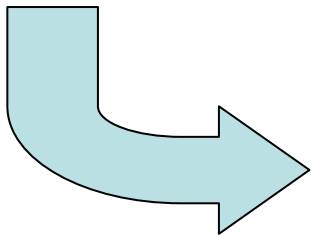
Ma in MC, l'impulso (quantità di moto) è proprio $\vec{p} = m\vec{v}$ dunque la generalizzazione naturale di questa grandezza al caso relativistico è

$$\vec{p} \rightarrow p \equiv mc\gamma(1, \vec{\beta})$$

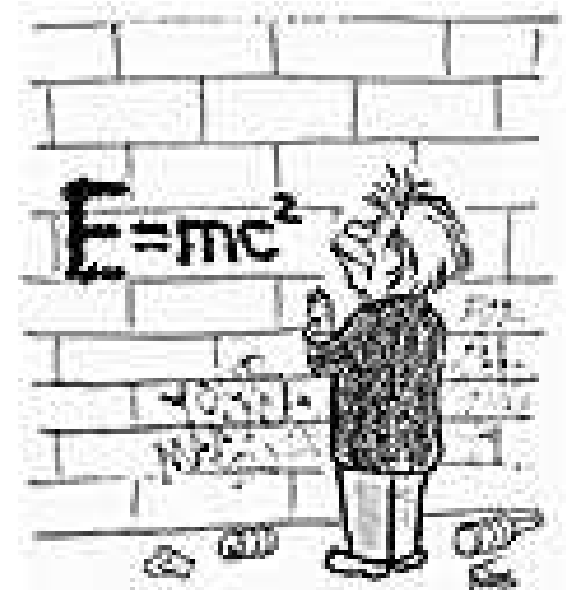
Ma mentre la parte spaziale, quando $v \ll c$ riproduce l'impulso che conosciamo dalla MC, **chi è il termine aggiunto $mc\gamma$** ?

Risulta
$$mc\gamma \approx mc\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)$$

Il termine che abbiamo aggiunto per rendere l'impulso coerente con la **Simmetria della Teoria**, descrive l'**energia relativistica** (a parte il fattore c , necessario per ragioni dimensionali) che, oltre al termine cinetico, è fatta anche da un termine direttamente legato alla massa.



**... anche $E=mc^2$
origina da una
legge di simmetria !**

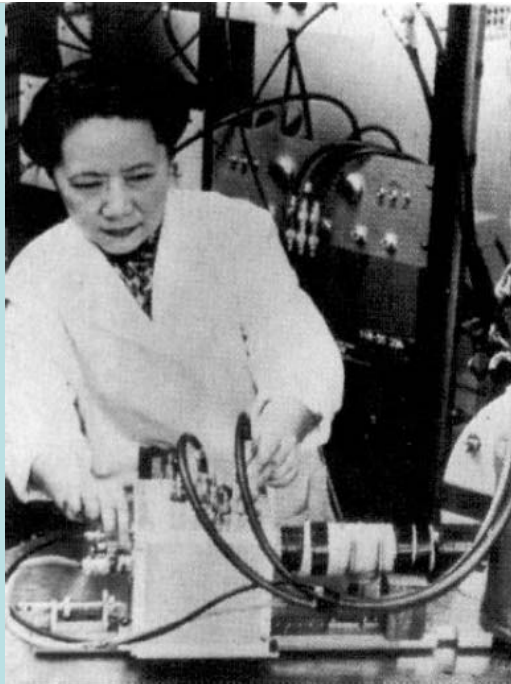


... comunque, non ci sono solo simmetrie esatte (ed è un bene ...)

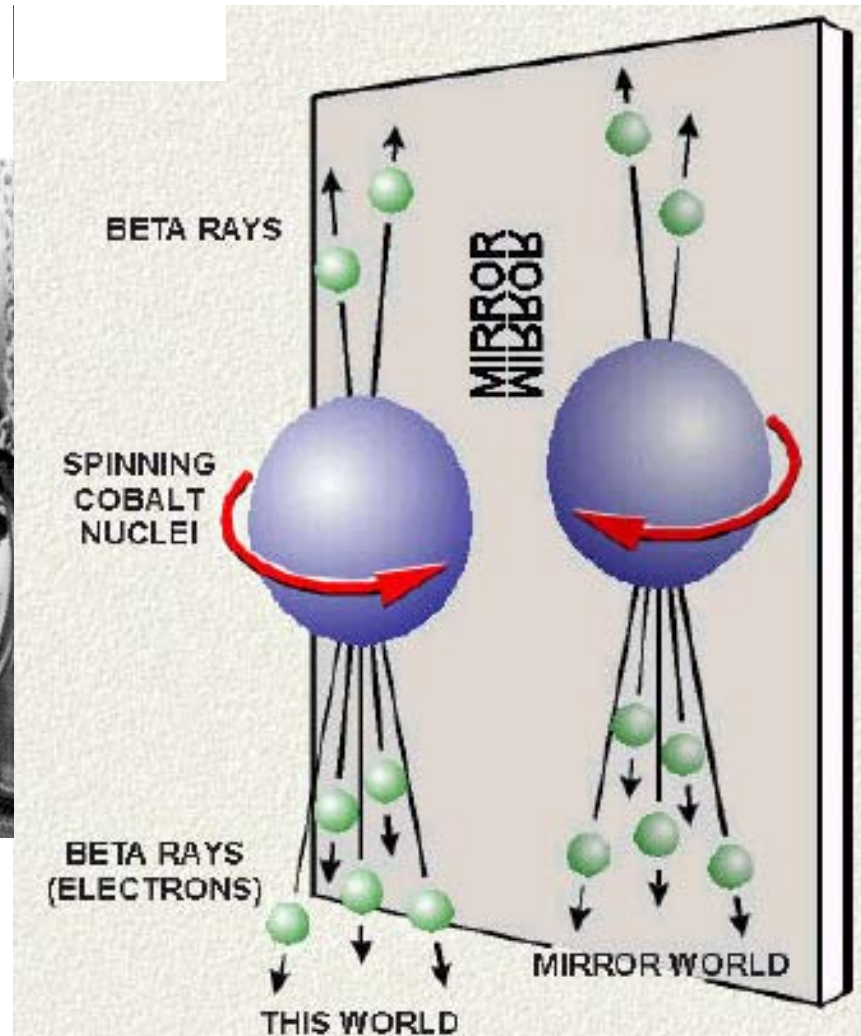
Dal 1956 sappiamo che le interazioni deboli, responsabili, per esempio, della radioattività beta, **non rispettano la simmetria di parità.**

$$P: \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$$

Destra e Sinistra (direzione CW e CCW...) non sono equivalenti quanto alla forza debole.



M.me C.S. Wu
(1957)



... si può usare questa forza per spiegare ad un lontano ET quali sono i versi CW e CCW (la destra e la sinistra) ?

Sembrerebbe di sì, visto che la forza debole le distingue ...

Invece non è così semplice. Come mai ?

Il punto è che esiste un'altra simmetria, detta di coniugazione di carica C , che prevede l'esistenza (ben verificata !) dell'antimateria, per cui ogni particella elementare ha la propria antiparticella (...talvolta coincidenti ...).

Ora accade che la forza debole viola la parità in modo opposto nella materia rispetto all'antimateria, in modo che se consideriamo insieme (prodotto) le due operazioni di Simmetria, allora CP è apparentemente conservata.

E' vero che la nostra galassia è di materia, però niente vieta che il nostro lontano ET viva in un ambiente di antimateria...

Definire la destra e la sinistra attraverso l'unica interazione che le distingue, equivale ad essere capaci di definire la materia rispetto all'antimateria.

Solo dal 1964 sappiamo che anche CP è violata (Cronin), per cui, effettivamente oggi saremmo in grado di spiegare ad ET(ammesso che fosse un fisico delle particelle elementari) come individuare, per es. il verso CW ...

Le implicazioni di $\not{CP}$

Se era stato uno choc scoprire che la simmetria di parità P e quella di coniugazione di carica C erano separatamente violate nelle interazioni deboli, ancora più inattesa fu la scoperta della violazione di CP .

Il motivo è che c'è un teorema il quale stabilisce che, sotto ipotesi molto generali, il prodotto di P , di C e della simmetria di inversione temporale T , cioè CPT , è una simmetria esatta.

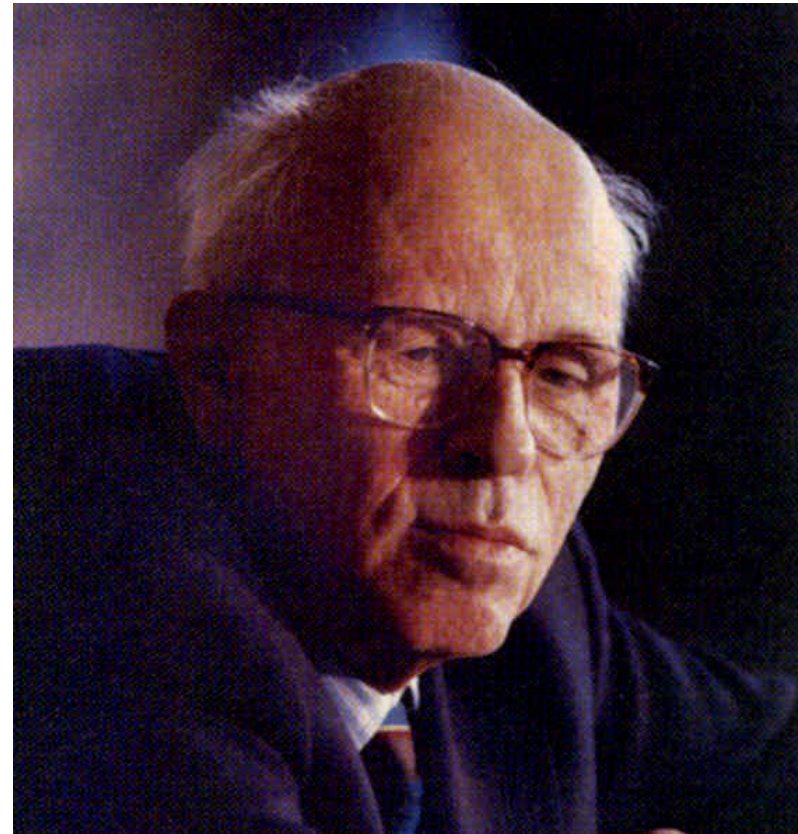
Quindi se CP in un processo non è rispettata, non può esserlo nemmeno T (e le due violazioni devono compensarsi esattamente ...)

Si doveva quindi concludere che, anche a livello microscopico la Natura faceva differenza, almeno in alcuni casi, fra i due versi della freccia del tempo ...

... restando alle implicazioni di $\cancel{CP}$

Facendo di necessità virtù, ben presto ci si accorse (Sacharov, 1967) che se CP era violata allora questo poteva rendere conto del non perfetto bilanciamento della materia rispetto alla antimateria nell'Universo, e quindi della sua (nostra !) stessa esistenza ...

Infatti, se ci fosse perfetto equilibrio, ormai essendosi l'Universo raffreddato dal Big Bang iniziale, tutta la materia avrebbe dovuto essersi annichilata con l'antimateria ... **e noi non saremmo qui ...**



Ritornando alle Simmetrie in generale ...

Non ci sono solo quelle legate al sistema di coordinate, del genere di quelle considerate fino ad ora ...

Una classe importante di simmetrie non legate al riferimento sono le **simmetrie di gauge**.

E' su questo genere di simmetrie che si fondano le Teorie che, nell'ambito del Modello Standard, spiegano

- ✓ l'interazione elettromagnetica (mediata dal fotone);
- ✓ l'interazione debole (mediata dai bosoni W e Z^0 (Rubbia)) responsabile della radioattività (naturale o artificiale che sia ...) e di altre cose interessanti ancora, tra cui, per esempio, il funzionamento del Sole ...;
- ✓ l'interazione forte (mediata dai gluoni), agente fra i quarks e responsabile della stabilità dei nuclei atomici.

Ma che cosa è una Simmetria di gauge ?

Il nome gli è stato dato da Weyl (1923) e viene dal latino tardo "gaugia" che indicava la dimensione standard del barile. Lo usò perché pensava di poter usare la simmetria di scala per render conto della conservazione della carica elettrica.

Oggi sappiamo che quella non era la simmetria giusta, ma il nome di quella giusta è restato comunque il solito ...

Prendiamo dunque l' elettromagnetismo.

Sicuramente avete già sentito parlare di elettrostatica ...

L'interazione fra due cariche puntiformi ferme a distanza r è descritta dal potenziale di Coulomb (simile a quello di Newton ...)

$$V(r) = k \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

La forza elettrostatica si ottiene prendendo l'opposto del gradiente (derivata) di $V(r)$...

quindi se sommiamo a $V(r)$ una costante, la forza resta la stessa.

Simmetria di gauge della QED

Nel caso della forza magnetica, l'analogo di V è il potenziale vettore $\vec{A}$ ed entrambi possono dipendere dal tempo se le cariche non sono ferme.

Ebbene, se $F(t, \vec{x})$ è una funzione qualsiasi, la trasformazione dei potenziali

$$V \rightarrow V + \frac{\partial F}{\partial t}; \quad A_x \rightarrow A_x + \frac{\partial F}{\partial x}; \quad A_y \rightarrow A_y + \frac{\partial F}{\partial y}; \quad A_z \rightarrow A_z + \frac{\partial F}{\partial z}$$

non cambia le forze fra le cariche: questa arbitrarietà di scelta, si chiama "arbitrarietà" di gauge ed in Elettrodinamica essa è una Simmetria esatta.

Essa è estremamente importante poiché implica necessariamente

- i) la conservazione della carica elettrica;**
- ii) la massa nulla del mediatore dell'interazione, cioè del fotone;**
- iii) la coerenza interna della teoria (rinormalizzabilità).**



Altre simmetrie di gauge

Nel 1954, Yang e Mills proposero una teoria basata su una simmetria di gauge più complessa di quella usata in QED, sulla base della sua "armonia" matematica. Essa prevedeva, come ogni Teoria di gauge, mediatori di massa nulla che, però, nessuno aveva mai visto... per cui, nonostante la sua eleganza, fu lasciata cadere.

Successivamente si è visto che questa era solo una di tutta una classe possibile di teorie di gauge, univocamente definite dal gruppo di simmetria che stava alla loro base ...

Il bello delle Teorie YM è che esse sono rinormalizzabili (il primo esempio era stato la QED, ma la proprietà è generale ...) e questo è un aspetto molto gradito dai fisici !

Significa, in parole povere, che le teorie YM hanno senso sia dal punto di vista fisico che matematico, cioè non hanno patologie incurabili legate agli infiniti ... ed è proprio il fatto che la simmetria di gauge sia esatta che impedisce a queste patologie di presentarsi !

Però ... YM prevede mediatori a massa nulla ... e, a parte il fotone, non c'era evidenza di altro ...

La QCD

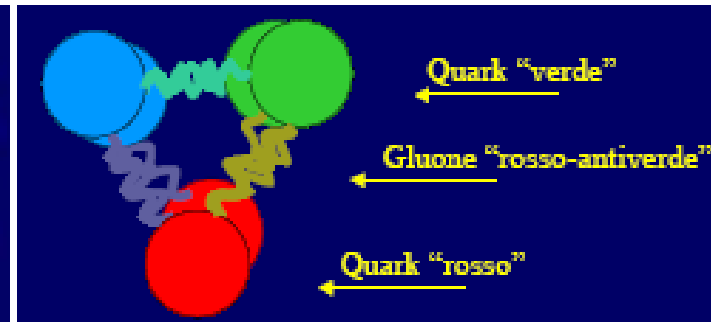
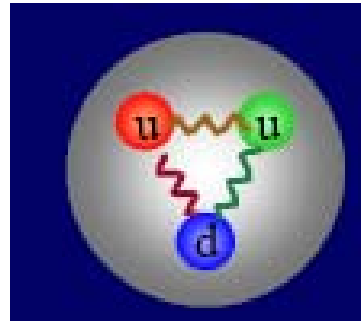
L'applicazione più diretta di YM è certamente la QCD.

Questa Teoria riguarda le interazioni forti, che hanno fatto soffrire intere generazioni di Fisici...

Sembrava, con Heisenberg, che la sua idea della intercambiabilità neutrone $\leftrightarrow$ protone (**simmetria di spin isotopico $SU(2)$**) potesse essere la chiave per comprendere questa interazione, ma, negli anni '60 ci si convinse che non era così. Gell-Mann propose (1963) una simmetria approssimata di grado superiore ($SU(3)$), ma anche questa non era la spiegazione giusta, anche se ebbe il pregio di condurre all'idea dei quarks.

L'idea buona venne a Frank Wilczek e David Gross, che postularono, nei primi anni settanta, una teoria di YM esatta, in cui **ogni quark esisteva in tre specie (colore)** e la Natura pretendeva che i composti di quarks fossero "neutri" dal punto di vista del colore (bianchi...), ovvero tutti i quarks di colore diverso vi partecipassero nello stesso modo.

I mediatori dell'interazione sono i gluoni (massa nulla, come si confà in una teoria di gauge esatta) **e le caratteristiche differenti rispetto alla QED stanno tutte nella struttura ben più complessa del gruppo di simmetria di gauge.**



... e le interazioni deboli ?

Abbiamo visto che YM prevede mediatori a massa nulla e quelli delle interazioni deboli, $W^\pm$ e Z^0 , hanno massa enorme ...

 fotone	 gluone	 bosone	 bosone
0	0	80.4 GeV	91.2 GeV

1 GeV $\approx$ protone

Vuol dire che la strada delle simmetrie di gauge era preclusa per le interazioni deboli ?

NO !

Nel 1971, **Gerard t'Hooft** dimostrò che la teoria di Yang e Mills restava rinormalizzabile anche se veniva "rotta spontaneamente", nel qual caso, attraverso il cosiddetto "meccanismo di Higgs", **i mediatori potevano anche acquistare massa !**

Era la soluzione del problema per le interazioni (elettro-)deboli, formulata poi da **Glashow, Weinberg e Salam.**

Ma che significa che una simmetria è rotta spontaneamente !

Per capire ... facciamo una premessa:

Il potenziale Newtoniano ha simmetria sferica ($V(r) \propto 1/r$), dunque la dinamica che esso descrive **è certamente invariante sotto il gruppo delle rotazioni !**

Vuol dire questo che le orbite dei pianeti debbono essere circolari ?

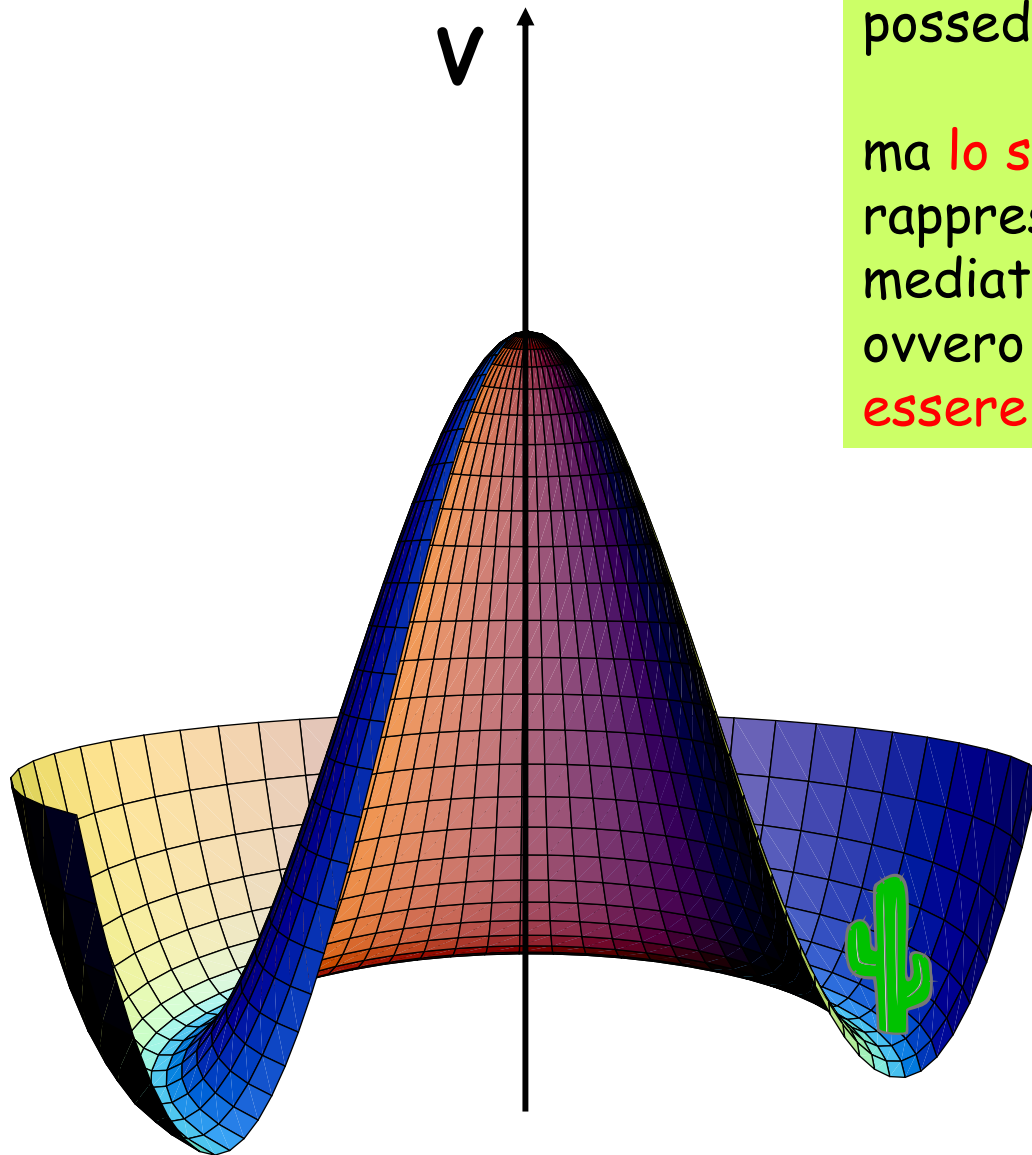
Questa era l'idea greca e tolemaica: la figura che in geometria piana è la più perfetta è quella più simmetrica e dunque è la circonferenza ...
Le orbite dei corpi celesti sono perfette, dunque devono essere circonferenze...

Oggi sappiamo però che quest'idea non è corretta.

Un punto materiale legato gravitazionalmente ad un centro fisso è un problema a simmetria sferica. L'orbita, però, come insegna già Keplero, può essere ellittica (o parabolica o addirittura iperbolica ...): la simmetria sferica del problema implica solo che, data un'orbita possibile per il sistema, se la ruotiamo rigidamente intorno al centro di simmetria, essa resta possibile (senza coincidere necessariamente con quella di partenza ...).

La traiettoria, cioè lo stato fisico, dipende infatti dalla dinamica ma anche dalle condizioni iniziali, che possono non riflettere lo stesso grado di simmetria della dinamica ...

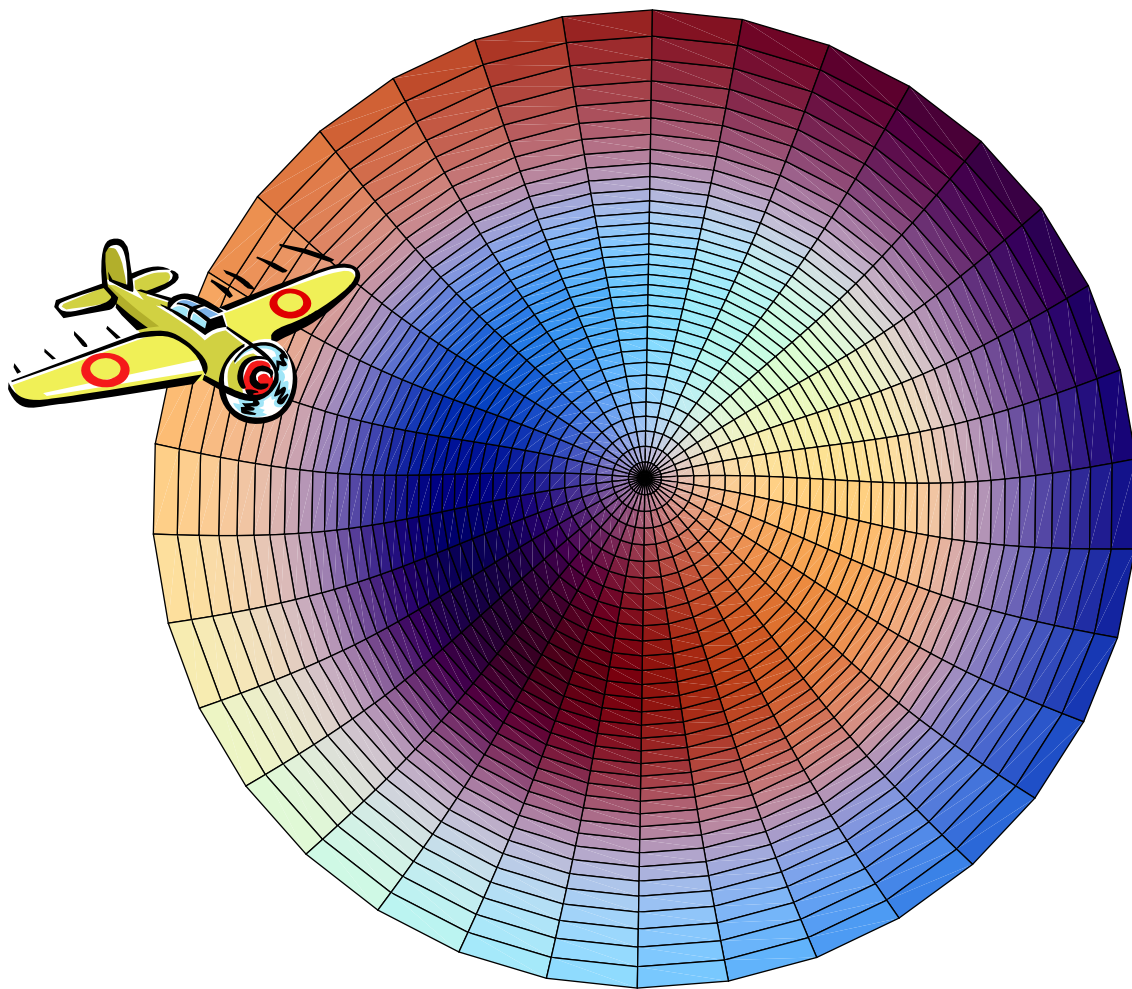
La rottura spontanea



Una interazione (potenziale) può dunque possedere una certa simmetria ...

ma **lo stato di minima energia** (che rappresenta lo stato di assenza di mediatori della forza in questione, ovvero lo stato di vuoto) **può non essere altrettanto simmetrico** ...

In questo caso, il mediatore può acquistare massa senza che ci siano conseguenze sulla rinormalizzabilità della Teoria (come nel caso dell'interazione debole) e la Simmetria torna ad apparire esatta allorchè la scala di energia dei fenomeni considerati diventa grande rispetto alla massa del mediatore...

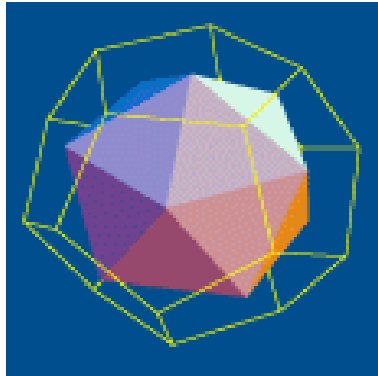


...solo ad alte energie la simmetria ritorna evidente

In conclusione ...

Il concetto di simmetria ha un ruolo centrale in Fisica.

Le leggi di conservazione oggi note sono tutte il riflesso di qualche Simmetria, descritta da un gruppo opportuno.



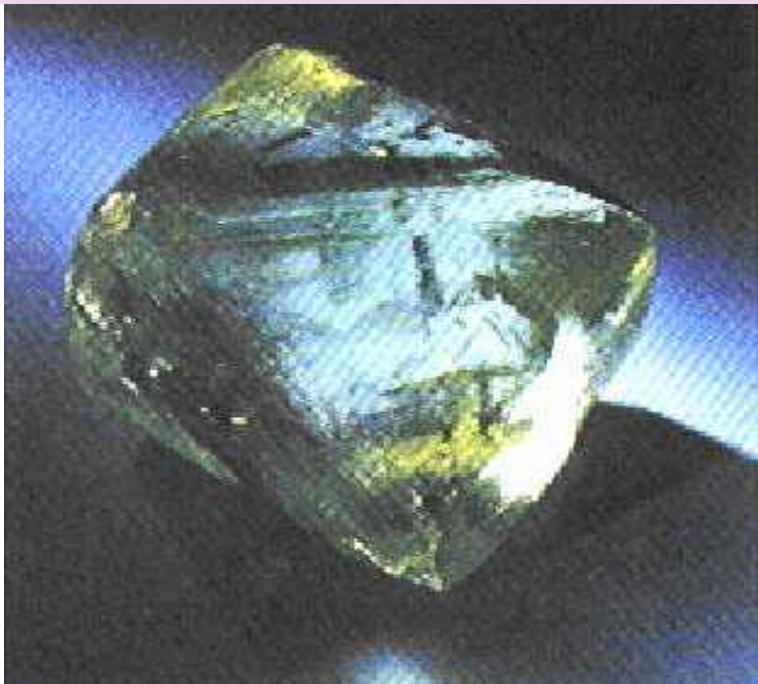
Tutte le interazioni elementari (a parte la forza di gravitazione) sono oggi descritte nel MS a partire da un principio di simmetria (di gauge)

Ed è persino possibile che esse siano tutte manifestazioni di una stessa forza (e quindi di una sola simmetria) che, però, alla scala delle energie con cui ci confrontiamo, appaia "rotta spontaneamente" ...

Lo scienziato non studia la Natura perché è utile farlo; la studia perché ne trae diletto, e ne trae diletto perché la Natura è bella. Se non fosse bella, non varrebbe la pena di conoscerla, e se non valesse la pena di conoscere la Natura, la vita non sarebbe degna di essere vissuta.

Henry Poincaré

Certamente, l'aspetto più bello delle Leggi della Natura risiede nella profonda Simmetria che esse esprimono ... e per lo Scienziato non c'è soddisfazione più grande che quella di contribuire a delinearne il Disegno, la Simmetria, questo splendido gioiello che è nascosto in esse !



Leggi
della
Natura



Simmetria

