

Esercizio su un calcolo delle probabilità

18 aprile 2022

Vogliamo calcolare la probabilità che, avendo a disposizione b buche equivalenti e p palline uguali, distribuite in modo equiprobabile nelle buche date, ci sia almeno una buca che contiene almeno due palline.

Iniziamo con un esempio semplice: supponiamo che $b = 3$ e $p = 2$. Scriviamo tutti i casi possibili, che, per ipotesi, sono perfettamente equivalenti. essi sono $T(3, 2) = 6$ e cioè

$$(2, 0, 0); (0, 2, 0); (0, 0, 2); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)$$

I casi "negativi" sono evidentemente solo $N(3, 2) = 3$, per cui la probabilità cercata, in questo caso, è

$$\mathcal{P}(3, 2) = 1 - \frac{N(3, 2)}{T(3, 2)} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Supponiamo ora che $b = 4$: i casi possibili diventano $T(4, 2) = 10$

$$(2, 0, 0, 0); (0, 2, 0, 0); (0, 0, 2, 0); (0, 0, 0, 2); \\ (1, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 0); (0, 1, 0, 1); (0, 0, 1, 1)$$

e quelli "negativi" sono evidentemente $N(4, 2) = 6$ per cui

$$\mathcal{P}(4, 2) = 1 - \frac{N(4, 2)}{T(4, 2)} = \frac{4}{10} \quad (2)$$

Possiamo generalizzare osservando che il numero dei casi possibili è

$$T(b, p) = \frac{(b-1+p)!}{(b-1)!(p)!} \quad (3)$$

Immaginiamo per questo una struttura fatta da $(, , ,)$, dove le virgole sono $b-1$. Questa struttura di due parentesi e $b-1$ virgole individua b posizioni nel modo seguente : $(1, 2, 3, \dots, b)$.

Supponiamo adesso di aggiungere alle virgole p punti, disponendo così di un totale di $b-1+p$ elementi fra le due parentesi.

Consideriamo allora una qualunque disposizione di questi elementi. Fra la parentesi aperta e la prima virgola, ci saranno $p_1 \geq 0$ punti (palline ...), mentre fra la prima virgola e la seguente ce ne saranno $p_2 \geq 0$ e così via, fino a $p_b \geq 0$ fra l'ultima virgola e la parentesi chiusa. Evidentemente $p_1 + p_2 + \dots + p_b = p$ e ciascuna disposizione individua una possibile distribuzione delle p palline nelle b buche.

I modi di disporre questi $(b - 1 + p)$ elementi è $(b - 1 + p)!$; però non tutte queste danno luogo a distribuzioni differenti: per ottenere questo numero occorre dividere sia per le permutazioni delle virgole, ovvero $(b - 1)!$, che per il numero delle permutazioni dei punti, ovvero $p!$.

Si ottiene così l'espressione¹ di $T(b, p)$ data dalla (2).

Veniamo adesso al calcolo dei casi "negativi", cioè il numero dei casi per cui in nessuna cella ci sono due o più palline, ovvero i casi in cui nella cellette ci sono zero o una pallina. Questi casi richiedono² che $p \leq b$, altrimenti non ce ne sono. Possiamo ottenerli a partire dalle permutazione della distribuzione di b oggetti $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$, dove gli uni sono p e gli zeri sono $b - p$. Di nuovo le $p!$ permutazioni degli uni non cambiano la distribuzione, come pure le $(b - p)!$ permutazione degli zeri, per cui sarà

$$N(b, p) = \frac{(b)!}{(b - p)!(p)!} \quad (4)$$

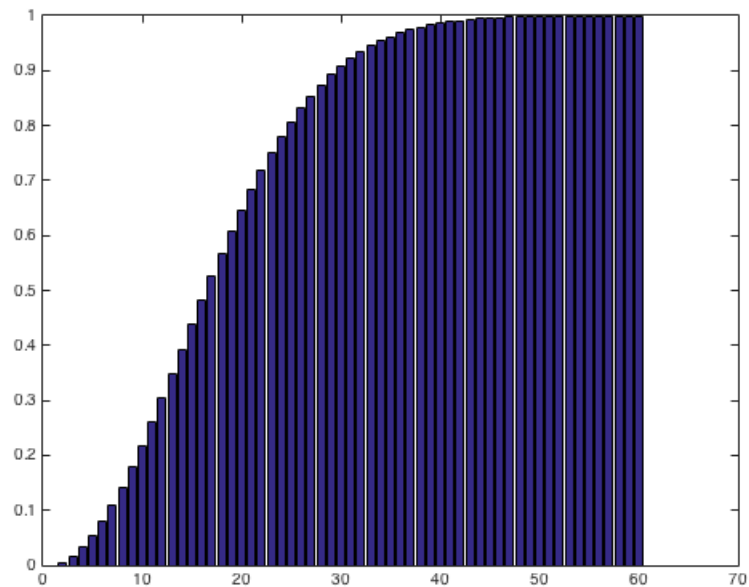
Possiamo dunque scrivere la probabilità cercata come

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b, p) &= 1 - \frac{N(b, p)}{T(b, p)} = 1 - \frac{(b)!}{(b - p)!(p)!} \frac{(b - 1)!(p)!}{(b - 1 + p)!} = \\ &= 1 - \frac{(b)!(b - 1)!}{(b - p)!(b - 1 + p)!} \end{aligned} \quad (5)$$

¹Si osservi che $T(3, 2) = \frac{(3-1+2)!}{2!2!} = 6$, mentre $T(4, 2) = \frac{(4-1+2)!}{3!2!} = 10$

²Evidentemente se $p > b$ la probabilità di trovare casi "negativi" è nulla perché necessariamente dovrà esserci almeno una cella con due o più palline.

Una applicazione di questo esercizio è quello di calcolare la probabilità che, considerate p persone, ce ne siano almeno due che sono nate nello stesso giorno dell'anno. Corrisponde, evidentemente a valutare $\mathcal{P}(365, p)$. La figura seguente mostra il suo andamento in funzione di p . Come si vede, contro l'intuizione, già quando le persone sono solo 15, la probabilità è dell'ordine del 50% ...



Nella figura riportata sotto, è riportata la stessa curva nel caso si consideri lo stesso mese di nascita.

