Impulso elettromagnetico di un condensatore in un solenoide

17 aprile 2022

Consideriamo un solenoide finito, avente raggio interno R e lunghezza L ($L \gg R$), percorso da una corrente I . Assumiamo che il campo magnetico prodotto sull'asse del solenoide sia allineato con l'asse z (versore $\vec{k}$).

Nella zona centrale di questo solenoide si trovi un condensatore a facce piane e parallele, costituito da due armature circolari di raggio $r < R$, affacciate a una distanza $\delta \ll r$, in modo che si possano trascurare gli effetti di bordo. Il condensatore sia carico, e il campo elettrico sia diretto come $\vec{j}$, cioè come il versore dell'asse y . Supporremo che al centro del condensatore, perpendicolarmente alle facce, sia presente un filo sottilissimo che può essere reso debolmente conduttore, disposto in modo che colleghi le due armature. Immaginiamo che fino al tempo $t = 0$ il filo non sia conduttore e che lo diventi a quell'istante. La ddp fra le armature per $t < 0$ sia ΔV_0 : chiediamoci quale è l'impulso elettromagnetico associato al sistema.

Evidentemente solo dentro il volume del condensatore c'è un vettore di Poynting costante e non nullo

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E B \vec{i} \quad (1)$$

diretto come il versore $\vec{i}$ dell'asse x . Ne segue che l'impulso elettromagnetico $\vec{P}$ associato al sistema vale

$$\vec{P} = \int dv \frac{\vec{S}}{c^2} = \epsilon_0 E B S \delta \vec{i} \quad (2)$$

dove S è la superficie di ciascuna armatura del condensatore e δ è la loro distanza. In termini della differenza di potenziale, essendo $\Delta V_0 = E \delta$, risulta dunque

$$\vec{P}_{em} = \epsilon_0 \Delta V_0 B S \vec{i} = \Delta V_0 B C \delta \vec{i} \quad (3)$$

dove abbiamo usato il fatto che, per un condensatore a facce piane e parallele, trascurando ogni effetto di bordo, è $C = \epsilon_0 S/\delta$.

Naturalmente, a causa della scarica del condensatore che inizia al tempo $t = 0$ e quindi a causa dell'annullarsi della ddp ΔV ai capi del condensatore, questo impulso finirà per scomparire dal sistema ...

Dove finisce?

Osserviamo che il campo del solenoide produrrà una forza di origine magnetica sul filo che unisce le due armature (sulle correnti che scorrono sulle due armature, le forze sono uguali e opposte, per cui non c'è un effetto netto...) pari a

$$\vec{F}_{magn} = I \vec{\delta} \wedge \vec{B} = I \delta B \vec{i} \quad (4)$$

D'altronde non ci può essere reazione¹ a questa forza da parte della corrente di scarica sul solenoide perché la corrente di scarica NON produce alcun

¹Valutiamo infatti il campo magnetico prodotto dalla corrente di scarica nel condensatore. Iniziamo assumendo che non ci sia alcun campo magnetico esterno. Supponiamo di fissare il sistema di riferimento in modo che l'origine sia al centro del condensatore ed il campo elettrico sia nella direzione dell'asse y , ovvero che la corrente fluisca secondo il versore $\vec{j}$. Consideriamo un generico punto $P(x, y, z)$:

- il campo magnetico in P non può avere componente lungo l'asse y perché effettuando una parità rispetto al piano che contiene l'asse y e il punto P , la componente in questione, parallela al piano, dovrebbe invertirsi di segno ($\vec{B}$ è uno pseudovettore), mentre la distribuzione della corrente resta immutata;
- il campo magnetico in P non può avere nemmeno una componente che sia "radiale", cioè proporzionale al vettore $(x, 0, z)$, perché questa violerebbe la condizione sulla divergenza di $\vec{B}$.

Quindi $\vec{B}$ può solo essere diretta come $(z, 0, -x)$, ovvero le linee di forza di $\vec{B}$ sono circonferenze in piani paralleli a xz , con il centro sull'asse y . Su queste circonferenze, per ovvi motivi di simmetria, il modulo di $\vec{B}$ è costante e la circuitazione di $\vec{B}$ su una di queste circonferenze, per il Teorema di Ampere, è tale che

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c \Rightarrow 2 \pi R B(r) = \mu_0 I_c \quad (5)$$

dove $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ e I_c è la corrente concatenata alla circonferenza su cui si è valutata la circuitazione di $\vec{B}$ (corrente di conduzione + corrente di spostamento).

Se il punto P è esterno al volume racchiuso dalle due armature del condensatore, si può calcolare il flusso della densità di corrente (di conduzione + spostamento) su una superficie tutta esterna al condensatore, dove sono entrambe nulle. Ne segue che NON c'è campo magnetico all'esterno del condensatore.

Se la scarica avviene adesso in un campo magnetico uniforme diretto come il versore $\vec{k}$ dell'asse z , l'unico punto da chiarire è se la distribuzione della corrente di scarica può risultarne alterata o no. Evidentemente nulla può cambiare nel filo che unisce le due armature; però, a priori, potrebbe esserci un effetto sulle distribuzioni di corrente sulle armature stesse, che convergono al filo. Ma nemmeno queste risultano alterate, infatti se facciamo una parità rispetto al piano di una faccia del condensatore, il campo esterno cambia segno essendo a essa parallelo, mentre la densità di corrente rimane immutata. Questo ci dice che $\vec{B}$ e $-\vec{B}$ hanno associata la stessa distribuzione di corrente sulla faccia, ovvero, per il principio di sovrapposizione, che questa è la stessa di quando non c'è campo esterno.

campo magnetico sul solenoide. Ne segue che se vogliamo mantenere fermo il condensatore, occorrerà bilanciare la forza $\vec{F}_{magn}$ di cui sopra con una forza esterna uguale ed opposta $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{magn}$ e questa sarà l'unica forza esterna che dovremo applicare al sistema per mantenerlo fermo. A causa di questa forza, però, trasferiremo al sistema un impulso complessivo pari a

$$\vec{P}_{ext} = \int \vec{F}_{ext} dt = - \int dt I(t) \delta B \vec{i} = -Q_0 \delta B \vec{i} \quad (6)$$

dove Q_0 è la carica sull'armatura positiva al tempo $t = 0$.

Abbiamo quindi, in termini della capacità C del condensatore

$$\vec{P}_{ext} = -Q_0 \delta B \vec{i} = -C \Delta V \delta B \vec{i} = -\epsilon_0 \Delta V_0 B S \vec{i} \quad (7)$$

dove abbiamo usato nuovamente il fatto che $C \delta = \epsilon_0 S$.

Evidentemente l'impulso della forza esterna è uguale e opposto a quello elettromagnetico, per cui l'impulso elettromagnetico del sistema è semplicemente trasferito all'esterno ...

Se non avessimo applicato la forza esterna, il condensatore, sotto la sola azione della forza magnetica sul filo interno alle due armature, si sarebbe messo in moto lungo l'asse x .

E' interessante vedere, in questo secondo caso, che succede, anche dal punto di vista energetico. Infatti, nel caso in cui il condensatore si mantenga fermo, è evidente che il condensatore finirà per scaricarsi completamente e tutta l'energia elettrostatica immagazzinata in esso si trasformerà in calore, nel filo, per effetto Joule.

Ma nel caso in cui il condensatore si metta in moto, chi fornisce, per esempio, l'energia cinetica? E qual è la velocità finale del condensatore?

Osserviamo che se il condensatore si muove lungo x a velocità $\vec{v} = v(t) \vec{i}$, ai capi del filo è presente la fem indotta dal movimento del filo nel campo del solenoide $\vec{B} = B \vec{k}$, che vale, per la legge di Lenz

$$\mathcal{E} = -B \delta v(t) \quad (8)$$

rispetto all'armatura positiva del condensatore.

Ne segue che la legge di scarica diventa adesso

$$RI(t) = \frac{Q(t)}{C} - B \delta v(t) \quad (9)$$

dove $Q(t)$ è la carica sull'armatura positiva e $I(t)$ è la corrente che fluisce nel filo, dall'armatura positiva a quella negativa.

Derivando rispetto al tempo, si ha

$$R \frac{dI}{dt} = -\frac{I(t)}{C} - B \delta \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

ma, se indichiamo con M la massa del condensatore, risulta

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{M} = \frac{B I(t) \delta}{M} \quad (11)$$

per cui abbiamo

$$R \frac{dI}{dt} = -I(t) \left[\frac{1}{C} + \frac{(B \delta)^2}{M} \right] \quad (12)$$

Analogamente alla scarica "normale" del condensatore, risulta

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau) \quad (13)$$

ma, stavolta, la costante di tempo è tale che

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \left[1 + \frac{C(B \delta)^2}{M} \right] \quad (14)$$

dove, per definizione, $\tau_0 = RC$.

Siccome al tempo $t = 0$ la velocità del condensatore è nulla, dalla condizione iniziale si desume che $I_0 = \Delta V_0 / R$, ovvero il processo di scarica inizia come nel caso statico: la differenza rispetto a quello, per quanto riguarda le caratteristiche della scarica, è unicamente la diversa costante di tempo del processo.

Vediamone le conseguenze.

- La carica Q_{Tot} che attraversa il filo durante tutto il processo di scarica non è la carica iniziale $Q_0 \equiv C \Delta V_0$ sulla armatura positiva. Infatti essa vale

$$\begin{aligned} Q_{Tot} &= I_0 \tau = I_0 R C \frac{M}{M + C(B \delta)^2} \\ &= \Delta V_0 C \frac{M}{M + C(B \delta)^2} \equiv Q_0 \frac{M}{M + C(B \delta)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Ne segue che il condensatore resta parzialmente carico, con una carica

$$\begin{aligned} Q_{fin} &= Q_0 - Q_{Tot} = Q_0 \left[1 - \frac{M}{M + C(B \delta)^2} \right] = \\ &= \frac{Q_0 C (B \delta)^2}{M + C(B \delta)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

A questa carica, corrisponde una ddp ai capi del condensatore pari a

$$\Delta V_{fin} = \frac{Q_{fin}}{C} = \frac{Q_0 (B \delta)^2}{M + C(B \delta)^2} \quad (17)$$

- La velocità finale del condensatore, per la seconda legge della dinamica, vista la legge di forza data, è pari a

$$v_{inf} = \frac{1}{M} \int dt I(t) \delta B = \frac{\delta B Q_{Tot}}{M} \quad (18)$$

A questa velocità del condensatore corrisponde una fem asintotica che si manifesta sul filo, pari a

$$\mathcal{E}_{inf} = -B \delta v_{inf} = -\frac{Q_{Tot} (B \delta)^2}{M} \quad (19)$$

che è esattamente uguale e opposta alla ddp residua ai capi del condensatore, e questa, naturalmente è la ragione fisica che spiega il motivo per il quale il condensatore non si scarica completamente.

- L'energia dissipata nella resistenza del filo vale, naturalmente

$$\begin{aligned} W_{Res} &= \int dt R I^2(t) = R I_0^2 \int dt \exp(-2t/\tau) = & (20) \\ &= \frac{R I_0^2}{2} \tau = \frac{1}{2} \Delta V_0 I_0 \tau_0 \frac{M}{M + C (B \delta)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \Delta V_0 I_0 R C \frac{M}{M + C (B \delta)^2} = \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2 \frac{M}{M + C (B \delta)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

- L'energia cinetica finale del condensatore vale invece

$$\begin{aligned} W_{Kin} &= \frac{1}{2} M v_{fin}^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{\delta B Q_{Tot}}{M} \right)^2 = & (22) \\ &= \frac{1}{2M} (\delta B)^2 Q_0^2 \left(\frac{M}{M + C (\delta B)^2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2 \frac{C (\delta B)^2}{M} \left(\frac{M}{M + C (\delta B)^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

- L'energia potenziale elettrostatica residua nel condensatore non completamente scaricato vale

$$\begin{aligned} W_{es} &= \frac{1}{2} C (\Delta V_{fin})^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{Q_0 (B \delta)^2}{M + C (B \delta)^2} \right)^2 = & (24) \\ &= \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2 \left(\frac{C (B \delta)^2}{M + C (B \delta)^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

- La somma $W_{Dis} \equiv W_{Res} + W_{Kin} + W_{es}$ coincide con l'energia elettrostatica iniziale del condensatore, infatti

$$\begin{aligned}
W_{Dis} &\equiv W_{Res} + W_{Kin} + W_{es} & (26) \\
&= \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2 \left[\frac{M}{M + C(B\delta)^2} + \frac{C(\delta B)^2}{M} \left(\frac{M}{M + C(B\delta)^2} \right)^2 + \left(\frac{C(B\delta)^2}{M + C(B\delta)^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2 \left(\frac{1}{M + C(B\delta)^2} \right)^2 [M(M + C(B\delta)^2) + MC(B\delta)^2 + C^2(B\delta)^4] = \\
&= \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2 \left(\frac{1}{M + C(B\delta)^2} \right)^2 [M^2 + MC(B\delta)^2 + MC(B\delta)^2 + C^2(B\delta)^4] = \\
&= \frac{1}{2} C (\Delta V_0)^2
\end{aligned}$$

In altri termini, come c'era da attendersi, l'energia potenziale elettrostatica iniziale si trasforma, in parte, in energia cinetica del condensatore, in parte resta sotto forma di energia potenziale elettrostatica mentre il resto si dissipa nel filo resistivo, sotto forma di calore.