

APPUNTI
di
Fisica Subnucleare
(A. A. 2017-2018)

E. Iacopini

Dipartimento di Fisica, Università di Firenze

January 13, 2019



Libri consigliati per consultazione:

- L. Landau, E. Lifchitz : Mécanique quantique
- D. Griffiths : Introduction to elementary particles
- W.R. Frazer : Elementary particles
- D.H. Perkins : Introduction to high energy physics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum mechanics
- J.D. Jackson : Classical Electrodynamics
- L. Landau, E. Lifchitz : Théorie du champ

Contents

1	Corso di Fisica Subnucleare	7
1.1	Introduzione	7
2	Alcuni richiami	11
2.1	Teoria dei Gruppi	11
2.2	Rappresentazioni	14
2.3	Gruppi di Lie	17
2.4	Algebre di Lie	18
2.5	Algebre e gruppi di Lie	19
2.6	Le trasformazioni di Lorentz	24
2.6.1	Le rotazioni	28
2.6.2	I boost	31
2.7	Quadrivelocità e quadriaccelerazione	38
2.8	Il quadrimpulso	40
3	Le Particelle elementari (e non solo ...)	45
3.1	L'elettrone, il protone, il neutrone e il fotone	45
3.2	Il muone μ e il mesone π	62
3.3	I raggi cosmici	76
3.4	L'antimateria: positrone, antiprotone e antineutrone	88
3.5	Il neutrino	100
3.6	Le particelle strane	106
3.7	I quarks	112
3.8	Il Modello Standard: una introduzione	121
3.9	Cronologia della scoperta delle particelle elementari	148
4	Aspetti di cinematica e dinamica relativistiche	149
4.1	Processi d'urto	149
4.1.1	L'urto quasi elastico	150
4.1.2	L'effetto Compton	163
4.1.3	L'urto anelastico	170
4.2	<i>Massa trasversa e picco Jacobiano</i>	176
4.3	Trasformazione di una distribuzione di particelle	187
4.4	Decadimento di una particella in volo	191
4.5	<i>Sistemi soggetti a forze esterne</i>	201
4.5.1	<i>Applicazione al campo elettromagnetico</i>	202
4.5.2	<i>Carica elettrica in campo magnetico</i>	203
4.5.3	<i>Carica elettrica in campo elettrico</i>	205

5	Alcuni approfondimenti ...	209
5.1	La teoria di Fermi	210
5.2	Verifica dell'esistenza del neutrino	217
5.3	Misura della massa del $\bar{\nu}_e$	222
5.4	Il fenomeno delle oscillazioni di neutrino	226
5.5	L'elicità del neutrino	230
5.6	Modifiche alla Teoria di Fermi	233
A	Appendix: Generalità	242
A.1	Le unità di misura	242
A.2	Le notazioni	244

*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623).



Figure 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

1 Corso di Fisica Subnucleare

1.1 Introduzione

Questo Corso di Fisica Subnucleare, che storicamente è rivolto a studenti del primo anno della laurea magistrale, quest'anno, per ragioni di riaggiustamento di alcuni Corsi, in vista di prossimi pensionamenti di docenti, ha la sua prima parte che è rivolta anche a studenti del terzo anno della laurea triennale, contribuendo così con 3 *CFU* al Corso di Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare.

A questa prima parte, per la triennale, seguirà una seconda parte di introduzione alla fisica del nucleo.

Veniamo adesso al Corso.

Iniziamo con alcune considerazioni generali sulle interazioni fondamentali.

Ad oggi, riteniamo che esse siano tre (anche se speriamo che possano, alla fine, divenire una sola ...)

- l'interazione gravitazionale, responsabile della dinamica dei corpi celesti e di quella dell'universo stesso;
- l'interazione elettrodebole, che ha a che fare con le ben note forze elettromagnetiche e con quelle deboli, responsabili, queste ultime, per esempio, dei decadimenti radioattivi di tipo β ;
- l'interazione forte, responsabile della stabilità del nucleo atomico.

Ciascuna interazione è descritta da una teoria locale (per quanto ne sappiamo, l'interazione a distanza non esiste in Natura ...) attraverso uno o più campi opportuni (si pensi, per esempio, al campo elettromagnetico, che trasmette l'interazione fra una carica elettrica e un'altra...) che, una volta quantizzati, conducono a particelle dette, appunto, *mediatori* dell'interazione.

Per l'interazione gravitazionale, il mediatore è il *gravitone*, che ha massa nulla, possiede due stati di polarizzazione trasversale e ha elicità $\lambda = \pm 2$.

Le onde gravitazionali, che sono il corrispondente classico del gravitone, sono state recentemente osservate (scoperte nel settembre 2015, annunciate nel febbraio 2016) per la prima volta in modo diretto dalla Collaborazione LIGO-VIRGO, usando metodi interferometrici. L'interazione gravitazionale è descritta classicamente dalla Teoria della Relatività Generale, ma al momento non è inquadrata in modo coerente nel linguaggio della Meccanica Quantistica, se non in una sua versione linearizzata. E' pur vero che, data la sua bassissima "intensità"¹, per quanto concerne le particelle elementari essa può essere completamente trascurata; ma in ogni caso, da un punto di vista di completezza, è evidente come occorra trovarne

¹Per avere un'idea della intensità relativa dell'interazione gravitazionale rispetto a quella elettromagnetica, possiamo valutare, per esempio, il rapporto fra le due forze per due protoni

comunque una descrizione coerente e, a oggi, la teoria più promettente sembra essere (forse) quella delle stringhe.

Per l'interazione elettrodebole, i mediatori sono

- il ben noto *fotone* (massa nulla, due stati di polarizzazione, elicità ± 1);
- il bosone W^\pm (massa $80.423 \pm 0.039 \text{ GeV}$, spin 1);
- lo Z^0 (massa $91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$, spin 1).

Infine, per l'interazione forte, i mediatori sono i *gluoni* , anch'essi particelle di massa nulla ed elicità $\lambda = \pm 1$, distinti fra loro per una diversa combinazione di *carica di colore* , per cui ne esistono otto differenti.

La teoria elettrodebole e la *QCD* , che descrive le interazioni forti, costituiscono insieme quello che oggi è noto come il Modello Standard (MS) delle interazioni fondamentali. Questo Modello richiede l'esistenza di un campo "universale", il campo di Higgs, mediante il quale le particelle che conosciamo, mediatori e non, possono acquistare massa che, altrimenti, la teoria, basata su una opportuna simmetria di gauge locale, prevederebbe essere nulla.

Questa particella scalare è stata scoperta nel luglio del 2012 all'LHC del CERN di Ginevra, e ha una massa di circa 125 GeV .

Più complesso è il quadro delle particelle elementari.

Intanto, cosa intendiamo propriamente con l'aggettivo *elementare* ?

Chiaramente questa parola vuole richiamare il concetto di una entità non fatta di parti: una matryoska non la chiameremmo certo elementare !

Diremo allora che è elementare una particella che non ha (o meglio, di cui noi non conosciamo...) una struttura interna .

Ma è subito evidente come questo concetto non sia "assoluto": ciò che oggi ci appare elementare, domani potrebbe non apparirci più tale !

Dipende, infatti, dalla nostra attuale comprensione dell'oggetto, che, a sua volta, dipende dalla scala di energia a cui siamo capaci di osservarlo.

Se usiamo, per esempio, radiazione elettromagnetica (ma la conclusione ha valenza del tutto generale, grazie al principio di De Broglie, secondo il quale una particella di impulso p è descritta attraverso un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$), ecco che con fotoni di energia $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ potremo "vedere" solo particolari di dimensioni $D \geq \lambda = \frac{hc}{E}$; e questa è la ragione per la quale, volendo spingere la

posti a una distanza qualunque r : si ha

$$\frac{F_G}{F_{em}} = \frac{G m^2}{r^2} \frac{r^2}{e^2} = \frac{G m^2}{e^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-8} (1.67 \cdot 10^{-24})^2}{(4.8 \cdot 10^{-10})^2} \approx 0.8 \cdot 10^{-36}$$

nostra indagine a distanze sempre più piccole, occorre aumentare l'energia della sonda e quindi è necessario poter disporre di acceleratori sempre più potenti ...

Ma ritornando alla nostra domanda iniziale, dobbiamo quindi ammettere che ciò che oggi ci appare elementare, domani potrà non risultarlo più ed è proprio per questa ragione, dunque, che, parlando di una particella *elementare*, è più corretto farlo facendo sempre riferimento alla scala di energia del processo in cui essa è coinvolta.

Per esempio, si può trattare un nucleo come elementare fino a energie dell'ordine delle centinaia di keV , ma per energie più alte, occorrerà trattarlo come composto di neutroni e protoni ... E così pure i protoni e i neutroni sarà lecito considerarli "elementari" solo fino alla scala delle centinaia di MeV , ma dopo essi non appaiono più come puntiformi e, se vogliamo spiegare i dati sperimentali, occorre trattarli come composti di quarks² e gluoni ...

In conclusione, dipende dall'energia in gioco nel processo se una particella si *comporta* o no come "elementare", cioè senza struttura interna, fermo restando il fatto che esistono particelle le quali, per qualunque energia a noi oggi accessibile, si comportano *sempre* come elementari (ma non è detto, ovviamente, che, al crescere della stessa, questo comportamento non possa cambiare ...): sono solo queste le particelle che entrano nel Modello Standard (MS) come costituenti delle particelle *elementari*.

Viste le difficoltà insite nella definizione stessa di particella elementare, chiediamoci adesso se esistono caratteristiche che sono comunque loro *necessarie*.

La risposta è affermativa !

Infatti, procedendo solo sulla base di considerazioni del tutto generali legate alla invarianza relativistica e all'omogeneità dello spazio-tempo, a una particella elementare dobbiamo richiedere comunque di possedere almeno due caratteristiche intrinseche tipiche, che sono la massa m e lo spin s .

Poi, oltre a questo, per il fatto che tra le interazioni fondamentali c'è, per esempio, quella elettromagnetica, la particella sarà caratterizzata anche da altri attributi, come la sua carica elettrica, il momento magnetico, etc..., e infine, in relazione alle altre interazioni, potrà possedere carica barionica, stranezza, numero leptonic, e così via.

²Circa l'origine del nome *quark*, esiste tutta una leggenda in proposito ... Comunque, pare appropriato riferirsi direttamente alla fonte, cioè al padre del nome stesso, ovvero a Gell-Mann. Come riferisce H.W. Kendall nella sua *Nobel Lecture* dell'8 dicembre 1990 a pag. 679, *The word quork was invented by Murray Gell-Mann, who later found quark in the novel *Finnegan's Wake* by James Joyce, and adopted what has become the accepted spelling. Joyce apparently employed the word as a corruption of the word quart. The author is grateful to Murray Gell-Mann for a discussion clarifying the matter.*

La frase del libro di Joyce è "Three quarks for Munster Mark".

Va comunque ricordato per completezza che alcuni testi presentano invece la parola "quark" come una contrazione di "question mark" ...

Sempre a proposito del concetto di *particella elementare*, si osservi infine che c'è un altro modo che, intuitivamente, potrebbe sembrare utile per stabilirlo. E' quello di vedere se essa decade in altre particelle o meno.

Questa idea, però, suona molto bene ma è sbagliata. Essa presume infatti che, per esempio, se

$$A \rightarrow B + C$$

allora A sia fatta da B e C , ovvero B e C preesistano in A , per liberarsi al momento del decadimento. Questo è quanto accade, per esempio, in una reazione di dissociazione chimica, ma non vale, in generale, nella fisica delle particelle elementari.

Vediamo, per chiarire, un esempio ovvio.

Consideriamo un atomo eccitato, il quale si diseccita emettendo un fotone:

$$A^* \rightarrow A + \gamma$$

Il fotone era forse "racchiuso" nell'atomo eccitato ?

Certo che no! Il fotone ha avuto origine al momento della diseccitazione dell'atomo e non preesisteva.

Il punto è che il numero delle particelle, in genere, non si conserva (mentre in chimica³ il numero degli atomi, sì !).

Tornando adesso al Corso, per svolgere il programma, premetteremo alcuni richiami di Teoria dei Gruppi e di Relatività Ristretta.

³Questo avviene non perché le leggi della chimica siano diverse da quelle della fisica, ma solo per ragioni energetiche, essendo la scala dell'energia caratterizzante i processi chimici (eV) ben inferiore a quella per la quale potrebbero iniziare a manifestarsi, per esempio, processi di trasmutazione (MeV).

2 Alcuni richiami

2.1 Teoria dei Gruppi

La teoria dei Gruppi è lo strumento matematico con cui si trattano in Fisica gli aspetti legati alla Simmetria.

Un gruppo \mathcal{G} è un insieme in cui è definita una legge di composizione interna, che viene di solito indicata con il nome di "moltiplicazione", tale che

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} : g_1 \cdot g_2 \equiv g_1 g_2 \in \mathcal{G} \quad (2.1)$$

Affinché \mathcal{G} sia un gruppo con questa moltiplicazione, occorre che essa goda delle seguenti proprietà:

- sia associativa, i.e. $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$
- ammetta identità e (elemento neutro), i.e. $\exists e : \forall g \in \mathcal{G} : e g = g (= g e)$
- ogni elemento abbia inverso, i.e. $\forall g \in \mathcal{G}, \exists g^{-1} : g^{-1} g = e (= g g^{-1})$

Il gruppo è detto *abeliano* o *commutativo* se accade inoltre che

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} : g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad (2.2)$$

Si dimostra che in un gruppo, l'elemento neutro è unico, come pure che l'inverso di ogni elemento del gruppo è anch'esso unico.

Un sottoinsieme $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ è detto *sottogruppo* di \mathcal{G} se l'insieme degli elementi di \mathcal{H} costituiscono a loro volta un gruppo sotto la moltiplicazione definita in \mathcal{G} .

Si dimostra che questo accade se e solo se

$$\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H} : h_1 h_2^{-1} \in \mathcal{H} \quad (2.3)$$

Un sottogruppo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ è detto *normale* o *invariante* se accade che

$$\forall g \in \mathcal{G}, \forall h \in \mathcal{H} : g h g^{-1} \in \mathcal{H} \quad (2.4)$$

Un gruppo si dice *semplice* se non ha sottogruppi normali diversi dal gruppo stesso e dal sottogruppo fatto dalla sua sola identità. Si parla invece di gruppo *semisemplice* se esso non ammette sottogruppi normali abeliani.

Se \mathcal{H} è un sottogruppo invariante di \mathcal{G} , dato un qualsiasi elemento $g \in \mathcal{G}$, possiamo definire la classe laterale $[g\mathcal{H}]$ così definita

$$\forall g \in \mathcal{G} : [g\mathcal{H}] \equiv \{gh, h \in \mathcal{H}\} \quad (2.5)$$

Le classi laterali così definite sono disgiunte, ovvero se $[g_1\mathcal{H}]$ e $[g_2\mathcal{H}]$ hanno un elemento \tilde{g} in comune, allora le due classi coincidono, infatti

$$\exists \tilde{g} : \tilde{g} = g_1 h_1 = g_2 h_2 \Rightarrow g_2^{-1} g_1 = h_2 h_1^{-1} \equiv h \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists h \in \mathcal{H} : g_1 = g_2 h \quad (2.6)$$

e dunque

$$[g_1\mathcal{H}] = [g_2h\mathcal{H}] = [g_2\mathcal{H}] \quad (2.7)$$

Essendo \mathcal{H} invariante, risulta altresì

$$\forall g \in \mathcal{G} : [g\mathcal{H}] = [\mathcal{H}g] \quad (2.8)$$

L'insieme delle classi laterali così definite può essere dotato della struttura di gruppo, attraverso la seguente definizione di prodotto:

$$[g_1\mathcal{H}] \cdot [g_2\mathcal{H}] \equiv [g_1g_2\mathcal{H}] \quad (2.9)$$

per cui accade che l'elemento neutro è $[\mathcal{H}]$ stesso, mentre l'inverso dell'elemento $[g\mathcal{H}]$ è evidentemente $[g^{-1}\mathcal{H}]$: si tratta del *gruppo quoziente* \mathcal{G}/\mathcal{H} .

Dati adesso due gruppi \mathcal{G}_a e \mathcal{G}_b e una applicazione F dal primo nel secondo

$$F : \mathcal{G}_a \rightarrow \mathcal{G}_b \quad (2.10)$$

questa è un omomorfismo se accade che

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}_a : F(g_1g_2) = F(g_1)F(g_2) \quad (2.11)$$

In questo caso, è immediato che

- l'immagine dell'elemento neutro e_a di \mathcal{G}_a è l'elemento neutro e_b di \mathcal{G}_b , infatti ponendo $g_1 = e_a$ nella relazione (2.11), abbiamo evidentemente che

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{G}_a & : F(e_ag) \equiv F(g) = F(e_a)F(g) \\ \Rightarrow F(g)(F(g))^{-1} &= F(e_a)F(g)(F(g))^{-1} \Rightarrow e_b = F(e_a) \end{aligned} \quad (2.12)$$

- dato un qualunque elemento $g_a \in \mathcal{G}_a$, risulta

$$F(g_a^{-1}) = (F(g_a))^{-1} \quad (2.13)$$

infatti, per quanto visto sopra

$$\forall g \in \mathcal{G}_a : F(gg^{-1}) = F(e_a) = e_b \quad (2.14)$$

e d'altronde, essendo F un omomorfismo, si ha⁴

$$e_b = F(gg^{-1}) = F(g)F(g^{-1}) \Rightarrow (F(g))^{-1} = F(g^{-1}) \quad (2.15)$$

⁴Si osservi che la (2.15) non stabilisce nulla quanto alla funzione inversa (che potrebbe anche non esistere se F non è iniettiva), ma solo che, qualunque sia $g \in \mathcal{G}_a$, l'elemento inverso secondo la legge di moltiplicazione in \mathcal{G}_b di $F(g)$ coincide con il valore assunto dall'omomorfismo F su g^{-1} .

L'omomorfismo può non essere iniettivo, nel qual caso esso non è invertibile: in ogni caso la controimmagine dell'identità $e_b \in \mathcal{G}_b$, cioè il *kernel* (nucleo) \mathcal{K} dell'omomorfismo, è un sottogruppo⁵ di \mathcal{G}_a , infatti dalla definizione abbiamo che

$$\mathcal{K} \equiv \{F^{-1}(e_b)\} \subset \mathcal{G}_a \Leftrightarrow \mathcal{K} \equiv \{k_i \in \mathcal{G}_a : F(k_i) = e_b\} \quad (2.16)$$

e risulta

$$\forall k_1, k_2 \in \mathcal{K} : F(k_1 k_2^{-1}) = e_b e_b^{-1} = e_b \Rightarrow k_1 k_2 \in \mathcal{K} \quad (2.17)$$

Il kernel \mathcal{K} è un sottogruppo invariante, infatti

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{G}_a, \forall k \in \mathcal{K} : F(g k g^{-1}) &= F(g)F(k)F(g^{-1}) = \\ &= F(g)e_b(F(g))^{-1} = e_b \Leftrightarrow g k g^{-1} \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (2.18)$$

dunque se \mathcal{G}_a è semplice, i suoi omomorfismi sono sempre iniettivi.

L'omomorfismo può non essere suriettivo: in ogni caso l'immagine \mathcal{I} del gruppo \mathcal{G}_a secondo l'omomorfismo F è un sottogruppo di \mathcal{G}_b , infatti se $i_1 = F(g_1)$ ed $i_2 = F(g_2)$ sono due elementi di \mathcal{I} , allora anche il loro prodotto sta in \mathcal{I} poiché

$$i_1 i_2^{-1} = F(g_1) F(g_2^{-1}) = F(g_1 g_2^{-1})$$

e dunque esiste un elemento di \mathcal{G}_a di cui $i_1 i_2^{-1}$ è immagine secondo F .

Nel caso in cui l'omomorfismo sia biiettivo (iniettivo e suriettivo), si parla di *isomorfismo*. Se poi $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_b$ allora invece che di omomorfismo si parla di *endomorfismo* e invece di isomorfismo si parla di *automorfismo*.

Dato un qualunque omomorfismo F , esso definisce in modo naturale un isomorfismo fra il gruppo quoziente $\mathcal{G}_a/\mathcal{K}$ e il gruppo \mathcal{I} , immagine di \mathcal{G}_a in \mathcal{G}_b .

Per esempio, l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili a valori complessi $GL_n(\mathcal{C})$ con l'usuale prodotto fra matrici (righe per colonne) costituiscono il *gruppo generale lineare* di ordine n in \mathcal{C} e l'applicazione

$$Det : M \in GL_n(\mathcal{C}) \rightarrow det(M) \in \mathcal{C} \quad (2.19)$$

è un omomorfismo nel gruppo (con il prodotto) dei numeri complessi privati dello zero. Esso è ovviamente suriettivo ma non iniettivo e il kernel è fatto dalle matrici di $GL_n(\mathcal{C})$ con determinante $+1$, mentre le classi laterali sono gli insiemi di matrici di $GL_n(\mathcal{C})$ aventi lo stesso valore del determinante.

⁵Evidentemente, nel caso di un omomorfismo iniettivo, questo sottogruppo è fatto solo dall'elemento identico di \mathcal{G}_a ...

2.2 Rappresentazioni

Con questo nome si indica un omomorfismo a valori nel gruppo degli operatori lineari e invertibili i quali agiscono in un opportuno spazio vettoriale \mathcal{V} sul corpo reale o complesso, di dimensione finita o infinita, fra i quali l'operazione di composizione interna è il prodotto ordinario fra operatori, cioè la loro applicazione in successione.

Questo gruppo va sotto il nome di *gruppo generale lineare* su \mathcal{V} e viene indicato con il simbolo $GL(\mathcal{V})$. Una rappresentazione di un gruppo \mathcal{G} è un omomorfismo

$$T : \mathcal{G} \rightarrow GL(\mathcal{V}) \quad (2.20)$$

Se poi \mathcal{V} è uno spazio di Hilbert e l'omomorfismo ha valori nel sottogruppo degli operatori unitari, allora la rappresentazione si dice *unitaria*.

Se l'omomorfismo è iniettivo, si parla di rappresentazione *fedele*.

Nel caso di spazi vettoriali di dimensione finita e dunque, fissata una base, isomorfi a \mathcal{R}^n o \mathcal{C}^n , la rappresentazione può equivalentemente essere vista a valori nel gruppo delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti reali o complessi $GL_n(\mathcal{R})$ o $GL_n(\mathcal{C})$. Evidentemente il generico elemento del gruppo $g \in \mathcal{G}$ associato alla trasformazione lineare $T(g)$, sarà univocamente associato a una matrice $M(g)$ la quale dipende dalla base scelta in \mathcal{V} . Se B è la matrice che descrive il cambiamento di base, la matrice $M'(g)$, che esprime la stessa trasformazione $T(g)$ nella nuova base $e' = B e$, sarà comunque legata alla matrice $M(g)$ dalla relazione

$$M'(g) = B \cdot M(g) \cdot B^{-1} \quad (2.21)$$

M ed M' sono dette *rappresentazioni equivalenti* e la relazione (2.21) è detta *relazione di verosimiglianza*.

Data una rappresentazione $M(g)$ di un gruppo \mathcal{G} a valori in $GL_n(\mathcal{C})$, possiamo definire tre altre rappresentazioni canonicamente definite attraverso M , i.e.

- la rappresentazione complessa coniugata

$$\forall g \in \mathcal{G} : g \rightarrow (M(g))^* \quad (2.22)$$

- la rappresentazione trasposta-inversa

$$\forall g \in \mathcal{G} : g \rightarrow (M(g^{-1}))^t \quad (2.23)$$

- la rappresentazione hermitiana-inversa

$$\forall g \in \mathcal{G} : g \rightarrow (M(g^{-1}))^\dagger \quad (2.24)$$

le quali possono o no essere equivalenti a M .

Un sottospazio lineare \mathcal{U} di \mathcal{V} è detto *invariante* sotto una rappresentazione T di un gruppo \mathcal{G} se accade che

$$\forall g \in \mathcal{G} : T(g) \mathcal{U} = \mathcal{U} \quad (2.25)$$

ovvero \mathcal{U} è invariante quando accade che tutte le trasformazioni lineari $T(g)$ mandano \mathcal{U} in sé. In altri termini, se P è l'operatore di proiezione da \mathcal{V} in \mathcal{U} , affinché \mathcal{U} sia invariante sotto $T(g)$ occorre e basta che

$$\forall g \in \mathcal{G} : P T(g) P = T(g) P \quad (2.26)$$

Chiaramente, data la definizione di cui sopra, esistono due sottospazi invarianti *banali*, i.e.

$$\mathcal{U} = \mathcal{V}; \quad \mathcal{U} = \{\Omega\} \quad (2.27)$$

dove Ω è l'elemento identico in \mathcal{V} , cioè il vettore nullo.

Una rappresentazione T di un gruppo \mathcal{G} a valori nel gruppo degli operatori lineari invertibili agenti in uno spazio vettoriale \mathcal{V} è detta *irriducibile* se non ammette sottospazi invarianti non banali.

Se una rappresentazione non soddisfa questo criterio, essa è detta *riducibile*.

Una rappresentazione è *completamente riducibile* se lo spazio lineare \mathcal{V} può essere decomposto in somma diretta di sottospazi invarianti, in ciascuno dei quali la restrizione della rappresentazione T risulta irriducibile.

Una rappresentazione irriducibile è tale per cui, preso un qualunque vettore non nullo dello spazio lineare \mathcal{V} , applicando a esso tutti gli operatori lineari $T(g)$ si finisce per generare un insieme di vettori denso in \mathcal{V} , ovvero tale per cui è possibile esprimere attraverso questi vettori un qualsiasi vettore di \mathcal{V} .

Nel caso di gruppi finiti, cioè costituiti da un numero finito di elementi, si dimostra che ogni rappresentazione è equivalente a una rappresentazione unitaria: nel caso di rappresentazioni unitarie, particolarmente importanti in Fisica perché traducono l'azione delle trasformazioni di simmetria nello spazio di Hilbert dei vettori di stato, indipendentemente dalla dimensione del gruppo, le rappresentazioni sono comunque irriducibili o completamente riducibili.

Infatti se T è unitaria e riducibile, allora esiste per ipotesi un proiettore non banale P per il quale

$$P T(g) P = T(g) P \quad (2.28)$$

Prendendo allora l'aggiunto e ricordando che $P^\dagger = P$, abbiamo

$$P (T(g))^\dagger P = P (T(g))^\dagger \quad (2.29)$$

ma essendo T unitaria

$$(T(g))^\dagger = (T(g))^{-1} = T(g^{-1}) \quad (2.30)$$

e siccome, al variare di g in \mathcal{G} , g^{-1} può assumere un qualunque valore in \mathcal{G} , possiamo concludere che, nel caso di rappresentazioni unitarie, deve essere altresì che

$$PT(g)P = PT(g) \quad (2.31)$$

e dunque, per la (2.28) e la ((2.31)), avremo che

$$\begin{aligned} (1-P)T(g)(1-P) &= T(g)(1-P) - PT(g)(1-P) = \\ &= T(g) - T(g)P - PT(g) + PT(g)P = \\ &= T(g) - T(g)P - PT(g)P + PT(g)P = \\ &= T(g) - T(g)P = T(g)(1-P) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Risulta così dimostrato che anche il proiettore $(1-P)$ seleziona un sottospazio invariante, che è ovviamente complementare a quello di partenza.

Così procedendo, si dimostra la completa riducibilità della rappresentazione data.

La rilevanza delle rappresentazioni irriducibili sta in una loro proprietà nota come *Lemma di Schur*. Questo lemma afferma che se $T(g)$ è una rappresentazione irriducibile di un gruppo, se A è un operatore che commuta con tutti gli operatori $T(g)$, allora A è multiplo dell'identità, i.e.

$$\forall g \in \mathcal{G} : T(g)A = AT(g) \Rightarrow A \propto I \quad (2.33)$$

La dimostrazione si basa sul fatto che A ammetterà⁶ almeno un autovalore λ e dunque un sottospazio lineare U_λ non banale di autovettori a esso corrispondenti, per il quale, quindi

$$w \in U_\lambda \Leftrightarrow Aw = \lambda w \quad (2.34)$$

Accade dunque che, se A commuta con tutti i $T(g)$, allora

$$\forall w \in U_\lambda : AT(g)w = T(g)Aw = \lambda T(g)w \quad (2.35)$$

e dunque $T(g)w$ è ancora autovettore di A per l'autovalore λ , ovvero $T(g)w \in U_\lambda$. Ne segue quindi che U_λ è invariante sotto T e dunque, non potendo coincidere, per la sua stessa definizione, con il sottospazio fatto dal solo vettore nullo, occorre, per l'ipotesi della irriducibilità di T , che esso coincida con l'intero spazio lineare, da cui la conclusione che $A = \lambda I$.

⁶E' facile vedere che, siccome ogni matrice ammette almeno un autovalore e quindi almeno un autovettore, questo è vero in dimensione finita. Resta vero anche nel caso di dimensione infinita, almeno se A è autoaggiunto.

2.3 Gruppi di Lie

Un gruppo \mathcal{G} è un *gruppo di Lie* quando

- possiede una struttura topologica, per cui la moltiplicazione è una funzione continua;
- è parametrizzabile attraverso n variabili⁷ reali indipendenti $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ appartenenti a un opportuno sottoinsieme \mathcal{S} di \mathcal{R}^n , i.e.

$$\forall g \in \mathcal{G}, \exists \mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S} : g = g(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

- La parametrizzazione è una funzione continua e analitica⁸, ovvero, posto

$$g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) \equiv g(F(\mathbf{x}, \mathbf{y})); \quad (g(\mathbf{x}))^{-1} \equiv g(f(\mathbf{x})) \quad (2.37)$$

le due funzioni F e f sono analitiche.

Il gruppo è detto *compatto* se l'insieme S dei parametri è compatto in \mathcal{R}^n .



Figure 2: *Marius Sophus Lie (1842-1899)*

Dato un gruppo di Lie, una applicazione analitica $\mathbf{x}(t)$ da un segmento di \mathcal{R} nel dominio \mathcal{S} dei parametri, induce in modo naturale un *cammino continuo* in \mathcal{G} nel modo seguente

$$t \rightarrow g(\mathbf{x}(t)) \equiv g(t) \quad (2.38)$$

⁷La quantità n è detta *dimensione* del gruppo.

⁸Con questo termine intendiamo dire che la funzione è infinitamente differenziabile.

- Due elementi g_1 e g_2 di \mathcal{G} si dicono *connessi* se si può trovare un cammino che li unisce.
- Se tutte le coppie di elementi di \mathcal{G} sono connesse, allora il gruppo si dice a sua volta *connesso*. Questo significa che, dati comunque due elementi del gruppo, si può passare con continuità dall'uno all'altro.
- Se consideriamo i cammini chiusi all'interno del gruppo \mathcal{G} , può succedere che, dato comunque uno di questi, esso possa essere ridotto con continuità a un punto. In questo caso il gruppo è detto *semplicemente connesso*.
- Se si considerano tutti i cammini chiusi in \mathcal{G} , si può introdurre in questo insieme una relazione per cui due cammini risultano equivalenti se sono deformabili in modo continuo uno nell'altro: il numero delle classi di equivalenza in cui l'insieme si decompone è detta la *connettività* del gruppo⁹.

Un gruppo \mathcal{G} , quindi, è semplicemente connesso se ha connettività pari a 1.

2.4 Algebre di Lie

Uno strumento fondamentale per trattare le proprietà dei gruppi di Lie è quello delle *algebre di Lie*. Un'algebra di Lie \mathcal{A} è uno spazio vettoriale sul corpo reale¹⁰ di dimensione finita, nel quale è definita una operazione di composizione interna

$$\forall x, y \in \mathcal{A} : [x, y] \in \mathcal{A} \quad (2.39)$$

la quale si chiama *prodotto di Lie* e gode delle seguenti proprietà:

- è antisimmetrica, i.e.

$$\forall x, y \in \mathcal{A} : [x, y] = -[y, x] \quad (2.40)$$

- è lineare, i.e.

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R} : [x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z] \quad (2.41)$$

- soddisfa l'identità di Jacobi, ovvero accade che

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (2.42)$$

⁹Come avremo modo di vedere, il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni in tre dimensioni, fatto dalle matrici reali e ortogonali 3×3 , ha connettività 2 (come tutti i gruppi $SO(n)$ con $n > 2$) e quindi non è semplicemente connesso, come accade invece per $SU(2)$ e per tutti i gruppi $SU(n)$, che quindi hanno connettività 1.

¹⁰Le algebre di Lie possono essere definite anche sul corpo complesso, ma, per i nostri scopi, questo non è necessario.

Poiché \mathcal{A} è uno spazio lineare di dimensione finita, esso ammetterà una base fatta da un numero finito n di suoi elementi. Sia dunque A_1, \dots, A_n una base in \mathcal{A} . Essendo il prodotto di Lie una operazione di composizione interna, $[A_i, A_j]$ sarà ancora un elemento di \mathcal{A} e dunque, per definizione di base, avremo

$$\forall i, j = 1, \dots, n : [A_i, A_j] = C_{ij}^m A_m \quad (2.43)$$

I coefficienti C_{ij}^m sono le *costanti di struttura* dell'algebra \mathcal{A} e, pur dipendendo dalla base scelta, determinano completamente le caratteristiche dell'algebra.

2.5 Algebre e gruppi di Lie

Veniamo adesso a studiare il legame esistente fra le algebre e i gruppi di Lie. Per fare questo, non tratteremo il caso astratto, bensì quello in cui è data una rappresentazione fedele dell'algebra, a valori nello spazio lineare sul corpo reale \mathcal{M}_p fatto dalle matrici $p \times p$ in generale complesse, rappresentazione che, per i nostri scopi, confonderemo con l'algebra \mathcal{A} stessa.

Iniziamo osservando che se lo spazio \mathcal{M}_p è reso metrico attraverso la norma

$$\|A\| \equiv \sqrt{\sum_{i,j=1}^p |A_{ij}|^2} \quad (2.44)$$

allora la serie *esponenziale* così definita¹¹

$$e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{m!}A^m + \dots \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m \quad (2.46)$$

risulta assolutamente convergente in \mathcal{M}_p .

Vogliamo adesso dimostrare che l'insieme \mathcal{E} di tutte le matrici e^A con $A \in \mathcal{A}$ costituisce un sottogruppo di $GL_p(\mathcal{C})$.

Per fare questo occorre dimostrare che l'identità, il prodotto di due elementi e l'inverso di ciascun elemento appartenente a \mathcal{E} , sono ancora elementi di \mathcal{E} .

¹¹Una proprietà importante della forma esponenziale e^A è quella per cui

$$\text{Det}(e^A) = e^{\text{Tr}(A)} \quad (2.45)$$

e dunque le matrici e^A hanno comunque determinante non nullo per cui sono certamente invertibili, ovvero sono elementi del gruppo $GL_p(\mathcal{C})$. Si noti in particolare che solo le matrici A con traccia nulla generano, per esponenziazione, matrici con determinante unitario.

La proprietà (2.45) è facile da dimostrare nel caso in cui A sia diagonalizzabile, ma ha validità generale perché ogni matrice finita (lemma di Jordan) può comunque essere posta nella forma $A = M T M^{-1}$, dove M è una opportuna matrice invertibile mentre T è una matrice triangolare, ovvero tale che $T_{ij} = 0$ se $i > j$ e le matrici triangolari godono della proprietà per cui la loro forma è stabile sotto il prodotto, mentre risulta che $\forall i : (T^n)_{ii} = (T_{ii})^n$.

Iniziamo dall'identità. Evidentemente, se 0 è l'elemento neutro per la somma in \mathcal{A} , dalla definizione (2.46) risulta che

$$e^0 = I \quad \Rightarrow \quad I \in \mathcal{E} \quad (2.47)$$

Veniamo ora al prodotto $e^A e^B$: qui è necessario ricordare che, in generale, risulta

$$e^A e^B = e^C \quad (2.48)$$

dove la matrice C è definita attraverso le matrici A e B dalla formula di Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), secondo cui

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}\{[A, [A, B]] - [B, [A, B]]\} - \frac{1}{24}[A, [B, [A, B]]] + \dots \quad (2.49)$$

Poiché \mathcal{A} , in quanto algebra di Lie, è chiusa sotto l'operazione rappresentata dal commutatore, possiamo evidentemente concludere che

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : C \in \mathcal{A} \quad (2.50)$$

e dunque, vista la (2.48), è provato che l'insieme \mathcal{E} è chiuso sotto l'operazione di prodotto.

Resta da dimostrare che, per un qualunque $A \in \mathcal{A}$, l'inverso di e^A è ancora l'esponenziale di un opportuno elemento dell'algebra \mathcal{A} . Ma, per quanto detto sopra, evidentemente

$$\forall A \in \mathcal{A} : (e^A)^{-1} = e^{-A} \quad (2.51)$$

Dunque, data un'algebra di Lie \mathcal{A} di matrici quadrate di ordine p , le matrici e^A costituiscono un gruppo (sottogruppo di $GL_p(\mathcal{C})$) che chiameremo $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Dalla definizione è del tutto ovvio che il gruppo $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ così individuato dall'algebra di Lie delle matrici di \mathcal{A} è un gruppo di Lie. Infatti, se A_1, \dots, A_n è una base in \mathcal{A} , allora ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ sarà individuato da una opportuna n -tupla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ (non necessariamente unica) per cui

$$A = \sum_{i=1}^n x_i A_i \quad (2.52)$$

e dunque

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) \rightarrow e^{x_i A_i} = e^A \quad (2.53)$$

è una parametrizzazione di $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ che, vista la formula BCH , è analitica e dunque possiamo concludere che $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ è un gruppo di Lie.

Dunque, un'algebra di Lie di matrici quadrate di ordine p individua in modo

canonico la rappresentazione di un gruppo di Lie, attraverso l'operazione di esponenziazione degli elementi dell'algebra stessa.

Vale anche il viceversa, infatti se \mathcal{G} è una rappresentazione non banale di un gruppo di Lie, questa definisce in modo naturale la rappresentazione di un'algebra di Lie la quale, per esponenziazione, riproduce la rappresentazione del gruppo di partenza (almeno in un intorno dell'identità).

Lie lo ha dimostrato in generale¹², per gruppi e algebre astratte, ma noi limitiamoci a considerare il caso in cui $\hat{G}(\mathbf{x})$ sia una parametrizzazione di \mathcal{G} a valori in $GL_p(\mathcal{C})$, definita in un intorno dell'elemento neutro $e \in \mathcal{G}$, il quale, senza perdita di generalità, possiamo immaginare sia ottenuto per $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) = 0 \in R^n$, cosa che implica che lo spazio dei parametri sia un opportuno intorno del vettore nullo di R^n . Poniamo dunque

$$A_k \equiv \left. \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_k} \right|_{x=0}, \quad k = 1, n \quad (2.54)$$

Le matrici A_k costituiscono una base dello spazio vettoriale sul corpo reale, tangente a $\hat{G}(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$: la loro forma esplicita dipende dalla parametrizzazione scelta, mentre lo spazio tangente dipende unicamente dalla struttura del gruppo \mathcal{G} (intorno al suo elemento neutro ...).

Questo significa che, in un opportuno intorno dell'identità, potremo sempre rappresentare il generico elemento del gruppo come

$$\hat{G}(d\mathbf{x}) = I + A_k \cdot dx_k + \dots \quad (2.55)$$

Gli operatori $A_k \in \mathcal{M}(p)$ sono chiamati *generatori* del gruppo \mathcal{G} o, più propriamente, essi costituiscono una rappresentazione dei generatori del gruppo \mathcal{G} .

Se vogliamo adesso passare a descrivere elementi del gruppo via via più distanti dall'identità, esiste a priori una enorme libertà di scelta della parametrizzazione di cui, quella data, è solo un esempio.

In particolare possiamo procedere in una direzione fissata dello spazio dei parametri, semplicemente elevando a opportuna potenza l'elemento infinitesimo dato dalla (2.55) troncata al primo ordine. Questa possibilità suggerisce allora di definire la seguente parametrizzazione *esponenziale* di \mathcal{G}

$$G(\mathbf{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A_k x_k}{m} \right)^m = e^{A \cdot \mathbf{x}} \quad (2.56)$$

la quale, per come è definita, coincide con la parametrizzazione \hat{G} in tutto un intorno dell'identità, dove, appunto, le due parametrizzazioni conducono agli stessi

¹²Lie ha provato che, in astratto, un gruppo di Lie definisce univocamente un'algebra di Lie, ma il viceversa non è altrettanto vero. L'algebra definisce univocamente il gruppo di ricoprimento universale (vedi oltre).

generatori.

Il punto importante è che lo spazio vettoriale n -dimensionale sul corpo reale generato dagli A_k costituisce, con il commutatore, un'algebra di Lie chiusa di cui \mathcal{G} è, per quanto visto, il risultato dell'esponenziazione.

Consideriamo infatti due generici elementi dello spazio tangente

$$X \equiv x_i A_i; \quad Y \equiv y_j A_j \quad (2.57)$$

Per quanto detto, se α è un generico numero reale, allora, tanto

$$G(\mathbf{y}) = e^{y_j A_j} \equiv e^Y \quad (2.58)$$

come pure

$$G(\alpha \mathbf{x}) = e^{\alpha x_i A_i} \equiv e^{\alpha X} \quad (2.59)$$

sono elementi del gruppo. Consideriamo allora la funzione

$$F(\alpha) = e^{\alpha X} e^Y e^{-\alpha X} e^{-Y} \quad (2.60)$$

Evidentemente, qualunque sia α , $F(\alpha)$ è un elemento del gruppo, essendo prodotto di suoi elementi e la parametrizzazione è analitica. Poiché $F(0) = I$, possiamo concludere che

$$F(d\alpha) = I + d\alpha \left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{t=0} + \dots \quad (2.61)$$

ovvero che $\left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ è necessariamente un elemento dello spazio tangente definito dai generatori A_k . D'altronde, dalla definizione segue che

$$H \equiv \left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{t=0} = X - e^Y X e^{-Y} \quad (2.62)$$

e si può dimostrare¹³ che

$$S \equiv e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots + \frac{1}{n!}[Y, [Y, \dots[Y, X]]] + \dots \quad (2.66)$$

¹³Definiamo infatti la funzione

$$X(\epsilon) \equiv e^{\epsilon Y} X e^{-\epsilon Y} \Rightarrow X(1) = S \quad (2.63)$$

e sviluppiamola in serie di Taylor intorno a $\epsilon = 0$: essendo

$$\frac{dX}{d\epsilon} = [Y, X(\epsilon)] \quad (2.64)$$

ogni operazione di derivazione conduce ad una espressione con un commutatore in più, i.e.

$$\frac{d^n X}{d\epsilon^n} = [Y, [Y, \dots[Y, X(\epsilon)]]], \text{ dove le } Y \text{ sono } n \quad (2.65)$$

Quindi, dato che $X(0) = X$, essendo $X(1) = S$, lo sviluppo di Taylor conduce immediatamente, per quanto detto sopra circa le derivate, alla (2.66)

per cui risulta che

$$H = - \left\{ [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \dots + \frac{1}{n!} [Y, [Y, \dots [Y, X]]] + \dots \right\} \quad (2.67)$$

e il fatto che H debba appartenere allo spazio tangente implica necessariamente, vista la forma di X e Y , che i commutatori dei generatori riproducano se stessi, ovvero che l'algebra di Lie costruita con essi sia chiusa.

Risulta dunque chiaro lo stretto legame esistente fra rappresentazioni di algebre di Lie e rappresentazioni di gruppi di Lie e viceversa.

A livello astratto, la teoria dei gruppi di Lie, con il *teorema di Ado*, stabilisce poi che, a meno di isomorfismi, esiste un solo gruppo di Lie semplicemente connesso avente un'algebra di Lie assegnata: questo gruppo è detto *il gruppo di ricoprimento universale* per quella data algebra. Per ogni altro gruppo che possieda la stessa algebra esiste un opportuno omomorfismo che mappa il gruppo di ricoprimento universale nel gruppo dato e la dimensione del kernel di questo omomorfismo è pari alla connettività del gruppo dato.

2.6 Le trasformazioni di Lorentz

Coerentemente con il Principio di Relatività (ristretta), le trasformazioni di Lorentz descrivono le trasformazioni omogenee di coordinate spazio-temporali che si riferiscono a uno stesso evento, visto da due riferimenti inerziali.

Nel caso non omogeneo, a queste si aggiungono le traslazioni e le trasformazioni che ne conseguono vanno sotto il nome di *trasformazioni di Poincaré*.



Figure 3: *Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)*

Le trasformazioni di Lorentz devono essere trasformazioni lineari¹⁴, per non violare l'isotropia e l'omogeneità dello spazio-tempo, e dunque sono descritte da matrici reali 4×4 che indicheremo con $(\Lambda)_{\mu\nu} \equiv \Lambda_{\nu}^{\mu}$.

Dovendo esse garantire l'invarianza del ds^2 , devono essere tali per cui

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^{\mu} dx_{\mu} \equiv dx^{\mu} dx^{\nu} g_{\mu\nu} = ds'^2 = dx'^{\mu} dx'^{\nu} g_{\mu\nu} = \\ &= \Lambda_{\sigma}^{\mu} dx^{\sigma} \Lambda_{\rho}^{\nu} dx^{\rho} g_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} g_{\mu\nu} = g_{\sigma\rho} \end{aligned} \quad (2.68)$$

dove $g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico ($g^{00} = 1$, $g^{ii} = -1$).

¹⁴Da un punto di vista strettamente fisico, si può osservare che queste trasformazioni dovranno mandare le leggi orarie del moto rettilineo e uniforme in sé, ovvero se $\vec{x} = \vec{x}(t)$ è l'equazione di una retta nel riferimento inerziale RS , allora, in qualunque altro riferimento inerziale RS' la legge oraria di quel moto dovrà comunque essere rappresentata dall'equazione di una retta. L'unico modo affinché questo possa accadere sempre è che la trasformazione che lega le coordinate spazio-temporali nei due riferimenti sia una trasformazione lineare.

Se definiamo¹⁵ allora

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda_{\beta}^{\alpha} g^{\beta\nu} \quad (2.69)$$

ne segue che, dalla (2.68), si ha

$$\Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} g_{\mu\nu} g^{\rho\tau} = g_{\sigma\rho} g^{\rho\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau} \Rightarrow \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau} \quad (2.70)$$

i.e., ricordando che $g^2 = I$

$$\Lambda^t g \Lambda g = I \Leftrightarrow g \Lambda^t g \Lambda = I \Leftrightarrow \Lambda^{-1} = g \Lambda^t g \Leftrightarrow \Lambda = g (\Lambda^t)^{-1} g \quad (2.71)$$

ovvero

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{0j} \\ \Lambda_{i0} & \Lambda_{ij} \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & -\Lambda_{i0} \\ -\Lambda_{0j} & \Lambda_{ji} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

La condizione (2.71) definisce un sottogruppo¹⁶ del gruppo $GL_4(\mathcal{R})$. Queste matrici sono tali che

$$\det(\Lambda) = \det(\Lambda^{-1}) \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \quad (2.73)$$

Si tratta del *gruppo di Lorentz esteso* \mathcal{L} .

Una prima proprietà che discende in modo immediato dalla (2.71) per il fatto che la matrice g è simmetrica, è evidentemente che

$$\Lambda \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \Lambda^t \in \mathcal{L} \quad (2.74)$$

Essendo poi la (2.71) chiaramente indipendente dal segno, ecco che sarà altresì

$$\Lambda \in \mathcal{L} \Leftrightarrow -\Lambda \in \mathcal{L} \quad (2.75)$$

Le matrici del gruppo di Lorentz con determinante +1 costituiscono un sottogruppo di \mathcal{L} , indicato con il nome di *gruppo di Lorentz "proprio"* \mathcal{L}_+ .

¹⁵Si osservi che, dal punto di vista strettamente matriciale risulta semplicemente

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = (g \Lambda g)_{\mu\nu}$$

¹⁶Le matrici Λ definite attraverso la condizione (2.71) sono, evidentemente, reali e invertibili per ipotesi, dunque appartenenti al gruppo $GL_4(\mathcal{R})$. Costituiscono un sottogruppo se, date comunque le matrici Λ_1 e Λ_2 che verificano la (2.71), allora anche la matrice $\Lambda_1 \Lambda_2^{-1}$ soddisfa la stessa condizione. Infatti

$$(\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})^{-1} = \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} = g (\Lambda_2^t)^{-1} g g \Lambda_1^t g = g (\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})^t g$$

Dalla relazione (2.70)

$$\Lambda_{\cdot\sigma}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\cdot\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau}$$

per $\sigma = \tau = 0$ si ha che

$$\Lambda_{\cdot 0}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\cdot 0} = \delta_0^0 = 1$$

ovvero

$$(\Lambda)_{00}^2 - (\Lambda)_{10}^2 - (\Lambda)_{20}^2 - (\Lambda)_{30}^2 = 1 = (\Lambda)_{00}^2 - (\Lambda)_{01}^2 - (\Lambda)_{02}^2 - (\Lambda)_{03}^2 \quad (2.76)$$

dove abbiamo, al solito, indicato, con $(\Lambda)_{\mu\nu}$ l'elemento corrispondente alla riga μ e colonna ν della matrice di Lorentz considerata e si è tenuto conto che se $\Lambda \in \mathcal{L}$, allora anche $\Lambda^t \in \mathcal{L}$.

Evidentemente, dalla (2.76), segue immediatamente che

$$(\Lambda)_{00}^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\Lambda)_{00} \geq 1 \text{ oppure } (\Lambda)_{00} \leq -1 \quad (2.77)$$

Le matrici di \mathcal{L}_+ con $(\Lambda)_{00} \geq 1$ costituiscono anch'esse un sottogruppo¹⁷, detto gruppo di Lorentz "ortocrono proprio" \mathcal{L}_+^{\uparrow} .

¹⁷Vogliamo dimostrare che gli elementi di \mathcal{L}_+ che hanno $(\Lambda)_{00} \geq 1$ formano un sottogruppo. Per questo, di nuovo, occorre dimostrare che se Λ_1 e Λ_2 sono tali che $(\Lambda_1)_{00} \geq 1$ e $(\Lambda_2)_{00} \geq 1$, allora anche $(\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})_{00} \geq 1$. Risulta

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})_{00} &\equiv (\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})_{\cdot 0}^0 = (\Lambda_1)_{\cdot \mu}^0 (\Lambda_2^{-1})_{\cdot 0}^{\mu} = (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2^{-1})_{00} + (\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2^{-1})_{i0} = \\ &= (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00} - (\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{0i} \end{aligned} \quad (2.78)$$

dove si è usato il fatto che $(\Lambda_2^{-1})_{00} = (\Lambda_2)_{00}$ e che $(\Lambda_2^{-1})_{i0} = -(\Lambda_2)_{0i}$. Dalla disuguaglianza triangolare abbiamo però che

$$\left| \sum_i (\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{0i} \right|^2 \leq \sum_i (\Lambda_1)_{0i}^2 \cdot \sum_i (\Lambda_2)_{0i}^2$$

e, dalla (2.76), risulta che

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)_{00}^2 &> \sum_i (\Lambda_1)_{0i}^2 \\ (\Lambda_2)_{00}^2 &> \sum_i (\Lambda_2)_{0i}^2 \end{aligned}$$

ovvero, essendo per ipotesi $(\Lambda_1)_{00} \geq 1$ e $(\Lambda_2)_{00} \geq 1$, si ha

$$\left| \sum_i (\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{0i} \right|^2 < (\Lambda_1)_{00}^2 (\Lambda_2)_{00}^2 \Rightarrow \left| \sum_i (\Lambda_1)_{0i} (\Lambda_2)_{0i} \right| < (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00}$$

per cui, evidentemente, il segno di $(\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})_{00}$ sarà quello stesso di $(\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00}$, i.e., nel nostro caso sarà positivo. Siccome abbiamo già dimostrato che questa stessa quantità o è ≥ 1 oppure è ≤ -1 , risulta così dimostrato che $(\Lambda_1 \Lambda_2)_{00} \geq 1$.

Le trasformazioni di Lorentz che hanno $\det(\Lambda) = -1$ sono dette *improprie* mentre quelle per cui $\Lambda_{00} \leq -1$ sono dette *anticrone*: né le prime né le seconde costituiscono un sottogruppo, non essendo stabili sotto la legge di composizione interna (per es. il prodotto di due trasformazioni improprie è una trasformazione propria, come pure quello di due anticrone è ortocrona).

La rilevanza delle trasformazioni di Lorentz *ortocrone* sta nel fatto che esse non possono alterare l'ordine temporale di due eventi legati fra loro da una relazione di causa-effetto. Infatti se in un riferimento inerziale sono dati due eventi¹⁸ (t_1, \vec{x}_1) e (t_2, \vec{x}_2) tali che $(t_1 - t_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2) \equiv (\Delta t, \vec{\Delta x})$ è un quadrivettore di tipo tempo, e dunque tale che $|\Delta t| > |\vec{\Delta x}|$, ecco che in un altro sistema di riferimento connesso al primo da una trasformazione di \mathcal{L}_+^\uparrow , avremo

$$\Delta t' = \Lambda_{00}\Delta t + \Lambda_{0i}\Delta x_i = \Lambda_{00}\Delta t + \sqrt{\sum_i (\Lambda_{0i})^2} |\vec{\Delta x}| \cos\theta$$

ed essendo $\Lambda_{00} \geq \sqrt{\sum_i (\Lambda_{0i})^2} > 0$ e $|\Delta t| > |\vec{\Delta x}|$, è evidente che il segno di $\Delta t'$ non potrà che coincidere con quello di Δt .

Il gruppo di Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow è un sottogruppo invariante di \mathcal{L} . Il gruppo quoziente che esso definisce, $\mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow$, è fatto dalle seguenti quattro classi di equivalenza $\{[\mathcal{L}_+^\uparrow], [g\mathcal{L}_+^\uparrow], [-g\mathcal{L}_+^\uparrow], [-\mathcal{L}_+^\uparrow]\}$, le quali costituiscono un gruppo abeliano con il prodotto che discende canonicamente da quello in \mathcal{L} , isomorfo a $\{I, g, -g, -I\}$. Solo \mathcal{L}_+^\uparrow è un gruppo di Lie (a sei parametri), perché nessuna parametrizzazione potrebbe mai essere analitica se dovesse rendere conto della discontinuità nel valore del determinante, da $+1$ a -1 (dalle trasformazioni proprie a quelle improprie) o in quella del valore di Λ_{00} , da ≥ 1 a ≤ -1 (da quelle ortocrone a quelle anticrone).

¹⁸Da ora in avanti, assumeremo, per semplicità, che $c = 1$, per cui t ed \vec{x} diventano grandezze dimensionalmente omogenee ...

2.6.1 Le rotazioni

Passiamo ora a considerare alcuni elementi particolarmente significativi del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

Evidentemente, se R è una matrice 3×3 di rotazione, ovvero se R è una generica matrice ortogonale reale (i.e. $R^{-1} = R^t$, $\det(R) = 1 \Leftrightarrow R \in SO(3)$), allora le matrici

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

appartengono al gruppo di Lorentz ortocrono proprio e ne costituiscono, in effetti, il sottogruppo, appunto, delle rotazioni¹⁹. Dalla teoria del momento angolare, sappiamo che le matrici di $SO(3)$ costituiscono un gruppo di Lie il cui gruppo di ricoprimento universale è $SU(2)$ ²⁰. Una loro parametrizzazione è la seguente

$$\Lambda_R = e^{i\vec{\phi}\vec{L}} \quad (2.81)$$

dove le matrici L_j costituiscono la rappresentazione dei generatori e sono tali per

¹⁹La trasformazione (2.79) descrive evidentemente la più generale trasformazione omogenea fra due riferimenti in quiete relativa, senza inversione degli assi.

In questo caso, poiché la variabile temporale coincide nei due riferimenti, l'invarianza del ds^2 significa infatti, semplicemente, l'invarianza della distanza spaziale $dx^2 + dy^2 + dz^2$. Esplicitamente, queste trasformazioni di Lorentz sono tali per cui, se (t, \vec{x}) sono le coordinate dell'evento nel riferimento assegnato e (t', \vec{x}') quelle nel riferimento ruotato, si ha

$$t' = t; \quad x'_i = R_{ij} x_j \quad (2.80)$$

²⁰ $SU(2)$ è semplicemente connesso mentre $SO(3)$ è duplicemente connesso. Le due algebre di Lie coincidono, ma sappiamo che le rappresentazioni con spin semidispari sono rappresentazioni di $SU(2)$, ma non di $SO(3)$, che ha solo rappresentazioni con spin intero. Per quanto riguarda $SO(3)$, la struttura dello spazio dei parametri può essere visualizzata associando a ciascuna rotazione il vettore $\vec{\phi}$, la cui direzione e verso definiscono l'asse della rotazione e il cui modulo ne definisce l'ampiezza (in senso antiorario). In questo modo i parametri possono essere limitati ai punti in una sfera di raggio π , e punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera descrivono la stessa rotazione (di π o di $-\pi$, rispetto allo stesso asse). L'insieme dei parametri è limitato, dunque è compatto. E' anche connesso, ma non è semplicemente connesso, infatti una curva che connette due punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera è chiusa in quanto i due elementi estremi identificano la stessa rotazione, ma la curva non è riconducibile ad un punto. Ci sono due classi di curve chiuse *omotope*, cioè che possono essere deformate una nell'altra con continuità: in un caso esse possono essere ridotte a un punto, nell'altro no, pur essendo anche queste ultime tutte equivalenti fra loro.

Per questo $SO(3)$ è duplicemente connesso, come tutti i gruppi $SO(n)$.

cui^{21,22,23}

$$(\hat{L}_j)_{mn} = -i \epsilon_{jmn} \Rightarrow [\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i \epsilon_{jkl} \hat{L}_l \quad (2.82)$$

In \mathcal{L}_+^\dagger , data la (2.79), i generatori delle rotazioni sono espressi dalle matrici

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

mentre $\vec{\phi}$ è il vettore che individua la rotazione²⁴ stessa: la sua direzione e verso definiscono l'asse di rotazione, mentre il suo modulo $|\phi| \equiv \phi$ stabilisce l'ampiezza dell'angolo di rotazione intorno all'asse $\vec{n} \equiv \frac{\vec{\phi}}{|\phi|}$, di cui è ruotato, in senso antiorario, il nuovo riferimento rispetto al vecchio (assunti entrambi destrorsi, i.e. tali che $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$).

²¹Le matrici \hat{L}_j definiscono la rappresentazione fondamentale di $SO(3)$ che, come è noto, è la rappresentazione con $s = 1$ dei generatori di $SU(2)$.

²²cfr. L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland 1982, pag 311

²³Le costanti di struttura sono definite per una parametrizzazione reale, i.e. $\Lambda_R = e^{\vec{\phi} \cdot \vec{M}}$, ovvero $\vec{M} = i\vec{L}$, ed è quindi immediato che risulta $C_{jk}^l = -\epsilon_{jkl}$.

²⁴Per quanto riguarda $SU(2)$, il suo generico elemento, in stretta analogia con la (2.81), si può scrivere come

$$U = e^{\frac{i}{2}\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}} \equiv e^{\frac{i}{2}\phi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) I + i \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \equiv U(\phi, \vec{n}) \quad (2.84)$$

dove $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_i)$ sono le consuete matrici di Pauli, mentre abbiamo posto $\vec{\phi} = \phi \vec{n}$, essendo \vec{n} l'asse di rotazione e ϕ la sua ampiezza e abbiamo usato, nel ricavare la (2.84), il fatto che $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$. Si noti che la rotazione identica si ottiene per $\phi = 4\pi$ e non, come in $SO(3)$, per $\phi = 2\pi$.

Inoltre risulta $U(\phi, \vec{n}) = U(4\pi - \phi, -\vec{n})$.

La corrispondenza fra gli elementi di $SU(2)$ e i vettori $\vec{\phi}$ che li descrivono, in questo caso, è tale per cui lo spazio dei parametri è fatto dai punti della sfera di raggio 2π , e adesso tutti i punti della superficie, cioè tutti i punti per cui $|\phi| = 2\pi$ sono equivalenti fra loro e individuano lo stesso elemento, che però non è l'identità, bensì il suo opposto $-I$.

E' semplice allora rendersi conto che una curva che *unisca* due punti della superficie della sfera e dunque sia chiusa, è riconducibile a un punto perchè tutti i punti della superficie sono equivalenti. $SU(2)$, come tutti i gruppi $SU(n)$, è *semplicemente connesso* e dunque è isomorfo al suo *gruppo di ricoprimento universale*.

Esplicitamente, in termini di $\vec{\phi} = \phi \vec{n}$, risulta²⁵

$$(R)_{ij} = \left(e^{i\phi \vec{n} \cdot \vec{L}} \right)_{ij} = \cos\phi \delta_{ij} + \sin\phi \epsilon_{ijk} n_k + (1 - \cos\phi) n_i n_j \quad (2.85)$$

I generatori \hat{L}_j sono inoltre tali che

$$\forall R \in SO(3) : R \hat{L}_j R^{-1} = R_{kj} \hat{L}_k \quad (2.86)$$

ovvero gli \hat{L}_j costituiscono una base di operatori per la rappresentazione vettoriale di $SO(3)$. Risulta infatti

$$\left(R \hat{L}_j R^{-1} \right)_{mn} = R_{mk} (\hat{L}_j)_{ks} R_{sn}^{-1} = R_{mk} (\hat{L}_j)_{ks} R_{ns} = -i R_{mk} \epsilon_{jks} R_{ns}$$

Ma il tensore completamente antisimmetrico ϵ_{ijk} soddisfa la condizione

$$\epsilon_{kmn} R_{ik} R_{jm} R_{ln} = \epsilon_{ijl} \quad (2.87)$$

per cui abbiamo che

$$\begin{aligned} -i R_{mk} \epsilon_{jks} R_{ns} &= -i \delta_{jt} \epsilon_{tks} R_{ns} R_{mk} = -i R_{vt} R_{vj} \epsilon_{tks} R_{ns} R_{mk} = \\ &= -i R_{vj} \epsilon_{tks} R_{vt} R_{mk} R_{ns} = -i R_{vj} \epsilon_{vmn} = R_{vj} (\hat{L}_v)_{mn} \end{aligned}$$

la quale dimostra la (2.86), da cui, data la (2.79), che

$$\Lambda_R L_j \Lambda_R^{-1} = R_{kj} L_k \quad (2.88)$$

²⁵Poniamo infatti (cfr. eq.(2.82))

$$A \equiv i \vec{n} \cdot \vec{L} \quad \Rightarrow \quad A_{jk} = i n_s (\hat{L}_s)_{jk} = n_s \epsilon_{sjk}$$

Risulta immediatamente che

$$\begin{aligned} (A^2)_{jk} &= n_s \epsilon_{sjm} n_t \epsilon_{tmk} = -n_s n_t \epsilon_{sjm} \epsilon_{tkm} = -n_s n_t (\delta_{st} \delta_{jk} - \delta_{sk} \delta_{jt}) = -\delta_{jk} + n_j n_k \\ (A^3)_{jk} &= (A^2)_{js} (A)_{sk} = (-\delta_{js} + n_j n_s) n_t \epsilon_{tsk} = -n_t \epsilon_{tjk} + n_j n_s n_t \epsilon_{tsk} = -(A)_{jk} \\ (A^4)_{jk} &= (A^3)_{js} (A)_{sk} = -(A)_{js} (A)_{sk} = -(A^2)_{jk} \\ (A^5)_{jk} &= (A^4)_{js} (A)_{sk} = -(A^2)_{js} (A)_{sk} = -(A^3)_{jk} = (A)_{jk} \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{L}} &\equiv e^{\phi A} = I + \phi A + \frac{1}{2!} \phi^2 A^2 + \frac{1}{3!} \phi^3 A^3 + \frac{1}{4!} \phi^4 A^4 + \frac{1}{5!} \phi^5 A^5 + \dots = \\ &= I + A \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \dots \right) + A^2 \left(\frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^4}{4!} + \dots \right) = I + A \sin\phi + A^2 (1 - \cos\phi) \\ \Rightarrow \left(e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{L}} \right)_{jk} &= \delta_{jk} + \sin\phi A_{jk} + (1 - \cos\phi) A_{jk}^2 = \delta_{jk} + \sin\phi \epsilon_{sjk} n_s + (1 - \cos\phi) (-\delta_{jk} + n_j n_k) \\ &= \delta_{jk} \cos\phi + \sin\phi \epsilon_{sjk} n_s + (1 - \cos\phi) n_j n_k \end{aligned}$$

Una conseguenza diretta della (2.88) è che, per qualunque rotazione Λ_R , risulta

$$\Lambda_R e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{L}} \Lambda_R^{-1} = e^{i\Lambda_R(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\Lambda_R^{-1}} = e^{i\phi_j \Lambda_R L_j \Lambda_R^{-1}} = e^{i\phi_j R_{kj} L_k} = e^{i(R\vec{\phi})\cdot\vec{L}} \quad (2.89)$$

essendo appunto

$$(R\vec{\phi})_j = R_{jk} \phi_k \quad (2.90)$$

2.6.2 I boost

Consideriamo adesso trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio che descrivono la legge di trasformazione delle coordinate spazio-temporali fra due sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo e uniforme ("boost") e iniziamo assumendo che i due sistemi di riferimenti abbiano gli assi orientati nello stesso modo e che il moto avvenga lungo l'asse z .

Per quanto riguarda le *coordinate trasverse*, cioè le coordinate x e y , da quanto precede, evidentemente si ha

$$x' = a_{10} t + a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z \quad (2.91)$$

$$y' = a_{20} t + a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z \quad (2.92)$$

Se consideriamo adesso solo i punti dell'asse $z \equiv z'$, per i quali, evidentemente, è

$$x = y = 0; \quad x' = y' = 0$$

deve risultare, in base alle (2.91) e (2.92), che

$$\begin{aligned} 0 &= a_{10} t + a_{13} z &\Leftrightarrow & a_{10} = a_{13} = 0 \\ 0 &= a_{20} t + a_{23} z && a_{20} = a_{23} = 0 \end{aligned}$$

dove il secondo set di equazioni è conseguenza dell'arbitrarietà di z e t . Sostituendo, ne segue dunque che dovrà essere

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} y \\ y' &= a_{21} x + a_{22} y \end{aligned}$$

D'altronde, siccome per ipotesi i due riferimenti coincidono per $t = t' = 0$ e quindi sono non ruotati uno rispetto all'altro, i punti del piano xz resteranno sul piano $x'z'$ ovvero $y = 0 \Leftrightarrow y' = 0$, e così pure i punti del piano yz resteranno sul piano $y'z'$, i.e. $x = 0 \Rightarrow x' = 0$.

Ne segue allora che, per quanto riguarda le due variabili trasverse, deve essere semplicemente che

$$x' = a_{11}x; \quad y' = a_{22}y$$

ovvero, per l'isotropia dello spazio,

$$x' = \alpha x; \quad y' = \alpha y$$

dove la quantità α , sempre per l'isotropia dello spazio, potrà dipendere solo dal modulo della velocità relativa fra i due riferimenti.

Applicando adesso il risultato ottenuto alla trasformazione inversa, dobbiamo concludere che deve essere $\alpha = 1$, i.e. che *le coordinate trasverse alla direzione del moto risultano invarianti per trasformazioni di riferimento.*

Tenendo infine conto della (2.72), possiamo concludere, riguardo alla matrice che descrive la generica trasformazione fra riferimenti non ruotati e in moto lungo z , che essa dovrà avere necessariamente la forma seguente

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \text{ reali} \quad (2.93)$$

La condizione sul determinante di Λ_z implica evidentemente che

$$ad - bc = 1 \quad (2.94)$$

mentre la condizione generale di appartenenza al gruppo di Lorentz richiede che

$$\Lambda_z^{-1} = g \Lambda_z^t g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 - c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 0 & d \end{pmatrix}; \quad (2.95)$$

Dunque, oltre all'equazione (2.94), devono valere anche le equazioni seguenti

$$a^2 - b^2 = 1 \quad (2.96)$$

$$d^2 - c^2 = 1 \quad (2.97)$$

$$ac - bd = 0 \quad (2.98)$$

Siccome sappiamo che deve essere $a \geq 1$ visto che cerchiamo Λ_z in \mathcal{L}_+^\uparrow , possiamo senz'altro risolvere l'equazione (2.96) ponendo (η reale a priori qualsiasi)

$$a^2 - b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = ch \eta; \quad b = -sh \eta \quad (2.99)$$

Circa invece l'equazione (2.97), non avendo un analogo vincolo sul segno di d , non possiamo invece che risolverla ponendo (ξ reale a priori qualsiasi)

$$d^2 - c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (d, c) = \pm (ch \xi, -sh \xi) \quad (2.100)$$

Ma la condizione sul determinante della matrice Λ_z impone una condizione su η e ξ , infatti da essa ricaviamo

$$ad - bc = 1 \quad \Rightarrow \quad \pm (ch \eta \, ch \xi - sh \eta \, sh \xi) \equiv \pm ch(\eta - \xi) = 1 \quad (2.101)$$

che può essere soddisfatta solo se $\eta = \xi$ e il segno nella (2.100) è positivo. Questo risultato soddisfa anche la (2.98), essendo

$$ac - bd = 0 \Rightarrow -ch\eta sh\xi + ch\xi sh\eta = -ch\eta sh\eta + ch\eta sh\eta = 0 \quad (2.102)$$

Questo significa, in definitiva, che la soluzione generale per la trasformazione Λ_z cercata non può che essere la seguente

$$\begin{aligned} a = d &= ch\alpha \\ b = c &= -sh\alpha \end{aligned} \quad (2.103)$$

dove α è un numero reale qualsiasi che viene chiamato *rapidità* del boost, di cui vogliamo adesso cercare di capire il significato fisico.

Avendo assunto che le origini dei due sistemi di riferimento spazio-temporali coincidano (trasformazione omogenea), avremo in generale che

$$\begin{aligned} t' &= \Lambda_{\nu}^0 x^{\nu} = \Lambda_{\cdot 0}^0 t + \Lambda_{\cdot i}^0 x^i = t ch\alpha - z sh\alpha \\ x' &= \Lambda_{\nu}^1 x^{\nu} = x \\ y' &= \Lambda_{\nu}^2 x^{\nu} = y \\ z' &= \Lambda_{\nu}^3 x^{\nu} = \Lambda_{\cdot 0}^3 t + \Lambda_{\cdot i}^3 x^i = -t sh\alpha + z ch\alpha \end{aligned}$$

dove le coordinate (t, x, y, z) si riferiscono al riferimento RS , mentre le coordinate (t', x', y', z') si riferiscono al riferimento RS' .

Consideriamo ora l'origine del riferimento di RS' . Esso ha, evidentemente, coordinate spaziali $x' = y' = z' = 0$ e dunque nel riferimento RS esso apparirà muoversi in modo che $x = 0$, $y = 0$, $z ch\alpha - t sh\alpha = 0$, ovvero con una velocità pari a

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ th\alpha \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Essendo peraltro²⁶

$$ch^2\alpha = \frac{1}{1 - th^2\alpha} = \frac{1}{1 - \beta^2}; \quad sh\alpha = \beta ch\alpha \quad (2.105)$$

ecco che, se definiamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.106)$$

²⁶Infatti

$$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1 \Rightarrow 1 - th^2\alpha = \frac{1}{ch^2\alpha} \Rightarrow ch^2\alpha = \frac{1}{1 - th^2\alpha}$$

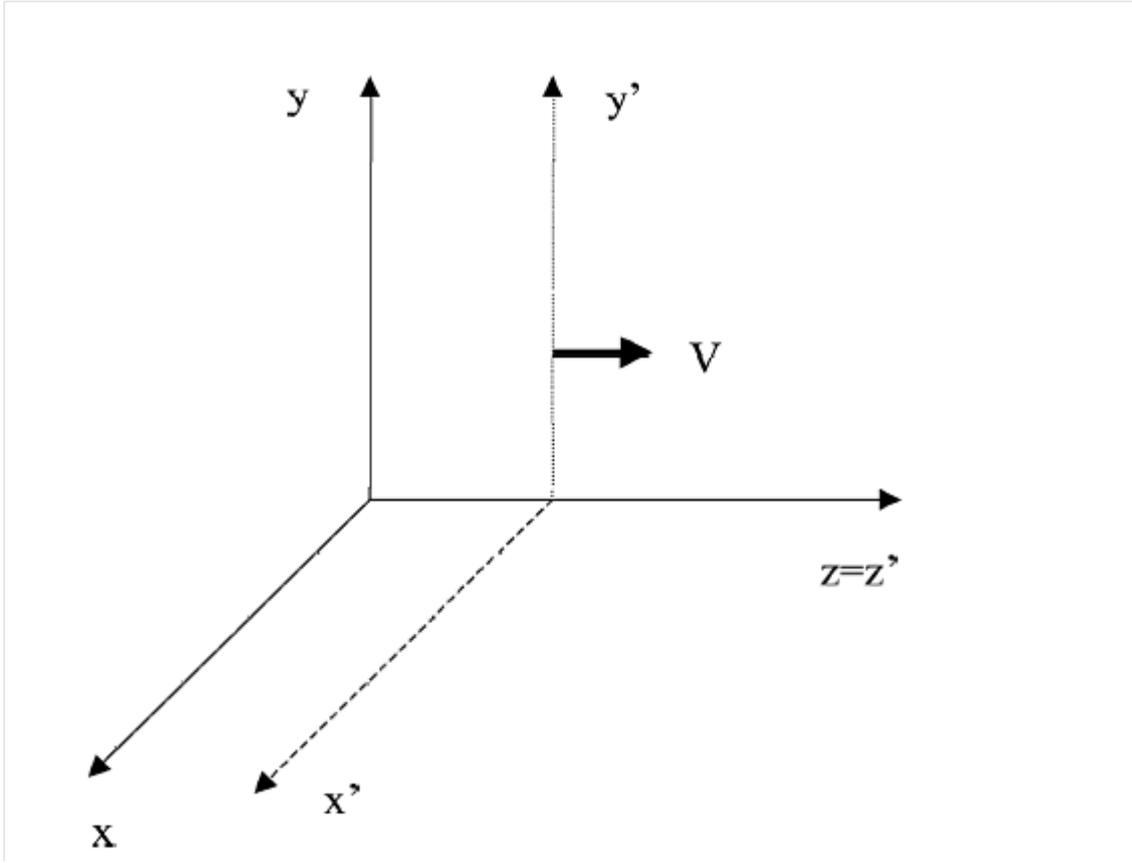


Figure 4: Moto relativo fra i due riferimenti lungo l'asse z .

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 \Lambda_z(\alpha) &\equiv \begin{pmatrix} ch \alpha & 0 & 0 & -sh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sh \alpha & 0 & 0 & ch \alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \Lambda_z(th^{-1}\beta) \qquad (2.107)
 \end{aligned}$$

E' banale verificare che le trasformazioni Λ_z costituiscono un sottogruppo abeliano di \mathcal{L}_+^\uparrow a un parametro, infatti

$$\begin{aligned}
 \Lambda_z(\alpha_1) \Lambda_z(\alpha_2) &= \Lambda_z(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 \Lambda_z^{-1}(\alpha) &= \Lambda_z(-\alpha) \\
 \Lambda_z(0) &= I
 \end{aligned}$$

Come si vede, la *rapidità* della trasformazione prodotto $\Lambda_z(\alpha_1) \Lambda_z(\alpha_2)$ è semplicemente la somma delle rapidità delle due trasformazioni "fattori".

Questo, beninteso, è vero finchè ci limitiamo a trasformazioni in una direzione fissata, e in questo caso la rapidità è l'analogo relativistico della velocità galileiana.

Poniamo adesso, per definizione

$$K_z \equiv -i \frac{d\Lambda_z(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} -i \frac{d\Lambda_z(\alpha)}{d\alpha} &= -i \frac{d\Lambda_z(\beta + \alpha)}{d\beta} \Big|_{\beta=0} = -i \frac{d\Lambda_z(\beta)\Lambda_z(\alpha)}{d\beta} \Big|_{\beta=0} = K_z \Lambda_z(\alpha) \\ \Rightarrow \Lambda_z(\alpha) &= e^{i\alpha K_z} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Osserviamo, prima di continuare, che, se poniamo per comodità

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \vec{u}^t = (0, 0, 1), \quad \text{allora possiamo scrivere}$$

$$K_z = \begin{pmatrix} 0 & i \vec{u}^t \\ i \vec{u} & O \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

dove abbiamo indicato con O la matrice 3×3 identicamente nulla²⁷.

²⁷La verifica diretta della (2.109) è semplice, infatti risulta

$$i K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (i K_z)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è

$$(i K_z)^{2n} = (i K_z)^2; \quad (i K_z)^{2n+1} = i K_z$$

per cui risulta

$$e^{i\alpha K_z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (i K_z)^n = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} (i K_z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} (i K_z)^2$$

ed essendo

$$sh\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad ch\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

segue immediatamente che $\Lambda_z(\alpha) = e^{i\alpha K_z}$

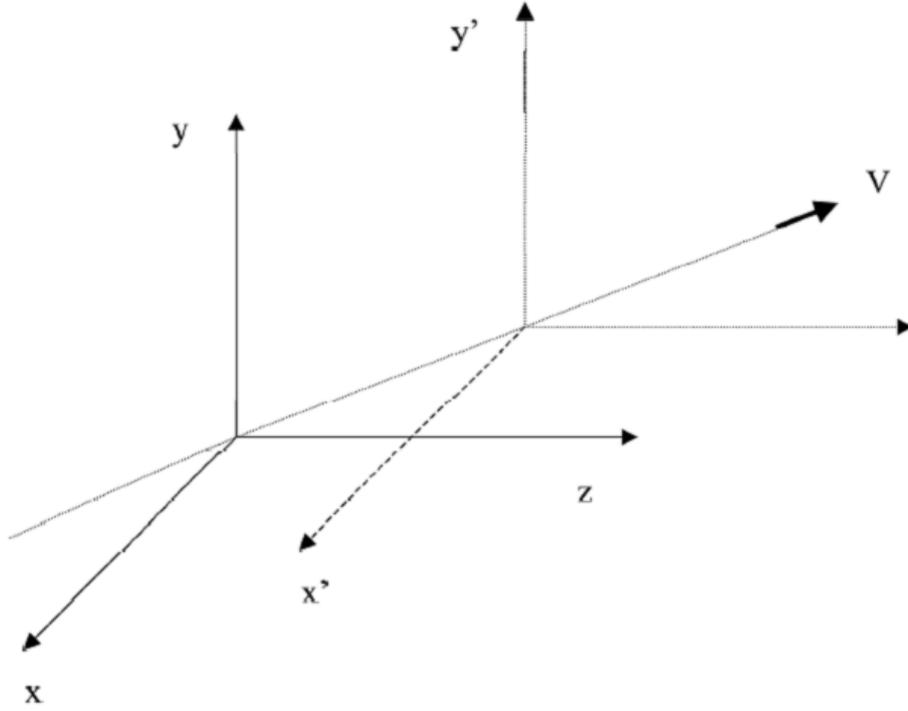


Figure 5: *Moto relativo dei due riferimenti non ruotati in una direzione generica.*

Fin'ora abbiamo considerato il caso in cui i due riferimenti, non ruotati uno rispetto all'altro, si muovono di moto rettilineo e uniforme lungo l'asse z . Se il moto avviene lungo uno degli altri assi coordinati, la generalizzazione è banale e risulta

$$\Lambda_x(\alpha) \equiv e^{i\alpha K_x} = \begin{pmatrix} ch\alpha & -sh\alpha & 0 & 0 \\ -sh\alpha & ch\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

$$\Lambda_y(\alpha) \equiv e^{i\alpha K_y} = \begin{pmatrix} ch\alpha & 0 & -sh\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sh\alpha & 0 & ch\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

con

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

Ma supponiamo ora (vedi fig.5) che la velocità relativa $\vec{V} \equiv \vec{\beta}$ del secondo riferimento (RS') rispetto al primo (RS) sia diretta secondo il generico vettore

\vec{n} . Avremo dunque che

$$\Lambda_{\vec{n}}(\alpha) = \Lambda_R^{-1} \Lambda_z(\alpha) \Lambda_R \quad (2.114)$$

dove Λ_R ruota \vec{n} allineandolo con l'asse z . Dunque

$$\Lambda_{\vec{n}}(\alpha) = \Lambda_R^{-1} \Lambda_z(\alpha) \Lambda_R = \Lambda_R^{-1} e^{i\alpha K_z} \Lambda_R = e^{i\alpha \Lambda_R^{-1} K_z \Lambda_R} \equiv e^{i\alpha K_{\vec{n}}} \quad (2.115)$$

dove

$$\begin{aligned} K_{\vec{n}} \equiv \Lambda_R^{-1} K_z \Lambda_R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \vec{u}^t \\ i \vec{u} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \vec{u}^t R \\ i R^t \vec{u} & O \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.116)$$

D'altronde, per ipotesi

$$R \vec{n} = \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = R^{-1} \vec{u} \equiv R^t \vec{u} \quad (2.117)$$

quindi

$$K_{\vec{n}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \vec{u}^t R \\ i R^t \vec{u} & O \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \vec{n}^t \\ i \vec{n} & O \end{pmatrix} \equiv \vec{n} \cdot \vec{K} \quad (2.118)$$

dove abbiamo posto $\vec{K} \equiv (K_x, K_y, K_z)$ in accordo con il fatto che la (2.117) implica proprio che \vec{K} si trasformi, per rotazioni, come un operatore vettoriale²⁸.

In generale, quindi, se i due riferimenti inerziali sono non ruotati uno rispetto all'altro e si trovano in moto relativo qualsiasi, la trasformazione di Lorentz²⁹ che li connette è

$$\Lambda(\vec{\beta}) = e^{i\alpha(\vec{n} \cdot \vec{K})} \quad (2.120)$$

dove le matrici $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$ sono definite dalle equazioni (2.108) e (2.113), mentre $\vec{n} \equiv \frac{\vec{\beta}}{|\beta|}$ ed $\alpha \equiv th^{-1}(|\beta|)$.

²⁸Questo, coerentemente con quanto ottenuto anche per \vec{L} , corrisponde a dire che $\Lambda_R K_j \Lambda_R^{-1} = R_{nj} K_n$.

²⁹EsPLICITAMENTE risulta

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma n_x & -\beta\gamma n_y & -\beta\gamma n_z \\ -\beta\gamma n_x & 1 + (\gamma - 1)n_x^2 & (\gamma - 1)n_x n_y & (\gamma - 1)n_x n_z \\ -\beta\gamma n_y & (\gamma - 1)n_y n_x & 1 + (\gamma - 1)n_y^2 & (\gamma - 1)n_y n_z \\ -\beta\gamma n_z & (\gamma - 1)n_z n_x & (\gamma - 1)n_z n_y & 1 + (\gamma - 1)n_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

dove, come abbiamo già detto

$$\vec{n} = \vec{\beta}/\beta \equiv \vec{\beta}/\beta; \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

Le tre matrici \vec{K} sono i "generatori" dei boost che, insieme ai tre generatori \vec{L} delle rotazioni, completano la struttura di Lie del gruppo di Lorentz ortocrono proprio per cui si ha

$$[L_m, L_n] = i \epsilon_{mnl} L_l \quad (2.121)$$

$$[L_m, K_n] = i \epsilon_{mnl} K_l \quad (2.122)$$

$$[K_m, K_n] = -i \epsilon_{mnl} L_l \quad (2.123)$$

le quali mostrano che, mentre le rotazioni costituiscono un sottogruppo di \mathcal{L}_+^\uparrow , l'insieme dei boost non lo fanno.

2.7 Quadrivelocità e quadriaccelerazione

Nel caso generale le velocità si compongono in modo piuttosto complicato³⁰: la ragione è che questa grandezza fisica non ha proprietà di trasformazione semplici sotto il gruppo di Lorentz, risultando dal rapporto della parte spaziale di un quadrivettore ($d\vec{x}$) con la sua prima componente, cioè con la parte temporale dt . Una generalizzazione della grandezza fisica "velocità" al caso relativistico è la quadrivelocità, che, come dice il nome, è un quadrivettore e quindi ha proprietà di trasformazioni semplici sotto il gruppo di Lorentz.

Questa grandezza viene definita a partire dal *quadrivettore posizione* ($x^\mu \equiv (t, \vec{x})$), derivando rispetto al *tempo proprio* associato al punto materiale in moto:

$$u^\mu(t) \equiv \frac{dx^\mu(t)}{d\tau} \equiv \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}(t)}{d\tau} \right) \quad (2.124)$$

Il tempo proprio $d\tau \equiv \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$ è evidentemente uno scalare per cui u^μ risulta appunto essere un quadrivettore.

Se $\vec{\beta}(t)$ è la velocità della particella, i.e. $\vec{\beta}(t) \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ e poniamo, al solito, $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, segue immediatamente che $d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma$, per cui

$$u^\mu(t) = \gamma(t) (1, \vec{\beta}(t)) = (\gamma(t), \gamma(t) \vec{\beta}(t)) \quad (2.125)$$

la quale mostra, in particolare, come la parte spaziale della quadrivelocità coincida con la velocità $\vec{\beta}(t)$ solo quando essa è piccola rispetto a 1.

La quadrivelocità gode della proprietà di avere modulo unitario, i.e. $u^\mu u_\mu = 1$

³⁰Un punto materiale che in RS ha velocità \vec{v} , nel riferimento RS' che si muove con velocità $\vec{\beta}$ rispetto a RS , ha velocità \vec{v}' , tale che

$$\vec{v}' = \frac{1}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{v})} (\vec{v}_\perp + \gamma(\vec{v}_\parallel - \vec{\beta}))$$

dove $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

essendo $u^\mu u_\mu = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ e quindi, in particolare è time-like: nel riferimento tangente³¹ al moto del punto materiale al tempo t , evidentemente è

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.126)$$

poichè, per definizione, nel riferimento tangente, il punto materiale ha velocità istantanea nulla al tempo t e la coordinata temporale del riferimento tangente coincide quindi con il tempo proprio del punto materiale ...

Un altro quadrivettore importante per la cinematica relativistica di una particella è la derivata della quadrivelocità rispetto al tempo proprio: si tratta della quadriaccelerazione

$$a^\mu(t) \equiv \frac{du^\mu(t)}{d\tau} \quad (2.127)$$

Evidentemente, essendo per quanto visto prima $u^\mu u_\mu = 1$, ne segue che

$$\frac{d(u^\mu u_\mu)}{d\tau} = 0 \Rightarrow a^\mu u_\mu = 0 \quad (2.128)$$

cioè la quadriaccelerazione e la quadrivelocità sono "ortogonali" nella metrica di Minkowski. Una conseguenza immediata è che, nel riferimento tangente dove la quadrivelocità ha non nulla (e pari a 1...) solo la componente temporale, la quadriaccelerazione può avere non nulle solo le componenti spaziali e dunque, mentre la quadrivelocità è time-like, la quadriaccelerazione è space-like.

Nel riferimento tangente, poi, le componenti spaziali della quadriaccelerazione coincidono con le componenti dell'accelerazione usuale, dato che nel riferimento tangente tempo e tempo proprio coincidono, i.e.

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow a^\mu = (0, \vec{a}(t)) \quad (2.129)$$

In generale risulta invece che

$$\begin{aligned} a^\mu(t) &= \frac{du^\mu(t)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{du^\mu(t)}{dt} = \gamma(t) \frac{d}{dt} [\gamma(t) (1, \vec{\beta}(t))] = \\ &= \gamma(t) \frac{d\gamma}{dt} (1, \vec{\beta}(t)) + \gamma^2(t) \left(0, \frac{d\vec{\beta}(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.130)$$

ma

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^{-1/2} = -\frac{1}{2} (1 - \beta^2)^{-3/2} \cdot (-2 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \quad (2.131)$$

³¹Con "riferimento tangente a una particella al tempo t " intendiamo il riferimento inerziale che ha la velocità \vec{v} (costante) coincidente con la velocità della particella al tempo t (in generale, funzione di t ...).

e dunque risulta

$$a^\mu(t) = \gamma^4(t) \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \left(1, \vec{\beta}(t) \right) + \gamma^2(t) \left(0, \dot{\vec{\beta}}(t) \right) \quad (2.132)$$

che, nel riferimento tangente dove $\vec{\beta} = 0$, fornisce evidentemente la (2.129). Una conclusione che procede naturalmente da quanto sopra è infine che

$$a^\mu(t) a_\mu(t) = -|\vec{a}_N(t)|^2 \quad (2.133)$$

dove $\vec{a}_N(t)$ è l'accelerazione "newtoniana" misurata nel riferimento tangente.

2.8 Il quadrimpulso

Supponiamo di avere una particella di massa³² m , in moto vario in un riferimento inerziale RS . Secondo la Meccanica Newtoniana, essa ha associato un impulso $\vec{p} = m\vec{v}$ e la seconda legge della Dinamica lega la derivata $\frac{d\vec{p}}{dt}$ alla risultante \vec{F} delle forze esterne agenti sulla particella stessa.

Ma noi abbiamo già visto che la naturale generalizzazione relativistica della velocità \vec{v} è la quadrirelatività u^μ .

Proviamo allora costruire il quadrivettore *quadrimpulso* $p^\mu \equiv m u^\mu$ e cerchiamo di capirne il significato fisico. Dalla definizione si ha

$$p^\mu = (m u^0, m \vec{u}) = (m\gamma, m\gamma\vec{\beta})$$

Nel limite di basse velocità, al secondo ordine nello sviluppo in serie di Taylor rispetto a β , abbiamo

$$p^\mu = \left(m \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right), m \vec{\beta} \right)$$

Come si vede, il termine spaziale coincide con l'impulso (si ricordi che abbiamo posto $c = 1...$), mentre il termine temporale è pari a

$$p^0 = m + \frac{1}{2} m \beta^2 = m + E_c$$

dove E_c è l'energia cinetica del punto materiale stesso.

Volendo dunque generalizzare \vec{p} , abbiamo ottenuto una grandezza, p^μ , che, per basse velocità, ha la parte spaziale coincidente con l'impulso \vec{p} e quella temporale, a meno dell'offset m , pari all'energia cinetica della particella.

Nel caso di un sistema isolato, potremo ancora procedere in modo analogo, definendo la massa inerziale M nel sistema di riferimento dove la velocità $\vec{\beta}$ del

³²Per definizione m rappresenta la massa inerziale della particella, misurata nel riferimento "tangente", ovvero in quello dove la particella si trova istantaneamente ferma e verifica la seconda legge della dinamica di Newton.

Centro di Massa (CM) è nulla³³, e quindi, ponendo

$$P^\mu = M u^\mu \equiv M (u^0, \vec{u})$$

dove u^μ è la quadrivelocità, definita a partire dalla velocità $\vec{\beta}$ del CM.

Classicamente, se il sistema è isolato come abbiamo supposto all'inizio, l'impulso $\vec{P} = M \vec{\beta}$ si conserva. Se vogliamo che questo resti vero anche per la sua generalizzazione relativistica, allora, visto che le trasformazioni di Lorentz mescolano componenti spaziali e temporali tra loro, anche P^0 dovrà conservarsi.

Dato che, nel caso della singola particella, abbiamo visto che la componente p^0 del quadrimpulso è legata all'energia, potrebbe sembrare che questa proprietà di conservazione, dopotutto, non costituisca una gran novità: almeno in assenza di attriti, anche nella meccanica newtoniana l'energia si conserva !

Ma non è così: in questa nuova legge di conservazione c'è un fatto nuovo molto importante.

Nel termine temporale del quadrimpulso compare *tutta* l'energia associata alla particella o al sistema di particelle che, a impulso spaziale totale nullo, è descritta appunto dal termine di massa (inerziale) del sistema dato, la quale, in questo senso, diviene sinonimo di energia totale intrinseca. Per capire, consideriamo il caso di due masse m , uguali fra loro e legate insieme da una molla ideale (senza massa) contratta che, al tempo $t = 0$, le lancia in versi opposti.

Classicamente si dice che il sistema è fatto da due masse m , con associata una certa energia potenziale, la quale si trasforma in energia cinetica al momento dello scatto della molla. Relativisticamente, invece, il processo deve essere descritto in termini di un sistema che, in quiete nel nostro sistema di riferimento, ha una massa $M = 2(m + \epsilon)$, il quale ha dato luogo a due particelle di quadrimpulso $(m + \epsilon, \vec{p})$ e $(m + \epsilon, -\vec{p})$. In linguaggio non relativistico, la quantità 2ϵ misura l'energia potenziale iniziale presente nel sistema a causa della molla contratta, che si trasforma in energia cinetica delle due masse lanciate da parti opposte. In linguaggio relativistico, essa, insieme a $2m$, più semplicemente determina la massa inerziale del sistema prima dello sgancio.

Va poi ricordato che, non solo l'energia interna "positiva" accresce la massa di

³³Nel caso di un sistema composito in interazione, volendo trovare il centro di massa, dobbiamo usare la massa libera dei costituenti o che altro ?

Il difetto di massa è una peculiarità dell'intero sistema in interazione e non delle sue parti. Volendo determinare il sistema del CM, non è possibile farlo in modo coerente finché si rimane in una teoria di potenziale newtoniana classica, perché, come abbiamo già avuto modo di osservare, questa prevede interazione istantanea fra particelle in posti differenti e dunque non è compatibile con la relatività della contemporaneità. Occorre affrontare il problema nell'ambito di una teoria di campo relativisticamente invariante. In questo caso, per trovare il riferimento del CM, occorre, a partire dalla Lagrangiana (scalare di Lorentz e invariante in forma per traslazioni nello spazio tempo), determinare il tensore densità di energia-impulso $T^{\mu\nu}$, che soddisferà la legge di conservazione $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$; quindi integrare $T^{0\nu}$ nello spazio e determinare così il quadrimpulso P^ν del sistema (determinato in parte dalla materia ed in parte dal campo di interazione) e cercare poi il riferimento in cui la sua parte spaziale è nulla.

un sistema rispetto a quello dei suoi costituenti, ma anche quella "negativa" di legame, agisce diminuendola ! La massa di un atomo di idrogeno nello stato fondamentale è più piccola della somma delle masse del protone e dell'elettrone, anche se, essendo la massa del protone circa 938 MeV , quella dell'elettrone circa 512 keV e quella di legame, al più, solo 13.6 eV , questa differenza è molto difficilmente apprezzabile (circa 15 parti per miliardo !...).

Le cose cambiano radicalmente dove l'energia di legame è sensibilmente maggiore, come, per esempio, nei nuclei. Per esempio, la massa nella particella α (nucleo dell'atomo di elio: due protoni e due neutroni) è pari a 3727.380 MeV , mentre la massa di un protone vale 938.272 MeV e quella di un neutrone è pari a 939.565 MeV , per cui

$$M_{H_e} - 2(m_p + m_n) = -28.3 \text{ MeV}$$

Questo *difetto di massa*, che rappresenta adesso ben lo 0.76% della massa della particella α , misura l'energia di legame del sistema dei quattro nucleoni! E' proprio in questo difetto di massa che, in particolare, sta la risposta alla domanda sul motivo per cui i nuclei atomici sono sostanzialmente stabili.

Ma torniamo adesso al caso di una particella di massa m e osserviamo che, dalla definizione del quadrimpulso in termini della quadrivelocità e dal fatto che $u^\mu u_\mu = 1$, segue immediatamente che il quadrimpulso di una particella è time-like e risulta

$$p^\mu p_\mu = m^2$$

e, ovviamente, nel riferimento "tangente", si ha

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

In generale, il quadrimpulso di una particella di massa m sarà dato da

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \equiv (p^0, p \sin\theta \cos\phi, p \sin\theta \sin\phi, p \cos\theta) \quad (2.134)$$

dove $p^0 = \sqrt{m^2 + p^2} \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ e $p \equiv |\vec{p}|$ è il modulo dell'impulso spaziale pari a $\vec{p} = m\gamma \vec{v}$, quindi γ volte quello "newtoniano".

Vediamo adesso come cambia il quadrimpulso p^μ per trasformazioni di Lorentz. Non ci interesseremo di cosa gli accade per rotazioni, perchè è ovvio: intendiamo vedere invece cosa gli succede sotto un boost di Lorentz. Data la forma del tutto generale assunta per p^μ , non c'è perdita di generalità nell'assumere che il boost avvenga lungo l'asse z , con velocità β . Essendo il quadrimpulso un quadrivettore, se esso in RS è dato dalla (2.134), allora nel riferimento RS' , in moto rispetto ad RS con velocità $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$, esso sarà rappresentato dal quadrivettore p'^μ , ottenuto da p^μ , attraverso una trasformazione Λ_z del tipo seguente

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} ch\alpha & 0 & 0 & -sh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sh\alpha & 0 & 0 & ch\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

ovvero

$$p'^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} p'^0 \\ p'^1 \\ p'^2 \\ p'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma p^0 - \beta\gamma p^3 \\ p^1 \\ p^2 \\ \gamma p^3 - \beta\gamma p^0 \end{pmatrix} \quad (2.136)$$

Con ovvio significato di simboli, questo risultato può essere sintetizzato dicendo che

$$p'^0 = \gamma [p^0 - (\vec{\beta} \cdot \vec{p})] \quad (2.137)$$

$$\vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \quad (2.138)$$

$$p'_{\parallel} = \gamma [p_{\parallel} - \beta p^0] \quad (2.139)$$

Come si vede, la componente dell'impulso ortogonale alla direzione di $\vec{\beta}$ non cambia, i.e. \vec{p}'_{\perp} è invariante per trasformazioni di Lorentz (si ricordi che questo *non* è vero per \vec{v}_{\perp} !), mentre nella componente longitudinale si "mescolano" contributi lineari sia in p_{\parallel} che in p^0 . In particolare, siccome p^{μ} è time-like, allora $p^0 > |\vec{p}| \geq |p_{\parallel}|$, quindi è sempre garantito che, fissata comunque una direzione, si può trovare un riferimento in cui p è solo "trasverso" a quella direzione fissata e, nel caso particolare in cui la direzione scelta sia quella di \vec{p} stesso, questo implica semplicemente l'esistenza di un riferimento inerziale in cui la particella è ferma (riferimento tangente).

Questa non è che una rivisitazione della proprietà secondo cui quadrivettori time-like ammettono sempre un riferimento (unico a meno di una rotazione) in cui hanno diversa da zero solo la componente temporale.

Si osservi infine che, per trasformazioni di \mathcal{L}_+^{\uparrow} , risulta correttamente che la componente temporale del quadrimpulso p^0 , individuata come quella che descrive l'energia relativistica della particella,

- è sempre positiva e non può cambiar di segno,
- può assumere un qualsiasi valore maggiore o uguale a quello della massa della particella stessa: $p^0 \equiv \sqrt{m^2 + p^2} \geq m$.

Passiamo infine a esplicitare le leggi di trasformazione del quadrimpulso, quando la parte spaziale sia espressa usando coordinate polari.

Senza perdita di generalità, assumeremo che l'asse polare (asse z) risulti orientato come la direzione della velocità relativa, i.e. che sia

$$\begin{aligned} \vec{\beta} &= (0, 0, \beta) \\ p^{\mu} &= (p^0, p \sin\theta \cos\phi, p \sin\theta \sin\phi, p \cos\theta) \\ p'^{\mu} &= (p'^0, p' \sin\theta' \cos\phi', p' \sin\theta' \sin\phi', p' \cos\theta') \end{aligned}$$

Dalle (2.137) e (2.138) abbiamo immediatamente che

$$p^0 = \gamma [p^0 - \beta p \cos \theta] \quad (2.140)$$

$$tg \phi' = tg \phi \quad (2.141)$$

Inoltre, essendo la componente trasversa dell'impulso invariata, sarà

$$p \sin \theta = p' \sin \theta' \quad (2.142)$$

ed essendo

$$p' \cos \theta' = \gamma [p \cos \theta - \beta p^0] \quad (2.143)$$

segue che (si ricordi che $\frac{p}{p^0} = \beta_p$ è il modulo della velocità della particella in RS)

$$tg \theta' = \frac{p' \sin \theta'}{p' \cos \theta'} = \frac{p \sin \theta}{\gamma(p \cos \theta - \beta p^0)} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta \frac{p^0}{p})} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \frac{\beta}{\beta_p})} \quad (2.144)$$

Nei processi di decadimento o di urto, essendo il sistema isolato, il quadrimpulso complessivo si conserva. Consideriamo per esempio il decadimento

$$X \rightarrow A + B + \dots + C \quad (2.145)$$

in ogni sistema di riferimento inerziale sarà $P_X = P_A + P_B + \dots + P_C$ e in particolare, nel sistema del CM , dove $P_X = (M_X, \vec{0})$, sarà

$$M_X = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B + \dots + \mathcal{E}_C \geq M_A + M_B + \dots + M_C \quad (2.146)$$

Analogamente, in un processo d'urto

$$A + B \rightarrow C + D + \dots + E \quad (2.147)$$

se s è la massa invariante quadra del sistema delle due particelle A e B

$$s \equiv (P_A + P_B)^\mu (P_A + P_B)_\mu \quad (2.148)$$

specializzando di nuovo questa quantità nel sistema del CM , dovrà essere

$$\sqrt{s} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_D + \dots + \mathcal{E}_E \geq M_C + M_D + \dots + M_E \quad (2.149)$$

La quantità

$$s_{th} \equiv (M_C + M_D + \dots + M_E)^2 \quad (2.150)$$

è detta *soglia della reazione*, perché questa può avvenire solo se $\sqrt{s} \geq \sqrt{s_{th}}$.

3 Le Particelle elementari (e non solo ...)

3.1 L'elettrone, il protone, il neutrone e il fotone

Intorno alla fine del secolo XIX (1897), gli esperimenti di J.J. Thomson stabilirono



Figure 6: *Joseph John Thomson (1856-1940)*

l'esistenza dell'elettrone³⁴ e valsero all'autore il Nobel nel 1906.

Questa scoperta condusse in modo naturale al modello³⁵ dell'atomo di Thomson, che era fatto da una carica positiva diffusa e da elettroni disposti all'interno

³⁴J.J. Thomson: *Cathode rays*, Phil. Mag. 44, 293 (1897).

Thomson risolse per primo il problema della natura dei raggi catodici. Con questo termine si indicavano allora i raggi che venivano emessi dal catodo quando era bombardato da ioni positivi in un tubo a scarica a gas rarefatto ($10^{-3} - 10^{-4} \text{ mmHg}$). Questi raggi sono gli stessi che vengono emessi anche da un metallo riscaldato (effetto termoelettronico, scoperto da Edison una ventina di anni prima), come fu correttamente spiegato dalla teoria di Richardson del 1902.

Thomson verificò ancora una volta che i raggi catodici erano sensibili sia alla deflessione elettrica che alla deflessione magnetica. Ne concluse che doveva trattarsi di particelle cariche (negativamente) e ne misurò il rapporto e/m , provando che questo non dipendeva né dal materiale di cui era costituito il catodo né dal gas rarefatto presente nel tubo a scarica.

I raggi catodici erano dunque fatti di particelle *universali* di carica negativa !

Per dimostrarlo, Thomson operò in varie maniere, una delle quali è la seguente.

Dopo aver accelerato i raggi con una ddp ΔV di circa 2000 V, li fece passare, alternativamente, attraverso un campo elettrico e magnetico ortogonali fra loro e con la direzione di propagazione dei raggi, aggiustando l'intensità dei campi finché la deflessione ottenuta non era la stessa. Siccome la forza elettrica è semplicemente proporzionale a E mentre quella magnetica dipende da vB , in questo modo, noto ΔV , poté determinare la velocità di queste particelle e quindi il rapporto e/m .

³⁵J.J. Thomson: *On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure*, Phil. Mag. 7, 237 (1904).

di essa come l'uvetta nel panettone ...



Figure 7: *Hans Geiger ed Ernest Rutherford nel loro laboratorio di Manchester*

Nel 1909, Geiger e Marsden³⁶, che lavoravano con Rutherford a Manchester, trovarono però uno strano risultato per cui accadeva che particelle α lanciate contro un sottile fogliolino d'oro³⁷ rimbalzassero indietro in una quantità tale (circa una particella α ogni 20000 deviava più di 90°) da essere del tutto inconsistente³⁸ con quanto ci si poteva aspettare dal modello atomico di Thomson.

³⁶H. Geiger, E. Marsden: *On a diffuse reflection of α particles*,
Proc. Roy. Soc. 82, 495 (1909).

³⁷L'effetto fu osservato in realtà anche con altri metalli, come il Piombo, il Platino, lo Stagno, l'Argento, il Rame, il Ferro e l'Alluminio. In queste misure fu messo in evidenza la forte dipendenza dell'effetto dal peso atomico: per esempio, l'effetto in Piombo risultava essere circa venti volte maggiore che in Alluminio ... L'oro fu usato più estensivamente per la sua duttilità, che dava la possibilità di ridurlo in fogliolini estremamente sottili (inferiori al micron) e quindi consentiva di misurare la dipendenza dell'effetto anche dallo spessore del metallo. Si osservò così che l'effetto dei rimbalzi all'indietro saturava al crescere dello spessore e che esso aveva luogo, sostanzialmente solo nel primo micron di metallo.

³⁸Nel modello di Thomson, la carica positiva del nucleo era distribuita più o meno uniformemente all'interno del raggio dell'atomo, ed essa era bilanciata da quella degli elettroni, i quali si trovavano immersi in questo *nucleo* come, appunto, l'uvetta nel panettone ...

Secondo questo modello, una particella α avrebbe potuto avere uno scattering, in pratica, solo con gli elettroni puntiformi che, data la loro massa molto più piccola, mai avrebbero potuto farla rimbalzare all'indietro.

Vediamo invece come questo possa accadere, nel caso del modello atomico di Rutherford, che adesso tratteremo, per semplicità, assumendo nucleo (massa M e carica Ze) e particella α (massa m e carica ze) entrambi puntiformi.

Come è noto, in questa ipotesi, l'urto può essere descritto, nel sistema del CM delle due particelle, usando la variabile \vec{r} della posizione relativa della particella α rispetto al nucleo, come se si trattasse di un processo di scattering di una singola particella da un potenziale esterno, pur

di usare per massa di questa particella, la massa ridotta del sistema, i.e. la quantità

$$\mu \equiv \frac{mM}{m+M} \quad (3.151)$$

Se adesso trascuriamo, per semplicità, l'effetto di schermo degli elettroni (approssimazione giustificata almeno per gli scattering a grande angolo), il potenziale di scattering risulta essere quello coulombiano fra le due cariche, i.e.

$$V(\vec{r}) = V(r) = \frac{zZe^2}{r} \quad (3.152)$$

Siccome il potenziale è centrale, il momento angolare relativo al centro di scattering \vec{L} si conserva e dunque, nel sistema di riferimento del CM delle due particelle, che coincide con quello del centro di scattering a riposo, il moto è piano. Ne segue che $\vec{r}(t)$ e $\dot{\vec{r}}(t)$ giacciono entrambi in un piano fisso, la cui normale, appunto, è diretta come \vec{L} . Per descrivere il problema, possiamo decidere allora di usare le coordinate polari piane r, θ (rispetto al centro di scattering): risulta

$$\vec{r} = r(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta)$$

e dunque

$$l \equiv |\vec{L}| = \left| \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right| = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (3.153)$$

$$E = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 + V(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (3.154)$$

Ma \vec{L} è una costante del moto, dunque

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (3.155)$$

dove l è indipendente dal tempo.

Usando questa equazione per eliminare $\dot{\theta}$ dall'equazione (3.154), si ha

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{l^2}{\mu^2 r^4} \right) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (3.156)$$

la quale, fissato l , rappresenta, in una dimensione, l'energia di una particella di massa μ , sottoposta a una forza conservativa derivabile dal potenziale fittizio $\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$: il secondo termine è il ben noto *potenziale centrifugo*.

Si osservi che, nel caso coulombiano (o newtoniano), il potenziale $\tilde{V}(r)$ è comunque sempre positivo per $r \rightarrow 0$, mentre tende a zero per $r \rightarrow \infty$ in modo monotono crescente/decescente a seconda che $zZ < 0$ oppure $zZ > 0$.

E' altresì immediato che $\tilde{V}(r)$ non ha minimi se $zZ > 0$, mentre ha un solo minimo quando $zZ < 0$ e in questo caso risulta

$$r_{min} = -\frac{l^2}{\mu zZe^2}$$

in cui il potenziale fittizio assume il valore

$$\tilde{V}_{min} = \frac{1}{2} \frac{zZe^2}{r_{min}} = -\frac{\mu}{2} \frac{(zZe^2)^2}{l^2}$$

Quanto sopra implica che, in questo caso (potenziale attrattivo), il potenziale $\tilde{V}(r)$ debba possedere uno zero e risulta che questo si realizza per $r_0 = r_{min}/2$.

E' evidente allora che, essendo l'energia cinetica solo positiva, per $E > 0$ non potranno esistere stati legati ma solo stati di scattering, mentre per $\tilde{V}_{min} \leq E < 0$ potranno esistere solo stati legati !

Ritornando al problema dell'equazione del moto, se adesso deriviamo rispetto al tempo la (3.156), troviamo, naturalmente, l'espressione dell'accelerazione \ddot{r} , prevista in questo caso dalla seconda legge della dinamica, i.e.

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)$$

Comunque, se non siamo interessati alla legge oraria bensì, come accade nel caso di un processo di scattering, solo all'equazione della traiettoria, possiamo procedere esplicitando semplicemente \dot{r} direttamente dalla (3.156), ottenendo

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (3.157)$$

dove l'argomento della radice deve essere positivo e questo vincolo determina appunto il range dei possibili valori di r . L'equazione (3.157), insieme alla (3.155), eliminando il tempo, consente appunto di esplicitare l'equazione della traiettoria. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{l}{\mu r^2} \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} &= \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}$$

e l'integrazione della (3.158) permette di risolvere per quadrature il problema della traiettoria per qualunque potenziale centrale.

Nel caso coulombiano che ci interessa, abbiamo

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - \frac{Zze^2}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (3.159)$$

da cui si ricava

$$\theta(r) = \theta_0 + \int^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu z Z e^2}{x l^2} - \frac{1}{x^2}}} \quad (3.160)$$

L'integrale può essere calcolato per sostituzione di variabile, ponendo $\xi = \frac{1}{x}$: si ottiene

$$\theta(r) = \theta_0 + \arccos \left(\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \right) \quad (3.161)$$

dove

$$\xi_0 \equiv \frac{\mu z Z e^2}{l^2}; \quad A \equiv \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \xi_0^2} = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 z^2 Z^2 e^4}{l^4}} \quad (3.162)$$

Infatti, dalla (3.160), con la sostituzione $\xi = \frac{1}{x} \Rightarrow d\xi = -\frac{dx}{x^2}$, si ottiene

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu z Z e^2}{l^2} \xi - \xi^2}}$$

Ponendo allora $\xi = \eta - \xi_0$, con $\xi_0 \equiv \frac{\mu z Z e^2}{l^2}$ ecco che l'argomento della radice quadrata, dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si riduce a $\frac{2\mu E}{l^2} + \xi_0^2 - \eta^2 \equiv A^2 - \eta^2$ dove si è definito $A^2 \equiv \frac{2\mu E}{l^2} + \xi_0^2 = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 z^2 Z^2 e^4}{l^4}$. Dunque

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A^2 - \eta^2}} = \theta_0 - \int^{\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

e ponendo $\zeta = \cos\phi$, questo integrale si risolve immediatamente e fornisce appunto il risultato citato sopra, i.e.

$$\theta(r) = \theta_0 + \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A}\right)$$

Dalla (3.161) segue quindi che

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A}$$

ovvero, infine, che

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (3.163)$$

In generale, questa equazione rappresenta una conica. Nel caso che ci interessa, quando cioè $E > 0$, siccome dalla (3.162) risulta evidentemente che $A > |\xi_0|$, essa rappresenta il ramo di una iperbole, avente uno dei due fuochi nell'origine ed eccentricità $\epsilon = \frac{A}{|\xi_0|} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mZ^2e^4}}$.

Ricordiamo infatti che, in generale, nel piano, dato un punto (fuoco) F e una retta direttrice D , una conica è definita dalla relazione $\frac{PF}{PH} = \epsilon$, dove ϵ è l'eccentricità, PF è la distanza del generico punto P della conica dal fuoco, mentre PH rappresenta la distanza del punto dalla direttrice. Quando $\epsilon > 1$ si ha un'iperbole, quando $\epsilon = 1$ si ha una parabola, quando $\epsilon < 1$ si descrive un'ellisse che, nel caso in cui $\epsilon = 0$ degenera in una circonferenza. Nel caso dell'iperbole, se prendiamo l'origine coincidente con il fuoco e questo si trova all'interno della falda di iperbole considerata, ne segue che la direttrice deve essere opposta al fuoco rispetto al vertice della curva, per cui, misurando θ rispetto alla direzione $fuoco \rightarrow vertice$, l'equazione è

$$\frac{r}{h - r \cos\theta} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos\theta$$

dove h è la distanza del fuoco F dalla direttrice.

Altrimenti, se il fuoco si trova opposto alla falda e dunque la direttrice è tra il vertice della curva e il fuoco, misurando θ sempre rispetto alla direzione $fuoco \rightarrow vertice$, l'equazione è

$$\frac{r}{-h + r \cos\theta} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos\theta$$

E' immediato verificare che il primo caso descrive lo scattering da potenziale attrattivo ($zZ < 0$) (la falda *contiene* l'origine, cioè il centro di scattering), mentre il secondo caso descrive lo scattering da potenziale repulsivo, come nel nostro caso ($zZ > 0$), in cui l'origine (centro di scattering) è opposta alla falda dell'iperbole descritta dalla particella.

Ma torniamo all'equazione (3.163). Scegliamo la costante arbitraria di integrazione θ_0 in modo che sia $\theta = 0$ quando $r = r_{min}$, ovvero quando $\frac{1}{r} = -\xi_0 + A$, i.e. per $\theta - \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$. In questo modo abbiamo

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos\theta \quad (3.164)$$

E' evidente che, affinché $\frac{1}{r} > 0$, l'angolo θ deve essere compreso fra $-\theta_M$ e θ_M , dove $\theta_M \equiv \arccos \frac{\xi_0}{A}$.

Distinguiamo, adesso, i due casi in cui $\xi_0 > 0$ (repulsione) e $\xi_0 < 0$ (attrazione).

Nel primo caso (repulsivo), in cui θ_M è, evidentemente, nel primo quadrante visto che $\xi_0/A > 0$, ricordando che l'angolo di scattering è definito come l'angolo fra \vec{v}_{in} e \vec{v}_{out} , risulta

$$\theta_{sc} = \pi - 2\theta_M \quad (3.165)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \theta_{sc} &= \pi - 2 \arccos \frac{\xi_0}{A} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\epsilon} \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{z^2 Z^2 \mu e^4}}} \end{aligned} \quad (3.166)$$

Nel secondo caso (attrattivo), in cui θ_M è, invece, nel secondo quadrante, usando semplici considerazioni di geometria, possiamo concludere che l'angolo di scattering è adesso dato da

$$\theta_{sc} = \pi - 2(\pi - \theta_M) = -\pi + 2\theta_M \quad (3.167)$$

Ma adesso

$$\theta_M = \arccos \frac{\xi_0}{A} = \arccos \left(-\frac{|\xi_0|}{A} \right) = \arccos \left(-\frac{1}{\epsilon} \right) = \pi - \arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \theta_{sc} &= -\pi + 2\theta_M = -\pi + 2 \left(\pi - \arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{z^2 Z^2 \mu e^4}}} \end{aligned} \quad (3.168)$$

Si osservi che la (3.166) e la (3.168) affermano che, per le stesse condizioni iniziali di energia e parametro d'impatto, a parità di cariche e massa, l'angolo di scattering è lo stesso sia nel caso attrattivo che in quello repulsivo.

Per arrivare adesso all'espressione della sezione d'urto Rutherford, poniamo

$$\alpha \equiv \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{z^2 Z^2 \mu e^4}}} \quad (3.169)$$

per cui risulta

$$\cos\theta_{sc} = -\cos(2\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{\mu z^2 Z^2 e^4}} \quad (3.170)$$

Ricordiamo adesso che, per un processo d'urto a simmetria assiale, risulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)} \right| \quad (3.171)$$

dove b è il parametro d'impatto. Per determinare la sezione d'urto differenziale a partire dalla (3.170), occorre esplicitare la funzione $b^2 = b^2(\cos\theta_{sc})$. Questo può essere fatto ricordando che i due integrali primi dell'energia E e del momento angolare l , usati nella (3.170), sono esprimibili in termini di b e del modulo della velocità iniziale v , nel modo seguente

$$\begin{aligned} l &= \mu v b \\ 2E &= \mu v^2 \end{aligned}$$

per cui, sostituendo, risulta

$$\begin{aligned} \cos\theta_{sc} &= 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{\mu z^2 Z^2 e^4}} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{(\mu v^2)(\mu v b)^2}{\mu z^2 Z^2 e^4}} = 1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{\mu v^2}{zZe^2}\right)^2 b^2} = \\ &= \frac{(\mu bv^2)^2 - (zZe^2)^2}{(\mu bv^2)^2 + (zZe^2)^2} \end{aligned} \quad (3.172)$$

da cui si ricava, con semplici passaggi algebrici (per semplicità indicheremo l'angolo di scattering con θ invece che con θ_{sc} ...)

$$b^2 = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2}\right)^2 \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2}\right)^2 \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2}\right)^2 \cot^2\frac{\theta}{2} \quad (3.173)$$

e dunque, per la (3.171), abbiamo finalmente che la *sezione d'urto Rutherford* per scattering di una particella di massa m e carica ze contro un centro di scattering di massa M e carica Ze , *indipendentemente* dal segno delle cariche, risulta essere data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{d\cos\theta} \right| = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2}\right)^2 \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} = \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2}\right)^2 \frac{1}{4 \sin^4\frac{\theta}{2}} \quad (3.174)$$

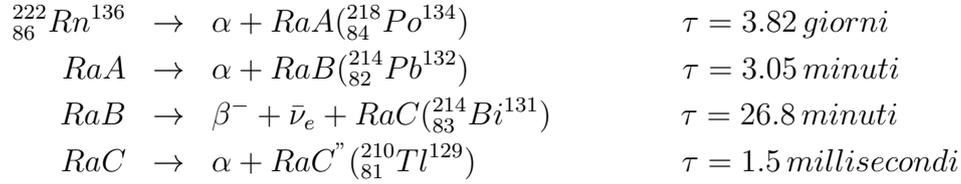
dove μ è la massa ridotta del sistema e v la sua velocità nel sistema del CM . Volendo infine porre questa sezione d'urto in termini della costante di struttura fine $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$, abbiamo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = \left(\frac{zZ\alpha \hbar c}{pv}\right)^2 \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} = \left(\frac{zZ\alpha \hbar c}{pv}\right)^2 \frac{1}{4 \sin^4\frac{\theta}{2}} \quad (3.175)$$

Possiamo adesso provare a determinare la sezione d'urto totale di back-scattering di una particella α contro un nucleo isolato, trascurando gli effetti di schermo e di massa ridotta. Occorre per questo integrare la (3.174) sull'intero angolo azimutale e, nell'angolo polare θ , fra $\pi/2$ e π . Poiché risulta

$$\int d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = 2\pi \cdot \left. \frac{-1}{1 - \cos\theta} \right|_{\pi/2}^{\pi} = \pi$$

Geiger e Mardsen usarono nel loro esperimento particelle α , cioè nuclei di elio, con energie dell'ordine di 5 MeV , che erano prodotte sia dall'*emanazione del Radio*, come allora si chiamava il ^{222}Rn , che dal RaA (^{218}Po) e dal RaC (^{214}Bi), secondo la catena radioattiva seguente:



Il risultato inatteso dello scattering all'indietro condusse all'abbandono del modello di Thomson a favore del modello³⁹ di Rutherford, in cui il nucleo centrale era l'analogo del Sole nel sistema planetario: esso concentrava in sé quasi tutta la massa e aveva una carica che caratterizzava l'elemento chimico.

Purtroppo, come sappiamo, se questo modello risolveva un problema, ne generava un altro, cioè quello della instabilità elettromagnetica⁴⁰ dell'atomo: per irraggiamento, gli elettroni dovevano cadere sul nucleo in tempi dell'ordine del centesimo di nanosecondo ...

abbiamo che

$$\sigma_{bk} = \int d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \pi \left(\frac{zZe^2}{\mu v^2} \right)^2 = \pi \left(\frac{zZe^2}{2E} \right)^2 \quad (3.176)$$

che, nel caso di una particella α da 5 MeV contro un nucleo d'oro, fornisce

$$\sigma_{bk} = \pi \left(\frac{2 \cdot 79 \cdot (4.8 \times 10^{-10})^2}{10^7 \cdot 1.6 \times 10^{-12}} \right)^2 = 14.3 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 14.3 \text{ barn} \quad (3.177)$$

mentre se urta un nucleo di alluminio, la stessa sezione d'urto diminuisce del fattore $(Z_{\text{Au}}/Z_{\text{Al}})^2 = (79/13)^2 \approx 37$, in buon accordo con i risultati di Geiger e Mardsen, tenendo conto che abbiamo trascurato sia gli effetti di schermo elettronico che quelli di riassorbimento.

Circa la sezione d'urto Rutherford, occorre notare che essa conduce a un valore infinito della sezione d'urto totale a causa del suo andamento come θ^{-4} quando $\theta \rightarrow 0$.

Questo è dovuto essenzialmente al fatto che, essendo la forza coulombiana a range infinito, non esiste, a rigore, alcun limite superiore al parametro d'impatto oltre il quale non c'è urto.

Questa patologia scompare se si tiene conto dell'effetto di schermo degli elettroni e quindi del fatto che il potenziale prodotto dall'atomo si annulla esattamente da una opportuna distanza dal centro in poi (stiamo trascurando effetti di polarizzazione ...), quando la carica nucleare viene completamente schermata da quella della nuvola elettronica (raggio atomico).

³⁹E. Rutherford: *The scattering of the α and β rays and the structure of the atom*, Phil. Mag. 21, 669 (1911).

E. Rutherford: *The structure of the atom*, Phil. Mag. 27, 488 (1914).

⁴⁰Classicamente, nel caso di una carica accelerata, a causa dell'irraggiamento essa subisce una perdita di energia data da (sistema *cgs es* ...)

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt d\Omega} = \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{a}|^2 \sin^2\theta \quad (3.178)$$

dove \vec{a} è l'accelerazione della carica e θ è l'angolo fra la direzione di osservazione e \vec{a} stessa.

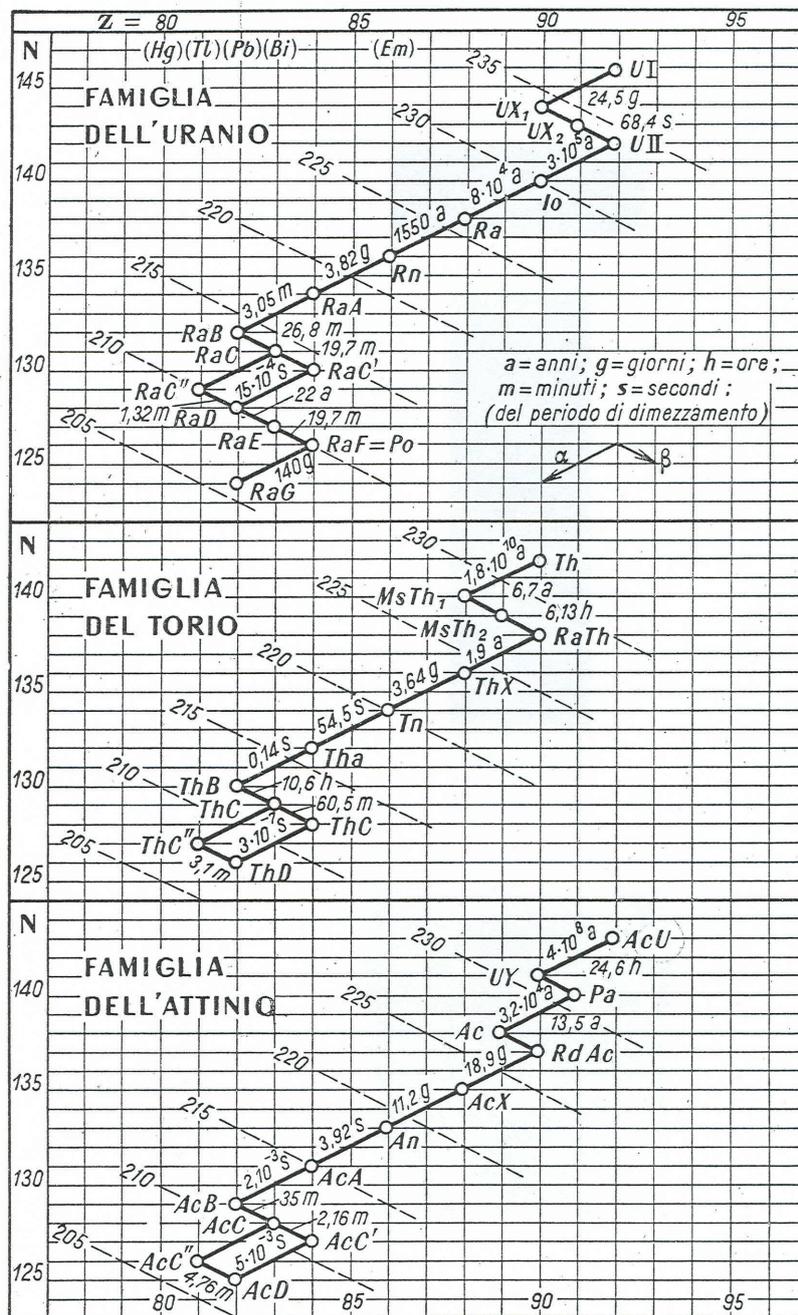


Figure 8: Tabella dei decadimenti delle catene dell'Uranio, Torio e Attinio

Da questo segue dunque che, integrando sull'angolo solido, la potenza totale irraggiata vale

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\ddot{a}|^2 \quad (3.179)$$

Questa espressione classica di Larmor, anche se non è relativistica, è comunque sufficiente per fornire un'ordine di grandezza circa il tempo di collasso elettromagnetico dell'atomo di idrogeno. Iniziamo osservando che dalla seconda legge della dinamica abbiamo

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{mR} \Rightarrow \beta^2 = \frac{e^2}{mc^2} \frac{1}{R} \equiv \frac{r_e}{R} \quad (3.180)$$

dove r_e è il raggio classico dell'elettrone ($r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.81794092(38) \times 10^{-13} \text{ cm}$).

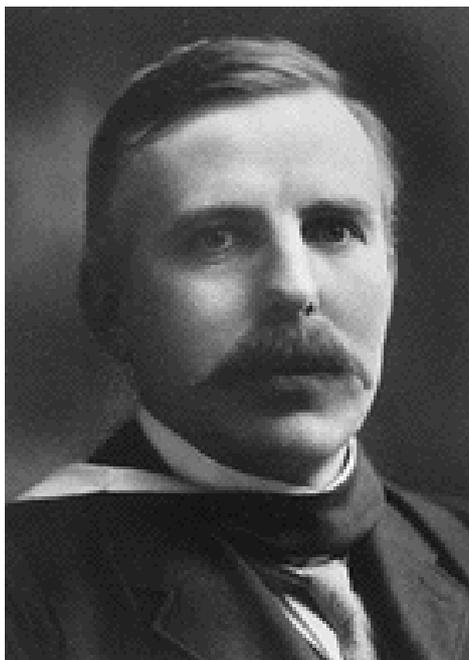


Figure 9: *Ernest Rutherford (1871-1937)*

Questo dimostra che, almeno sulla scala del raggio di Bohr ($R_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-2} r_e$), il moto dell'elettrone è non relativistico, per cui, riguardo alla potenza da esso irraggiata, possiamo effettivamente porre

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{R^2} \quad (3.181)$$

Questa perdita di energia avviene, evidentemente, a spese dell'energia dell'atomo stesso

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{R} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{R} \quad (3.182)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{P} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{e^2}{R^2} \dot{R} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{R^2} \\ &\Rightarrow \dot{R} = -\frac{4}{3} \frac{v^4}{c^3} = -\frac{4}{3} \frac{1}{c^3} \left(\frac{e^2}{mR} \right)^2 = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{R^2} \end{aligned} \quad (3.183)$$

e dunque, ricordando che $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$

$$R^2 dR = -\frac{4}{3} c r_e^2 dt \Rightarrow \frac{1}{3} R^3 + cost = -\frac{4}{3} c r_e^2 t \quad (3.184)$$

per cui, se per $t = 0$ risulta $R = R_B$, allora l'equazione precedente fornisce

$$R^3 - R_B^3 = -4c r_e^2 t \quad (3.185)$$

e dunque ricaviamo un tempo di collasso pari a

$$\begin{aligned} \tau &\approx \frac{R_B^3}{4c r_e^2} = \frac{r_e^3 \alpha^{-6}}{4c r_e^2} = \alpha^{-6} \frac{r_e}{4c} = \\ &\approx (137.036)^6 \frac{2.818 \cdot 10^{-13}}{4 \cdot 2.998 \cdot 10^{10}} \approx 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ s} \end{aligned} \quad (3.186)$$

In realtà, allorché R divenisse dell'ordine del raggio classico, dovremmo usare la meccanica relativistica ... se non fosse che si tratta ormai delle dimensioni stesse del protone!

Ma qui, la soluzione al problema venne dalla Meccanica Quantistica, ed è un'altra storia ...

Quanto al nucleo⁴¹, c'era comunque da spiegare⁴² come mai quello del secondo elemento della Tavola Periodica, l'elio, non avesse, per esempio, massa doppia di quello dell'idrogeno bensì quadrupla, visto che aveva carica doppia e quindi, ragionevolmente, poteva essere fatto semplicemente da due protoni.

Analogamente, il successivo, il litio, era circa sette (e non tre) volte più massivo del protone, e così via⁴³ ...

Il rompicapo fu risolto da Chadwick nel 1932, quando scoprì l'esistenza del neutrone⁴⁴, una specie di gemello scarico del protone⁴⁵.

⁴¹E. Rutherford: *Backerian lecture: nuclear constitution of atoms*

Proc. Roy. Soc. 97A, 374 (1920).

Rutherford insieme a Marsden, già dal 1914, stava cercando di capire come fosse fatto il nucleo stesso in generale e per questo avevano iniziato dall'elemento più leggero e bombardavano dell'idrogeno gassoso con particelle α . Osservarono che, ben oltre la massima distanza (*range*) raggiungibile dalla particella α , si osservavano ancora, sullo schermo fluorescente che serviva loro da rivelatore, delle scintillazioni prodotte da una particella che, attraverso la deflessione magnetica, verificarono essere positiva. Rutherford, correttamente, interpretò questa particella come il nucleo dell'idrogeno, che chiamò *H - particle*. Marsden aveva notato, però, che un fenomeno simile si osservava anche quando le α si propagavano in aria, dove l'idrogeno era quasi assente.

Era provocato dalla stessa particella? Ci fu un'interruzione del lavoro a causa della prima guerra mondiale, ma, successivamente, Rutherford riprese questi studi e, dopo aver verificato che questo fenomeno si realizzava anche quando, al posto dell'idrogeno, usava per esempio boro, fluoro, sodio, alluminio, fosforo, azoto, concluse che quella che lui aveva battezzato *H-particle*, aveva una valenza molto più generale di quanto lui pensasse all'inizio ed era il *mattone carico* con cui erano costituiti tutti i nuclei. Per questo motivo Rutherford lo ribattezzò *protone*, dal greco $\pi\rho\omega\tau\omicron\varsigma$ (*proto*) = *primo*, proprio per significare appunto che si trattava del mattone fondamentale con cui la Natura ha poi costruito tutti i nuclei atomici.

⁴²E' giusto ricordare che Rutherford, nel 1920, nell'articolo citato prima, avanzò l'idea che, oltre ai protoni, nei nuclei ci fossero anche particelle neutre di massa simile, ma l'idea dominante era quella più "economica", cioè quella che faceva uso solo delle particelle già note, ovvero che il nucleo contenesse protoni ed elettroni detti *nucleari*, per distinguerli da quelli che orbitavano intorno al nucleo stesso.

⁴³In ogni caso, anche se i nuclei fossero fatti solo da protoni, ci sarebbe rimasto sempre da spiegare come questo fosse possibile, visto che i protoni sono particelle cariche dello stesso segno e dunque si respingono elettricamente.

⁴⁴J. Chadwick: *The existence of a neutron*, Proc. Roy. Soc. 136A, 692 (1932).

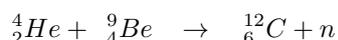
⁴⁵Nel 1930, Bothe e Becker avevano osservato che, bombardando berillio con particelle α (queste erano ottenute dal decadimento del $RaF \equiv {}_{84}^{210}Po$, che dà luogo ad α da 5 MeV...), veniva emessa una radiazione neutra estremamente penetrante in grado di provocare addirittura la disintegrazione del nucleo. Nel 1932 Irene Curie con il marito Frédéric Joliot, riferirono a Parigi che, bombardando lamine di berillio con particelle α , la radiazione invisibile emessa era in grado, in paraffina e sostanze idrogenate in genere, di sbalzare via protoni. L'interpretazione che veniva data al momento era che si trattasse di radiazione γ : in realtà essi stavano osservando



Figure 10: *James Chadwick (1891-1974)*

I nuclei, dunque, erano fatti da Z protoni (tanti quanti il numero atomico, ovvero quanti gli elettroni) e da $A - Z$ neutroni. Grosso modo, risulta poi che i neutroni sono circa quanti i protoni (anche se tendono a essere via via di più, all'aumentare del numero atomico) e c'erano nuclei aventi lo stesso numero di

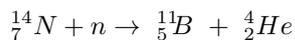
la reazione



Usando la camera a nebbia (di Wilson), fu possibile poi misurare l'energia dei protoni di rimbalzo e ci si rese ben presto conto che, se la radiazione primaria fosse stata fatta di γ , questi avrebbero dovuto possedere energie irrealisticamente elevate. Chadwick collegò il fatto sperimentale osservato dai Joliot alla previsione del 1920 di Rutherford circa l'esistenza di una specie di partner scarico del protone, necessario per risolvere l'enigma dei pesi atomici.

Rifece l'esperimento inviando la famosa radiazione su idrogeno e su altre sostanze fatte da atomi leggeri (litio, berillio, boro, carbonio e azoto) osservando, spesso, l'emissione di ioni della sostanza usata, variamente scatterati. Dalla misura e dal confronto delle velocità massima di questi ioni, Chadwick dedusse che la massa del proiettile doveva essere pari a circa 0.9 volte la massa del protone. Assunse infatti che la radiazione dal berillio fosse una particella di massa M : se V era la sua velocità massima, allora, da semplici considerazioni cinematiche, segue che la velocità massima U_p del protone sbalzato via in idrogeno dall'urto, vale, al massimo $U_p = \frac{2M}{M+M_p} V$, mentre, nel caso, per esempio, di un nucleo di azoto, vale, evidentemente $U_N = \frac{2M}{M+M_N} V$. Queste velocità potevano essere inferite dal range percorso in camera di Wilson, per cui, dal loro rapporto, Chadwick poté estrarre la massa incognita, che risultò essere, appunto, circa 0.9 volte la massa del protone (oggi sappiamo che la massa del neutrone è in realtà maggiore di quella del protone di circa l'1 per mille ...).

In camera a nebbia, sempre usando questa radiazione, furono altresì osservati esempi di disintegrazione nucleare indotta, del tipo



che chiusero definitivamente il problema sulla natura di questa radiazione.

La scoperta valse a Chadwick il Nobel nel 1935.

J. Chadwick: *Nobel Lecture 1935*

protoni ma diverso numero di neutroni che erano appunto i vari *isotopi*⁴⁶ di uno stesso elemento. Ricordiamo in proposito che la chimica di un elemento dipende dalla sua struttura elettronica e quindi, in buona sostanza, solo dal numero di protoni nel nucleo (gli effetti dovuti alla struttura nucleare sono quasi impercettibili negli atomi), per cui gli isotopi sono pressochè equivalenti fra loro chimicamente e ciò che li differenzia sono tipicamente proprietà legate anche alla loro massa, come velocità di reazione, coefficiente di diffusione, etc ...

Dunque, nel 1932, conoscevamo solo tre particelle elementari: l'elettrone, il protone e il neutrone⁴⁷ e tutta la materia nota a quel tempo poteva essere costruita a partire da questi tre mattoni.

Mai, prima di allora (e purtroppo anche dopo di allora ...) nella Fisica, si era potuto offrire una risposta⁴⁸ più semplice alla domanda: *di che cosa è fatta la materia ?*

In realtà, nel 1932 era nota anche un'altra particella, il *fotone*, che aveva però caratteristiche decisamente diverse: non era un costituente della materia in senso stretto bensì il *quanto* della radiazione elettromagnetica, introdotto⁴⁹ da Einstein nel 1905, per spiegare l'effetto fotoelettrico⁵⁰, per cui ebbe il Nobel⁵¹ nel 1921.

⁴⁶Ricordiamo a questo proposito che, pur essendo gli isotopi noti da tempo, fu solo nel 1931 che Birge e Menzel nell'articolo R.T. Birge, D.H. Menzel: *The relative abundance of the oxygen isotopes and the basis of the atomic weight system*; Phys. Rev. 37, 1669 (1931)

osservando alcune inconsistenze nelle misure di massa ottenute su campioni di idrogeno naturale, fatte usando la tecnica della spettroscopia di massa, ipotizzarono l'esistenza di un nuovo elemento, il Deuterio, con massa circa doppia rispetto a quella dell'idrogeno. L'elemento fu poi scoperto nel 1932, studiando gli spettri di campioni di idrogeno naturale in tubi a scarica.

H.C. Urey, F.G. Brickwedde e G.M. Murphy: *A hydrogen atom of mass 2*; Phys. Rev. 39, 164 (1932)

⁴⁷Va detto che una scuola di pensiero tendeva ancora a considerare il neutrone piuttosto come uno stato legato $p - e$, anche allo scopo di spiegare il decadimento β di alcuni nuclei.

⁴⁸Lo stesso non era vero per quanto riguarda le forze elementari, mancando completamente una teoria sia del decadimento radioattivo che della stabilità del nucleo.

⁴⁹A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* Annalen der Physik 17, 132 (1905)

⁵⁰Va sotto questo nome l'effetto per cui la luce è in grado di estrarre elettroni da certi metalli. La stranezza in questo effetto è rappresentata dal fatto che si tratta di un effetto a soglia, ovvero non c'è estrazione, indipendentemente dall'intensità, finché la luce non ha componenti di frequenza superiore a un certo valore ν_0 , e questo è inspiegabile in termini di elettromagnetismo classico. La spiegazione di Einstein era che la luce viaggiava in pacchetti di energia $h\nu$, per cui, visto che per estrarre un elettrone da un metallo occorreva disporre almeno di una certa quantità di energia w , caratteristica del metallo, c'era estrazione solo quando $h\nu - w = \epsilon > 0$, ed ϵ rappresentava la massima energia possibile per l'elettrone, *indipendentemente* dall'intensità della radiazione.

⁵¹E' curioso il fatto che Einstein non abbia avuto il Nobel nel 1921 per i suoi due lavori sulla Relatività speciale e generale, i.e.

A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Physik 17, 891 (1905)

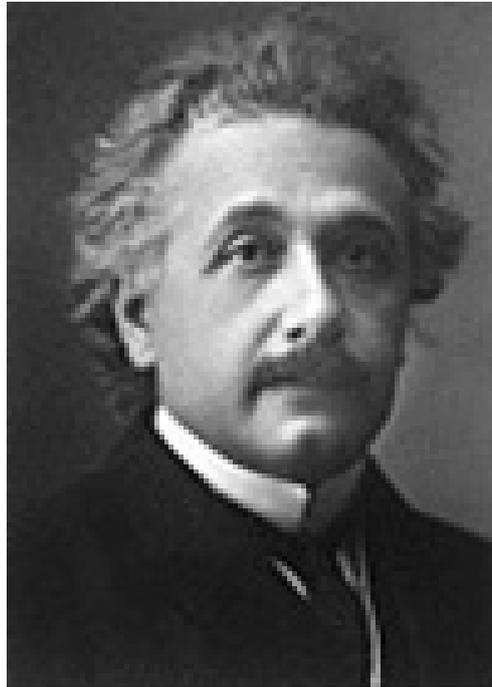


Figure 11: *Albert Einstein (1879-1955)*

Va detto che l'idea del fotone, a differenza di quella del quanto d'azione⁵² di Planck, ebbe per molto tempo vita grama. La ragione era che Einstein postulava che l'energia elettromagnetica fosse, per sua natura, quantizzata in pacchetti, per cui il fotone possedeva una energia $h\nu$ e un impulso $h\nu/c$, e questo costituiva una vera rottura con l'elettromagnetismo classico (a differenza di Planck, il quale postulava solo che fossero l'assorbimento e l'emissione della radiazione ad avvenire per quanti di energia $h\nu$).

Nonostante che, per esempio, nel 1916 Millikan avesse pubblicato risultati molto esaustivi sull'effetto fotoelettrico, riconoscendo che "*Einstein's photoelectric equation appears, in every case, to predict exactly the observed results*" fu solo dopo l'esperimento di Compton⁵³, del 1923, che l'idea del fotone (battezzato così dal chimico Gilbert Lewis nel 1926) fu definitivamente accettata.

A. Einstein: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Physik 49, 769 (1916) che, evidentemente, erano ancora mal digeriti, bensì per l'effetto fotoelettrico. Comunque, in occasione del ritiro del premio Nobel, egli parlò di Relatività !

A. Einstein: *Nobel Lecture 1921*

⁵²M. Planck: *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*
Annalen der Physik 4, 553 (1901)

M. Planck: *Nobel Lecture 1918*

⁵³A.H. Compton: *A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements*
Phys. Rev. 21, 483 (1923)

A.H. Compton: *Nobel Lecture 1927*

Un fotone, che urti su un elettrone libero e in quiete, cambia di lunghezza d'onda secondo la legge $\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ dove m è la massa dell'elettrone mentre θ è l'angolo di scattering che subisce il fotone: questo è quanto osservò Compton usando raggi X della riga K_α del Molibdeno ($\lambda = 0.711 \text{ \AA}$; $E \approx 17.4 \text{ KeV}$). Il fenomeno può essere spiegato solo trattando il processo come uno scattering fra due particelle, di cui una, l'elettrone, è inizialmente a riposo e l'altra, il fotone, possiede appunto un'energia $h\nu$ e un impulso $h\nu/c$.



Figure 12: *Max Planck (1858-1947)*

Infatti, se trattiamo il processo classicamente, cioè come la diffusione di un'onda elettromagnetica da parte di un elettrone libero e inizialmente in quiete, *non* possiamo ottenere in alcun modo uno shift di frequenza dell'onda diffusa !

Si tratta dello *scattering Thomson*.

Se un'onda elettromagnetica, che supporremo piana, monocromatica e linearmente polarizzata, incide su un elettrone libero, questo si muove di moto armonico sotto l'azione del campo elettrico sinusoidale dell'onda. E' lecito trascurare l'effetto sull'elettrone del campo magnetico in quanto esso diviene confrontabile con quello del campo elettrico solo se l'elettrone assume velocità relativistiche, ovvero per intensità dell'onda proibitive, visto che questo può accadere solo se la radiazione è tale che

$$\frac{eE_0}{m\omega} \approx c \Rightarrow \frac{eE_0\lambda}{m2\pi c} \approx c \Rightarrow eE_0 \lambda \approx mc^2 \quad (3.187)$$

dove λ è la lunghezza d'onda *ridotta* dell'onda elettromagnetica; e questa condizione, come possiamo facilmente verificare, è impossibile da realizzarsi almeno nei casi di interesse (radiazione UV o X). Trascurando dunque l'effetto magnetico, per l'elettrone si ha

$$m \vec{a}(t) = e \vec{E}(t) \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.188)$$

Il moto oscillatorio avviene nel piano trasverso alla direzione di propagazione dell'onda, quindi a $\vec{k} \cdot \vec{x}$ costante: in ogni caso la condizione (3.187) implica che il moto dell'elettrone intorno alla sua posizione di equilibrio abbia comunque ampiezza $\frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \lambda$ e dunque possiamo certamente assumere che

$$\vec{a}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.189)$$

la quale mostra come il moto dell'elettrone avvenga *esattamente* alla stessa frequenza di quella dell'onda e quindi che anche la radiazione da esso irraggiata *non possa che essere a quella stessa frequenza*.

Quanto alla potenza istantanea irradiata dall'elettrone a causa del suo moto accelerato, come sappiamo essa è pari a

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{a}(t)|^2 \cdot \sin^2\theta \quad (3.190)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di propagazione della radiazione irradiata e quella dell'accelerazione istantanea dell'elettrone, ovvero quella della polarizzazione lineare dell'onda incidente. Se assumiamo che lo spostamento che l'elettrone subisce dalla sua posizione di equilibrio sia comunque molto inferiore alla lunghezza d'onda ridotta dell'onda incidente, ovvero se

$$\frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \frac{eE_0\lambda^2}{m(2\pi)^2c^2} \ll \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \frac{eE_0}{mc^2} \ll 1 \quad (3.191)$$

(si osservi che si tratta della stessa condizione che garantisce la possibilità di trascurare l'effetto del campo magnetico dell'onda sul moto dell'elettrone) allora possiamo mediare facilmente nel tempo la potenza irradiata, ottenendo

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2}{8\pi c^3} \left(\frac{eE_0}{m} \right)^2 \cdot \sin^2\theta = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \sin^2\theta \quad (3.192)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione della polarizzazione lineare e quella di osservazione. Quanto poi a

$$I = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad (3.193)$$

essa misura l'intensità dell'onda stessa, ovvero il valor medio del flusso del vettore di Poynting nella sua direzione di propagazione, dunque

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \right\rangle = I \cdot \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \sin^2\theta \quad (3.194)$$

Definendo allora come *sezione d'urto differenziale* di scattering proprio il rapporto $\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} \rangle / I$, si ha

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{pol} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \sin^2\theta = r_0^2 \sin^2\theta \quad (3.195)$$

dove abbiamo messo esplicitamente in evidenza il fatto che essa è riferita alla direzione di polarizzazione della radiazione e non a quella di propagazione dell'onda imperturbata, come vuole la definizione canonica di sezione d'urto differenziale. Se immaginiamo adesso che l'onda viaggi lungo l'asse z mentre il campo elettrico \vec{E} formi l'angolo ϕ_p con l'asse x , i.e.

$$\vec{E} = E_0(\cos\phi_p, \sin\phi_p, 0) \equiv E_0 \vec{e}$$

allora, data una generica direzione di osservazione \vec{n} espressa in coordinate polari riferite a z

$$\vec{n} = (\sin\Theta \cos\phi, \sin\Theta \sin\phi, \cos\Theta)$$

evidentemente abbiamo che

$$\cos\theta \equiv \vec{e} \cdot \vec{n} = \sin\Theta \cos(\phi_p - \phi)$$

Occorrerà comunque arrivare alla quantizzazione formale del campo elettromagnetico per inquadrare in modo preciso questa particella nel contesto delle particelle elementari, come mediatore dell'interazione stessa, per cui è proprio attraverso lo scambio di fotoni che le cariche elettriche "sanno della presenza una dell'altra" e si attraggono o si respingono a seconda dei loro segni rispettivi.

e dunque, in termini di queste variabili angolari risulta

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pol} = r_0^2 \sin^2\theta = r_0^2 [1 - \sin^2\Theta \cos^2(\phi_p - \phi)] \quad (3.196)$$

dove, adesso, Θ è proprio l'angolo di scattering. Nel caso di luce non polarizzata che si propaga lungo l'asse z , occorrerà evidentemente mediare sull'angolo ϕ_p fra 0 e 2π , ottenendo così

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{unpol} = r_0^2 \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2\Theta\right] = \frac{r_0^2}{2} [1 + \cos^2\Theta] \quad (3.197)$$

Quanto alla sezione d'urto totale σ_{Th} , occorre integrare l'espressione precedente sull'intero angolo solido. Risulta

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\Theta d\Theta [1 + \cos^2\Theta] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

mentre l'integrazione nell'angolo azimutale contribuisce, ovviamente, per un fattore 2π , per cui abbiamo infine che

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.66524616(18) \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.66524616(18) \text{ barn} \quad (3.198)$$

Per questa strada, comunque, non c'è modo di render conto dello shift in frequenza della radiazione scatterata che, come Compton osservava, segue la ben nota legge seguente

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \equiv \lambda_c (1 - \cos\theta) \quad (3.199)$$

dove $\lambda_c \equiv \frac{h}{mc}$ è, appunto, la *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone.

Ricordiamo poi, per completezza, che a ogni particella carica di massa M si associa anche la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton ridotta* nel modo seguente

$$\chi_c \equiv \frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{Mc} \quad (3.200)$$

Essa rappresenta la scala naturale di lunghezza associata alla particella di massa M e, nel caso in cui questa sia il mediatore di una forza, essa ne individua il raggio d'azione, ovvero il *range*. Tornando al caso dell'elettrone, risulta

$$\chi_c \equiv \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{e^2}{mc^2} = \alpha^{-1} r_e = 3.861592642(28) \cdot 10^{-11} \text{ cm} \quad (3.201)$$

essendo, come ben noto,

$$r_e = 2.817940285(31) \cdot 10^{-13} \text{ cm}; \quad \alpha^{-1} = 137.03599976(50) \quad (3.202)$$

con $r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}$ il raggio classico dell'elettrone e $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$ la costante di struttura fina.

3.2 Il muone μ e il mesone π

La teoria di Rutherford di un nucleo atomico costituito da protoni e neutroni, suffragata dalla scoperta del neutrone di Chadwick, aveva comunque il problema di spiegare come protoni e neutroni potessero essere tenuti insieme.

Dopotutto i neutroni, essendo scarichi, perchè mai dovrebbero star confinati nel nucleo? E i protoni poi, che per la loro carica elettrica si respingono fra loro, chi li costringe a stare lì confinati ?

Evidentemente, se questa teoria descrive la realtà fisica (e la descrive !), allora se ne deve trarre la logica conseguenza che deve esistere una forza fra questi componenti del nucleo, capace di tenerli insieme. Questa forza dovrà, in particolare essere più intensa di quella elettromagnetica (da cui il nome di forza *forte*), in modo da battere la repulsione elettrostatica comunque presente fra i protoni.

Ma come mai non ci accorgiamo della sua esistenza?

Dopotutto, nell'esperienza quotidiana, tolta la forza di gravità e quella elettromagnetica, non c'è esperienza di altro !

Questa forza, dunque, deve essere *di corto range*⁵⁴, ovvero deve agire solo sulla scala delle dimensioni nucleari⁵⁵ e poi annullarsi molto più rapidamente di r^{-2} , come fanno invece sia la forza di Newton che quella di Coulomb.

La prima teoria⁵⁶ della *forza forte* fu pubblicata nel 1935 e si deve a Yukawa, per la quale ebbe il Nobel⁵⁷ nel 1949. Egli ipotizzò che i protoni e i neutroni, alla stregua delle cariche elettriche e delle masse, interagissero fra loro attraverso un mediatore che, però, invece di avere massa nulla come il fotone, possedesse una massa $m \neq 0$, proprietà questa che conferisce all'interazione la caratteristica di avere, appunto, un raggio d'azione finito.

In questo caso, infatti, si dimostra che il potenziale di interazione fra due particelle ferme (per un campo mediatore scalare) non va come $1/r$ bensì ha la forma seguente

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{mcr}{\hbar}} \quad (3.203)$$

dove A è una costante opportuna che caratterizza l'intensità della forza.

La presenza dell'esponenziale garantisce la finitezza del range che è dato, evidentemente, dalla lunghezza d'onda Compton ridotta associata al mediatore stesso $\lambda_c \equiv r_0 = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}$, per cui, essendo $\hbar c = 197.326960 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$, occorrono masse dell'ordine del centinaio di MeV affinché il range⁵⁸ della forza possa essere dell'ordine del fm ...

⁵⁴Il *range* di una forza è il suo raggio d'azione.

⁵⁵Se la scala fosse quella atomica o maggiore, le molecole collasserebbero in supernuclei ...

⁵⁶H. Yukawa: *On the interaction of elementary particles*

Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17, 48 (1935)

⁵⁷H. Yukawa: *Nobel Lecture 1949*

⁵⁸Esiste un argomento intuitivo attraente ma sbagliato (cfr. D. Griffiths: *Introduction to elementary particles*, J. Wiley & Sons inc. 1987, pag.51) per arrivare alla stima del range



Figure 13: *Hideki Yukawa (1907-1981)*

Yukawa calcolò questa massa intorno a 200 volte quella dell'elettrone, ovvero circa un nono di quella del protone e del neutrone. Per questo motivo, essendo questa massa intermedia fra questi due estremi allora noti, il "quanto" associato al campo mediatore, cioè l'ipotetica particella ad esso associato, che doveva avere appunto quel valore di massa, fu chiamata *mesone*⁵⁹.

in termini della massa del mediatore. L'argomento è il seguente. Il protone ed il neutrone, scambiandosi il mediatore di massa m , violano temporaneamente la conservazione dell'energia di $\Delta E = mc^2$. Il principio di indeterminazione permette la violazione purchè tutto rientri nell'ordine dopo un tempo Δt tale che $\Delta t \Delta E \approx \hbar$. D'altronde il mediatore potrà viaggiare a velocità che sono, come ordine di grandezza, pari a c , quindi potrà percorrere solo tratti dell'ordine di $r \approx c \Delta t = c \hbar / mc^2 = \hbar / mc$: da qui, il valore del *range* !

L'argomento, pur conducendo al risultato giusto, se preso alla lettera è sbagliato per vari motivi, non ultimo il fatto che il principio di indeterminazione non autorizza affatto la violazione della conservazione dell'energia che, insieme all'impulso spaziale è invece rigorosamente conservata nel processo di interazione. Nello stesso ambito di una teoria perturbativa (grafici di Feynman) di cui l'argomento sopra citato, per vari aspetti, è figlio, il quadrimpulso è conservato in ogni vertice e accade invece che il mediatore dell'interazione sia *virtuale*, ovvero *fuori* dall'iperboloide di massa, i.e. agisca come propagatore dell'interazione !

L'argomento citato conduce al risultato giusto sostanzialmente per ragioni dimensionali, infatti, fissato il valore della massa m , la scala di lunghezze che questo valore di massa definisce attraverso le costanti fondamentali \hbar e c è proprio (e unicamente) appunto la lunghezza d'onda Compton ridotta $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ (vedi sopra).

⁵⁹Questo nome è dovuto a Werner Heisenberg: nello stesso spirito a quel tempo veniva usata la parola *leptone* (la parola deriva dal greco $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\nu$ e significa *piccolo, minuto, leggero*) per indicare l'elettrone e la parola *barione* (dal greco $\beta\alpha\rho\upsilon\acute{o}\nu$, che significa *grave, pesante*) per indicare sia il protone che il neutrone.

Oggi si preferisce piuttosto differenziare le particelle per il loro modo di interagire invece

Può essere interessante, a questo punto, ripercorrere dall'inizio il ragionamento fatto da Yukawa e iniziamo, per questo, partendo da quanto sappiamo circa il campo elettromagnetico.

Così come ci è noto dalla fisica classica, usando notazioni non relativistiche⁶⁰,

che per il valore della loro massa, per cui oggi chiamiamo *leptone* chi interagisce solo in modo elettrodebole (elettrone, muone, tau e corrispondenti neutrini), mentre vengono chiamati *adroni* (dal greco $\alpha\delta\rho\sigma$ che significa *spesso, grosso*) tutte le particelle che subiscono anche l'interazione forte. Gli adroni possono quindi, a loro volta, essere dei *barioni* se, come il protone e il neutrone, sono fermioni (in questo caso, come vedremo, sono fatti da tre quark), oppure essere dei *mesoni* se si tratta di bosoni (nel qual caso, come vedremo, sono fatti da coppie di quark/antiquark).

⁶⁰Le equazioni di Maxwell, nel sistema *cgs es*, come ben noto, sono le seguenti

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.204)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.205)$$

L'equazione $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ consente di esprimere il campo magnetico \vec{B} come rotazione di un opportuno potenziale vettore \vec{A}

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.206)$$

Sostituendo nell'equazione della rotazione del campo elettrico, abbiamo allora che

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} \Rightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.207)$$

e dunque possiamo trovare un opportuno potenziale scalare V , indeterminato a meno di una qualsiasi funzione del tempo, tale che

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V \quad (3.208)$$

Le due equazioni di Maxwell restanti, legate alle sorgenti del campo stesso, divengono allora, rispettivamente, le seguenti

- per il campo elettrico

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \Rightarrow 4\pi \rho = -\nabla^2 V - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} \quad (3.209)$$

- per il campo magnetico

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow -\nabla^2 \vec{A} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{grad} V) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ &\Rightarrow -\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.210)$$

valgono le seguenti equazioni per i potenziali elettromagnetici (sistema *cgs es*)

$$\square V = 4\pi\rho \quad (3.217)$$

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (3.218)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.219)$$

dove la terza equazione esprime la *gauge* di Lorentz e \square indica l'operatore di D'Alembert, definito nel modo canonico consueto come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.220)$$

Queste equazioni ci dicono che

- il campo elettromagnetico ha origine nelle cariche/correnti;
- il campo libero ha massa nulla, visto che soddisfa le equazioni

$$\square V = 0; \quad \square \vec{A} = 0$$

L'arbitrarietà relativa alla scelta dei potenziali (arbitrarietà di *gauge*) consente di semplificare le espressioni precedenti imponendo (senza che questa condizione li fissi univocamente ...) che

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (3.211)$$

In questa *gauge di Lorentz*, è immediato allora che i potenziali verificano le equazioni seguenti:

$$-\nabla^2 V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 4\pi\rho \quad (3.212)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (3.213)$$

Nell'ambito della Relatività Ristretta i potenziali $V(\vec{x})$ e $\vec{A}(\vec{x})$ costituiscono il quadripotenziale

$$A^\mu \equiv (V, \vec{A}) \quad (3.214)$$

il quale, secondo quanto precede, nella *gauge* di Lorentz per cui

$$\partial_\mu A^\mu \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (3.215)$$

soddisfa l'equazione ($\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $c = 1$)

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu \quad (3.216)$$

dove $J^\mu \equiv (c\rho, \vec{J})$ è la quadricorrente elettromagnetica.

Limitandoci al caso dell'interazione statica fra cariche, sappiamo che essa risulta descritta attraverso il solo potenziale $V(r)$ il quale, nel caso indipendente dal tempo, data la (3.217), soddisfa evidentemente la ben nota equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho \quad (3.221)$$

la cui soluzione (a meno di soluzioni dell'equazione omogenea, cioè, in questo caso, a meno di costanti), come ben sappiamo, è espressa in termini della sorgente del campo, la densità di carica ρ , dalla equazione

$$V(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (3.222)$$

essendo $-\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}$ la funzione di Green associata all'equazione di Laplace, i.e. la funzione⁶¹ tale per cui

$$\nabla_x^2 \left[-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.229)$$

⁶¹Infatti, se consideriamo la funzione $g(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ e definiamo

$$\vec{f}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}g(r) = \vec{\nabla} \frac{-1}{4\pi r} = \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (3.223)$$

allora, data una superficie sferica qualsiasi Σ di raggio $R > 0$ e centrata nell'origine, risulta

$$\int_{\Sigma} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{\Sigma} = \int \frac{\vec{R}}{4\pi R^3} \cdot \frac{\vec{R}}{R} R^2 d\Omega = 1 \quad (3.224)$$

Dunque, per il teorema di Gauss, se indichiamo con V il volume racchiuso dalla superficie Σ , è

$$1 = \int_V d^3r \operatorname{div}(\vec{f}) \quad (3.225)$$

qualunque sia il raggio $R > 0$ della sfera.
D'altronde

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \nabla^2 \frac{-1}{4\pi r} \quad (3.226)$$

e, ricordando che, per una qualsiasi funzione radiale $g(r)$ risulta

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right), \quad r > 0 \quad (3.227)$$

un calcolo diretto mostra che questa quantità risulta identicamente nulla quando $r \neq 0$.
Ne segue allora che, per conciliare questo risultato con la (3.225), deve essere appunto

$$\nabla^2 \frac{-1}{4\pi r} \equiv \nabla^2 \frac{-1}{4\pi|\vec{x}|} = \delta^3(\vec{x}) \quad (3.228)$$

che, con la sostituzione $|\vec{x}| \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}|$, prova la (3.229).

Da un punto di vista più fisico, si deve interpretare la funzione di Green come quella funzione che *propaga* nel generico punto \vec{x} (dove, magari, si trova la carica di prova ...) il potenziale generato da una carica posta nel punto \vec{y} .

Fatta questa premessa, torniamo adesso al caso della *forza forte* di Yukawa. Per evitare il range infinito, che era escluso dall'osservazione sperimentale, egli pensò, come abbiamo già detto, di descrivere l'interazione fra nucleoni (protone e neutrone) attraverso un campo scalare di massa $m \neq 0$.

Nel suo schema, protone e neutrone possedevano una carica simile a quella elettromagnetica, ed era appunto questa carica che costituiva la sorgente del campo mesonico Φ .

Yukawa usò l'analogia con il campo elettrostatico e riprese inoltre un'idea di Heisenberg, cioè quella dello *spin isotopico*⁶² secondo cui lo stato di nucleone (protone/neutrone) era descritto da un vettore a due componenti

$$\mathcal{N} \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

e l'interazione forte era invariante (scalare) sotto la trasformazione

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}' = U \mathcal{N} \quad \text{essendo } U \in SU(2)_I$$

⁶²Poco dopo la scoperta del neutrone ad opera di Chadwick nel 1932, Heisenberg si rese conto che, a parte il fatto ovvio che il protone è carico mentre il neutrone non lo è, essi erano estremamente simili e in particolare avevano circa la stessa massa (oggi sappiamo che $m_p = 938.28 \text{ MeV}$; $m_n = 939.57 \text{ MeV}$). Egli propose quindi di guardarli come due stati di una singola particella, il *nucleone* appunto: è la prima idea dello *spin isotopico* o *isospin*.

W. Heisenberg: *Über den bau der atomkern. I*, Zeit. für Physik 77, 1, 1932

L'importanza del concetto di spin isotopico fu però afferrata solo successivamente quando, partendo dall'osservazione della cosiddetta *charge independence* delle forze nucleari, si giunse a postulare che esse fossero, appunto, invarianti per rotazioni nello spazio di spin isotopico.

Furono Cassen e Condon i primi che mostrarono nel loro articolo

B. Cassen, E.U. Condon: *On nuclear forces*, Phys. Rev. 50, 846, 1936

come il principio della *charge independence* poteva essere espresso elegantemente attraverso, appunto, la simmetria $SU(2)$ di isospin.

L'associazione di questa simmetria con i mesoni fu poi formalizzata da Kemmer nel suo articolo

N. Kemmer: *Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interactions*,

Proc. Roy. Soc. 166A, 127, 1938

e condusse appunto alla proposta circa l'esistenza anche di un mesone neutro, il π^0 , il quale, insieme al π^+ e al π^- , doveva costituire il tripletto di isospin $I = 1$ delle particelle che, scambiate fra i nucleoni, erano poi alla base dell'interazione fra gli stessi.

Vale forse la pena di osservare infine, anche se dovrebbe essere del tutto evidente da quanto abbiamo già detto, che la simmetria di isospin non ha nulla a che fare con lo spin propriamente detto, ovvero con le rotazioni ordinarie: si dà il caso soltanto che i due gruppi di simmetria siano isomorfi fra loro ... e questa è la ragione della prima parte del nome *spin isotopico*.

Quanto poi all'aggettivo *isotopico*, esso è un po' fuorviante poiché due isotopi di un dato elemento hanno diverso numero di nucleoni, mentre la simmetria di isospin preserva il loro numero.

Meglio sarebbe fare come fanno alcuni fisici nucleari, cioè usare la dizione *spin isobarico*, che è senz'altro più appropriata ma, purtroppo, meno usata ...

A differenza del caso elettromagnetico, dove la sorgente del campo mediatore dell'interazione A^μ è quadrivettoriale ed elettricamente neutra, egli immaginò che la sorgente del campo mesonico Φ fosse scalare ma elettricamente carica (per rendere conto dell'interazione $n - p \dots$), per cui scrisse le equazioni per il campo mediatore nella forma⁶³ seguente

$$(\square + m^2) \Phi = 4\pi \sigma \equiv 4\pi g \bar{\mathcal{N}} \left(\frac{I_1 - iI_2}{2} \right) \mathcal{N} \quad (3.230)$$

$$(\square + m^2) \Phi^\dagger = 4\pi \sigma^\dagger \equiv 4\pi g \bar{\mathcal{N}} \left(\frac{I_1 + iI_2}{2} \right) \mathcal{N} \quad (3.231)$$

Assumendo i nucleoni sostanzialmente fermi, data la loro massa comunque preponderante rispetto a quella del mediatore, Yukawa considerò l'approssimazione statica delle equazioni precedenti, ovvero per esempio, in termini della sorgente σ del campo Φ , l'equazione

$$(-\nabla^2 + m^2) \Phi = 4\pi \sigma \Leftrightarrow (\nabla^2 - m^2) \Phi = -4\pi \sigma \quad (3.232)$$

la cui soluzione può ancora essere ottenuta con il metodo della funzione di Green che, in questo caso⁶⁴, risulta però essere la seguente

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (3.242)$$

⁶³La teoria di Yukawa prevedeva originariamente solo mediatori carichi, cioè quelli che noi oggi chiamiamo π^\pm , ma non il π^0 che fu previsto da Kemmer nel 1938 e fu scoperto al protosincrotrone di Berkeley solo nel 1950. In questa forma, la teoria non poteva essere in accordo con l'invarianza per trasformazioni di spin isotopico della forza forte perché le equazioni del campo (3.230) e (3.231) coinvolgono solo i due operatori vettoriali ($I=1$) I_\pm , ma non il terzo, i.e. $I_0 \equiv I_3$.

Affinché la teoria potesse essere invariante (scalare) anche per trasformazioni di spin isotopico occorre che

- il campo mesonico avesse non due ma tre componenti indipendenti ($\Phi, \Phi_0, \Phi^\dagger$) le quali si trasformavano come un vettore per trasformazioni di isospin;
- l'interazione fosse descritta dal prodotto scalare delle tre componenti del campo di cui sopra, con le tre componenti (hermitiane coniugate) della densità di carica definita dagli operatori

$$I_+ \equiv \frac{I_1 + iI_2}{\sqrt{2}}, \quad I_0 \equiv I_3, \quad I_- \equiv \frac{I_1 - iI_2}{\sqrt{2}}$$

Perché ci potesse essere invarianza per trasformazioni di isospin, la (densità) hamiltoniana di interazione doveva avere quindi la struttura seguente

$$\mathcal{H}_I = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} [(\bar{\mathcal{N}} I_- \mathcal{N}) \Phi^\dagger + (\bar{\mathcal{N}} I_0 \mathcal{N}) \Phi_0 + (\bar{\mathcal{N}} I_+ \mathcal{N}) \Phi]$$

Poi, affinché \mathcal{H}_I potesse essere un operatore autoaggiunto, siccome I_0 è diagonale e quindi $(\bar{\mathcal{N}} I_0 \mathcal{N})$ è autoaggiunto, il campo Φ_0 doveva essere anch'esso, a sua volta, autoaggiunto, e quindi in grado di descrivere solo particelle neutre, il π^0 , appunto !

⁶⁴Partiamo dalla definizione di G che, in questo caso è la seguente:

$$(\nabla^2 - m^2) G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \quad (3.233)$$

per cui, nel caso appunto della distribuzione di carica $\sigma(\vec{y})$, il potenziale *nucleare*

e assumiamo che

$$G(\vec{x}) = \int d^3p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} g(\vec{p}) \quad (3.234)$$

Chiaramente, facendo uso della trasformata di Fourier della funzione *delta* di Dirac, l'equazione (3.233) implica che

$$\int d^3p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} g(\vec{p})(-p^2 - m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (3.235)$$

e dunque che la trasformata di Fourier $g(\vec{p})$ della funzione di Green cercata, soddisfi l'equazione algebrica

$$g(\vec{p})(-p^2 - m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \Rightarrow g(\vec{p}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 + m^2)} \quad (3.236)$$

Sostituendo, si ha allora che

$$G(\vec{x}) = \int d^3p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 + m^2)} = \int_0^\infty p^2 dp \int d\Omega \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{(p^2 + m^2)} \quad (3.237)$$

ovvero, integrando sulla coordinata azimutale, otteniamo

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{(p^2 + m^2)} = \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi d(-\cos\theta) \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ipr \cos\theta}}{(p^2 + m^2)} = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{(p^2 + m^2)} \int_{-1}^1 d\xi e^{ipr \xi} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{(p^2 + m^2)} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = \\ &= -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p}{(p^2 + m^2)} (e^{ipr} - e^{-ipr}) \end{aligned} \quad (3.238)$$

D'altronde

$$\int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} e^{-ipr} = -\int_{-\infty}^0 dp \frac{p}{p^2 + m^2} e^{ipr} \quad (3.239)$$

e dunque dalla (3.238) si ricava che

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p}{(p^2 + m^2)} e^{ipr} = -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{ipr}}{(p + im)(p - im)} \quad (3.240)$$

L'integrale può essere valutato considerando il fatto che la funzione integranda è olomorfa nel piano complesso e ha due poli semplici in $p = \pm im$. Chiudendo allora il cammino di integrazione con una semicirconfenza di raggio $R \rightarrow \infty$ nel semipiano superiore, l'esponenziale garantisce che il contributo su questa semicirconfenza è nullo e la teoria delle funzioni olomorfe stabilisce che l'integrale sul cammino chiuso in questione, coincidente quindi con l'integrale cercato, è pari a $2\pi i$ il residuo all'unico polo $p = im$ racchiuso nel cammino stesso, i.e.

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{ir(2\pi)^2} (2\pi i) \frac{im}{2im} e^{-mr} = -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr} \quad (3.241)$$

a cui essa dà luogo risulta

$$\Phi(\vec{x}) \equiv -4\pi \int d^3y G(\vec{x} - \vec{y}) \sigma(\vec{y}) = \int d^3y \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \sigma(\vec{y}) \quad (3.243)$$

il quale si annulla esponenzialmente con range $r_0 = \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}$ all'allontanarsi dalla distribuzione nucleare data.

Nel 1936 Anderson e Neddermeyer⁶⁵, con una camera a nebbia (di Wilson), insieme ma indipendentemente da Street e Stevenson, individuarono nei raggi cosmici una particella che ben si addiceva alla descrizione di Yukawa per quanto concerneva la massa. Oggi però sappiamo che quella particella era, in realtà, il muone e non la particella di Yukawa⁶⁶, con cui condivide, appunto, solo un valore molto simile della massa ($105MeV$)... .

Occorse però del tempo, ben dieci anni, prima di rendersene conto e fu l'esperimento del 1946 di Conversi, Pancini e Piccioni che chiarì definitivamente che la particella di Neddermeyer non poteva essere quella di Yukawa.

⁶⁵C.D. Anderson, S.H. Neddermeyer: *Cloud chamber observation of cosmic rays at 4300 meters elevation and near sea-level*, Phys. Rev. 50, 263 (1936)

C.D. Anderson, S.H. Neddermeyer: *Note on the nature of cosmic ray particles*, Phys. Rev. 51, 884 (1937)

⁶⁶Nell'articolo del 1935 Yukawa cercò anche di fare un collegamento con la teoria del decadimento debole di Fermi, per cui provò a spiegare il decadimento β del neutrone come l'effetto dell'interazione del suo mediatore negativo con un neutrino di energia negativa con conseguente sua trasformazione in elettrone (per cui il processo, nel linguaggio di oggi, sarebbe quello secondo cui il neutrone emette un pione negativo virtuale che decade in elettrone ed antineutrino). Come sappiamo, il processo di emissione β non è mediato dal pione ma dal W , però l'idea di base c'era e andava nel verso giusto ...

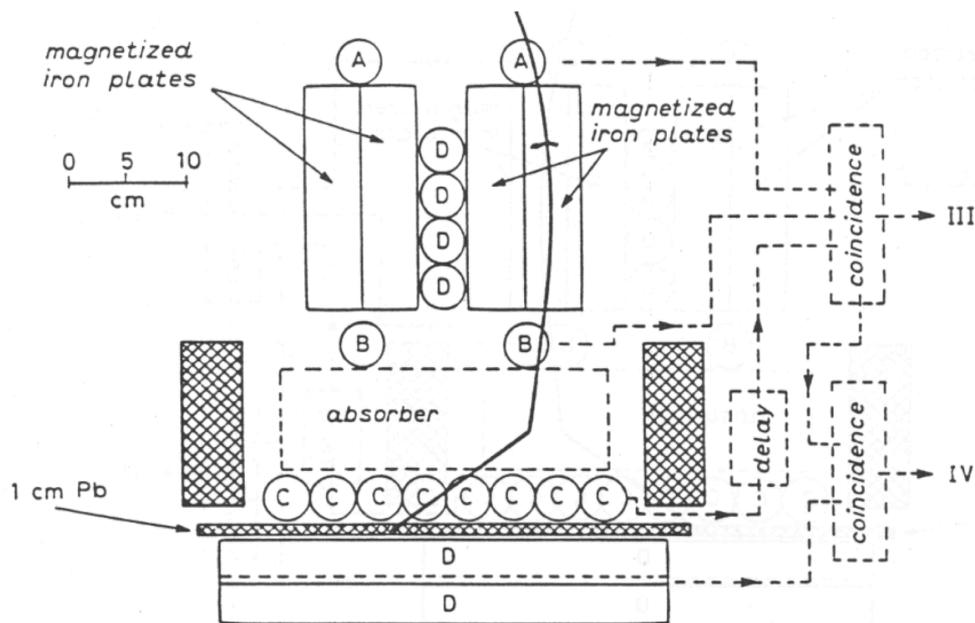


Figure 14: *Apparato sperimentale usato da Conversi, Pancini e Piccioni*

▽

L'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni

L'esperimento⁶⁷ usava ferro magnetizzato (20cm, 15 Kgauss) per focalizzare nel materiale assorbente i "mesoni" di bassa energia aventi carica solo di un segno definito, rimuovendo quasi completamente quelli di carica opposta. Dalla differenza di conteggi fra le coincidenze ritardate III e IV ($\tau = 1 - 4.5\mu\text{sec}$) si determinava il numero di decadimenti con un elettrone (positivo o negativo).

Se l'assorbitore era grafite, si osservavano e^+ ed e^- quasi nella stessa percentuale, mentre gli e^- effettivamente sparivano se l'assorbitore era ferro. In questo modo veniva stabilito sperimentalmente che la probabilità di interazione nucleare dei mesoni negativi in carbonio risultava di molti ordini di grandezza inferiore a quella attesa per il mediatore della forza nucleare e calcolata, per esempio, da Tomonaga ed Araki⁶⁸.

Evidentemente le particelle in questione *non* erano la particella di Yukawa!

△

⁶⁷M. Conversi, E. Pancini, O. Piccioni: *On the decay process of positive and negative mesons*, Phys. Rev. 68, 232 (1945)

M. Conversi, E. Pancini, O. Piccioni: *On the disintegration of negative mesons*, Phys. Rev. 71, 209 (1946)

⁶⁸S. Tomonaga, G. Araki: *Effect of the nuclear Coulomb field on the capture of slow mesons*, Phys. Rev. 58, 90 (1940)

A sostegno dell'esistenza della particella di Yukawa c'era però il risultato ottenuto nel 1947 da Perkins⁶⁹ il quale aveva immortalato in emulsioni di piccola granularità ($50\mu m$) esposte in alta atmosfera, usando per questo il mezzo aereo, un evento in cui una particella di carica negativa e massa intermedia fra quella dell'elettrone e quella del protone, si fermava in materia (emulsione), veniva catturata da un nucleo (verosimilmente ^{16}O , ^{14}N o ^{12}C) che, quindi, si rompeva dando luogo a frammenti carichi, di cui due erano certamente protoni e uno, molto probabilmente, era un nucleo di 3He .

La situazione, dunque, non era affatto chiara.

Fu sempre nel 1947 che il gruppo di Lattes, Occhialini, Powell e Muirhead, a Bristol, arrivò alla soluzione dell'enigma e scoprì⁷⁰ appunto, sempre in emulsione, che nei raggi cosmici erano presenti, in realtà, due particelle di massa intermedia, e solo quella più pesante, battezzata *pione* π , aveva le caratteristiche richieste al mesone di Yukawa, mentre l'altra, il *muone* μ , era una sorta di elettrone massivo, che non interagiva fortemente bensì solo elettromagneticamente e via interazione debole per cui, secondo la nomenclatura attuale, è un leptone (anche se talvolta si sente ancora usare il nome "mesone" per il muone, ma è scorretto!).

Così furono scoperti i mesoni carichi π^\pm .

Essi venivano prodotti, nell'alta atmosfera, da protoni di altissima energia (oggi sappiamo fino a $10^{19} eV$ e oltre), i quali, interagendo con i nuclei atomici, producono sciami di pioni carichi (esiste anche il pione neutro che, però, ha una vita media molto più breve e decade in due fotoni) che, con vita media dell'ordine di $10^{-8}s$ decadono e producono un muone, come immortalato in emulsione da Lattes et al. Il muone, che non interagisce in modo forte e ha vita media pari a $2.2\mu sec$, è in grado facilmente⁷¹ di raggiungere il suolo (era il muone, infatti, la particella di Anderson e quella osservata nell'esperimento di Conversi, Pancini Piccioni ...) e persino penetrarlo⁷².

Quanto al pione neutro, già previsto da Kemmer nel 1938 sulla base della simmetria $SU(2)$ di isospin, dobbiamo a Lewis⁷³ *et al.* la prima affermazione circa la sua esistenza, fatta allo scopo di spiegare sia la componente molle di radiazione gamma presente nei raggi cosmici, che lo sviluppo degli sciami elettromagnetici fin dall'inizio della cascata.

⁶⁹D.H. Perkins: *Nuclear disintegration by meson capture*, Nature 159, 126 (1947)

⁷⁰C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell: Nature 159, 694, (1947)

C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell: Nature 160, 453, (1947)

C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell: Nature 160, 486, (1947)

⁷¹Questo accade grazie alla dilatazione relativistica del tempo proprio: si provi a fare il conto, assumendo un percorso, per esempio, di 5000 metri, ma senza l'effetto di dilatazione del tempo, per vedere a quali conclusioni si giunge ...

⁷²Per questo motivo, alcuni esperimenti richiedono di essere fatti in luoghi di *silenzio cosmico*, come i laboratori sotterranei tipo quello del Gran Sasso, dove il filtro di 2000 metri di roccia sovrastante attenua di circa un fattore 10^6 la componente muonica.

⁷³H.W. Lewis, J.R. Oppenheimer, S.A. Wouthuysen: *The multiple production of mesons*, Phys. Rev. 73, 127, 1948

Occorrerà però aspettare il 1950 per avere la prima vera evidenza della sua esistenza, nell'esperimento⁷⁴ di Bjorklund fatto al protociclotrone da 340 MeV di Berkeley. In quell'esperimento fu osservata una produzione anomala di fotoni di alta energia (≈ 60 MeV), non spiegabile attraverso il meccanismo della bremsstrahlung, quando l'energia⁷⁵ dei protoni passava da 175 a 230 MeV.

⁷⁴R. Bjorklund, W.E. Crandall, B.J. Mayer, H.F. York: *High energy photons from proton-nucleon collisions*, Phys. Rev. 77, 213, 1950

⁷⁵La reazione che stavano cercando di produrre era la seguente

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$$

Valutiamone la soglia di produzione.

Il quadrimpulso del sistema, dallo stato iniziale, è

$$(\gamma M, \gamma M \vec{\beta}) + (M, \vec{0})$$

a cui corrisponde una massa invariante quadra pari a

$$s = M^2 + M^2 + 2M^2\gamma$$

A soglia, detta m la massa del π^0 , deve essere

$$s = (M + M + m)^2$$

e dunque deve aversi

$$2M^2 + 2M^2\gamma = 4M^2 + 4Mm + m^2 \Rightarrow \gamma = 1 + 2\frac{m}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^2$$

Siccome $\frac{m}{M} = 0.1438$, ne segue che l'energia del protone incidente corrispondente alla soglia della reazione di cui sopra corrisponde ad un fattore γ per lo stesso protone pari a $\gamma = 1.298$.

Si osservi adesso che, in generale, nel caso del processo considerato (protone incidente su protone fermo), il sistema del CM si muove, rispetto al laboratorio, con una velocità pari a

$$\beta_{CM} = \frac{\gamma\beta M}{M(\gamma + 1)} = \frac{\gamma\beta}{\gamma + 1}$$

Ma essendo

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \Rightarrow \beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

per cui

$$\beta_{CM} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + 1} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \Rightarrow \gamma_{CM} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{CM}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}$$

L'esistenza del π^0 fu quindi definitivamente associata⁷⁶, sempre a Berkeley, da Steinberger, Panofsky e Steller, i quali, usando un fascio di radiazione X di bremsstrahlung prodotto all'elettrosincrotrone, bombardarono il nucleo con gamma di energia fino al massimo possibile di 330 MeV . L'analisi in *coincidenza* dei due gamma osservati, mostrò che essi erano compatibili, data la loro correlazione angolare, con il decadimento di una particella neutra avente $\beta \approx 0.8$ e soglia di produzione⁷⁷ intorno a 150 MeV .

che, nel caso presente, cioè in prossimità della soglia (i.e. $\gamma \approx 1.3$), fornisce per il CM un gamma pari a $\gamma_{CM} \approx 1.07$. Questo implica che un pione prodotto attraverso la reazione di cui sopra quasi a soglia (i.e. con velocità nel Laboratorio praticamente coincidente con quella del CM ...) sia ampiamente non relativistico e dunque l'energia dei due fotoni coincida in pratica con quella nel CM del π^0 stesso e quindi sia semplicemente pari a metà della sua stessa massa.

Ma riprendiamo ora il risultato per cui abbiamo visto che, affinché la reazione possa avvenire, il gamma del protone incidente deve soddisfare la condizione $\gamma \geq 1.3$.

Questo implica che la sua energia cinetica sia $T = M(\gamma - 1) = 281 \text{ MeV}$.

Come poteva allora prodursi il π^0 già a 230 MeV ?

La risposta sta nel moto di Fermi dei nucleoni all'interno del nucleo, che discuteremo più avanti in relazione alla scoperta dell'antiprotone.

⁷⁶J. Steinberger, W.K.H. Panofsky, J. Steller: *Evidence for production of neutral mesons by photons*, Phys. Rev. 78, 802, 1950

⁷⁷ Calcoliamo al soglia di fotoproduzione del π^0 su nucleone fermo. La reazione è

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0 \quad (3.244)$$

La massa invariante quadra del sistema fotone-protone, nel caso di protone fermo, vale

$$s = M^2 + 2EM \quad (3.245)$$

dove M è la massa del nucleone e E l'energia del gamma nel riferimento del Laboratorio.

A soglia, detta m la massa del π^0 , deve essere

$$s = (M + m)^2 \Rightarrow E = m \left(1 + \frac{m}{2M}\right) \approx m \times 1.0719 \approx 145 \text{ MeV} \quad (3.246)$$

Il mesone è prodotto in moto: il CM si muove rispetto al sistema del Laboratorio con una velocità pari a

$$\beta_{CM} = \frac{E}{E + M} \quad (3.247)$$

mentre la velocità β_0 della particella di massa m nel CM (univocamente definita in modulo) si calcola a partire dal modulo del suo impulso spaziale e dalla sua energia nel CM , che, come si può dimostrare, valgono rispettivamente

$$p = \frac{\sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}}, \quad \mathcal{E} = \frac{s - M^2 + m^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.248)$$

per cui abbiamo

$$\beta_0 = \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2M^2}}{s - M^2 + m^2} \quad (3.249)$$

Essi osservarono altresì una sezione d'urto di produzione simile a quella relativa ai pioni carichi, confermando così lo stretto legame che doveva esistere con questi!

Riguardo alle masse ed alle vite medie dei pioni, sappiamo che⁷⁸

$$m_{\pi^\pm} = 139.57061 \pm 0.00024 \text{ MeV}; \quad \tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8} \text{ s} \quad (3.252)$$

$$m_{\pi^0} = 134.9770 \pm 0.0005 \text{ MeV}; \quad \tau = (8.52 \pm 0.18) \times 10^{-17} \text{ s} \quad (3.253)$$

La misura più accurata⁷⁹ della massa del π^- si ottiene attraverso la determinazione dell'energia dei raggi X emessi in atomi esotici (mesici) in cui un elettrone viene sostituito dal π^- , essendo l'energia di Rydberg pari a $hc R_y = \frac{m c^2}{2} \alpha^2$ proporzionale alla massa ridotta del sistema e dunque, in pratica, a m_π .

Nel caso del π^+ questa strada, ovviamente, non è praticabile e il metodo⁸⁰ usato è quello della misura dell'impulso del muone dal decadimento del pione a riposo che si origina dalla reazione $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, assumendo di conoscere sia la massa del neutrino (nulla) che quella del muone.

In precedenza⁸¹ sia la massa del π^- che la differenza di massa $\pi^- - \pi^0$ (e quindi la massa del π^0) erano state determinate a partire dalle reazioni

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \quad e \quad \pi^- + p \rightarrow \gamma + n \quad (3.254)$$

realizzate fermando pioni negativi in idrogeno e misurando quindi, con il metodo del tempo di volo, la velocità del neutrone nei due casi.

Venendo infine al muone, esso era, al tempo in cui fu scoperto, del tutto inatteso. Mentre il pione serviva per spiegare l'interazione forte, il muone non aveva alcun ruolo nel panorama delle particelle elementari e delle loro interazioni noto a quell'epoca (I. Rabi: "who ordered that ?").

Oggi sappiamo che esso è una sorta di partner massivo e instabile dell'elettrone ($m_\mu = 105.6583745 \pm 0.0000024 \text{ MeV}$), ($\tau = 2.1969811 \pm 0.0000022 \mu\text{s}$) e che, nel Modello Standard, esso è un membro della seconda famiglia dei leptoni ... ma su questo avremo modo di ritornare.

Nel caso presente, ricordando la legge di composizione delle velocità in Relatività Ristretta

$$\vec{v}' = \frac{1}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{v})} \left(\vec{v}_\perp + \gamma(\vec{v}_\parallel + \vec{\beta}) \right) \quad (3.250)$$

assumendo $E = 330 \text{ MeV}$, $M = 938.27 \text{ MeV}$, $m = 134.98 \text{ MeV}$, risulta

$$\begin{aligned} \beta_{CM} = 0.260; \quad \beta_0 = 0.855 &\Rightarrow \left| \frac{\beta_{CM} - \beta_0}{1 - \beta_0 \cdot \beta_{CM}} \right| \leq |\vec{\beta}_{Lab}| \leq \frac{\beta_{CM} + \beta_0}{1 + \beta_0 \cdot \beta_{CM}} \\ &\Rightarrow 0.765 \leq \beta_{Lab} \leq 0.912 \end{aligned} \quad (3.251)$$

⁷⁸Particle Data Group (PDG): Chin. Phys. C 40, 1, (2016)

⁷⁹B. Jeckelmann et al.: *The mass of the negative pion.* Phys. Lett. 335B, 326 (1994)

⁸⁰K. Assamagan et al.: *Measurement of the muon momentum in pion decay at rest, using a surface muon beam* Phys. Lett. 335B, 326 (1994)

⁸¹J.B. Czirr: *determination of π -meson masses by neutron time of flight* Phys. Lett. 130, 341 (1963)

3.3 I raggi cosmici

Abbiamo avuto modo di vedere in precedenza che sia la scoperta del pione come quella del muone sono state possibili grazie alla presenza ubiqua dei *raggi cosmici*. Ma di che si tratta ?

La loro scoperta è in qualche modo figlia della radioattività. Era ben noto che la radiazione emanata da sorgenti radioattive ionizzava l'aria e quindi la rendeva debolmente conduttrice, permettendo così, per esempio, a un elettroscopio di scaricarsi.

Però, quello che si osservava era che, comunque si schermasse l'elettroscopio, questo continuava a scaricarsi come se fossero in ogni caso presenti dei raggi ignoti, estremamente penetranti, capaci comunque di ionizzare debolmente l'aria. Qual era la loro origine? Venivano dal terreno ?

Nel 1910, il gesuita padre Theodor Wulf salì sulla torre Eiffel, fino a 275 *m* di altezza, e osservò che l'elettroscopio, lassù, continuava allegramente a scaricarsi, nonostante che l'aria avrebbe dovuto avere ormai assorbito⁸² gran parte se non tutta la radiazione proveniente dal terreno. Egli pensò dunque che l'origine di questa radiazione potesse essere di natura extraterrestre e propose di usare palloni aerostatici per verificarlo. Le prime osservazioni con palloni furono fatte da Victor Hess (premio Nobel⁸³ nel 1936 per questa scoperta), il quale, negli anni 1911-12 fece una decina di ascensioni in pallone, fino a oltre 5000 metri. Egli constatò così che questa radiazione ignota, invece di scomparire, dopo essersi stabilizzata intorno ai 700 *m*, addirittura prendeva a crescere rapidamente sopra i 1000 metri, diventando, verso i 5000 metri, da tre a cinque volte maggiore di quanto non fosse al livello del mare.

La conclusione fu dunque che effettivamente, alla base, ci doveva essere una potente sorgente di radiazione extraterrestre⁸⁴.

Millikan, intanto, che non credeva ai risultati di Hess, trasformò l'elettroscopio in un elettrometro, in modo che la sua lettura potesse essere fatta su film fotografico e questo gli permise di fare esperimenti in pallone senza uomini a bordo, salendo fino ad altezze altrimenti impossibili. Queste campagne di misura lo convinsero finalmente che Hess aveva ragione, fino al punto che si convinse⁸⁵ di essere stato

⁸²Egli misurò solo una riduzione del 64% rispetto al suolo, quando, anche nel caso della radiazione più penetrante nota a quel tempo, la radiazione gamma dal Radium, essa avrebbe dovuto ridursi di oltre un fattore 3 (la lunghezza di attenuazione in aria per questi gamma è infatti di circa 200 *m*).

⁸³V.F. Hess: *Nobel Lecture 1936*

⁸⁴Completamente dimenticato, purtroppo, è il contributo alla soluzione del problema portato da Domenico Pacini il quale, effettuando misure sia sul mare che sotto il mare come pure nel lago di Bracciano, osservò che la scarica dell'oscilloscopio rallentava all'aumentare della profondità di immersione, concludendo correttamente che questa ipotetica radiazione doveva venire dall'alto e non dal terreno.

⁸⁵Millikan aveva fama di fisico "rapace": a Caltech, dove lavorava, c'era il detto secondo cui "Jesus saves and Millikan takes the credit" ...



Figure 15: *Robert Millikan (1868-1953)*

lui stesso a fare la scoperta dei *raggi cosmici*, come lui stesso, nel frattempo (1926), li aveva battezzati ...! Millikan, visto che questi raggi dovevano essere estremamente penetranti, pensava che fossero dei raggi gamma di altissima energia i quali si originavano nello spazio dalla sintesi di nuclei di elementi pesanti a partire da quelli di elementi più leggeri.

Un passo avanti nella comprensione dei raggi cosmici fu fatto nel 1928 da Geiger e Müller, con il loro contatore, il quale, essendo sensibile al singolo evento, permise, attraverso l'uso di due di questi rivelatori disposti a formare un *telescopio*, di iniziare a studiare la direzione di provenienza di questa radiazione. L'idea era che il gamma cosmico urtasse un elettrone e gli conferisse un impulso (effetto Compton) la cui direzione media rifletteva, evidentemente, quella del fotone incidente. Era poi l'elettrone scatterato che ionizzava il mezzo e determinava quindi la scarica dell'elettroscopio oppure faceva scattare il contatore Geiger.

Con un telescopio completamente schermato dall'esterno con quasi 10 cm fra piombo e ferro, costituito da due rivelatori Geiger fra i quali erano interposti 4 cm d'oro, nel 1929 Walther Bothe e Werner Kolhörster dimostrarono⁸⁶ che i cosmici dovevano essere carichi loro stessi, infatti nessun elettrone, sbalzato via dall'atomo nel modo anzidetto, avrebbe mai potuto attraversare il blocco d'oro e far scattare entrambi i Geiger, come invece essi osservavano che accadeva molto spesso.

Questo risultato, fra l'altro, ispirò Bruno Rossi, allora ad Arcetri, a sviluppare

⁸⁶W. Bothe, W. Kolhörster: *Das Wesen der Höhenstrahlung/Nature of high altitude Radiation*, Z. Physik 56, 751 (1929)

L'idea ingegnosa fu quella di collegare l'anodo di ciascun geiger a un elettrometro: al passaggio del cosmico, la scarica della valanga degli elettroni prodotta caricava l'elettrometro e faceva divaricare le foglie d'oro. Nel caso dell'esperimento in coincidenza, essi osservarono appunto che, quasi sempre, i due elettrometri rispondevano insieme, come se un cosmico avesse attraversato entrambi i contatori, simultaneamente.

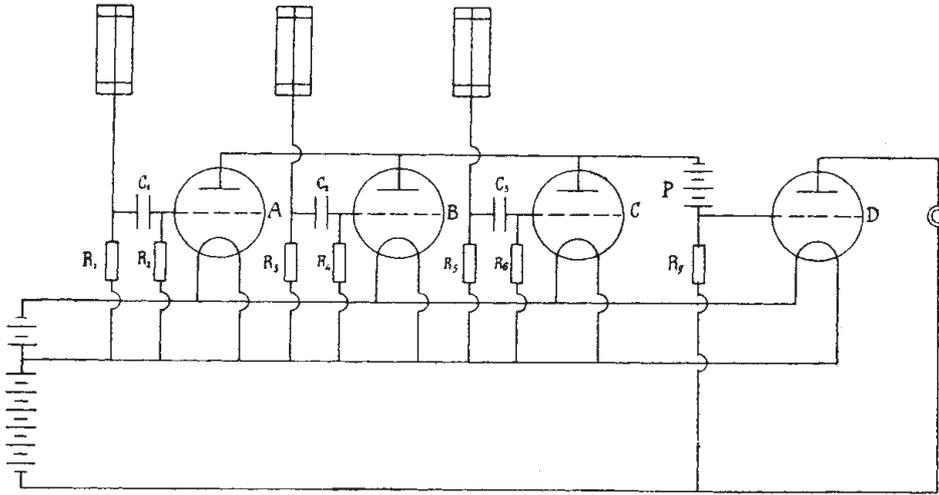


Figure 16: *Coincidenza alla Rossi fra tre contatori Geiger-Muller, realizzata con triodi*

la coincidenza elettronica⁸⁷ a triodi con la quale dimostrò (usando tre contatori non allineati) che chi faceva scattare la coincidenza non poteva neppure essere una singola particella, bensì doveva trattarsi di molte, cioè di uno *sciame*.

Intanto Millikan⁸⁸ che ancora riteneva, all'inizio degli anni '30, che i cosmici fossero gamma di alta energia che si manifestavano espellendo elettroni dagli atomi, chiese a un suo studente, Carl Anderson, di costruire una camera a nebbia⁸⁹ da porre in un potente elettromagnete, per studiare l'impulso e quindi l'energia degli elettroni così espulsi, con il risultato di rivelare per la prima volta nella storia della Fisica l'esistenza di una antiparticella, l'antielettrone o positrone (1932), appunto !

Ma su questa scoperta ci ritorneremo in seguito.

I raggi cosmici primari⁹⁰ costituirono, agli inizi della fisica nucleare e subnucleare, la sorgente di particelle⁹¹ di alta energia che poi, con il progredire della tecnica, fu sostituita, anche se non completamente, con gli acceleratori. Come in parte abbiamo già visto e come vedremo comunque anche più oltre, è comunque alla

⁸⁷B.Rossi: *Method of registering multiple simultaneous impulses of several Geiger counters* Nature 125, 636 (1930)

⁸⁸Bruno Rossi racconta che, in occasione del Congresso della Reale Accademia Italiana dei Lincei svoltosi nel 1931 a Roma, Fermi gli chiese di tenere un seminario avente i raggi cosmici come soggetto. Rossi, presente Millikan, mostrò come, in base ai più recenti risultati e basandosi su semplici considerazioni di natura energetica, la teoria di Millikan non poteva stare in piedi. Millikan si offese così tanto che, con le parole di Rossi, "from that moment on, he refused to recognize my existence" ... (George W. Clark: *The scientific Legacy of B.Rossi*, Padova 16-16 settembre 2005).

⁸⁹La camera a nebbia era stata inventata da Wilson nel 1930.

⁹⁰Ciò che si osserva a terra e che furono visti da Hess, Millikan etc ... è, in realtà, radiazione cosmica secondaria, originatasi dall'interazione dei raggi cosmici primari con i nuclei degli atomi nell'alta atmosfera.

⁹¹La loro composizione dipende dall'energia: nella zona bassa dello spettro domina il vento solare, mentre per esempio oltre il GeV , i raggi cosmici sono costituiti per oltre il 90% da protoni, per circa il 5% da particelle α e cioè da nuclei di elio, e, per il resto, da nuclei di elementi leggeri, fotoni, elettroni e tracce di antimateria (positroni ed antiprotoni).

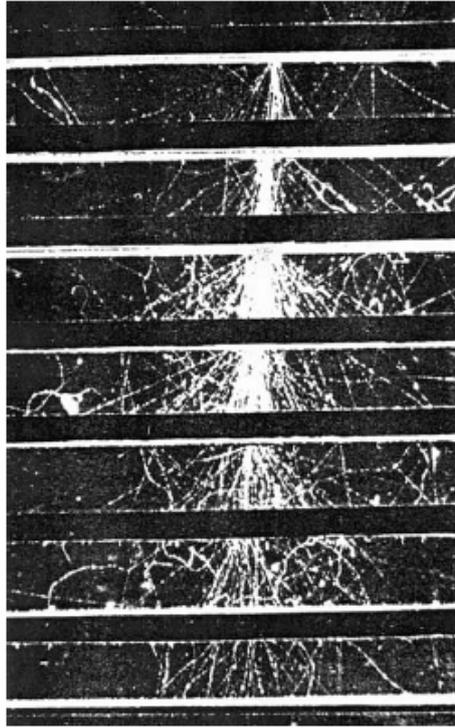


Figure 17: *Esempio di sciame elettromagnetico come osservato in emulsione*

radiazione cosmica secondaria che si devono le scoperte del positrone, del muone, del pione e delle prime particelle *strane*, di cui avremo modo di parlare fra breve.

Tutt'oggi, nonostante l'avvento degli acceleratori di particelle, i raggi cosmici costituiscono un importante argomento di studio sia a terra che in orbita ! Uno dei motivi è certamente quello per cui, nonostante i progressi tecnologici raggiunti nella costruzione degli acceleratori, è sempre nei raggi cosmici primari che si trovano le particelle più energetiche !

Come mostrato nella fig.18, ci sono esperimenti che affermano di aver osservato, anche se in numero estremamente ridotto, particelle aventi energie fino a $10^{20} eV \equiv 16J$!

Per una particella elementare, questa è una energia mostruosa: si tratta infatti dell'energia cinetica di una pallina da tennis ($m \approx 40 g$) lanciata a $100 Km/h$! L'esistenza di protoni di così alta energia, tra l'altro, pone anche un problema interessante perché è stato dimostrato che, almeno nel caso di protoni extragalattici, dovrebbe esistere un cut-off sull'energia intorno a $5 \times 10^{19} eV$ a causa dello scattering con la radiazione di fondo e la conseguente fotoproduzione di pioni: è il cosiddetto cut-off GZK⁹².

Si consideri, infatti, un protone ultrarelativistico di energia E che interagisce

⁹²K. Greisen: *End to the cosmic ray spectrum ?* Phys. Rev. Lett. 16, 748 (1966)

G.T. Zatsepin, V.A. Kuzmin: *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 4, 114 (1966)

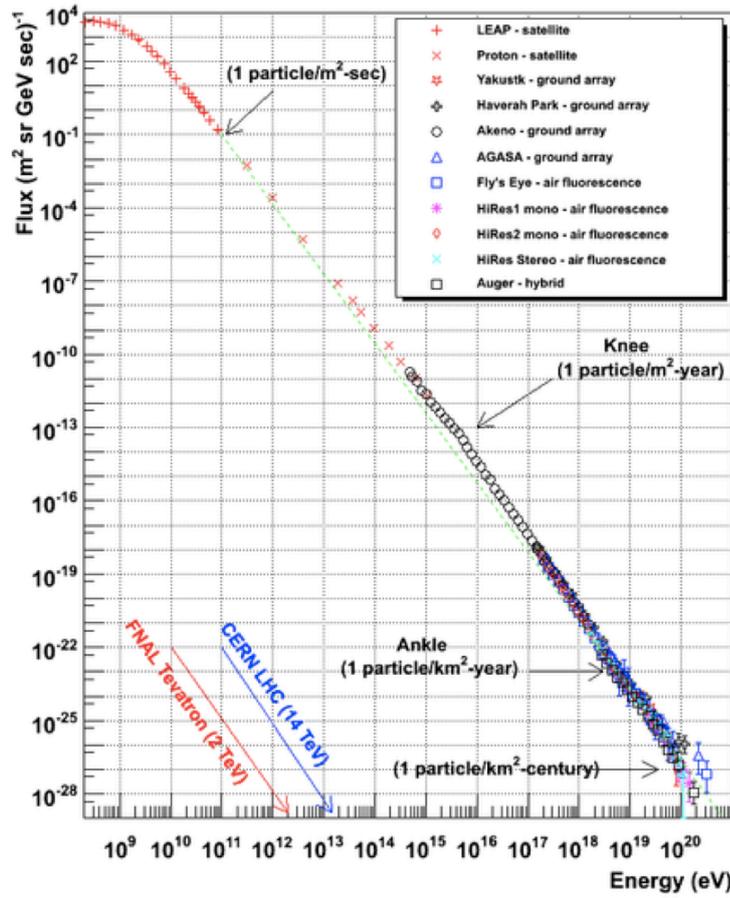


Figure 18: *Distribuzione in energia dei raggi cosmici*

con un fotone del fondo cosmico a 3^0K . L'energia media⁹³ di questo fotone

⁹³Come è noto, la densità spettrale di energia elettromagnetica di corpo nero è data da

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} \quad (3.255)$$

da cui segue che, integrando in $d\omega$, la densità di energia è pari a

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \\ &= \frac{kT}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{kT}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2}{15} kT \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \end{aligned} \quad (3.256)$$

la quale, alla temperatura di 3^0K , essendo

$$k = 1.38 \times 10^{-23} J/^0K = 8.62 \times 10^{-5} eV/^0K \Rightarrow kT = 25.86 \times 10^{-5} eV \quad (3.257)$$

$$\hbar c = 197 MeV \cdot fm = 1.97 \times 10^{-5} eV \cdot cm \Rightarrow \frac{kT}{\hbar c} = 13.13 cm^{-1} \quad (3.258)$$

vale quindi

$$\rho = \frac{\pi^2}{15} (25.86 \times 10^{-5})(13.13)^3 = 0.38 eV/cm^3 \quad (3.259)$$

è di circa 0.7 meV . Assumendo che il fotone si muova nella direzione opposta a quella del protone, identificata come la direzione dell'asse z , abbiamo che il quadrimpulso totale del sistema vale

$$(E, 0, 0, P) + (p, 0, 0, -p) = (E + p, P - p) \quad (3.264)$$

dove il primo addendo è il quadrimpulso del protone e il secondo quello del fotone di energia p , appartenente alla radiazione cosmica di fondo.

La massa invariante del sistema $p + \gamma$ è dunque pari a

$$s = M^2 + 0 + 2p(E + P) \approx M^2 + 4pE \quad (3.265)$$

dove abbiamo usato il fatto che il protone è ultrarelativistico, per cui $P \approx E$. Valutiamo adesso per quale valore di E si raggiunge la soglia di fotoproduzione del π^0 , i.e. per quale energia si attiva la reazione⁹⁴

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0 \quad (3.266)$$

A soglia, deve essere evidentemente che

$$\begin{aligned} s &= M^2 + 4pE = (M + m)^2 \Rightarrow 2Mm + m^2 = 4kE \\ \Rightarrow E &= \frac{2Mm + m^2}{4p} \end{aligned} \quad (3.267)$$

Quanto al numero di fotoni per unità di volume, esso è pari a

$$\begin{aligned} n &= \int_0^\infty \frac{\rho(\omega)}{\hbar\omega} d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \cdot 2\zeta(3) \end{aligned} \quad (3.260)$$

dove $\zeta(s)$ è la funzione ζ di (Eulero)-Riemann, definita per $\Re(s) > 1$ da

$$\zeta(s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \equiv \prod_p \frac{p^s}{p^s - 1} \quad (3.261)$$

dove il prodotto, come dimostrato appunto da Eulero, è fatto su tutti i numeri primi ...

Essendo $\zeta(3) \approx 1.20206$, abbiamo allora che

$$n = \frac{2 \cdot 1.20206}{\pi^2} (13.13)^3 \approx 550 \text{ cm}^{-3} \quad (3.262)$$

per cui l'energia media per fotone cosmico è appunto pari a

$$\langle p \rangle = \frac{\rho}{n} = \frac{380}{550} \approx 0.69 \text{ meV} \quad (3.263)$$

⁹⁴E' questa la stessa reazione che a Panofski e Steinberger consentì, a Berkeley nel 1950, di scoprire il π^0 . In quel caso, l'energia la portava il fotone, mentre il protone era fermo ...

dove abbiamo indicato con m la massa del π^0 . Prendendo allora un fotone che abbia l'energia media corrispondente alla temperatura $T = 3^0K$, cioè circa $0.7 meV$, abbiamo

$$E_{th} = \frac{2Mm + m^2}{4p} = \frac{2 \cdot 938 \cdot 135 + 135^2}{4 \cdot 0.7 \cdot 10^{-9}} \approx 1.0 \cdot 10^{14} MeV \equiv 1.0 \cdot 10^{20} eV \quad (3.268)$$

e, naturalmente, i fotoni nella parte alta dello spettro richiedono poi energie di soglia più basse ...

Venendo adesso alla sezione d'urto del processo di fotoproduzione, essa, mediata sullo spettro utile della distribuzione di Planck, è pari a circa $200 \mu barn$, mentre la densità del numero di fotoni n , (cfr.(3.262)), è pari a $n \approx 550 cm^{-3}$, per cui il libero cammino medio⁹⁵ del protone, fra uno scattering e l'altro nel vuoto a $T = 3^0K$, vale

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{550 \times 200 \cdot 10^{-30}} \approx 9. \times 10^{24} cm \approx 3 Mpc \quad (3.276)$$

Siccome la scala delle distanze intergalattiche è dell'ordine delle decine o centinaia

⁹⁵Nella teoria dell'urto si dimostra che, per una particella di impulso definito \vec{k} , descritta quindi da un'onda piana, l'effetto *in avanti* dello scattering multiplo da centri d'urto distribuiti casualmente e caratterizzati da una densità ρ , può essere descritto attraverso un *indice di rifrazione del mezzo* n tale che

$$k^2 + 4\pi\rho F(k) \equiv n^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad (n^2 - 1) = \frac{4\pi\rho F(k)}{k^2} \quad (3.269)$$

dove $F(k)$ è l'ampiezza di scattering in avanti del singolo processo d'urto. E' immediato allora che la soluzione corrispondente alla soluzione imperturbata

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

risulta quindi essere la seguente

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.270)$$

e se $n^2 - 1 \ll 1$, ne segue in particolare che

$$n^2 - 1 \approx 2(n - 1) = \frac{4\pi\rho F}{k^2} \quad \Rightarrow \quad n \approx 1 + 2\pi\rho \frac{F}{k^2} \quad (3.271)$$

D'altronde il teorema ottico lega direttamente la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti con la sezione d'urto totale ($\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im m(F(k))$) del processo d'urto, quindi la relazione precedente implica che anche n abbia *necessariamente* una parte immaginaria, legata alla sezione d'urto totale σ , che vale

$$\Im m(n) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \Im m(F) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \frac{k\sigma}{4\pi} = \frac{\rho\sigma}{2k} \quad (3.272)$$

di Mpc^{96} , protoni che arrivano da sorgenti così lontane dovrebbero aver perso parte della loro energia⁹⁷, fino ad andare, magari, sotto soglia di fotoproduzione.

ovvero, separando la parte reale e quella immaginaria dell'indice di rifrazione n , abbiamo

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\text{Re}(n)\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\text{Im}(n)\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.273)$$

la quale mostra come l'ampiezza dell'onda piana, detto $\vec{u} \equiv \frac{\vec{k}}{k}$ il suo versore di propagazione, a causa degli scattering multipli, si attenui mentre si propaga nel mezzo, secondo il fattore

$$e^{-\frac{\rho\sigma}{2}\vec{u}\cdot\vec{r}} \quad (3.274)$$

ovvero che l'intensità (modulo quadro dell'ampiezza ... !) decresca con una lunghezza di attenuazione λ pari a

$$\lambda = \frac{1}{\rho\sigma} \quad (3.275)$$

Queste conclusioni, per come sono state tratte, sono valide almeno fino a che la lunghezza di attenuazione λ definita dalla (3.275) rimane molto grande rispetto alla lunghezza d'onda di De Broglie dello stato imperturbato, i.e. finchè $\lambda \gg \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{\rho\sigma}{k} \ll 1$ ovvero fintantoché il processo di attenuazione avviene in un modo adiabatico.

⁹⁶Ricordiamo che il *parsec* è definito come quella distanza da cui il raggio medio Terra-Sole ($AU = \text{Astronomic Unit}$) viene visto sotto un angolo di un secondo d'arco. Siccome l' AU corrisponde a $499.0048 s - \text{luce}$ (poco più di 8 minuti-luce) ovvero a $\approx 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$, essendo la tangente trigonometrica di un angolo di un secondo d'arco pari a $2\pi/(360 \cdot 60 \cdot 60) = 4.848 \times 10^{-6}$, abbiamo infine

$$1pc = \frac{1.496 \times 10^{13}}{4.848 \times 10^{-6}} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm} \approx 3.262 \text{ ly}$$

⁹⁷Si osservi che, a soglia, il protone e il π^0 si muovono entrambi con la velocità del CM , ovvero, nel sistema del Laboratorio, con un gamma pari a

$$\gamma_{out} = \frac{E+k}{\sqrt{s}} \approx \frac{E}{M+m}$$

dove abbiamo trascurato l'energia media del fotone $k \approx 0.7 \text{ meV}$ rispetto a quella del protone $E \approx 10^{20} \text{ eV}$ e si è indicato con M ed m la massa del protone e del π^0 , rispettivamente. Prima dell'interazione, il gamma del protone valeva, evidentemente

$$\gamma_{in} = \frac{E}{M}$$

e dunque, nel processo il protone perde una frazione f della sua energia che, a soglia, è pari a

$$f = 1 - \frac{\gamma_{out}}{\gamma_{in}} = \frac{m}{M+m} = 12.6\% \quad (3.277)$$

Calcoli più dettagliati mostrano che, per questa ragione, il flusso dei raggi cosmici costituito da protoni⁹⁸ dovrebbe quindi avere un taglio (o comunque un evidente cambiamento di pendenza in funzione dell'energia) a partire, appunto,

Sopra soglia, abbiamo comunque che

$$f = 1 - \frac{\gamma_{out}}{\gamma_{in}} \quad (3.278)$$

ma, quanto a γ_{out} , esso non è più univoco, risultando dalla composizione del moto del CM con quello del protone nel CM .

Dalla teoria dell'urto quasi-elastico sappiamo che l'energia del protone nel CM vale

$$\hat{E} = \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s}} \equiv \hat{\gamma} M \quad (3.279)$$

mentre il modulo del suo impulso vale

$$b = \frac{\sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2 M^2}}{2\sqrt{s}} = \sqrt{\hat{E}^2 - M^2} \quad (3.280)$$

per cui l'energia del protone nel Laboratorio, detto Θ l'angolo fra la velocità del protone nel CM e la velocità del CM nel sistema del Laboratorio, vale

$$E' = \gamma_{CM} \hat{E} + \beta_{CM} \gamma_{CM} b \cos\Theta \quad (3.281)$$

e dunque, nel Laboratorio, il valore minimo del gamma del protone presente nello stato finale, da inserire nella (3.278) per ottenere l'espressione della massima perdita di energia del protone incidente, vale

$$\begin{aligned} \gamma_{out} &= \frac{E'}{M} = \frac{\gamma_{CM}}{M} (\hat{E} - \beta_{CM} b) \approx \gamma_{CM} \frac{\hat{E} - b}{M} = \\ &= \gamma_{CM} \frac{\hat{E} - \sqrt{\hat{E}^2 - M^2}}{M} = \gamma_{CM} (\hat{\gamma} - \sqrt{\hat{\gamma}^2 - 1}) \end{aligned} \quad (3.282)$$

Questo per quanto riguarda la perdita di energia massima. Volendo invece valutare la perdita media, per un processo di scattering isotropo o comunque pari in $\cos\Theta$, dalla (3.281) si ricava evidentemente che

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{out} \rangle &= \gamma_{CM} \cdot \hat{\gamma} \Rightarrow \langle f \rangle = 1 - \frac{\gamma_{CM} \cdot \hat{\gamma}}{\gamma_{in}} = 1 - \frac{E + k}{\sqrt{s}} \cdot \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s} M} \cdot \frac{M}{E} \\ &\Rightarrow \langle f \rangle \approx 1 - \frac{s + M^2 - m^2}{2s} = \frac{s + m^2 - M^2}{2s} \end{aligned} \quad (3.283)$$

che, mentre a soglia (i.e. quando $s = (m + M)^2$) riproduce naturalmente la (3.277), nel limite in cui $s \gg M^2$, essa tende ad $1/2$.

Si osservi infine che il risultato ottenuto può essere anche riscritto come

$$\langle f \rangle = \frac{s + m^2 - M^2}{2s} = \frac{\hat{E}_{\pi^0}}{\sqrt{s}} \quad (3.284)$$

dove \hat{E}_{π^0} è l'energia del π^0 nel CM . Ne segue dunque che, quanto a $\langle f \rangle$, essa coincide semplicemente con la frazione di massa invariante del sistema associata al π^0 .

⁹⁸Può essere interessante paragonare il risultato ottenuto circa il cut-off GZK sui protoni,

da circa $5 \times 10^{19} eV$, taglio che è detto appunto *cut – off GZK*.

Questa conclusione è basata sulla assunzione secondo cui la componente dei raggi cosmici di energia superiore ai $10^{18} eV$ non dovrebbe essere di origine galattica in quanto l'unico meccanismo di accelerazione che conosciamo in ambito galattico, cioè il meccanismo proposto da Fermi e legato all'esplosione delle supernovae e a successive accelerazioni delle particelle costituenti i raggi cosmici da parte dell'onda d'urto generata dall'esplosione stessa, non è in grado di spiegare energie maggiori del valore sopra citato. Di recente è stata dimostrata una qualche correlazione con la direzione di un *AGN* (Active Galactic Nucleus), che

con il cut-off che la radiazione di fondo determina per gli stessi fotoni di altissima energia. Il processo alla base del fenomeno è adesso la produzione di coppie, i.e.

$$\gamma + \gamma_{th} \rightarrow e^+ e^- \quad (3.285)$$

il quale ha come soglia

$$s = (2m_e)^2 = 4Ep \quad (3.286)$$

dove E è l'energia del gamma cosmico γ mentre p è quella del fotone termico γ_{th} (e si è assunto che viaggino uno contro l'altro ...). Abbiamo dunque

$$E_{thr} = \frac{m_e^2}{p} = \frac{(0.511)^2}{0.7 \times 10^{-9}} = 0.37 \times 10^9 MeV = 0.37 \times 10^{15} eV \quad (3.287)$$

quindi ben cinque ordini di grandezza inferiore rispetto alla soglia trovata per i protoni.

Quanto poi al libero cammino dei fotoni di alta energia, occorre conoscere la loro sezione d'urto. Come dimostrato originariamente da G. Breit, J.A. Wheeler in *Collision of two light quanta*, Phys. Rev. 46, 1087 (1934), la sezione d'urto $\gamma\gamma$ per produzione di coppie è data dalla relazione

$$\sigma_{pair} = \frac{\pi}{2} (r_0)^2 \left\{ (1 - \beta^2) \left[(3 - \beta^4) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta(2 - \beta^2) \right] \right\} \quad (3.288)$$

dove r_0 è il raggio classico dell'elettrone ($r_0 \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \times 10^{-13} cm$), mentre β è il modulo della velocità dell'elettrone nel sistema del *CM*, legato alla \sqrt{s} del processo (e quindi all'energia k dei fotoni nel *CM*) dalla relazione $\beta^2 \equiv \frac{2m_e^2}{s} = 1 - \frac{m_e^2}{k^2}$.

Questa sezione d'urto cresce a partire dalla soglia ($\beta = 0$, ovvero $k = m_e$) per raggiungere il massimo per $\beta \approx 0.701$, quando il termine entro parentesi graffa nella (3.288) raggiunge il valore di 1.36, e quindi torna a diminuire per azzerarsi nel limite in cui $\beta \rightarrow 1$.

Per elettroni non ultrarelativistici nel *CM*, essa risulta quindi dell'ordine di

$$\sigma_{pair} \approx \frac{\pi}{2} (r_0)^2 = 12.47 \times 10^{-26} cm^2 = 125 mbarn \quad (3.289)$$

per cui il libero cammino medio del fotone di altissima energia nel fondo cosmico, si riduce, rispetto a quanto trovato per il protone, del rapporto $125 mbarn/200 \mu barn = 625$ e dunque, da circa $3 Mpc$ diventa dell'ordine di soli $4.8 kpc$.

Una ulteriore differenza è che, mentre nella fotoproduzione di π^0 da parte di protoni di alta energia interagenti con il fondo cosmico, il protone è ancora presente nello stato finale, nel caso del fotone di alta energia che produce coppie interagendo con il fondo cosmico, esso, naturalmente, scompare ...

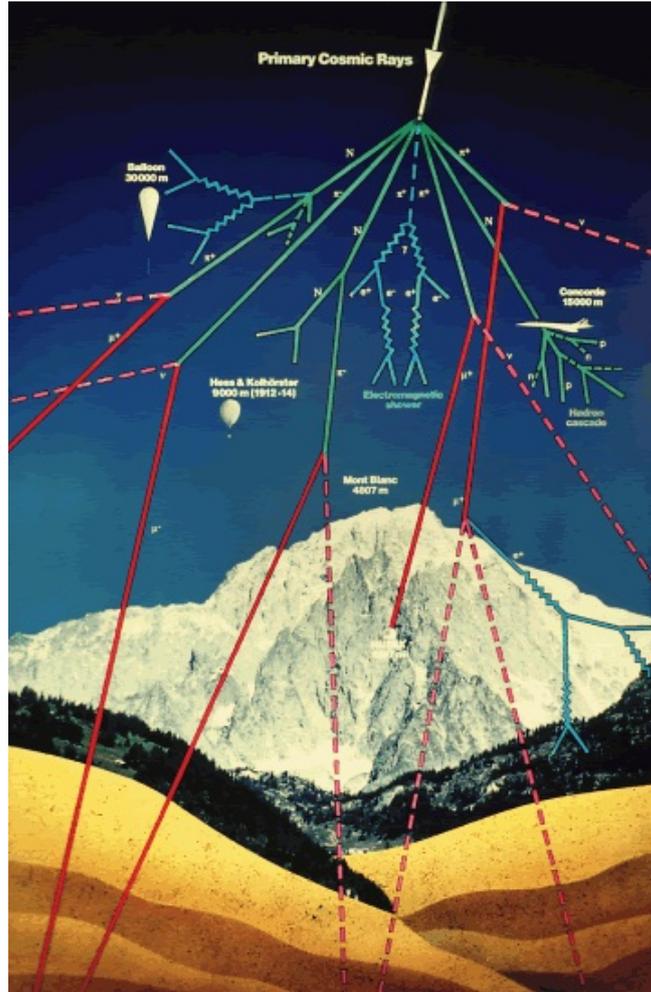


Figure 19: *Sviluppo di uno sciame di raggi cosmici*

farebbe pensare agli AGN come alle sorgenti di questi raggi cosmici estremamente energetici. Va detto, comunque, che è piuttosto difficile legare la direzione di arrivo con la sorgente in quanto, essendo i raggi cosmici carichi, essi sono deviati dal campo magnetico intergalattico⁹⁹, per cui è comunque necessario, prima di trarre conclusioni, ancora una qualche cautela ...

⁹⁹Il raggio di curvatura di una particella con carica unitaria in campo magnetico è dato da

$$R[m] = \frac{p_{\perp}[MeV/c]}{300 B[T]}$$

dove le unità sono riportate in parentesi quadra.

Assumendo quindi un impulso (perpendicolare al campo) $p \approx 3 \times 10^{19} eV/c$ e un campo magnetico medio dell'ordine del nG , ne deduciamo un raggio dell'ordine di $10^{26} cm$, quindi confrontabile con la distanza da cui queste particelle sono presunte arrivare.

Ovviamente, però, il campo non sarà uniforme e costante ... quindi il valore trovato va visto solo come un limite inferiore !

Quando i raggi cosmici primari entrano nell'atmosfera, essi collidono con i nuclei degli atomi di cui essa è costituita. Data l'alta energia a disposizione (in un urto con un altro nucleone: $s = M^2 + 2EM$), vengono prodotte un gran numero di particelle che, a loro volta, interagiscono o decadono dando luogo, appunto, allo sciame caratteristico. Molte di esse, tipicamente muoni e neutrini arrivano sulla superficie della terra e sono queste particelle (con una certa contaminazione di elettroni e gamma) che costituiscono quelli che abbiamo chiamato *raggi cosmici secondari* e che furono visti da Wulf, Hess, Millikan, etc ...

L'interesse maggiore oggi è, evidentemente, per i raggi cosmici primari¹⁰⁰, e per studiarli nelle migliori condizioni l'ideale è quello di poter effettuare esperimenti in orbita o almeno su pallone stratosferico.

Siccome però al crescere dell'energia il flusso dei primari, come abbiamo visto, diminuisce drasticamente, ecco che, se vogliamo studiare primari di energie ultra-elevate, occorre tornare in qualche modo sulla Terra e cercare eventi che producono sciame molto estesi, realizzando esperimenti su grandi superfici.

Un esempio di esperimenti del primo tipo è stato, per esempio, l'esperimento PAMELA, lanciato da Baikonur il 15 giugno 2006.

Il rivelatore era costituito sostanzialmente da uno spettrometro magnetico unito a un calorimetro elettromagnetico entrambi molto accurati, provvisto di un sistema di misura del tempo di volo in grado di definire correttamente il verso di propagazione della particella rivelata nel detector e quindi di permetterne la definizione del segno della carica.

PAMELA è stato realizzato allo scopo di effettuare misure di alta precisione riguardo, in special modo, allo spettro ed ai flussi sia di antiprotoni che di positroni e antinuclei come l'antielio, fra $50 MeV$ e $200 GeV$. Questo è un dato importante per capire, per esempio, se esistono o meno galassie di antimateria ... Essa ha messo in evidenza, fra 10 e $100 GeV$, un eccesso di positroni rispetto a quanto previsto, consentendo ai teorici di mostrare tutta la loro fantasia nel cercare di darne un'interpretazione che, al momento, ancora non c'è !

Un esperimento del secondo tipo è, invece, ARGO-YBJ, che usa un rivelatore di sciame estesi, ed è installato in Tibet, a Yang Ba Jing, a $4300 m$ sul livello del mare, e copre una superficie di circa ben $5800 m^2$. In questo modo, dalla misura nel numero di secondari in coincidenza, l'esperimento è in grado di investigare il flusso in un ampio intervallo di energia dei raggi cosmici primari, dalle centinaia di GeV alle migliaia di TeV .

¹⁰⁰Questo non è completamente vero, infatti lo studio dei neutrini "atmosferici" richiede una buona conoscenza dei raggi cosmici secondari visto che questi neutrini sono prodotti nei decadimenti dei mesoni e leptoni che si originano dallo sciame. Ricordiamo che, da questo studio, è emerso che il numero dei ν_μ che vengono da sotto terra è inferiore al valore atteso, dato il numero di quelli che vengono da sopra.

Questo è oggi interpretato come una evidenza di segnale di oscillazione $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$.

3.4 L'antimateria: positrone, antiprotone e antineutrone

Nel 1928 la Meccanica Quantistica non relativistica basata sull'equazione di Schrödinger (dimostrata equivalente alla Meccanica delle matrici di Heisenberg sia da Schrödinger come, successivamente, in modo molto elegante, da Dirac con la teoria delle trasformazioni) era piuttosto ben assodata, ma non era compatibile con la Teoria della Relatività Ristretta.



Figure 20: *Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)*

Il primo tentativo¹⁰¹ veramente fruttuoso di fare una meccanica quantistica che fosse compatibile anche con la Relatività Ristretta è certamente quello di P.A.M. Dirac, con la sua equazione¹⁰². Essa nacque proprio per descrivere gli elettroni relativistici, e quindi di energia $E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$, ma possiede la caratteristica

¹⁰¹L'equazione di Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ è del 1927 e dunque è precedente di un anno all'equazione di Dirac. Essa nasce dalla constatazione che, in rappresentazione di Schrödinger, $P^\mu \rightarrow i\partial^\mu$ e dunque, poiché per una particella di massa m deve essere $P^\mu P_\mu = m^2$, ne segue che la funzione d'onda deve soddisfare l'equazione $(P^\mu P_\mu - m^2)\phi = 0 \Leftrightarrow (\square + m^2)\phi = 0$. L'equazione di Klein-Gordon, che pure aveva il requisito della compatibilità con la Relatività Ristretta, era considerata comunque da Dirac insoddisfacente in quanto era un'equazione del secondo ordine nella derivata rispetto al tempo e quindi incompatibile con una descrizione dell'evoluzione temporale del tipo $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$, in cui l'hamiltoniana fosse quindi il generatore dell'evoluzione temporale. Inoltre essa non consentiva una interpretazione probabilistica semplice della funzione d'onda, visto che la corrente conservata che da essa discende $J^\mu(x) = i[\phi^*(x) \cdot (\partial^\mu \phi)(x) - (\partial^\mu \phi^*)(x) \cdot \phi(x)]$ ha la componente temporale J^0 , che dovrebbe rappresentare la densità di probabilità, la quale non è definita positiva.

¹⁰²P.A.M. Dirac: *The quantum theory of the electron*

Proc. Roy. Soc. London 117A, 610 (1928)

ineludibile di avere sia soluzioni con energia positiva che negativa.

Dato che la Natura predilige stati con energia la più bassa possibile, non si capiva come mai uno stato a energia positiva non potesse transire verso uno ad energia negativa, emettendo la differenza, per esempio, con uno o più fotoni¹⁰³.

Dirac propose allora che gli stati di energia negativa fossero tutti pieni da un "mare" di elettroni, per cui, per il principio di Pauli, nessuna transizione fosse possibile verso quegli stati¹⁰⁴. Era possibile invece una transizione dal "mare" verso stati di energia positiva e, per esempio, un fotone di energia $2mc^2$ avrebbe potuto portare, in linea di principio, un elettrone del mare dall'energia $-mc^2$, la più alta possibile nel mare, all'energia mc^2 , la più bassa possibile di segno positivo. Questo, apparentemente, si sarebbe tradotto nella materializzazione del fotone in un elettrone e un "mare con una lacuna" che, a tutti gli effetti, si sarebbe comportato come un *elettrone positivo*.

Però, a quel tempo, non era nota alcuna particella siffatta, per questo Dirac propose che la sua "lacuna nel mare di elettroni negativi" fosse in effetti il protone. Ricordiamo che nel 1928, le uniche particelle note erano ancora l'elettrone e il protone: fu quindi naturale per Dirac interpretare le *lacune* nel mare degli elettroni con energia negativa come protoni¹⁰⁵.

P.A.M. Dirac: *The quantum theory of the electron. Part ii*
Proc. Roy. Soc. London 118A, 351 (1928)

Dirac, con la sua equazione, cercava di ottenere una descrizione della particella libera (egli, in effetti, pensava all'elettrone ...) che

- fosse derivabile dal principio di minima azione;
- fosse un'equazione differenziale lineare in ψ , del primo ordine nella sua derivata temporale, i.e. del tipo $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$, con H operatore hamiltoniano opportuno;
- fosse relativisticamente covariante;
- fosse capace di fornire una densità di probabilità definita positiva.

e giunse così all'equazione

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \tag{3.290}$$

di cui forse avete già sentito parlare e di cui, comunque, sentirete certamente parlare ancora !

¹⁰³La cosa era ancora più grave perchè, siccome lo spettro dell'hamiltoniana non era limitato verso il basso, questo processo di emissione e transizioni verso stati di energia sempre più negativa non avrebbe dovuto aver termine...

¹⁰⁴La teoria del *mare* risultava comunque molto insoddisfacente, sia perché richiedeva una densità di carica infinita (gli elettroni del mare), sia perché, ancora una volta, rompeva la simmetria elettrone-positrone (non esisteva un mare pieno di positroni ...).

Oltre a questo, c'è un altro motivo che l'avrebbe comunque vanificata, motivo però, che al momento, non era noto. Esistono infatti anche le antiparticelle dei bosoni: per esempio il π^+ e il π^- sono antiparticella uno dell'altro. Però ad essi si applica la statistica di Bose, quindi la teoria del mare non ha alcun senso per loro !

¹⁰⁵P.A.M. Dirac: *A theory of the electrons and protons*,
Proc. Roy. Soc. London 126A, 360 (1929)
P.A.M. Dirac: *The proton*, Nature, 126, 605 (1930)

Dietro a questa interpretazione, c'era più un pregiudizio filosofico che una ragione di natura fisica, c'era in effetti il desiderio aprioristico di poter descrivere gli atomi, in definitiva, in termini di una sola particella e della sua simmetrica ! Nell'articolo prima citato del 1929 a pag. 363, Dirac infatti scrive "We require to postulate only one fundamental kind of particle, instead of two, electron and proton, that were previously necessary."

Questa ragione di eleganza, almeno all'inizio, fece premio anche sui problemi che l'interpretazione nascondeva e che furono ben messi in evidenza, per esempio, da Oppenheimer¹⁰⁶. In essi si considera il problema della annichilazione elettrone-protoni e si mostra come questa dovrebbe comunque procedere a *rates* elevatissimi (almeno 10^{-9} s), per cui la materia non avrebbe potuto esistere ... Oltre a questo, c'era da spiegare il problema delle diverse masse dell'elettrone e del protone, problema che era stato sottovalutato all'inizio ma che diveniva via via un macigno sempre più grande. Come mostrato da Tamm¹⁰⁷, se le particelle di carica positiva descritte dall'equazione di Dirac fossero stati i protoni, poiché l'interazione con il campo elettromagnetico sarebbe stata la stessa per protoni ed elettroni, allora lo scattering Thomson avrebbe dovuto avere la stessa sezione d'urto per entrambi, e questo contraddiceva l'evidenza sperimentale, che, in accordo con il risultato classico¹⁰⁸

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \equiv \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (3.291)$$

forniva un valore che è estremamente più piccolo per i protoni !

Fu infine Hermann Weyl¹⁰⁹ che, sulla base dei principi di simmetria dell'equazione, dimostrò alla fine del 1930 che le particelle positive associate ai "buchi" dovevano necessariamente avere la stessa massa degli elettroni e dunque non potevano essere i protoni.

Il chiarimento della situazione fu impostato per via sperimentale nel 1932, quando Carl Anderson, un dottorando di Millikan, dimostrò, usando una camera di Wilson (camera a nebbia) in campo magnetico, che, nei raggi cosmici, erano presenti anche particelle di carica positiva e di massa confrontabile con quella dell'elettrone.

▽

¹⁰⁶J.R. Oppenheimer: *On the theory of electrons and protons*, Phys. Rev. 35, 562 (1930)

J.R. Oppenheimer: *Two notes on the probability of Radiative Transitions*, Phys. Rev. 35, 939 (1930)

¹⁰⁷Ig. Tamm: *Über die Wechselwirkung der freien elektronen mit der strahlung nach der Diracschen theorie des Elektrons und nach der Quantenelektrodynamik*. Zeith. für Physik 62, 545 (1930)

¹⁰⁸Ricordiamo che questa sezione d'urto, per l'elettrone, vale $\sigma_T = 0.665$ barn

¹⁰⁹H. Weyl: *The theory of groups and quantum mechanics*, Tradotta dalla seconda edizione tedesca del 1931 da H.P. Robertson, Dover Publications Inc. New York, Cap. IV, sez. 12. Cfr. anche P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133, 61 (1931)



Figure 21: *Carl Anderson (1905-1991)*

L'esperimento di Anderson

Il programma di ricerca di Robert A. Millikan, al Caltech, dalla prima metà degli anni '20, era quello di raccogliere tutte le possibili informazioni sulla radiazione che giunge sulla Terra dal cosmo, per studiarne la natura, confermando, se possibile, la sua idea che questi "raggi cosmici" (come li aveva lui stesso battezzati) fossero una radiazione elettromagnetica di altissima energia, emessa in reazioni nucleari di sintesi di nuclei pesanti, a partire dall'idrogeno.

Per determinare lo spettro in energia degli elettroni sbalzati via in seguito agli urti di questi presunti gamma con la nuvola elettronica degli atomi presenti nell'aria, Millikan affidò a un suo dottorando, Carl Anderson, il compito di costruire un rivelatore costituito da una camera di Wilson (camera a nebbia), posta in un potente elettromagnete da 15 kGauss , in modo da poter risalire, dalla curvatura della traccia, all'impulso della particella incidente stessa.

I primi risultati furono però completamente inattesi: c'erano circa tante tracce con una curvatura (negative), quante con curvatura opposta (positive), mentre si attendevano, sostanzialmente, solo tracce di elettroni ...

In realtà, alcune tracce positive erano dovute a protoni, ma la stragrande maggioranza riguardavano particelle troppo leggere per poterlo essere.

Le spiegazioni alternative erano che si trattasse o di elettroni che si muovevano verso l'alto o di qualche particella positiva ignota che andava verso il basso. Il puzzle fu brillantemente risolto da Anderson, che inserì un foglio di 6 mm di piombo nella camera, in modo da far perdere energia alle particelle cariche che lo attraversavano e quindi stabilire il verso del moto e dunque

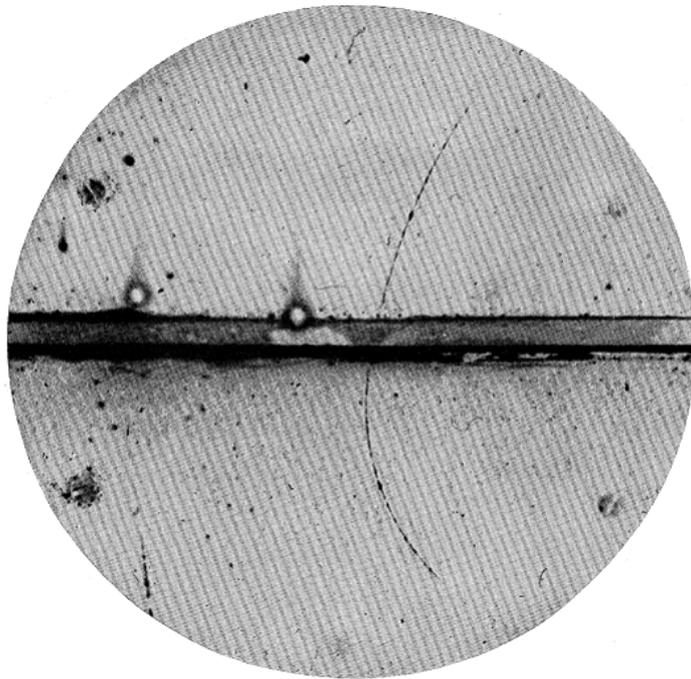


Figure 22: *Prima evidenza del positrone. Alla traccia superiore corrisponde un impulso di 63 MeV/c, mentre a quella inferiore un impulso di 23 MeV/c.*

il segno della carica. La risposta sperimentale, dunque, fu che si trattava di particelle leggere (facilmente frenabili in materia) positive provenienti dall'alto e Anderson coniò per loro il nome di "positrone" (per simmetria, battezzò successivamente anche l'elettrone con il nome di "negatrone", ma nessuno lo seguì su questa strada ...).

Esse non furono, però, riconosciute subito come antiparticelle dell'elettrone, ma solo successivamente, anzi Anderson¹¹⁰ propose una teoria complicata per cui esse traevano origine nei nuclei.

¹¹⁰C.D. Anderson: *The positive electron*, Phys. Rev. 43, 491 (1933)

In questo articolo, Anderson propone che tanto gli elettroni quanto i positroni osservati negli sciami prodotti dai raggi cosmici possano nascere dalla disintegrazione del neutrone, operata dai raggi cosmici primari (fotoni). Ricordiamo che nel 1932 il neutrone da poco scoperto veniva ancora considerato da taluni come una particella composta da un protone e da un elettrone (questo consentiva di tentare una spiegazione del decadimento β^- , anche se, per questa strada, restavano aperti molti problemi). Anderson fa però un passo ulteriore e ritiene che il neutrone possa equivalentemente essere formato anche da un protone negativo ed un positrone. Riconosce però che, al momento, non c'è alcuna evidenza sperimentale dell'esistenza dei protoni negativi nei nuclei (la disintegrazione β^+ , che avrebbe suffragato questa ipotesi comunque errata, non era ancora stata ancora osservata ...), dove resterebbero allorché viene emesso il positrone, e conclude dicendo: *The greater symmetry, however, between the positive and negative charges revealed by the discovery of the positron, should prove a stimulus to search for evidence of the existence of negative protons.*

L'interpretazione corretta dell'esperimento di Anderson venne dal Cavendish Laboratory di Cambridge, dove Patrick Blackett e Giuseppe Occhialini¹¹¹ stavano compiendo ricerche simili, ma con un apparato "più intelligente". Utilizzando contatori Geiger e il circuito di coincidenza sviluppato da Bruno Rossi a Firenze nel 1930, essi "triggeravano" la camera a nebbia, per cui la resa *foto/segnali utili* era ben più elevata che nell'operare a caso. Poterono verificare così, con centinaia di foto, di nuovo, un aspetto straordinario legato ai raggi cosmici, ovvero, appunto, il loro arrivare in "sciami", fatto peraltro già descritto dallo stesso B. Rossi, alcuni anni prima.

Le particelle viste da Anderson comparivano negli sciami circa nello stesso modo in cui vi comparivano gli elettroni. Essi conclusero che, visto che gli "elettroni positivi" non fanno parte della materia ordinaria, sia quelli positivi che quelli negativi dovevano essere *generati* (nemmeno gli elettroni preesistevano, dunque ...), molto verosimilmente insieme, attraverso il meccanismo stesso di collisione dei cosmici con il nucleo.

Nel loro lavoro del 1933, essi si posero poi il problema della sorte dei positroni e conclusero correttamente che "essi scomparivano in seguito a reazione con elettroni negativi, come prevedeva la teoria delle lacune di Dirac, formando quanti di luce" e ipotizzando dunque, per la prima volta, la trasformazione di materia in radiazione.

△

Nonostante questi risultati sperimentali potessero essere considerati senz'altro un successo della teoria di Dirac, la questione delle energie negative restava comunque non capita. Una spiegazione del significato fisico di queste soluzioni diventò poi ancora più necessaria quando ci si rese conto che questo non era affatto un "accidente" isolato, legato all'equazione di Dirac, bensì era, come già osservato, una conseguenza profonda e universale che si presentava sistematicamente in qualunque teoria quantistica relativistica¹¹².

¹¹¹P.M.S. Blackett, G.P.S. Occhialini: *Some photographs of the tracks of penetrating radiation* Proc. Roy. Soc. A139, 699 (1933)

P.M.S. Blackett, G.P.S. Occhialini: *Nature*, 130,363 (1932)

¹¹²Per esempio, è del tutto evidente che il problema si pone identico anche per l'equazione di Klein-Gordon, le cui soluzioni con impulso spaziale definito possono essere infatti sia del tipo e^{-ipx} che del tipo e^{ipx} , con $p^0 \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$ e dunque le prime con energia positiva e le seconde con energia negativa.

La spiegazione¹¹³ corretta del loro significato sarebbe venuta, però, solo dalla Teoria Quantistica dei Campi (*QFT*), dove le soluzioni a energia positiva sono

¹¹³Vediamo, senza entrare in troppi dettagli, che cosa prevede a questo proposito la *QFT*. Prendiamo, come primo esempio, quello del campo scalare autoaggiunto (che potrebbe essere quello da usare per descrivere il π^0 , se fosse elementare): in questo caso particella e antiparticella coincidono e la struttura del campo è la seguente

$$\phi(x) = \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (3.292)$$

dove $E_p \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$, mentre $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ sono, rispettivamente, gli operatori di distruzione e creazione dello stato di singola particella di impulso spaziale \vec{p} .

Come si vede, nella definizione del campo (3.292), le soluzioni a energia positiva e negativa entrano in modo perfettamente simmetrico.

Venendo adesso, però, alla funzione d'onda della particella/antiparticella di impulso spaziale definito \vec{q} , essa è la seguente ($|\Omega\rangle$ rappresenta lo stato di minima energia, ovvero lo stato di vuoto, mentre il quadrivettore q , per definizione, è pari a $q \equiv (E_q, \vec{q})$)

$$\psi_{\vec{q}}(x) \equiv \langle \Omega | \phi(x) | q \rangle = \langle \Omega | \phi(x) a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = e^{-iqx} \quad (3.293)$$

e corrisponde, evidentemente, a una soluzione a energia positiva.

Riguardo alla funzione d'onda, l'asimmetria fra i segni dei due tipi di soluzione è semplicemente prodotta dal fatto che, mentre l'operatore di distruzione, una volta applicato allo stato di vuoto, produce il vettore nullo, non esiste alcuna condizione analoga per quello di creazione. In ogni caso, la questione delle soluzioni a energia negativa non è, evidentemente, minimamente legata all'esistenza di una antiparticella, visto che, in questo caso, come abbiamo detto, particella e antiparticella sono la stessa cosa eppure le soluzioni a energia negativa entrano nella rappresentazione del campo esattamente come quelle a energia positiva.

A riprova di quanto stiamo dicendo, consideriamo adesso il caso del campo scalare carico (quello che potrebbe descrivere il sistema dei pioni carichi π^\pm), in cui particella e antiparticella sono, invece, *distinte*. In perfetta analogia con il caso precedente, abbiamo

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (3.294)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ b(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (3.295)$$

dove l'associazione fra soluzioni a energia positiva/negativa con gli operatori di creazione e distruzione è restata la stessa di prima, ma adesso il campo, non essendo più autoaggiunto e quindi essendo raddoppiati i gradi di libertà, contiene operatori di distruzione della particella e di creazione di una entità differente da quella, che chiamiamo appunto *antiparticella*, mentre nell'espressione del campo aggiunto entrano gli operatori di distruzione di questa antiparticella e di creazione della particella.

Quanto alle funzioni d'onda degli stati di particella/antiparticella di impulso spaziale \vec{q} , risulta

$$\pi^+ : \psi_{\vec{q}}(x) \equiv \langle \Omega | \phi(x) | \pi^+(\vec{q}) \rangle = \langle \Omega | \phi(x) a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = e^{-iqx} \quad (3.296)$$

$$\pi^- : \psi_{\vec{q}}(x) \equiv \langle \Omega | \phi^\dagger(x) | \pi^-(\vec{q}) \rangle = \langle \Omega | \phi^\dagger(x) b^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = e^{-iqx} \quad (3.297)$$

ovvero, sia per la particella che per l'antiparticella, la funzione d'onda è comunque sempre una soluzione corrispondente a un singolo valore di massa e a un valore positivo dell'energia !

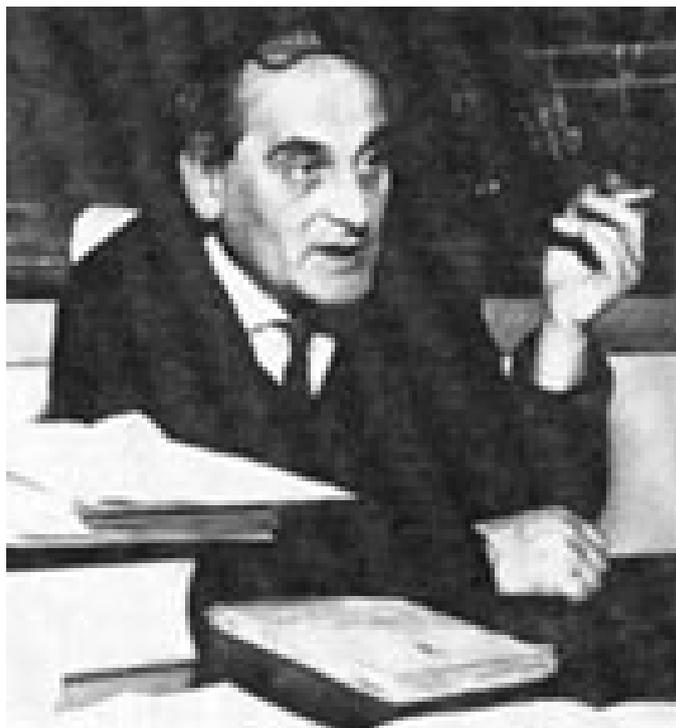


Figure 23: *Giuseppe (Beppo) Occhialini (1907-1993)*

associate agli operatori di distruzione, mentre quelle a energia negativa a operatori di creazione e questo sia per quanto riguarda la particella che l'antiparticella. Non è, infatti, lo stato di particella/antiparticella che discrimina¹¹⁴ fra i due segni dell'energia, bensì la possibilità (che non esiste nello schema della prima quantizzazione) che hanno le soluzioni quantizzate del campo di far salire o scendere il numero delle particelle in un sistema fisico assegnato.

Ma tornando alla questione della necessità delle antiparticelle, il punto è che qualunque teoria di campo relativistica richiede l'esistenza dell'antiparticella, con la possibilità, nel caso di campo autoaggiunto, che particella e antiparticella siano coincidenti.

¹¹⁴Esistono infatti, come abbiamo già osservato, soluzioni a energia negativa anche per i campi che descrivono particelle che sono antiparticelle di se stesse ...

A questo proposito ci si può chiedere quando questo possa accadere.

Affinché una particella possa coincidere con la propria antiparticella è senz'altro necessario che essa sia neutra, ma questo non è sufficiente !

Prendiamo, per esempio, il caso del neutrone e dell'antineutrone, che sono diversi.

Essi si distinguono, intanto perché non esiste solo la carica elettrica che si inverte di segno nel passaggio particella \leftrightarrow antiparticella, ma questo accade per *qualunque* carica (numero quantico additivo) la particella possiede e il neutrone/antineutrone hanno carica barionica ± 1 .

Ma anche volendoci limitare al solo elettromagnetismo, è vero che il neutrone ha carica elettrica totale nulla, ma possiede una struttura di carica per cui è positivo al centro e all'esterno, ed è negativo in mezzo. Questa distribuzione si inverte di segno per l'antineutrone, così come accade per il momento magnetico (in relazione allo spin).

La *QFT*, come si è già anticipato, stabilisce che particella e antiparticella coincidono se e solo se il campo a esse associato è autoaggiunto.

A conferma della validità di questa previsione della *QFT* riguardo alla descrizione delle particelle elementari, nel 1955 fu osservato in modo inequivocabile (esistevano già alcuni indizi in foto di eventi di raggi cosmici ...) dal gruppo di Chamberlain, al Bevatrone da 6 *GeV* di Berkeley, l'antiprotone¹¹⁵. Esso fu prodotto attraverso la reazione

$$p + p = p + p + \bar{p} + p \quad (3.298)$$

la cui soglia¹¹⁶, su protone fermo, è appunto di circa 6.57 *GeV*; ma essi, in realtà, usarono del Rame come bersaglio, sfruttando così il moto di Fermi per abbassare la soglia della reazione.

Le particelle prodotte dopo l'urto erano selezionate in carica e impulso, accettando, attraverso uno spettrometro magnetico, solo cariche negative con impulso $p = 1.19 \text{ GeV}/c$. Per la maggior parte, si trattava di pioni, che occorreva

¹¹⁵O. Chamberlain, E. Segré, C. Wiegand, T. Ypsilantis: *Observation of antiprotons*, Phys. Rev. 100, 947 (1955)

¹¹⁶Ricordiamo che la soglia della reazione, in questo caso, è determinata dalla condizione $\sqrt{s} = 4M$, dove M è la massa del protone/antiprotone e \sqrt{s} è l'energia del sistema nel *CM*, ovvero

$$s = (E + M, \vec{P}) \cdot (E + M, \vec{P}) = 2M^2 + 2EM \equiv 2M^2(1 + \gamma) \quad (3.299)$$

dove abbiamo indicato con γ il consueto fattore relativistico $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{M}$.

Nel caso considerato, risulta quindi

$$2M^2 + 2EM = 16M^2 \Rightarrow E = 7M = 6.57 \text{ GeV} \Rightarrow \gamma = 7 \quad (3.300)$$

Questa conclusione è valida, però, soltanto se il protone bersaglio è fermo nel laboratorio.. Nel caso, per esempio, in cui esso sia in un nucleo, soggetto quindi al moto di Fermi, la soglia della reazione si abbassa. Valutiamo infatti l'energia nel *CM* nel caso in cui il protone bersaglio si muova contro il protone proiettile. In generale sappiamo che risulta

$$\begin{aligned} s &= \left((E, \vec{P}) + (\mathcal{E}, \vec{p}) \right) \cdot \left((E, \vec{P}) + (\mathcal{E}, \vec{p}) \right) = (E + \mathcal{E})^2 - (P + p)^2 = \\ &= E^2 + 2E\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 - P^2 - p^2 - 2\vec{P} \cdot \vec{p} = 2M^2 + 2E\mathcal{E} - 2\vec{P} \cdot \vec{p} \end{aligned} \quad (3.301)$$

dove $(E, \vec{P}) = M\gamma(1, \vec{\beta})$ è il quadrimpulso del protone incidente, mentre $(\mathcal{E}, \vec{p}) = M\hat{\gamma}(1, \vec{v})$ è quello del protone bersaglio. Per i casi in cui \vec{v} e $\vec{\beta}$ sono opposti l'uno all'altro, risulta

$$s = 2M^2 + 2M\gamma M\hat{\gamma} + 2M\beta\gamma M\hat{v}\hat{\gamma} = 2M^2 + 2M^2\gamma\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v}) \quad (3.302)$$

da confrontare con l'espressione $s = 2M^2 + 2M^2\gamma$, valida nel caso di bersaglio fermo.

Se definiamo, allora $E_{th} \equiv M\gamma_0$ come l'energia di soglia su bersaglio fermo (abbiamo già visto che risulta $\gamma_0 = 7$), nel caso di bersaglio in movimento (nel verso opposto a quello del protone incidente ...), ne segue che la nuova l'energia di soglia E'_{th} del protone incidente deve essere tale per cui

$$\gamma_0 = \gamma\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v}) \Rightarrow E'_{th} = M\gamma = M\frac{\gamma_0}{\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{v})} \quad (3.303)$$

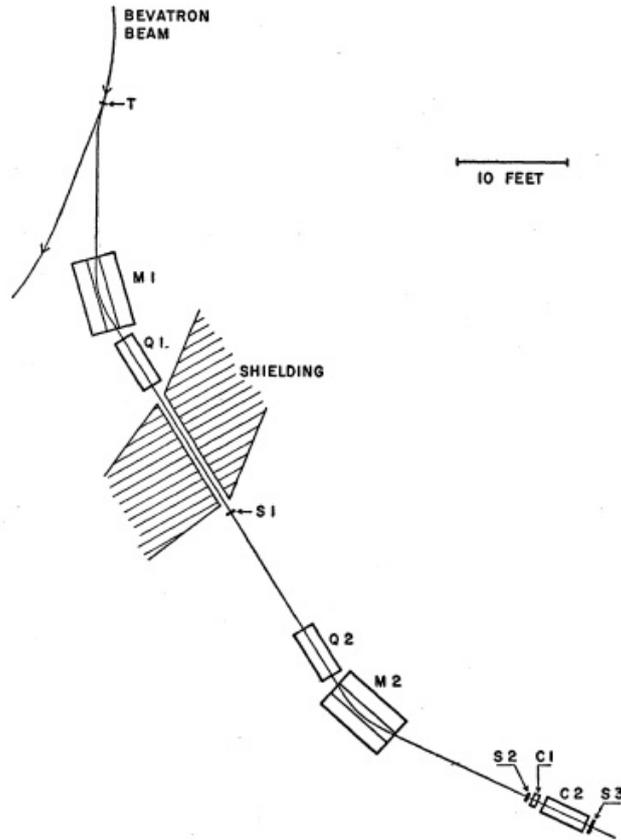


Figure 24: *Layout dell'esperimento di Chamberlain et al., relativo alla prima rivelazione dell'antiprotone*

dunque discriminare correttamente: questo era fatto sia usando il tempo di volo fra due contatori posti a 12 m di distanza ($\beta_{\pi^-} = 0.993 \Rightarrow 40 \text{ ns}$ per il pione, $\beta_{p^-} = 0.785 \Rightarrow 51 \text{ ns}$ per il \bar{p}) che attraverso due rivelatori Cerenkov¹¹⁷, di cui il secondo, differenziale.

ovvero essa risulta ridotta, rispetto al caso di bersaglio fisso, del fattore $\hat{\gamma}(1+\beta\hat{v})$ che, nel nostro caso (nucleo di Rame), assumendo una energia di Fermi di 25 MeV e quindi $\hat{\gamma} = 1.0266 \Rightarrow \hat{v} = \sqrt{1 - \frac{1}{\hat{\gamma}^2}} = 0.226$ vale 1.26 (nel fare questo calcolo abbiamo approssimato comunque β con l'unità, essendo il protone incidente comunque ampiamente relativistico, come mostra il risultato finale per cui $\gamma = \frac{7}{1.26} = 5.56$ e dunque $\beta \approx 0.98\dots$), per cui abbiamo infine che, tenendo conto del moto di Fermi, risulta $E'_{th} = M\gamma = 5.56 M = 5.22 \text{ GeV}$ e dunque l'energia del protone proiettile dal bevatrone era sufficiente affinché la reazione potesse aver luogo...

¹¹⁷Per la scoperta di questo effetto, Cerenkov insieme ai teorici Frank e Tamm che ne spiegarono l'origine, ebbero il Nobel nel 1958.

Pavel A. Cerenkov: *Sichtbares leuchten von reinen flüssigkeiten unter der einwirkung von g strahlen.* C.R. Acad. Sci. URSS 8, 451 (1934).

Pavel A. Cerenkov: *Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light.* Phys. Rev. 52, 378 (1937).

I. Frank, Ig. Tamm: *Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter.* C.R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)

L'effetto Cerenkov consiste nell'emissione di radiazione elettromagnetica quando una particella carica attraversa un mezzo materiale trasparente, avente indice di rifrazione n tale che $\beta > 1/n$. La radiazione viene emessa a un preciso angolo θ_C rispetto alla direzione di volo della

Il primo¹¹⁸, detto *C1*, era in grado di rispondere solo se $\beta > 0.79$ e quindi, dato l'impulso, identificava positivamente il passaggio sia dei pioni π^- ($\beta_\pi = 0.993$) che dei mesoni K^- ($\beta_K = 0.923$), restando inerte al passaggio degli antiprotoni ($\beta = 0.785 \rightarrow 0.765$) mentre il secondo, detto *C2*, era differenziale e capace di selezionare la velocità della particella carica fra $\beta = 0.75$ e $\beta = 0.78$, rispondendo quindi positivamente solo al passaggio dell'antiprotone.

particella carica, tale che

$$\cos \theta_C = \frac{1}{n\beta} \quad (3.304)$$

In un tratto dL di traiettoria, nell'intervallo di energia dei fotoni compreso fra E ed $E + dE$, il numero di fotoni emessi è pari a

$$\frac{d^2N}{dL dE} = \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_C = \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{(\beta n)^2} \right) \quad (3.305)$$

L'effetto Cerenkov è un effetto a soglia nella velocità della particella, per cui, fissato l'impulso, si può scegliere n in modo che il rivelatore risponda solo alle particelle più veloci e quindi di minor massa, per le quali $\beta > 1/n$, e non risponda affatto a quelle di più alta massa, perché, appunto, *sotto soglia*, i.e. tali che $\beta < 1/n$. Il rivelatore *C1* era di questo tipo.

Ma non è questo l'unico modo di usare il rivelatore: poiché i fotoni, fissato β , sono emessi tutti allo stesso angolo rispetto alla direzione di volo della particella carica, ammesso che questa direzione sia nota e definita, si può inserire sulla linea di fascio un rivelatore che possiede, nella sua parte terminale, uno specchio sferico di focale F . In questo modo, i fotoni riflessi, osservati nel piano focale dello specchio, sono distribuiti su un anello di raggio $R = F \theta_C$ centrato sul fascio (si noti che i fotoni, ovunque siano stati emessi lungo la traiettoria della particella carica, arrivano tutti simultaneamente nel piano focale!). Selezionando allora sul valore del raggio dell'anello, si può selezionare in θ e dunque, fissato n (i.e. il mezzo materiale costituente il rivelatore stesso come, per esempio, il tipo di gas e la sua densità) si può selezionare in β . Questo uso è detto *differenziale* e consente una più fine selezione del tipo di particella.

C'è infine un terzo modo (RICH) di usare il rivelatore, quando la direzione di volo della particella è nota solo entro certi limiti. In questo caso, usando ancora uno specchio sferico, l'anello Cerenkov nel piano focale non ha più il centro fisso, essendo dato dall'intercetta con il piano focale della traiettoria della particella carica riflessa dallo specchio stesso. Ovviamente, quindi, non è più possibile l'uso del rivelatore nel modo *differenziale* illustrato sopra, bensì, fermo restando il fatto che esso non risponde affatto se la particella non è sopra soglia, la misura di β può essere fatta adesso disponendo nel piano focale dello specchio un insieme di rivelatori di fotoni, avente una sufficiente granularità spaziale in modo da poter ricostruire l'anello e misurare quindi direttamente il suo raggio.

¹¹⁸Per un pione di impulso $1.19 \text{ GeV}/c$ abbiamo che $\beta = P/E = 1.19/\sqrt{1.19^2 + 0.139^2} = 0.993$; mentre per un antiprotone dello stesso impulso risulta $\beta = 1.19/\sqrt{1.19^2 + 0.938^2} = 0.785$.

Potrebbe allora sembrare strano che Chamberlain abbia selezionato la velocità nel range $0.75 < \beta < 0.78$, ma occorre tener conto che, nel momento in cui gli antiprotoni arrivavano nel contatore Cerenkov, essi avevano perso una parte della loro energia per ionizzazione per cui avevano, in media, $\beta = 0.765$.

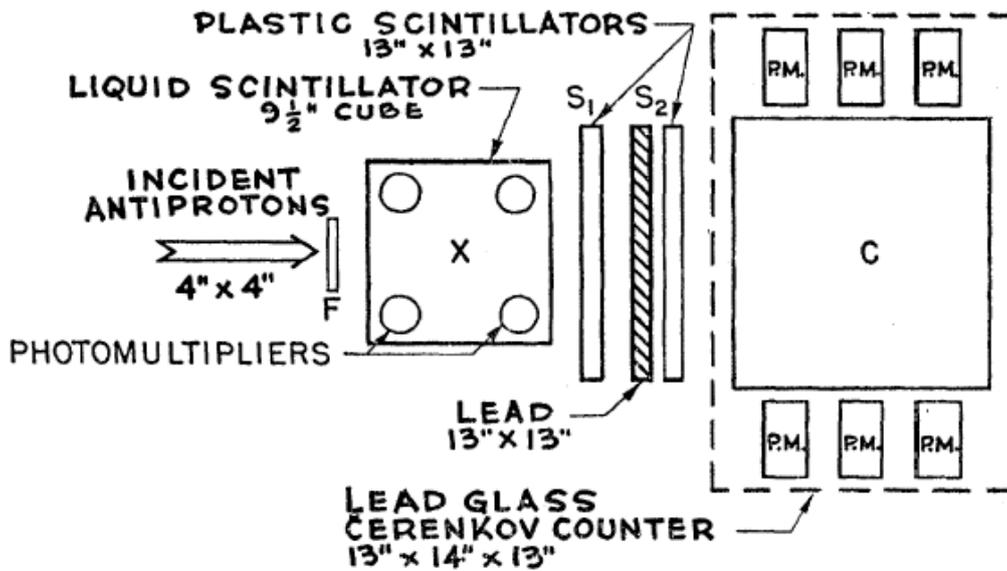


Figure 25: *Layout dell'esperimento di Piccioni e Lamberston, relativo alla rivelazione dell'antineutrone*

Infine, a ulteriore conferma dell'esistenza dell'antimateria, nel 1956, dal gruppo di Lamberston e Piccioni, fu osservato anche l'antineutrone¹¹⁹.

Il metodo usato fu quello di partire da antiprotoni, prodotti sempre al Bevatrone di Berkeley nel modo che abbiamo già visto, stavolta su targhetta di berillio. Veniva usato un fascio piuttosto intenso di protoni da 6.2 GeV e il fascio negativo secondario veniva selezionato con impulso di $1.4 \text{ GeV}/c$.

L'identificazione (*tagging*) degli antiprotoni era realizzato attraverso il metodo del tempo di volo, usando ben sei contatori disposti sulla traiettoria del fascio estratto. In questo modo venivano identificati nel fascio dell'ordine di 300 – 600 antiprotoni/ora.

Il fascio veniva inviato verso un convertitore spesso, indicato con X nella figura, dove, gli antiprotoni davano talvolta luogo alla reazione di scambio carica



originando così un antineutrone.

La reazione di annichilazione dell'antineutrone veniva osservata nel Cerenkov C a vetro al piombo, posto in anticoincidenza sia con i fototubi che guardavano il convertitore X (per evitare il fondo accidentale originato da reazioni di annichilazione in X , con produzione di neutroni o qualche mesone neutro massivo) che con gli scintillatori $S1$ ed $S2$, i quali assicuravano così che il segnale in C non fosse dovuto a nessuna particella carica giunta nel rivelatore C stesso.

Infine, la possibilità che il segnale in C fosse legato a gamma di alta energia era esclusa dalla presenza di un convertitore a piombo da un pollice di spessore, posto prima di $S2$ in cui gli elettroni/positroni di conversione si sarebbero manifestati.

¹¹⁹B. Cork, G.R. Lamberston, O. Piccioni, W.A. Wenzel: *Antineutrons produced from antiprotons in charge-exchange collisions*, Phys. Rev. 104, 1193 (1956)

3.5 Il neutrino

Il neutrino entrò nella storia della Fisica verso la fine del 1930, quando Pauli ne propose l'esistenza (in verità sotto il nome di "neutrone", come risulta dalla lettera riportata sotto) per spiegare l'apparente paradosso della non conservazione dell'energia e del momento angolare nei decadimenti β dei nuclei atomici.

Lettera aperta al gruppo dei Radioattivi in occasione della riunione della sezione di Tubinga della Società Tedesca di Fisica

Istituto di Fisica
Politecnico Federale
Zurigo

4 dicembre 1930

Cari colleghi Radioattivi,

Come vi spiegherò più dettagliatamente il portatore di questa missiva, che vi prego di ascoltare attentamente, a causa dell'enigma del momento angolare dei nuclei ^{14}N e ^6Li e dello spettro continuo nel decadimento β ho escogitato un estremo rimedio per salvare la regola di composizione dei momenti angolari e la legge di conservazione dell'energia. È possibile che esistano nei nuclei particelle elettricamente neutre, che desidero chiamare neutroni, che hanno spin $1/2$ e obbediscono al principio di esclusione e che inoltre differiscono dai quanti di luce nel fatto che non viaggiano con la velocità della luce. La massa dei neutroni dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza della massa degli elettroni e in ogni caso non superiore a 1% della massa del protone. Lo spettro continuo nel decadimento β sarebbe allora comprensibile assumendo che nel decadimento β vengano simultaneamente emessi un neutrone e un elettrone in modo tale che la somma delle energie del neutrone e dell'elettrone è costante.

..... (omissis)

Sfortunatamente non posso venire a Tubinga in persona, in quanto sono indispensabile qui a Zurigo per una festa da ballo la sera del 6 dicembre.

Con i miei migliori saluti,

il vostro umile servitore

Wolfgang PAULI

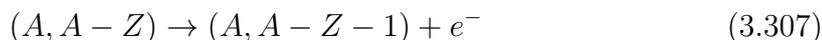
(traduzione dal tedesco)



Figure 26: *Wolfgang Pauli (1900-1958)*

Va detto che Pauli stesso considerava questa idea piuttosto disperata, tanto è che essa fu da lui pubblicata solo nel 1933, in occasione della *VII Solway Conference*¹²⁰: Fermi, che era presente al Congresso, afferrò subito l'idea e pubblicò¹²¹ la sua prima nota sulla teoria della radioattività β giusto due mesi dopo !

Il problema della conservazione dell'energia nel decadimento β si era posto fin dal 1914, con la scoperta da parte di Chadwick dello spettro continuo¹²² dell'energia dei raggi β (cioè degli elettroni di decadimento), per esempio¹²³ nel Radium E (si tratta del decadimento β del $^{210}_{83}\text{Bi}^{127}$) come riportato in fig.27. Questo contrastava con l'idea che si aveva al momento circa la struttura interna del nucleo atomico, secondo cui esso era costituito da A protoni e $A - Z$ neutroni¹²⁴ "nucleari". Il decadimento β era dunque, semplicemente, l'espulsione di un elettrone dall'interno del nucleo, per cui¹²⁵



¹²⁰W. Pauli: *Discussion du rapport de M. Heisenberg VII Congrès de Physique Solvay 1933* (Gauthier-Villars, Paris 1934, pag. 324)

¹²¹E. Fermi: *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta* Ric. Sci. 4(2), 491 (1933)

¹²²Questo stesso risultato non si realizzava nel caso dei decadimenti α e γ .

¹²³Per la nomenclatura dei radionuclidi allora in uso, cfr. la tabella (8).

¹²⁴Fortuitamente, visto che $M_n \approx M_p \gg m_e$, le cose tornavano abbastanza bene per quanto riguarda le masse.

¹²⁵Si ricordi che nel 1930 ancora non si conoscevano né il positrone né, quindi, i decadimenti β^+ , come, per esempio



che non sarebbe stato facile da descrivere dalla teoria prima esposta ...

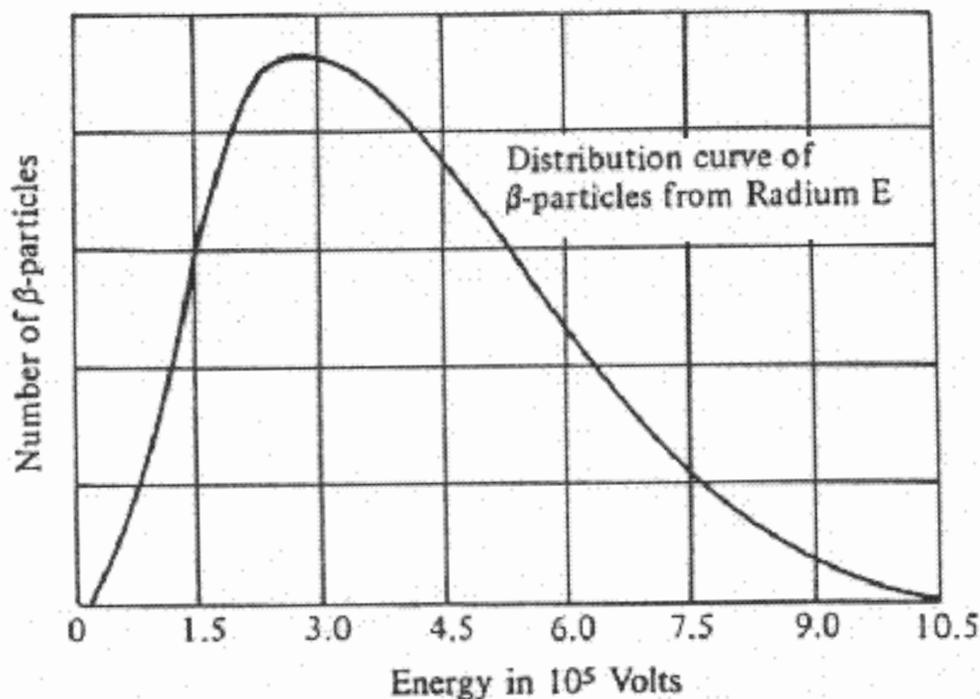


Figure 27: *Energia degli elettroni dal decadimento del Radium E*

Però, in questo caso, trattandosi di un decadimento a due corpi in cui il nucleo instabile, di massa M_0 , può essere considerato sostanzialmente fermo, l'elettrone avrebbe dovuto essere, comunque, monoenergetico e con una energia circa pari al Q - *valore* della reazione¹²⁶

$$Q = M_0 - M_f$$

dove M_f è la massa del nucleo finale. Ma questo non succedeva !

¹²⁶Nel sistema del CM, dove il nucleo instabile è fermo, si ha

$$(M_0, \vec{0}) = (E_f, -\vec{p}) + (E_e, \vec{p})$$

dove \vec{p} è l'impulso dell'elettrone uscente, E_e la sua energia ed E_f quella del nucleo finale. Dunque

$$(M_0, \vec{0}) - (E_e, \vec{p}) = (E_f, -\vec{p})$$

ovvero, prendendo la massa invariante dei due membri, detta m la massa dell'elettrone, risulta

$$M_0^2 + m^2 - 2M_0 E_e = M_f^2 \quad \Rightarrow \quad E_e = \frac{M_0^2 - M_f^2 + m^2}{2M_0}$$

che, se trascuriamo m^2 al numeratore e poniamo $M_0 + M_f \approx 2M_0$, fornisce appunto

$$E_e \approx M_0 - M_f \equiv Q$$

Lize Meitner¹²⁷ aveva proposto una spiegazione, condivisa anche da Rutherford¹²⁸, secondo cui l'elettrone, essendo del nucleo, perdeva energia durante la fase di espulsione, eccitando il nucleo stesso, per cui il raggio β non risultava monocromatico in quanto era accompagnato da fotoni di diseccitazione nucleare.

C.D. Ellis e W.A. Wooster misurarono¹²⁹ allora, con un calorimetro, l'energia media associata al decadimento β del *Radium E*, trovando

$$\langle E \rangle = 344 \pm 35 \text{ keV}$$

in ottimo accordo con lo spettro di Chadwick ma in completo disaccordo con la spiegazione della Meitner¹³⁰. La Meitner stessa ripeté la misura, ottenendo

$$\langle E \rangle = 337 \pm 20 \text{ keV}$$

Il fatto sperimentale che lo spettro beta non fosse monoenergetico ricevette varie spiegazioni totalmente sbagliate¹³¹, prima dell'ipotesi di Pauli (anch'essa, del resto, parzialmente errata ...), che ipotizzò che nel nucleo ci fossero anche particelle neutre ("neutroni"), di spin 1/2 e massa circa pari a quella dell'elettrone, le quali, nel decadimento β vengono espulse insieme all'elettrone, dividendosi l'energia disponibile nel decadimento.

In effetti, nel decadimento β , non era solo l'energia che apparentemente non si conservava, bensì anche il momento angolare¹³².

Questo accadeva, per esempio, nella (apparente) reazione



¹²⁷L. Meitner: *Über die Entstehung der β -strahl-spectren radioaktiver substanzen*
Z. Physik, 9, 101, (1922)

¹²⁸E. Rutherford: *The connection between the β and γ ray spectra*
Phil. Mag., 28, 305, (1914)

¹²⁹C.D. Ellis, W.A. Wooster: *The average energy of disintegration of Radium E*
Proc. Roy. Soc. 117A, 109 (1927)

¹³⁰Se la Meitner avesse avuto ragione, essi avrebbero dovuto misurare una energia media di circa 1.05 MeV, pari al valore dell'end-point dello spettro di Chadwick.

¹³¹Una di queste spiegazioni errate, sostenuta da Bohr, era che semplicemente l'energia non si conservasse nel decadimento radioattivo dei nuclei ... se non in media.

Tanta doveva essere la disperazione dei fisici di fronte al problema dello spettro continuo dei raggi β ! D'altronde, questo fatto sperimentale effettivamente ammetteva solo due possibili spiegazioni, e cioè

- o la conservazione dell'energia non valeva nei processi subatomici come appunto il decadimento β (se non in media),
- o l'energia mancante era portata via da un'altra radiazione neutra che apparentemente sfuggiva ad ogni osservazione.

¹³²Ricordiamo a questo proposito che l'esistenza dello spin fu ipotizzata per la prima volta per l'elettrone e questo accadde nel 1925, da parte di S.A. Goudsmit e G.E. Uhlenbeck, quando erano ancora laureandi di Ehrenfest a Leida.

S.A. Goudsmit, G.E. Uhlenbeck: *Over het roteerende electron en de structuurder spectra;*
Physica 8, 273 (1926)

dove, da un lato, attraverso misure di struttura iperfina (la teoria di Fermi della struttura iperfina in un atomo con un solo elettrone periferico in uno stato S è del 1929) si sapeva che sia i nuclei di partenza che quelli di arrivo avevano spin intero mentre quello dell'elettrone era semintero e la parte orbitale non poteva contribuire che con un termine intero.

Ma non era questo il solo problema che c'era a quel tempo riguardo allo spin del nucleo e alla sua struttura. Per esempio, dalle misure di struttura iperfina dei livelli atomici, si era arrivati alla conclusione che i nuclei di ${}^6\text{Li}$ e di ${}^{14}\text{N}$ avessero spin totale $S = 1$, mentre se fossero stati costituiti rispettivamente da $6 + (6 - 3) = 9$ e da $14 + (14 - 7) = 21$ particelle di spin $1/2$, ci si sarebbe aspettati che avessero spin semidispari...

Intanto la struttura stessa del nucleo entrava sempre più in crisi: gli elettroni nel nucleo proprio non ci potevano stare! Infatti, per il principio di indeterminazione¹³³ di Heisenberg (1927), dato che un nucleo come quello del *Radium E* ha dimensioni radiali¹³⁴ dell'ordine di $10\text{fm} = 10^{-12}\text{cm}$ un elettrone che fosse intrappolato nel nucleo avrebbe

$$\begin{aligned} \Delta x \approx r \Rightarrow \Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} &= \frac{6.58 \cdot 10^{-22} \text{MeV s}}{10^{-12} \text{cm}} = 6.6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{MeV}}{\text{cm/s}} \\ &= 6.6 \cdot 10^{-10} \times 3 \cdot 10^{10} \approx 20 \text{MeV}/c \end{aligned}$$

per cui la scala dell'energia dei raggi β emessi dal *radium E*, se gli elettroni fossero stati preesistenti e intrappolati nel nucleo, ci saremmo attesi che fosse dell'ordine delle decine di MeV e non di alcune centinaia di keV .

D'altra parte, come sappiamo, Chadwick, con la sua scoperta nel neutrone, dimostrò nel 1932 che il modello di nucleo fatto da A protoni ed $A - Z$ elettroni era certamente errato e che nel nucleo atomico c'era effettivamente anche una particella neutra, il neutrone appunto; ma questo aveva, però, circa la stessa massa del protone! Per la sua grande massa, questa particella, dunque, non poteva essere la particella postulata da Pauli (l'elettrone avrebbe finito per essere ancora circa monoenergetico ...), che doveva avere, infatti, una massa molto più

S.A. Goudsmit, G.E. Uhlenbeck: *Spinning electrons and the structure of Spectra*; Nature, 117, 264 (1926)

Per spiegare i risultati sperimentali ottenuti per mezzo dell'effetto Zeeman e per mezzo dell'esperimento di Stern-Gerlach, essi formularono infatti la teoria dell'elettrone rotante con momento angolare intrinseco $1/2\hbar$. Va detto che l'idea, subito molto apprezzata da Bohr, fu inizialmente osteggiata sia da Lorentz che da Fermi, per il fatto che il valore semidispari dello spin era classicamente impossibile.

¹³³W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik*, Z. Physik 43, 172 (1927)

¹³⁴Il raggio del nucleo, scala, grosso modo, come $A^{1/3}$, risultando, con buona approssimazione, dato dalla relazione

$$r_{\text{nucleo}} \approx 1.20 \cdot A^{1/3} \text{fm}$$

per cui il nucleo in questione, che aveva $A = 210$, ha $r_{\text{nucleo}} \approx 7.1 \text{fm}$.

piccola affinché si potesse spiegare così lo spettro di emissione β^- .

Con la scoperta di Chadwick e l'ipotesi che il neutrone fosse una particella di spin $1/2$, si risolse comunque il problema del momento angolare dei nuclei di ${}^6_3\text{Li}$ e di ${}^{14}_7\text{N}$. Si capì infatti che tali nuclei erano fatti rispettivamente da 3 protoni e 3 neutroni e da 7 protoni e 7 neutroni, ovvero, rispettivamente da 6 e da 14 "fermioni"; per cui il loro spin totale poteva (doveva!) ben essere intero ($= 1$) !

Questa scoperta sancì anche la definitiva "cacciata" degli elettroni dall'interno del nucleo ... però il decadimento debole li produceva ... e se non preesistevano nel nucleo, da dove venivano ?

La prima teoria sensata del decadimento beta, come abbiamo già detto, fu abbozzata da Fermi¹³⁵ subito dopo il 7^o Convegno Solvay, alla fine del 1933.

Un successivo lavoro più articolato venne prima inviato a *Nature*, che non lo pubblicò perché "troppo remoto dalla realtà fisica ..." e fu pubblicato prima in italiano su *Il Nuovo Cimento* e poi in tedesco, la lingua ufficiale della fisica europea del tempo, su *Zeitschrift für Physik*.

In questi articoli veniva assunto per la prima volta che la particella originariamente postulata da Pauli, infine battezzata "neutrino", fosse creata insieme all'elettrone al momento del decadimento !

¹³⁵E. Fermi: *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta* Ric. Sci. 4(2), 491 (1933)

3.6 Le particelle strane

Dopo la scoperta del mesone di Yukawa e dell'antielettrone di Dirac, sembrava che lo zoo delle particelle elementari fosse più o meno in ordine. Era pur vero che la presenza del muone, guastava un po' il quadro, perchè non si capiva a che servisse (famosa la domanda di I. Rabi in proposito: "Who ordered that?"), ma la crisi venne quando, nel dicembre del 1947, Rochester e Butler pubblicarono¹³⁶ una foto¹³⁷ di camera a nebbia, che mostrava come, sempre nei raggi cosmici, fosse presente una componente neutra che decadeva in due pioni carichi.

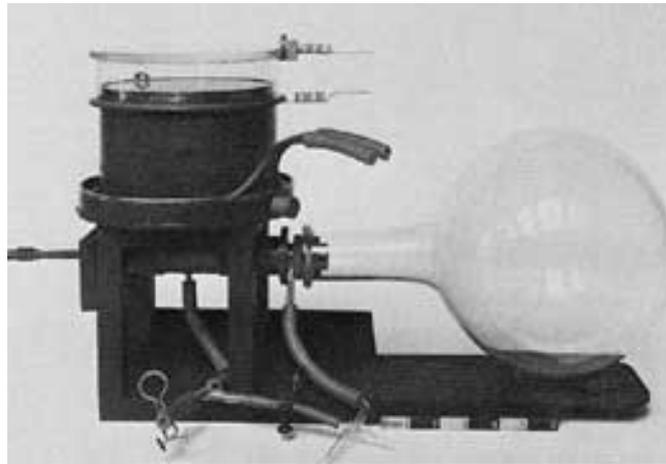


Figure 28: *Camera di Wilson (a nebbia)*

Meno di due anni dopo, Brown e collaboratori pubblicarono¹³⁸ la foto di una emulsione esposta ai raggi cosmici in cui era una particella carica a decadere in tre pioni: si trattava della prima evidenza dei decadimenti dei mesoni¹³⁹ K o

¹³⁶G.D. Rochester, C.C. Butler: *Evidence for the existence of a new unstable elementary particle*, Nature, 160, 855 (1947)

¹³⁷Va ricordato che già nel 1944, quindi tre anni prima di Rochester e Butler, il gruppo di Leprince-Ringuet aveva fotografato in camera di Wilson una traccia di una particella carica altrimenti ignota, di massa circa 990 volte quella dell'elettrone
L. Leprince-Ringuet, M. Lheritier: *Existence probable d'une particule de masse 900 m_e dans le rayonnement cosmique*, Compt. Ren. 219, 618 (1944)
ma ... una rondine non fa primavera !

¹³⁸R. Brown, U. Camerini, P.H. Fowler, H. Muirhead, C.F. Powell: *Observation with electron-sensitive plates exposed to cosmic radiation*, Nature 163, 47 (1948)

¹³⁹I kaoni si comportano sostanzialmente come pioni più pesanti e fanno parte, quindi, della famiglia dei mesoni.

kaoni¹⁴⁰, i.e., rispettivamente, di

$$\begin{aligned}\theta^0 &\equiv K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \\ \tau^+ &\equiv K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-\end{aligned}$$

In quello stesso periodo, sia il gruppo di Blackett che lavorava con uno spettrometro magnetico nel Laboratorio per Raggi cosmici del Pic du Midi de Bigorre sui Pirenei francesi, che Anderson e Cowan sulla White Mountain in California, poterono accumulare un gran numero di eventi di tipo V^0 . L'interpretazione dei risultati, però, era tutt'altro che univoca finché, alla Rochester Conference del 1952, Thompson¹⁴¹ mostrò chiaramente che i decadimenti osservati di tipo V^0 erano originati da due particelle neutre differenti: una era quella di Rochester e Butler (che Thompson, in onore al suo proprio nome, chiamò θ^0) mentre l'altra era molto più massiva e decadeva in un protone ed un pione negativo¹⁴²

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$$

Questo decadimento, però, creava un nuovo "caso" che ci richiede di fare un passo indietro al 1938, quando ci si era posti il problema della stabilità del protone. Perché il protone non decade, per esempio, in positrone e gamma ?

¹⁴⁰Il K^0 fu prima indicato con il nome di V^0 , in quanto, al momento del decadimento, produceva un segnale in camera a nebbia che era appunto una V, fatta dalle tracce dei due pioni che originavano al vertice del decadimento. Successivamente fu indicato con θ^0 mentre il K^+ fu, originariamente, indicato con τ^+ . Bisognò aspettare fino al 1956 prima di stabilire che si trattava delle versioni neutre e cariche della stessa particella, il mesone K , appunto, sui cui modi di decadimento avremo modo di ritornare essendo essi all'origine sia della prima evidenza sperimentale della violazione della simmetria di parità P nelle interazioni deboli che di CP .

¹⁴¹R.W. Thompson et al.: *The disintegration of V^0 particles*, Phys. Rev. 90, 329 (1953)

¹⁴²R.W. Thompson, per trarre la sua conclusione, utilizzò il plot di Armenteros-Podolanski: vediamo di che si tratta. Consideriamo per questo il generico decadimento di una particella neutra in due particelle cariche

$$V^0 \rightarrow A^+ + B^-$$

dove A^+ è la particella positiva di massa m_A che origina dal decadimento della particella neutra V^0 di massa M , mentre B^- è quella di carica negativa, di massa m_B : tutte e tre le masse sono, a priori, ignote. Potendo misurare nel sistema del Laboratorio gli impulsi spaziali \vec{p}_A e \vec{p}_B , ecco che possiamo definire l'impulso $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ della V^0 e, rispetto alla direzione da questo individuata, studiare la cinematica del processo. Nel sistema del CM avremo

$$p_A^* = (E_A, b \sin\Theta, b \cos\Theta); \quad p_B^* = (E_B, -b \sin\Theta, -b \cos\Theta)$$

dove Θ è definito nel CM rispetto alla direzione di \vec{P} , mentre E_A , E_B e b sono le grandezze che abbiamo già definito trattando la cinematica dell'urto anelastico. A partire da queste grandezze, se indichiamo con β la velocità della V^0 nel sistema del Laboratorio e con γ il suo fattore relativistico, abbiamo che, in questo sistema di riferimento dovrà aversi

$$p_{\perp}^{\pm} = b \sin\Theta; \quad p_{\parallel}^+ = \gamma b \cos\Theta + \beta\gamma E_A; \quad p_{\parallel}^- = -\gamma b \cos\Theta + \beta\gamma E_B$$

Stückelberg¹⁴³ aveva proposto l'idea, ripresa successivamente da Wigner¹⁴⁴, che alla base della stabilità del protone ci fosse la conservazione¹⁴⁵ di un numero quantico ad hoc, il *numero barionico*. Questo valeva +1 per i barioni appunto, cioè per protone e neutrone (e quindi valeva -1 per le rispettive antiparticelle) ma era nullo per elettrone e gamma (così come per tutti i mesoni ...), per cui, per esempio, i decadimenti

$$p \rightarrow e^+ + \gamma; \quad p \rightarrow e^+ + \pi^0$$

erano vietati¹⁴⁶.

Adesso, se la Λ decadeva in pioni e protone, anche alla Λ doveva venir assegnato il numero barionico +1, che, fino allora, aveva caratterizzato soltanto il protone ed il neutrone, cioè i costituenti fondamentali del nucleo e quindi della materia allora conosciuta.

Costruiamo allora il parametro α che misura l'asimmetria longitudinale dei due impulsi, definito nel modo seguente

$$\alpha = \frac{p_{\parallel}^+ - p_{\parallel}^-}{p_{\parallel}^+ + p_{\parallel}^-} = \frac{2\gamma b \cos\Theta + \gamma\beta(E_A - E_B)}{\beta\gamma(E_A + E_B)}$$

ma $E_A + E_B = M$ mentre $E_A - E_B = \frac{E_A^2 - E_B^2}{E_A + E_B} = \frac{m_A^2 - m_B^2}{M}$ e quindi

$$\alpha = \frac{2b \cos\Theta}{\beta M} + \frac{m_A^2 - m_B^2}{M^2}$$

Se usiamo adesso come altra variabile per descrivere l'evento quella dell'impulso trasverso di A e B , $p_{\perp} = b \sin\Theta$ ecco che, nel caso di particelle V^0 ultrarelativistiche ($\beta \approx 1$) un plot degli eventi in assi (α, p_{\perp}) assume la forma di una semiellisse con semiassi $\frac{2b}{M}$ e b , traslata sull'asse delle ascisse di $\alpha_0 = \frac{m_A^2 - m_B^2}{M^2}$ (nel caso non relativistico, per tener conto dell'effetto di β , occorrerà introdurre un terzo asse riguardante appunto la velocità della V^0 ...). Nel caso del decadimento del K^0 in due pioni il plot era centrato per $\alpha = 0$, mentre quando era la Λ a decadere, i punti si disponevano su una semiellisse spostata per valori di α positivi. Questo studio cinematico dimostrò che le V^0 erano due, una (il K^0) che decadeva in particelle di uguale massa (pioni) e una, la Λ , che decadeva in una particella positiva (protone) di massa sensibilmente maggiore della massa di quella negativa (pione).

¹⁴³E.C.G. Stückelberg, *Die Wechselwirkungskrafte in der Elektrodynamik und in der feldtheorie der kernkrafte*, Helv. Phys. Acta 11, 225 (1938)

¹⁴⁴E.P. Wigner, *Invariance in physical theory*, Proc. Am. Phil. Soc. 93, 521 (1949)

Purtroppo Stückelberg aveva pubblicato su un giornale non particolarmente diffuso, per cui la sua idea del numero barionico, che lui chiamava *carica pesante*, dovette venire, in un certo senso, riscoperta ...

¹⁴⁵Il numero barionico è strettamente conservato da ogni interazione fino ad oggi nota, compresa quella debole. Per esempio, nel caso del decadimento beta del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

il numero barionico resta invariato e pari ad 1

¹⁴⁶Nelle teorie di Grande Unificazione, dove sono presenti mediatori con carica $\pm 4/3$ e $\pm 1/3$, la seconda reazione è possibile e la vita media del protone che ne risulta è di circa 10^{32} anni.

Purtroppo poi questo non fu nemmeno un caso isolato, infatti, non appena, all'inizio degli anni '50, si cominciò a far uso degli acceleratori di particelle, questo strano barione¹⁴⁷ fu ben presto accompagnato da tanti altri simili.

Queste nuove particelle, inoltre, erano piuttosto "strane": esse erano prodotte in coppia, con grande frequenza, in processi di interazione forte (per esempio protone-pione), ma decadevano con una vita media ($\approx 10^{-10}s$) che era molto più lunga di quanto ci si poteva attendere da particelle che interagivano forte (il valore atteso era infatti dell'ordine di $\approx 10^{-23}s$).

Questo fatto suggerì a Pais¹⁴⁸ l'idea della cosiddetta *produzione associata* che Nakano, Nishijima e Gell-Mann¹⁴⁹ formalizzarono assegnando un nuovo numero

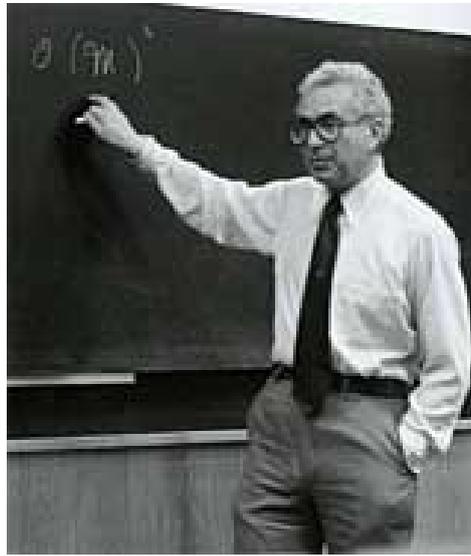
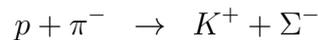


Figure 29: Murray Gell-Mann (1929)

quantico a queste particelle, la *stranezza* S appunto, ed assunsero che l'interazione forte conservasse la stranezza, per cui queste particelle dovevano essere prodotte in coppie di stranezza opposta, mentre ipotizzarono che l'interazione debole potesse violarla, consentendo così il loro decadimento, ma con una vita media, quindi, tipica di queste interazioni.

Secondo questo schema, allora, per esempio le reazioni



¹⁴⁷I barioni diversi da quelli originali, cioè diversi da neutrone e protone, e quindi instabili e di massa più alta, sono chiamati *iperoni*.

¹⁴⁸A. Pais: *Some remarks on the V-particles*, Phys. Rev. 86, 663 (1952)

¹⁴⁹T. Nakano, K. Nishijima: *Charge independence for V-particles*, Prog. Theor. Phys. 10, 581, (1953)

M. Gell-Mann: *Isotopic spin and new unstable particles*, Phys. Rev. 92, 833, (1953)

$$\begin{aligned}
p + \pi^+ &\rightarrow K^+ + \Sigma^+ \\
p + \pi^- &\rightarrow K^0 + \Sigma^0 \\
p + \pi^- &\rightarrow K^0 + \Lambda
\end{aligned}$$

erano possibili via interazione forte ($S = 0$ al primo membro ed $S = 0$ al secondo membro se assegniamo a K^+ e K^0 stranezza $S = 1$ e stranezza $S = -1$ a Σ^\pm , Σ^0 e Λ) ed erano effettivamente osservate avvenire piuttosto copiosamente, mentre, per esempio, le reazioni

$$\begin{aligned}
p + \pi^- &\rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \\
p + \pi^+ &\rightarrow \pi^+ + \Sigma^+ \\
p + \pi^- &\rightarrow \pi^0 + \Sigma^0 \\
p + \pi^- &\rightarrow \pi^0 + \Lambda
\end{aligned}$$

non avrebbero dovuto aver luogo, ed in effetti non erano mai state osservate ... Quanto poi ai decadimenti delle nuove particelle sopra citate, essi sono del tipo

$$\begin{aligned}
K^\pm &\rightarrow \mu^\pm \nu, \pi^0 \pi^\pm, \dots & \tau &= 1.24 \times 10^{-8} s \\
K_S^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^-, \pi^0 \pi^0, \dots & \tau &= 8.96 \times 10^{-11} s \\
K_L^0 &\rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu, \pi^\pm \mu^\mp \nu, 3\pi^0, \pi^- \pi^+ \pi^0, \dots & \tau &= 5.12 \times 10^{-8} s \\
\Lambda &\rightarrow p \pi^-, n \pi^0 & \tau &= 2.63 \times 10^{-10} s \\
\Sigma^0 &\rightarrow \Lambda \gamma & \tau &= 0.74 \times 10^{-19} s \\
\Sigma^- &\rightarrow n \pi^- & \tau &= 1.48 \times 10^{-10} s \\
\Sigma^+ &\rightarrow p \pi^0, n \pi^+ & \tau &= 0.80 \times 10^{-10} s
\end{aligned}$$

e questi decadimenti, ad eccezione di quello della Σ^0 , in effetti violano tutti la conservazione della stranezza e dunque non possono avvenire via l'interazione forte, ma solo attraverso l'interazione debole, da cui, appunto, la ragione della loro relativa stabilità¹⁵⁰.

Fa eccezione la Σ^0 che si comporta, in un certo senso, come il π^0 : essa può decadere per via elettromagnetica conservando la stranezza, ed è per questo che ha una vita media circa dieci ordini di grandezza inferiore alle altre particelle a lei simili !

Un'altra coppia di particelle (iperoni) ancora più interessante che furono osservate erano poi la Ξ^0 e la Ξ^- . Esse furono chiamate anche *cascade* perchè davano appunto luogo a decadimenti in cascata, i.e.

$$\begin{aligned}
\Xi^0 &\rightarrow \Lambda \pi^0 & \tau &= 2.90 \times 10^{-10} s \\
\Xi^- &\rightarrow \Lambda \pi^- & \tau &= 1.64 \times 10^{-10} s
\end{aligned}$$

¹⁵⁰Si osservi che le due Σ^\pm hanno vita media differente e sono entrambe barioni; infatti *non* sono una antiparticella dell'altra, come pure la Σ^0 in quanto barione non è antiparticella di se stessa ! A questo proposito, ricordiamo che anche il K^0 non può essere antiparticella di se stesso, avendo stranezza $S = 1$, per cui la sua antiparticella deve avere $S = -1$ e quindi è diversa dalla particella.

seguiti poi dal decadimento della Λ .

Viste le vite medie delle Ξ , incompatibili con un decadimento via interazione forte, e date le assegnazioni di stranezza già fatte per la Λ ed i pioni, queste particelle dovevano avere stranezza $S = -2$ e l'inesistenza di decadimenti diretti in nucleone-pione diceva anche che l'interazione alla base del decadimento poteva verosimilmente consentire solo processi con $\Delta S = 1 \dots$

Comunque, al di là della spiegazione qualitativa dei decadimenti di cui sopra, il punto è che a causa della proliferazione di particelle nuove e strane, all'inizio degli anni '60, ci trovavamo, di nuovo, in presenza di uno zoo incredibile e disordinato di mesoni e barioni, tutti apparentemente elementari e aventi masse tutto sommato abbastanza simili ...

Quanto ai mesoni allora noti, infatti, risulta

$$\begin{aligned} m(\pi^0) &= 134.98 \text{ MeV}, & m(\pi^\pm) &= 139.57 \text{ MeV} \\ m(K^\pm) &= 493.68 \text{ MeV}, & m(K^0) &= 497.61 \text{ MeV} \end{aligned}$$

mentre circa i barioni abbiamo

$$\begin{aligned} m(p) &= 938.27 \text{ MeV}, & m(n) &= 939.56 \text{ MeV} \\ m(\Lambda) &= 1115.68 \text{ MeV} \\ m(\Sigma^+) &= 1189.37 \text{ MeV}, & m(\Sigma^0) &= 1192.64 \text{ MeV}, & m(\Sigma^-) &= 1197.45 \text{ MeV} \\ m(\Xi^0) &= 1314.86 \text{ MeV}, & m(\Xi^-) &= 1321.71 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Era abbastanza evidente che, anche limitandosi solo ai valori delle masse, c'erano alcune somiglianze che non potevano essere casuali: l'operazione di sistematizzazione del quadro, analoga per certi aspetti a quella fatta da Mendeleev per gli atomi, fu compiuta principalmente da Murray Gell-Mann, riprendendo un'idea di Sakata di alcuni anni prima.

Egli introdusse uno schema di classificazione detto *the eightfold way*, che era basato appunto sull'idea che esistesse una simmetria¹⁵¹ nelle interazioni forti, capace di portare ordine in tutta questa proliferazione di particelle.

Questa fu ipotizzata essere una simmetria di tipo $SU(3)$, estensione naturale di $SU(2)$ di spin isotopico; e la generalizzazione fu dettata, naturalmente, dalla necessità di tener conto anche della stranezza.

In questo schema i barioni ed i mesoni, ordinati per masse crescenti e stesso J^P , venivano arrangiati, in base al loro isospin e stranezza, all'interno di rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$.

¹⁵¹M. Gell-Mann: *Symmetries of barions and mesons*, Phys. Rev. 125, 1067 (1962)

3.7 I quarks

Un tentativo per portare ordine nel panorama degli adroni era avvenuto attraverso l'introduzione delle simmetria di isospin che non poteva però bastare perché essa non conteneva la stranezza. Il primo tentativo di generalizzazione di $SU(2)_I$ fu dunque quello di aggiungere al doppietto di isospin (p, n) il barione strano più leggero, singoletto di isospin, e cioè la Λ , cercando così una simmetria per cui queste tre particelle fossero quelle "di base".

Siccome il gruppo di simmetria $SU(3)$ ha, evidentemente, come rappresentazione fondamentale¹⁵² quella di dimensione tre, fu abbastanza naturale concepire l'idea che i barioni ed i mesoni potessero essere descritti a partire da una

¹⁵²In realtà, per $SU(3)$ non esiste una rappresentazione fondamentale, bensì ne esistono due, inequivalenti tra loro, entrambe di dimensione tre, cioè la $\mathbf{3}$ e la $\bar{\mathbf{3}}$: una la complessa coniugata dell'altra. Questo, però, non è affatto una difficoltà: vediamo perché.

Consideriamo infatti il caso di una generica simmetria unitaria $SU(n)$ la quale combini fra loro stati di quarks di *flavour* differente. La sua azione sugli operatori di creazione dei quarks sarà dunque del tipo

$$\mathcal{S}^{-1}(\alpha) a^\dagger(q_i) \mathcal{S}(\alpha) = U(\alpha)_{ij} a^\dagger(q_j) \quad (3.309)$$

dove $\mathcal{S}(\alpha)$ è l'operatore unitario che rappresenta nello spazio di Hilbert di multiparticella la simmetria unitaria data, mentre abbiamo indicato con α il set dei parametri reali che individuano il generico elemento del gruppo di simmetria in questione.

Evidentemente, prendendo l'aggiunta della (3.309), abbiamo

$$\mathcal{S}^{-1}(\alpha) a(q_i) \mathcal{S}(\alpha) = U^*(\alpha)_{ij} a(q_j) \quad (3.310)$$

Ma se vogliamo dare una definizione coerente con la struttura di campo, il fatto che ψ contenga gli operatori a e b^\dagger implica che b^\dagger debba trasformarsi come a , ovvero secondo la rappresentazione U^* . Questo dimostra quanto asserito sopra, ovvero che nel caso di $SU(3)$, se identifichiamo U con la rappresentazione $\mathbf{3}$ che opera sugli operatori di creazione dei quarks, ecco che sarà la $\bar{\mathbf{3}}$ ad agire su quelle di creazione degli antiquarks.

A differenza di quanto accade in $SU(3)$, dove $\mathbf{3}$ e $\bar{\mathbf{3}}$ sono inequivalenti, nel caso di $SU(2)$ questo non è vero: in questo caso, infatti, partendo dalla parametrizzazione canonica degli elementi del gruppo, per cui

$$V = e^{\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} \quad (3.311)$$

con $\vec{\alpha}$ il vettore reale che individua il particolare elemento del gruppo e $\vec{\sigma}$ la terna delle matrici di Pauli, evidentemente accade che

$$V^* = e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}^*} \quad (3.312)$$

D'altronde le due matrici σ_1 e σ_3 sono reali mentre σ_2 è immaginaria pura: siccome σ_2 anticommuta con σ_1 e σ_3 ed ha quadrato pari all'identità, ecco che ponendo $A = i\sigma_2 \Leftrightarrow A^{-1} = -i\sigma_2$ abbiamo che

$$AV^*A^{-1} = e^{-\frac{i}{2}A(\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}^*)A^{-1}} = e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot(\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2)} = e^{\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} = V \quad (3.313)$$

tripletta di particelle costituenti¹⁵³ (e dunque *elementari*).

Si giunse così al modello di Sakata¹⁵⁴, il primo¹⁵⁵ che postula, appunto, di costruire mesoni e barioni a partire dai tre barioni elementari p , n , e Λ , insieme alle loro antiparticelle.

Il modello, però, non funzionava bene perché non riusciva a spiegare convenientemente, per esempio, la struttura¹⁵⁶ dei barioni Σ e Ξ .

Questo significa che per l'isospin, partendo per esempio dal doppietto delle particelle (u, d) , possiamo concludere che questa simmetria agisce esattamente nello stesso modo anche sulle loro antiparticelle, pur di usare la base $(\bar{d}, -\bar{u})$, ottenuta da (\bar{u}, \bar{d}) mediante la matrice A .

Da questo segue per esempio, che il tripletto pionico ha la seguente struttura

$$(\pi^+, \pi^0, \pi^-) = \left(u\bar{d}, \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u}), -d\bar{u} \right)$$

¹⁵³Nel caso di $SU(2)$, i vettori di un multipletto sono individuati, come è ben noto, dal modulo dello spin J e dagli autovalori della sua terza componente J_3 .

Nel caso di $SU(3)$, al modulo dello spin isotopico I ed alla sua terza componente I_3 viene aggiunto un altro operatore che con essi commuta, legato in un modo che vedremo alla stranezza S e al numero barionico B , che è l'ipercarica Y , i cui autovalori, pur potendo non essere interi, distano comunque tra loro, in una stessa rappresentazione irriducibile, di ± 1 .

La rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ è caratterizzata da un doppietto di isospin con $Y = +1/3$ e da un singoletto di isospin con $Y = -2/3$ mentre la $\bar{\mathbf{3}}$, ottenuta dalla precedente attraverso la coniugazione complessa, ha gli autovalori di ipercarica e di I_3 cambiati di segno, dunque consiste in un singoletto di isospin con $Y = +2/3$ ed un doppietto con $Y = -1/3$.

Quanto alla struttura generale delle rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$, ricordiamo brevemente che ogni vettore della base canonica è individuato (in generale non univocamente ...) da un punto in assi (I_3, Y) e si dimostra che la figura che si origina ha le seguenti caratteristiche

- è una figura convessa, tipicamente a sei o tre lati;
- è simmetrica per rotazioni di 120° (dopo aver riscalato l'asse Y , moltiplicandolo per $\sqrt{3}/2$...);
- è invariante per riflessione rispetto all'asse Y , cioè gode della simmetria $I_3 \leftrightarrow -I_3$;
- esiste un solo stato per ogni punto sul layer più esterno, due sul layer seguente, tre sul successivo ... finché non si giunge eventualmente ad una forma triangolare, a partire dalla quale la molteplicità cessa di crescere.

Infine, circa la riduzione del prodotto di due rappresentazioni irriducibili in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, si usa il fatto che I_3 ed Y sono numeri quantici additivi per determinare la forma della figura più esterna e quindi, usando le regole di cui sopra, si determina la rappresentazione irriducibile di dimensione più grande, cioè la più esterna, si "sottrarre" e si procede così fino ad esaurimento.

¹⁵⁴S. Sakata: *On a composite model for the new particles*,

Progr. Theoret. Phys. 16, 686 (1956)

¹⁵⁵In realtà, già nel 1949, Fermi e Yang, nel loro articolo

E. Fermi, C.N. Yang: *Are mesons elementary particles?*, Phys. Rev. 76, 1739 (1949)

avevano considerato l'ipotesi che il pione non fosse elementare, come la teoria di Yukawa postulava, ma uno stato di nucleone-antinucleone.

¹⁵⁶Cfr. S. Gasiorowicz: *Elementary particle physics*, J. Wiley 1967, Ch.16-18

Nel modello di Sakata il pione era un sistema nucleone-antinucleone mentre i mesoni strani θ/τ ,

Zweig, Ne'eman, Nishijima, in modo particolare, Gell-Mann¹⁵⁷ proposero quindi un modello, sempre basato su $SU(3)$, in cui, però, i tre costituenti fondamentali erano delle entità nuove, di spin $\frac{1}{2}$, chiamati *quarks* da Gell-Mann, secondo la corrispondenza con la teoria di Sakata che è illustrata nella tabella che segue.

			I	I_3	S	Y	Q
$p - like \rightarrow quark\ up$	$u :$		$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$n - like \rightarrow quark\ down$	$d :$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\Lambda - like \rightarrow quark\ strange$	$s :$		0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

dove l'*iper carica* Y è definita in termini della stranezza S e del numero barion-

cioè i K , erano un sistema nucleone ed antiLambda o antinucleone e Lambda.

Per quanto riguarda i barioni, le Σ erano costituite da un sistema nucleone-antinucleone-Lambda, mentre le Ξ erano fatte da un antinucleone e due Lambda: la necessità di avere un antinucleone costituente sia nella Σ che nelle Ξ era dovuta al fatto che occorre che, comunque, il loro numero barionico fosse pari ad 1. Però la necessità di un antinucleone come costituente degli iperoni era proprio il punto debole della teoria di Sakata. Vediamo perché.

Le rappresentazioni fondamentali e inequivalenti di $SU(3)$, entrambe tridimensionali, come si è già detto, sono due, e cioè quella relativa alle particelle, indicata solitamente con il simbolo $\mathbf{3}$, e quella relativa alle antiparticelle, indicata solitamente con il simbolo $\bar{\mathbf{3}}$. Un sistema nucleone/antinucleone si trasforma quindi sotto $SU(3)$ secondo la rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$.

Questa rappresentazione è riducibile e si decompone nella somma diretta di un singoletto ed una rappresentazione otto-dimensionale, essendo appunto $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$. In ogni sottospazio invariante, se la simmetria fosse esatta (e quindi i generatori della rappresentazione di $SU(3)$ commutassero con l'hamiltoniana), ci aspetteremmo un unico valore della massa e nel caso dei mesoni questo concordava abbastanza bene con i fatti sperimentali se si assumeva che i sette mesoni allora noti ($\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$) (l'ottavo mesone è la η , di massa $m(\eta) = 547.85\ MeV$, e fu scoperto solo in seguito) appartenessero appunto allo stesso ottetto mesonico.

I problemi sorgevano con i barioni dove, nello schema di Sakata, si aveva $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{15} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}$, che non si accordava, per esempio, con il fatto sperimentale che i barioni quasi degeneri in massa erano, di nuovo, otto, cioè ($p, n, \Lambda, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Xi^-, \Xi^0$) e comprendevano anche il gruppo p, n, Λ che, invece, avrebbe dovuto apparire naturalmente separato dagli altri, essendo essi i barioni "fondamentali".

¹⁵⁷M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, Phys. Lett. 8, 214, (1964)

Y. Ne'eman: *Derivation of strong invariance from a gauge invariance*, Nucl. Phys. 26, 222, (1961);

G. Zweig: *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking*, CERN report TH-401

G. Zweig: *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking II*, CERN report TH-412

K. Nishijima: *Charge independence theory of V particles*, Prog. Theor. Phys. 13, 285, (1955)

ico N_B dalla relazione^{158,159} dove $N_B = 1/3$ per tutti i quarks (e $-1/3$ per gli antiquarks ...)

$$Y \equiv N_B + S \quad (3.315)$$

In questo modello, seguendo in qualche senso Sakata, i mesoni allora noti, cioè π , K ed η , erano fatti da una coppia di un quark ed un antiquark, mentre i barioni erano costituiti invece da *tre* quarks e gli antibarioni da tre antiquarks. Riguardo quindi al legame fra mesoni ed $SU(3)$, poiché $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, ci aspettiamo, se i mesoni sono davvero un sistema $(q\bar{q})$ e se $SU(3)$ è una simmetria significativa per la forza forte, che essi si "decompongano" naturalmente in un ottetto ed un singoletto; e, come si è già osservato, questo è proprio ciò che accade (il singoletto è fatto dalla η' , la cui massa vale $m(\eta') = 957.66 \text{ MeV}$) !

Per il sistema dei barioni, cioè per un sistema (qqq) , valendo la decomposizione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, risulta che effettivamente è presente un ottetto (anzi due !...) fra le rappresentazioni irriducibili a cui il sistema dà luogo, come la realtà sperimentale evidenzia e come il modello di Sakata non era in grado di riprodurre.

Nella decomposizione di cui sopra è presente anche un decupletto, che, in un certo senso, decretò il successo del modello stesso perchè consentì di prevedere la massa di un barione non ancora osservato, poi effettivamente scoperto¹⁶⁰ a Brookhaven, in camera a bolle, dal gruppo diretto da N.P. Samios, la Ω^- .

La struttura di questa rappresentazione¹⁶¹ è triangolare ed è fatta da quattro stati con $Y = 1$ e $I = 3/2$, identificati con $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$, tre stati con $Y = 0$

¹⁵⁸Con questa definizione, il legame fra l'ipercarica e la carica elettrica è il seguente (legge di Gell-Mann/Nishijima):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (3.314)$$

¹⁵⁹Con la definizione (3.315) di ipercarica, risulta altresì evidente un parallelo molto stringente, quanto alla simmetria $SU(3)$, fra i mesoni ed i barioni più leggeri, essendo

$Y = S + B$	I	<i>Barioni</i>	<i>Mesoni</i>
+1	$\frac{1}{2}$	p, n	K^+, K^0
0	1	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	π^+, π^0, π^-
0	0	Λ	η
-1	$\frac{1}{2}$	Ξ^0, Ξ^-	\bar{K}^0, K^-

ed infatti i membri di entrambe le famiglie costituiscono un ottetto di $SU(3)$.

¹⁶⁰V.E. Barnes et al: *Observation of a hyperon with strangeness minus three* Phys. Lett. 12, 204 (1964)

¹⁶¹Certamente la scoperta, fatta nel 1964 dal gruppo di N.P. Samios in camera a bolle a BNL (V.E. Barnes et al., "Observation of a hyperon with strangeness three"; P.R.L. 12, 204, 1964) dell'esistenza della Ω^- fu un grande successo del modello. La previsione teorica riguardo alla sua massa era basata sull'idea che la rottura della simmetria fosse prodotta da un termine nell'hamiltoniana che, sotto $SU(3)$ appartenesse ad un ottetto e commutasse con Y e T^2 . In

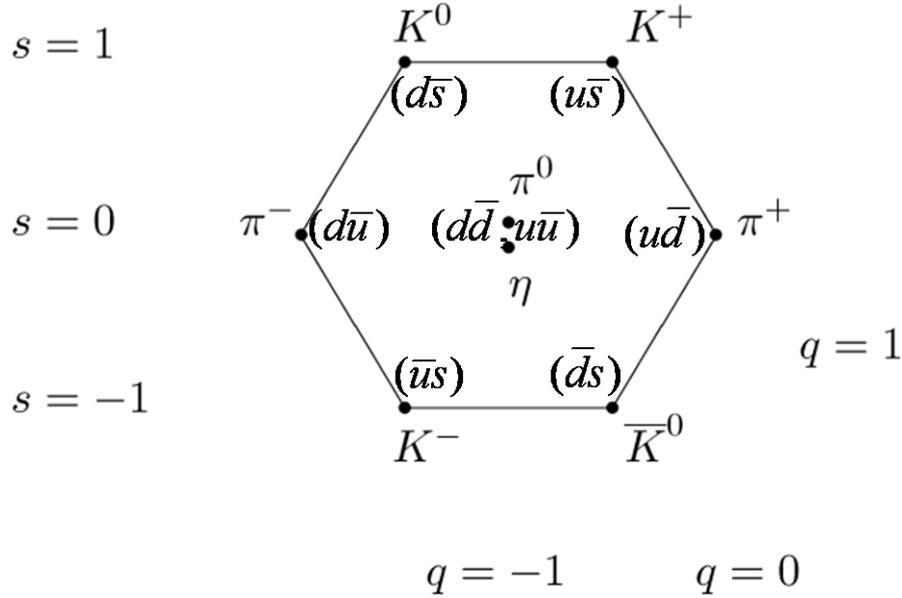


Figure 30: *Ottetto dei mesoni pseudoscalari*

e $I = 1$, due con $Y = -1$ ed $I = 1/2$ ed infine uno con $Y = -2$ e $I = 0$, appunto la Ω^- .

Il modello funzionava piuttosto bene, a parte una difficoltà e cioè che nessuno aveva mai visto un quark che, tra l'altro, doveva avere carica elettrica frazionaria. Lo stesso Gell-Mann non volle spingere oltre il modello, fino a fargli predire l'esistenza dei quarks come effettive particelle elementari e si limitò a considerare il modello come un modo efficiente di catalogazione di mesoni e barioni.

Un fatto che, invece, accreditò senz'altro l'idea, furono i risultati¹⁶² degli esperimenti, cosiddetti, di *deep-inelastic scattering*, effettuati a *SLAC* verso la questa ipotesi Gell-Mann e Okubo avevano concluso che, nell'ambito di una rappresentazione irriducibile, dovesse essere

$$M = M_0 + mY + \mu \left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right]$$

dove m e μ sono parametri liberi (piccoli rispetto a M_0) e $\mu = 0$ nel caso di rappresentazioni triangolari. Da questo consegue che, nel caso del decupletto, i multipletti di isospin dovessero essere equispaziati ed infatti $M(\Delta) \approx 1232 \text{ MeV}$, $M(\Sigma^*) \approx 1383 \text{ MeV}$, $M(\Xi^*) \approx 1530 \text{ MeV}$. Questo portava a concludere che dovesse esistere un singoletto di isospin, la Ω^- appunto, con massa intorno a 1670 MeV e fu trovata a 1672 MeV . Tra l'altro, poiché questa massa era inferiore a $M(\Xi^-) + M(\bar{K}^0) = 1322 + 498 = 1820 \text{ MeV}$, questo barione con stranezza $S = -3$ non poteva decadere conservandola e quindi poteva dar luogo solo ad un decadimento debole e dunque a vita media relativamente lunga. Infatti $\tau_{\Omega^-} \approx 82 \text{ ps}$ e i canali dominanti sono ΛK^- e $\Xi^0 \pi^-$, ovvero stati con $S = -2$.

¹⁶²R.E. Taylor et al: *Observed behaviour of highly inelastic electron-proton scattering*, Phys. Rev. Lett. 23, 935 (1969)

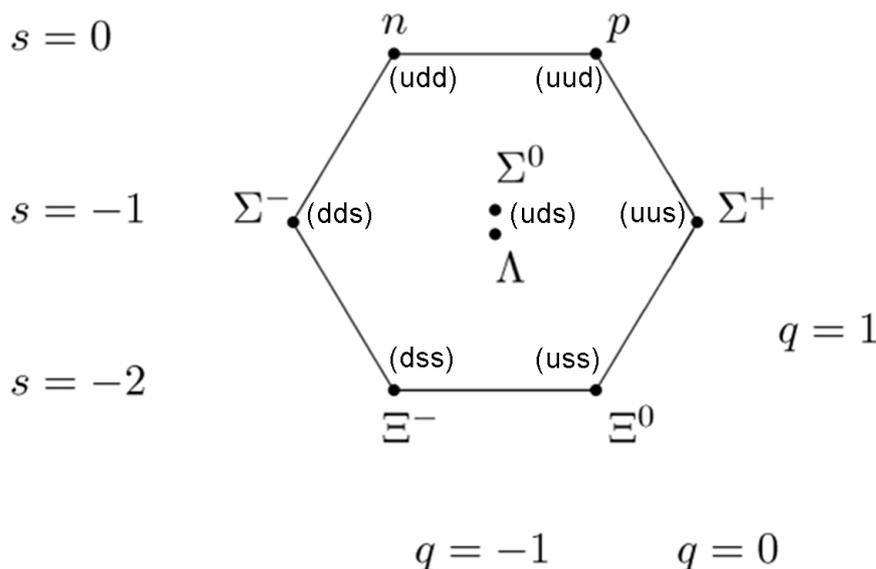


Figure 31: *Ottetto barionico*

fine degli anni '60 dal gruppo di R.E. Taylor. Si trattava di processi di scattering di elettroni di alta energia (25 GeV) su protoni, in cui si misurava la sezione d'urto in funzione del momento trasferito: essi costituirono, per lo studio della struttura interna del protone, l'analogo di quello che era stato l'esperimento di Geiger e Marsden per la struttura dell'atomo.

Questi esperimenti mostravano infatti che il protone non poteva essere descritto come una distribuzione continua di carica, bensì, per riprodurre i dati, occorreva assumere¹⁶³ che al suo interno ci fossero dei costituenti puntiformi (battezzati *partoni* da Feynman, tanto era grande ancora il pregiudizio contro i quarks) su cui avveniva effettivamente lo scattering.

I risultati del DIS erano certamente un punto a favore del modello a quarks di Gell-Mann, ma restava almeno un'altra seria obiezione (oltre a quella che non si trovavano liberi) da superare: esisteva per esempio (che non era nemmeno¹⁶⁴ l'unico !) un barione nel decupletto, la Δ^{++} , che, nel modello di Gell-Mann era fatto da tre quarks up, aveva spin $\frac{3}{2}$ e momento orbitale $L = 0$. Si trattava di uno stato uuu completamente simmetrico per scambio. Questa conclusione violava quanto si conosceva circa la connessione spin-statistica, secondo cui lo stato di fermioni identici è completamente antisimmetrico per scambio.

Fu ancora nel 1964 che fu posta la prima pietra verso la soluzione del problema, con Greenberg¹⁶⁵ il quale sollevò il problema della "violazione" della statistica di Fermi-Dirac nei barioni, osservando che sembrava piuttosto che lo stato dei quarks dovesse essere simmetrico per scambio, come se ci fosse un altro grado di

¹⁶³J.D. Bjorken: *Asymptotic sum rules at infinite momentum*, Phys. Rev. 179, 1547 (1969)

¹⁶⁴Un altro esempio, sempre nel decupletto, è la Δ^- che è un sistema (ddd) , per concludere con la stessa Ω^- , sistema (sss) .

¹⁶⁵O.W. Greenberg, *Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of baryons and mesons*, Phys. Rev. Lett. 13, 598 (1964)

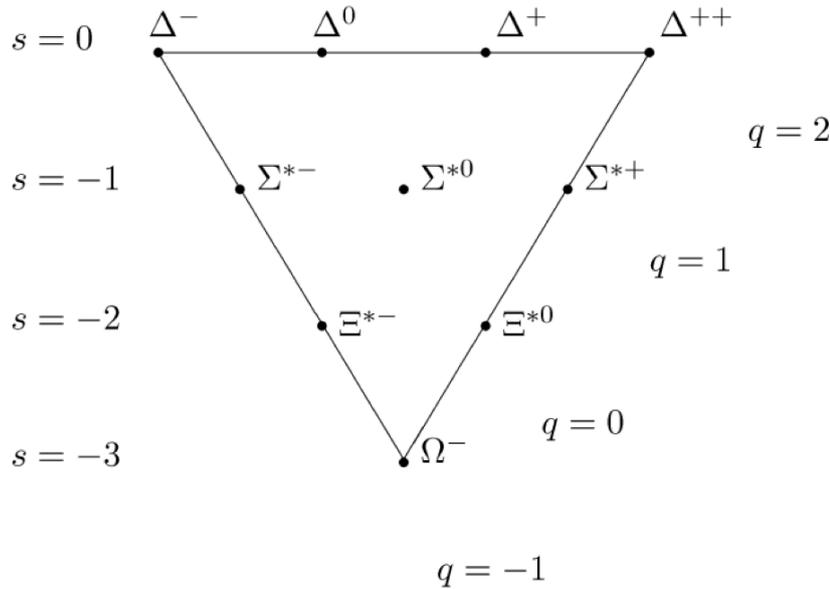


Figure 32: *Decupletto barionico*

libertà per il quale lo stato era antisimmetrico, cosa che condusse M.Y Han e Y. Nambu a suggerire l'idea¹⁶⁶ che il tripletto dei quarks fosse in realtà il risultato della sovrapposizione di tre tripletti e si fosse in presenza di due simmetrie $SU(3)$, una nel tripletto ed una fra i tripletti.

Nel '72, infine, Bardeen, Fritsch e Gell-Mann formalizzarono¹⁶⁷ l'idea che i quarks potessero esistere, ognuno, in *tre colori* diversi (convenzionalmente, blu, verde, rosso), che la simmetria di colore fosse una simmetria $SU(3)$ esatta e che le particelle costituite di quarks potessero esistere solo in combinazioni globalmente *incolori*, ovvero, più precisamente, in *singoletto* di $SU(3)$ di colore.

Era questo¹⁶⁸ che, in ultima analisi, implicava che le particelle che interagivano forte potessero essere costituite¹⁶⁹ solo da mesoni¹⁷⁰, cioè da coppie di

¹⁶⁶M.Y. Han, Y. Nambu: *Three-triplet model with double $SU(3)$ symmetry*, Phys. Rev. 139, B1006 (1965)

¹⁶⁷W. Bardeen, M. Gell-Mann, H. Fritsch: CERN report n. TH1538 (1972)

¹⁶⁸Le sole combinazioni incolori possibili si dimostra infatti che sono solamente i sistemi come $(q\bar{q})$ (i mesoni) oppure i sistemi (qqq) (i barioni) e $(\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ (gli antibarioni). Inoltre il singoletto di colore di tre quarks è antisimmetrico per scambio e questo risolve il problema della apparente violazione della statistica di Fermi, per esempio, nella Δ^{++} .

¹⁶⁹Per maggiori dettagli, cfr. "Introduction to elementary particles" di D. Griffiths.

¹⁷⁰In questo caso, ogni stato di quark/antiquark, doveva essere sostituito con la combinazione incolori per $SU(3)_c$ (singoletto)

$$|q\bar{q}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |q\bar{q}\rangle (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) \quad (3.316)$$

avendo posto R=rosso, G=verde, B=blu e avendo indicato con la barra i rispettivi anticolori. Ricordiamo che i colori si trasformano secondo la rappresentazione $\mathbf{3}$ mentre gli anticolori secondo la rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$.

(antiquarks). In questo modo cadeva così sia il problema legato alla apparente violazione della statistica di Pauli che quello relativo al fatto che non esistessero, per esempio, né quarks liberi, né particelle fatte di due o quattro quarks ...

La simmetria $SU(3)$ esatta di colore si dimostrò presto molto feconda, conducendo, in ultima analisi, alla teoria che descrive le interazioni forti nel Modello Standard, cioè alla QCD (Quantum Chromo Dynamics), la cui trattazione, però, va oltre gli scopi di questo Corso.

Intanto, con la scoperta¹⁷² delle correnti neutre al *CERN* nel 1973 in interazioni di neutrino/antineutrino in Gargamelle, si era aperta la strada alla unificazione fra l'elettromagnetismo e la teoria di Fermi delle interazioni deboli, prevista dalla teoria^{173,174} di Glashow, Weinberg e Salam già negli anni '60 e confermata sperimentalmente nel 1983 con la scoperta dei bosoni intermedi W^\pm e Z^0 , dagli esperimenti *UA1* ed *UA2* del CERN, scoperta che valse a Carlo Rubbia e Simon Van Der Meer il Nobel nel 1984.

Si tratta di una teoria basata sulla simmetria di gauge $SU(2)_{weak} \times U(1)_Y$ la quale, in virtù della interazione dei campi di gauge con un doppietto di bosoni di Higgs (ϕ^+ , ϕ^0) e del meccanismo della rottura spontanea della simmetria, conduce ad una sola restante simmetria di gauge, cioè $U(1)_{em}$, avente per generatore il campo elettromagnetico A_μ , e a tre campi massivi¹⁷⁵, mediatori dell'interazione debole propriamente detta, W_μ^\pm e Z_μ^0 .

La conferma sperimentale della Teoria elettrodebole fu un po' l'atto di nascita del Modello Standard di cui è parte integrante anche la *QCD* (che noi non tratteremo), le cui conferme sperimentali sarebbero giunte di lì a poco !

In modo del tutto simile si procede per gli altri barioni e per gli antibarioni, con la sola avvertenza che per questi ultimi, al posto dei colori ci saranno gli anticolori.

¹⁷²F.J. Hasert et al.: *Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment*, Phys. Lett. 46B, 138 (1973)

¹⁷³S.L. Glashow: *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. 22, 579 (1961)

¹⁷⁴J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg: *Broken symmetries*, Phys. Rev. 127, 965 (1962)

¹⁷⁵Il meccanismo con il quale W^\pm e Z^0 acquistano massa attraverso il meccanismo della rottura spontanea va oltre gli scopi di questo Corso.

3.8 Il Modello Standard: una introduzione

Che cosa prevede, allora, il Modello Standard ?

Iniziamo dalle interazioni.

Il MS assume che esse siano *locali*, descritte, nell'ambito di una teoria di campo relativistica, da una densità lagrangiana \mathcal{L} scalare sotto il gruppo di Lorentz ed hermitiana¹⁷⁶, costruita con i campi (e le loro derivate prime rispetto alle coordinate spazio-temporali) delle particelle coinvolte nell'interazione e con il campo del mediatore dell'interazione. Le equazioni di moto per i campi si ottengono poi dal principio di minima azione che, a partire dalla densità lagrangiana data $\mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x)$, afferma, come sappiamo, che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} = 0 \quad (3.321)$$

Alla lagrangiana \mathcal{L} del MS è richiesto di essere invariante di gauge locale sotto il gruppo $SU(3)_C \otimes SU(2)_{weak} \otimes U(1)_Y$, cosa che permette alla teoria di essere *rinormalizzabile* ovvero di essere matematicamente coerente.

La simmetria è poi rotta spontaneamente secondo il meccanismo di Higgs, in modo da conferire massa alle particelle che la possiedono¹⁷⁷.

Veniamo ora alle particelle, soggetto e sorgenti delle interazioni.

Tratteremo quelle elementari e le più importanti di quelle composite.

Esse si dividono in due grandi famiglie: quella dei *leptoni*¹⁷⁸ e quella degli *adroni*¹⁷⁹ distinte non più dal valore delle masse, come il nome lascerebbe intendere e come era effettivamente in principio, bensì, come abbiamo già detto, dal tipo di interazione che le particelle stesse subiscono.

¹⁷⁶La richiesta che la teoria sia relativisticamente covariante implica in modo naturale che, data la struttura stessa delle equazioni di Lagrange, la densità lagrangiana \mathcal{L} debba essere scalare sotto il gruppo di Lorentz.

Quanto al fatto che essa debba essere anche hermitiana, questo discende dall'analogo classico in cui la lagrangiana è una funzione reale di coordinate lagrangiane anch'esse reali. Niente vieta di rappresentare una coppia omogenea di queste variabili lagrangiane (q_1, q_2) attraverso una singola variabile complessa $q \equiv q_1 + iq_2$, ma rispettando comunque il fatto che \mathcal{L} resti reale. Questo impone che q e q^* entrino poi in \mathcal{L} allo stesso modo.

In QFT, questo significa che, nel caso di campi complessi, Φ e Φ^\dagger , essi devono essere presenti nella lagrangiana allo stesso titolo ed \mathcal{L} deve essere hermitiana, in modo che le equazioni di moto per Φ e Φ^\dagger , ottenute dal principio di minima azione a partire da \mathcal{L} , risultino automaticamente hermitiane coniugate.

¹⁷⁷I dettagli di come questo avvenga vanno oltre lo scopo del presente Corso.

¹⁷⁸Il nome *leptone* deriva dal greco $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\nu$ e significa *piccolo, minuto, leggero*.

Capostipite della famiglia dei leptoni è infatti l'elettrone, che è la particella carica di massa più piccola esistente in natura.

¹⁷⁹Il nome *adrone* deriva dal greco $\alpha\delta\rho\acute{o}\varsigma$ e significa *spesso, grosso*. Con questo nome si indicano tutte le particelle che subiscono l'interazione forte, capostipite delle quali è certamente il protone, il quale, però, oggi, non lo annoveriamo più fra le particelle elementari propriamente dette !

Infine ci sono i mediatori stessi delle interazioni, che nascono dalla quantizzazione dei campi i quali trasmettono l'interazione stessa, come il fotone, i già citati bosoni W^\pm e Z^0 , mediatori dell'interazione debole, ed infine i gluoni, mediatori dell'interazione forte¹⁸⁰.

• I leptoni

I leptoni sono, per definizione, le particelle che interagiscono unicamente in modo elettrodebole¹⁸¹. La famiglia dei leptoni elementari è organizzata in tre generazioni di massa crescente, i.e.

$$\begin{array}{llll} \nu_e(\bar{\nu}_e) & \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) & \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau) & \text{carica } 0 \\ e^-(e^+) & \mu^-(\mu^+) & \tau^-(\tau^+) & \text{carica } -1(+1) \end{array}$$

Come si vede, ogni leptone elementare¹⁸² ha il proprio antileptone che differisce, nel caso di quelli carichi, per il segno della carica elettrica.

Nel caso dei neutrini, è ancora dibattuto il fatto se il neutrino e l'antineutrino siano diversi oppure si tratti della stessa particella, differenziata nell'interazione solo dalla sua elicità.

Occorre anche ricordare, sempre a proposito dei neutrini, che anche della loro massa si sa poco ... Nel MS , date le conoscenze all'epoca in cui la teoria fu originariamente formulata, essa fu assunta essere nulla¹⁸³ mentre oggi è considerato ormai certo che essa non lo sia, anche se è certamente piccolissima sulla scala delle masse delle particelle elementari, cioè dell'ordine dell' eV o inferiore.

¹⁸⁰La gravitazione è fuori dal Modello Standard.

¹⁸¹Abbiamo accennato già al fatto che la teoria elettrodebole è una teoria di gauge basata sul gruppo $SU(2)_{weak} \times U(1)_Y$: in ciascuna generazione, la coppia neutrino-leptone carico costituisce, per la parte con chiralità negativa (left), un doppietto di isospin debole, contribuendo sia all'interazione debole propriamente detta che, per la parte carica, anche a quella elettromagnetica. Quanto alla componente con chiralità positiva (right) del leptone carico, essa forma un singoletto di isospin debole e contribuisce solo all'interazione elettromagnetica (il neutrino, nel MS , entra solo nel doppietto di isospin e quindi per la sua componente a chiralità negativa).

Si ricorda, infine, che i due proiettori chirali, positivo (right) e negativo (left), che operano sulle soluzioni ψ dell'equazioni di Dirac sono gli operatori $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ dove $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

In particolare, il proiettore di chiralità negativa che seleziona la componente left definita come $\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$ seleziona, almeno nel caso ultrarelativistico, la componente di elicità negativa per le particelle e quella ad elicità positiva per le antiparticelle.

¹⁸²Riguardo a elettrone e muone, abbiamo già detto come e quando sono stati scoperti. L'ultimo leptone carico, il τ^\pm , è stato scoperto in tempi relativamente più recenti dal gruppo di Perl a SLAC, in interazioni e^+e^- .

M.L. Perl et al.: *Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation*, Phys. Rev. Lett. 35, 1489 (1975)

¹⁸³E' questo che consente di non occuparci della componente con chiralità positiva (right) del campo del neutrino; infatti il termine di massa presente nella Lagrangiana del campo di Dirac, i.e. $m\bar{\psi}\psi$, coinvolge necessariamente entrambe le proiezioni left e right, essendo

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

Invece, quanto alla massa dei leptoni carichi, abbiamo

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}; \quad m_\mu = 105.6 \text{ MeV} \quad m_\tau = 1777 \text{ MeV}$$

Vale infine la pena ricordare che i leptoni carichi più pesanti sono instabili¹⁸⁴ (ancorchè elementari, cioè senza struttura interna). Per esempio

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \tau = 2.197 \mu s$$

mentre il τ^- , che, data la sua maggior massa, ha molti più canali di decadimento a disposizione, ha una vita media $\tau = 0.29 \text{ ps}$, con un BR del 17.8% in elettrone, neutrino e antineutrino; del 17.4% in muone, neutrino e antineutrino mentre il resto va in neutrino e adroni.

Riguardo infine ai leptoni composti, non ne esistono.

Per ragioni storiche, infatti, non consideriamo tali il *positronio* e neppure il *muonio*, cioè il sistema $\mu^+ e^-$, o l'antimuonio, i quali, essendo tenuti insieme dalla forza elettromagnetica, sono piuttosto considerati degli *atomi*, ancorché *esotici* !

Dal punto di vista delle interazioni, come abbiamo già detto, i leptoni, a parte quella gravitazionale, sentono solo l'interazione elettrodebole.

Quanto all'interazione elettromagnetica, la subiscono, ovviamente, solo i leptoni carichi (e, μ, τ) ed essa è descritta dalla densità lagrangiana¹⁸⁵

$$\mathcal{L}(x) = -e J_{em}^\mu(x) A_\mu(x) \quad (3.327)$$

dove $e \equiv \sqrt{\alpha}$ rappresenta la carica del positrone mentre $A_\mu(x)$ è il campo elettromagnetico, cioè il campo del fotone.

¹⁸⁴L'interazione che è responsabile della loro instabilità e quindi dei loro decadimenti è, ovviamente, l'interazione debole stessa !

¹⁸⁵Ricordiamo per completezza che la teoria di campo dell'elettrodinamica, cioè la *QED*, costituisce la teoria di gauge "prototipo".

Vediamo brevemente il significato di questa affermazione.

Partiamo per questo dalla sua lagrangiana: essa è ($c = 1$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - eq \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (3.322)$$

I primi due termini si riferiscono ai campi liberi (di Dirac ed elettromagnetico) mentre il terzo termine concerne l'interazione, descritta attraverso la sostituzione canonica nella lagrangiana libera di Dirac di $i\partial_\mu$ con $i\partial_\mu - qe A_\mu$, dove q sta per la carica della particella descritta dal campo di Dirac, in unità di $e \equiv |e|$.

Ricordiamo che la gauge di prima specie (gruppo $U(1)$)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\theta} \bar{\psi}(x) \quad (3.323)$$

è una invarianza in forma della lagrangiana e conduce, via il teorema di Noëther, alla conservazione della quadricorrente $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$.

Quanto poi alla corrente elettromagnetica $J_{em}^\mu(x)$ associata ai leptoni carichi, essa è data dall'espressione¹⁸⁶

$$J_{em}^\mu(x) \equiv q \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \psi_l(x) = - \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \psi_l(x) \quad \text{con } l = e^-, \mu^-, \tau^- \quad (3.328)$$

Venendo adesso alla interazione debole propriamente detta, come sappiamo, i mediatori che la caratterizzano sono i bosoni vettori W^\pm e Z^0 ($M_W = 80.399 \pm 0.023 \text{ GeV}$, $M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$).

I W^\pm sono i mediatori dell'interazione, cosiddetta *di corrente carica*, descritta, limitatamente al settore puramente leptonic, dalla densità lagrangiana¹⁸⁷

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin\theta_W} \left[J_\mu(x) W^\mu(x) + J_\mu^\dagger(x) W^{\dagger\mu}(x) \right] \quad (3.329)$$

dove θ_W è l'angolo di Weinberg, legato alle masse dei bosoni vettori dalla relazione $\cos\theta_W \equiv M_W/M_Z$, da cui segue che $\sin^2\theta_W = 0.23117 \pm 0.00016$, mentre risulta¹⁸⁸

$$J_\mu(x) = \sum \left[\bar{\nu}(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) l(x) \right]; \quad J_\mu^\dagger(x) = \sum \left[\bar{l}(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \nu(x) \right] \quad (3.330)$$

dove la somma è estesa alle tre generazioni. Questa interazione si chiama *di corrente carica* perché la carica elettrica del sistema leptonic cambia al vertice dell'interazione e, dunque, la conservazione della carica elettrica impone che il mediatore sia esso stesso carico, esattamente come accade nel modello¹⁸⁹ di Yukawa.

Invece, l'analogia trasformazione di fase locale

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) = e^{i\theta(x)} \bar{\psi}(x) \quad (3.324)$$

non è una simmetria se ci limitiamo al solo campo di Dirac, in quanto

$$\bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + (\partial_\mu \theta) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.325)$$

Essa però lo ridiventa se, approfittando del fatto che il potenziale A_μ è indeterminato a meno di una trasformazione di gauge di seconda specie, si pone anche

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{qe} \partial_\mu \theta(x) \quad (3.326)$$

La (3.326) insieme alla (3.324) definiscono la simmetria di gauge locale abeliana $U(1)$, caratteristica della *QED* !

¹⁸⁶Il campo ψ_l è, per definizione, il campo che contiene l'operatore di distruzione della particella e quindi, come tale annichila particelle di carica negativa, da cui $q = -1$.

¹⁸⁷Il campo che descrive i bosoni W^\pm è il campo vettoriale carico $W_\mu(x)$ insieme al suo hermitiano coniugato $W_\mu^\dagger(x)$: per definizione $W_\mu(x)$ annichila il W^+ e crea il W^- .

¹⁸⁸Non si confonda la corrente elettromagnetica con la corrente debole carica: la prima è data dall'espressione (3.328) mentre la seconda dalla (3.330).

¹⁸⁹Il paragone con la teoria di Yukawa è più profondo di quanto non possa apparire ... Ciascun doppietto leptonic costituisce, come si è detto, un doppietto di isospin debole \vec{T} .

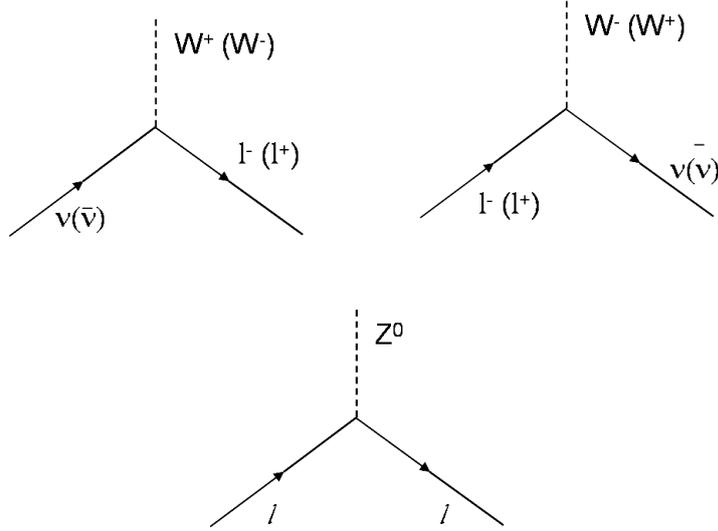


Figure 34: *Vertici deboli leptonici*

La trasformazione di un neutrino in un leptone negativo oppure quella di un antileptone positivo in un antineutrino si accompagna, infatti, all'emissione di un W^+ oppure all'assorbimento di un W^- virtuali¹⁹⁰; mentre la trasformazione di

Esattamente come la lagrangiana di interazione di Yukawa del campo dei nucleoni con il campo scalare mesonico era

$$\mathcal{L} = (\bar{\mathcal{N}} I_+ \mathcal{N}) \Phi + (\bar{\mathcal{N}} I_- \mathcal{N}) \Phi^\dagger$$

dove

$$\mathcal{N} \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

adesso, definendo in modo analogo, per ogni generazione leptonica $i = 1, 2, 3 = e, \mu, \tau$, il doppietto debole (nella parte "right" il campo del neutrino è assente, ed esso è fatto solo dalla parte "right" del campo del leptone carico il quale è un singoletto di $SU2_{weak}$)

$$\Psi_i \equiv \begin{pmatrix} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_{\nu_i} \\ \psi_{l_i} \end{pmatrix}$$

dopo la rottura spontanea della simmetria $SU(2)_{weak} \times U(1)_Y$, risulta appunto che

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \left[\left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T_+ \Psi_i \right) W_\mu + \left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T_- \Psi_i \right) W_\mu^\dagger \right] \quad (3.331)$$

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g}{\cos\theta_W} \sum_i \left[\left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T_3 \Psi_i \right) - \sin^2\theta_W (\bar{\Psi}_i \gamma^\mu Q \Psi_i) \right] Z_\mu \quad (3.332)$$

dove la teoria elettrodebole identifica poi $g \sin\theta_W$ con la carica elettrica del positrone e , mentre Q rappresenta l'operatore di carica elettrica.

¹⁹⁰Ricordiamo quanto già abbiamo avuto modo di osservare riguardo al concetto di particella virtuale. L'affermazione "il processo $\nu \rightarrow e^-$ si accompagna all'emissione di un W^+ virtuale" vuole dire solo che la corrente responsabile del processo indicato, cioè la corrente $\bar{e}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu$

un leptone negativo in un neutrino oppure quella di un antineutrino in un leptone positivo, prevede la simultanea emissione di un W^- oppure all'assorbimento di un W^+ virtuali.

Si osservi infine che al vertice dell'interazione di CC il sistema leptonic cambia¹⁹¹ *ma sempre restando nell'ambito della stessa generazione !*

Vedremo come, per il sistema dei quarks, questo non resti vero ...

Il bosone Z^0 , invece, è il mediatore delle interazioni deboli *di corrente neutra*. In questo tipo di interazioni, l'identità stessa (e non solo la generazione ...) del sistema leptonic, nel vertice dell'interazione, non cambia, rassomigliando in questo molto strettamente al caso elettromagnetico.

Questo tipo di interazione è descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e}{\sin(2\theta_W)} J_\mu^0(x) Z^\mu(x) \quad (3.333)$$

dove $Z^\mu(x)$ è il campo autoaggiunto (come quello elettromagnetico) del bosone vettore Z mentre $J_\mu^0(x)$ è la corrente debole neutra, definita come

$$J_\mu^0(x) = \sum \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (C_V - \gamma_5 C_A) \psi(x) \quad (3.334)$$

e la somma è estesa a tutti i campi leptonic (carichi o neutri), mentre

$$C_V \equiv t_3 - 2q \sin^2 \theta_W; \quad C_A \equiv t_3 \quad (3.335)$$

essendo q la carica elettrica del leptone in questione in unità di cariche positroniche (nulla per i neutrini e pari a -1 per i leptoni carichi), mentre t_3 è l'autovalore della terza componente dell'*isospin debole*, i.e.

$$t_3 = +1/2 \quad \text{per } \nu \quad (3.336)$$

$$t_3 = -1/2 \quad \text{per } l \quad (3.337)$$

è accoppiata al campo W^\dagger mentre la corrente $\bar{\nu}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} e$ è accoppiata al campo W !

¹⁹¹Come è, allora, che l'interazione debole di CC è responsabile del decadimento del muone (seconda generazione) in cui si produce un elettrone (prima generazione) ?

Ricordiamo che la reazione in questione è $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$: essa avviene in quanto il muone si trasforma in neutrino muonico emettendo un W^- virtuale (quindi con una reazione interna alla seconda generazione leptonic) il quale, a sua volta, decade in elettrone e antineutrino elettronico (quindi con una reazione interna alla prima generazione). Altri canali in cui il W^- potrebbe teoricamente decadere risultano in questo caso vietati dalla conservazione dell'energia, mentre sono aperti, per esempio, nel caso del decadimento ben più ricco del τ^- (e del τ^+ !).

• **Gli adroni**

Venendo ora agli adroni, i loro costituenti elementari sono anch'essi organizzati in una famiglia fatta da tre generazioni di quarks (e relative antiparticelle) di massa crescente, e cioè

$$\begin{array}{llll} u(\bar{u}) & c(\bar{c}) & t(\bar{t}) & q = +2/3 \ (-2/3) \\ d(\bar{d}) & s(\bar{s}) & b(\bar{b}) & q = -1/3 \ (+1/3) \end{array}$$

Essi interagiscono sia in modo elettrodebole che in modo forte, ed è quest'ultima interazione, appunto, quella che li caratterizza, descritta come si è già detto, dalla *QCD* la cui trattazione, però, esula da questo Corso.

Quanto all'interazione debole, però, c'è un'importante novità da segnalare, rispetto al caso leptonic prima considerato.

I campi dei quarks che entrano nella definizione della corrente carica debole non hanno *sapore* forte definito, cioè nel caso dei quarks non è rispettata, come accade in modo stretto per i leptoni, la gerarchia definita dalle diverse generazioni. Questa novità è la generalizzazione del fatto già notato fin dal 1963 da Cabibbo¹⁹² e quindi un anno prima della formulazione della teoria dei quarks, per cui si potevano descrivere con la stessa interazione (universalità delle interazioni deboli) processi simili come, per esempio

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (3.338)$$

$$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (3.339)$$

pur di ridefinire la parte adronica della corrente debole carica nel modo seguente

$$J^\mu = \cos\theta_C J_{\Delta S=0}^\mu + \sin\theta_C J_{\Delta S=1}^\mu \quad (3.340)$$

che, nell'odierno linguaggio dei quarks, equivale a sostituire al doppietto $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$

il doppietto $\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}$ dove $d_C \equiv d \cos\theta_C + s \sin\theta_C$, con $\sin\theta_C = 0.2196 \pm 0.0023$.

In questo modo trovava una sua naturale spiegazione anche l'apparente stonatura secondo cui risultavano leggermente differenti le costanti di accoppiamento (di Fermi) che descrivevano, rispettivamente, il decadimento debole del muone (G_F) e quello del pione ($G_F \cos\theta_C$).

Va comunque ricordato che questa idea creò un problema con le correnti neutre. Queste infatti, come abbiamo avuto modo già di vedere nel settore leptonic, sono, similmente all'interazione elettromagnetica, della forma¹⁹³ $J^\mu = \bar{\psi} O^\mu \psi$

¹⁹²N. Cabibbo: *Unitary symmetry and leptonic decays*
Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963)

¹⁹³Più esplicitamente ricordiamo che risulta $O^\mu = \gamma^\mu (C_V - \gamma_5 C_A)$.

dove $\bar{\psi}$ e ψ si riferiscono allo stesso sistema fisico ed O^μ è una opportuna combinazione di matrici gamma. La conseguenza è che, poiché il campo d_C risulta essere una combinazione lineare di quelli dei quarks d ed s , le correnti deboli neutre dovevano allora consentire processi con $\Delta S = \pm 1$ come, per esempio, il decadimento del K^0 in μ^+ e μ^- . Questa reazione, però, ha un BR estremamente

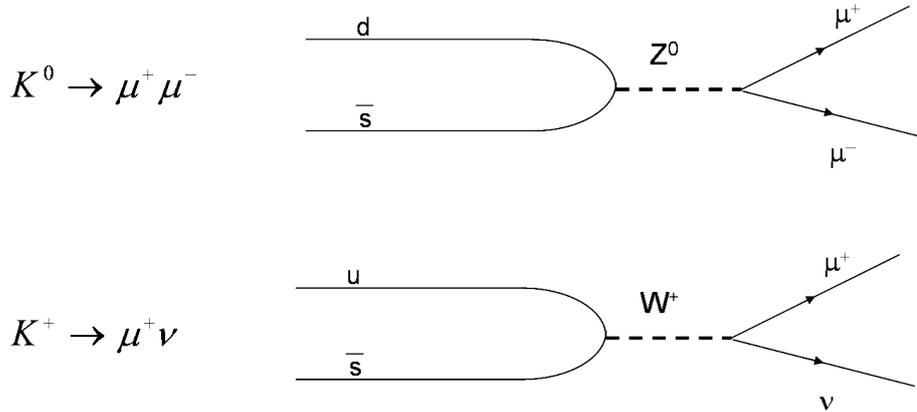


Figure 35: *Decadimenti di corrente carica e neutra del K*

piccolo ($BR(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (7.15 \pm 0.16) \cdot 10^{-9}$) specialmente se confrontato con l'analogo processo carico $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$, che, invece, ha un BR addirittura pari al 63.5% !

Come possono essere conciliati fra loro questi due fatti sperimentali, apparentemente contraddittori nell'ambito della teoria elettrodebole ?

Furono Glashow, Iliopoulos e Maiani che, nel 1970, formularono l'ipotesi dell'esistenza di un quarto quark, il *charm*, fratello più massivo del quark *up*, attraverso il quale si poteva giungere a definire un meccanismo di soppressione dei processi di corrente neutra con $\Delta S = \pm 1$ (ovvero, dei processi *FCNC* cioè mediati da *flavour changing neutral currents*): era il cosiddetto *GIM*¹⁹⁴ *mechanism*. Questo meccanismo, nella sua sostanza, è molto semplice.

Con il quarto quark c , al posto di un singolo doppietto si potevano costruire due doppietti di quarks i quali, per quanto riguarda le interazioni deboli, erano mescolati attraverso una matrice ortogonale (rotazione di Cabibbo)

$$\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u & c \\ d_C & s_C \end{pmatrix} \quad (3.341)$$

dove

$$d_C \equiv d \cos\theta_C + s \sin\theta_C; \quad s_C \equiv s \cos\theta_C - d \sin\theta_C \quad (3.342)$$

¹⁹⁴S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani: *Weak Interactions with lepton-hadron symmetry*, Phys. Rev. 2D, 1285 (1970)

In questo modo, la corrente neutra, per la parte relativa ai quarks di carica $-1/3$, era fatta oltre che dal termine $\bar{d}_C O^\mu d_C$ anche dal termine $\bar{s}_C O^\mu s_C$.

E' allora facile convincersi che la somma $\bar{d}_C O^\mu d_C + \bar{s}_C O^\mu s_C$ risulta indipendente dall'angolo di Cabibbo θ_C , ed è semplicemente pari a $\bar{d} O^\mu d + \bar{s} O^\mu s$ per cui risulta¹⁹⁵ in questo modo che, effettivamente, *non* possono esistere transizioni di corrente neutra fra quarks di tipo differente (almeno all'ordine perturbativo più basso).

Allo scopo di comprendere meglio quanto aspettarsi nel caso di tre generazioni, osserviamo che la rotazione descritta dall'angolo di Cabibbo rappresenta, in realtà, la più generale trasformazione ortonormale di base nello spazio (d, s) . Se ci limitiamo, infatti, alle prime due generazioni di quarks, evidentemente la più generale trasformazione di base che mescola i quarks d ed s è così fatta

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} \equiv V \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}; \quad \text{dove } V \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.343)$$

Il fatto che V sia unitaria implica che valgano le condizioni seguenti

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (3.344)$$

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (3.345)$$

$$ac^* + bd^* = 0 \quad (3.346)$$

Per vedere a che cosa queste condizioni conducano, iniziamo ponendo, in tutta generalità,

$$a = |a| e^{i\alpha}, \quad b = |b| e^{i\beta}, \quad c = |c| e^{i\gamma}, \quad d = |d| e^{i\delta},$$

Evidentemente le due equazioni (3.344) e (3.345) implicano che

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 = |c|^2 + |d|^2$$

ovvero che

$$|a| = \cos\theta, \quad |b| = \sin\theta \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$|c| = \sin\phi, \quad |d| = \cos\phi \quad \text{con } 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

¹⁹⁵Naturalmente il quarto quark c'era da trovarlo ! E questo accadde nel 1974 con la scoperta del mesone J/ψ , sistema legato $c\bar{c}$, da parte delle due collaborazioni dirette, rispettivamente, da *S.Ting* e *B.Richter*. L'esistenza del mesone fu immediatamente confermata anche da *Adone* a Frascati che non la scoprì solo perché era previsto che il collider e^+e^- arrivasse al massimo a 3 GeV nel CM , mentre la massa della J/ψ è pari a $3096.87 \pm 0.04\text{ MeV}$...

Proprio il caso di dire che *Mancò la fortuna, non il valore !*

J.J. Aubert et al.: *Experimental observation of a heavy particle J*,
Phys. Rev. Lett. 33, 1404 (1974)

J.E. Augustin et al.: *Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation*,
Phys. Rev. Lett. 33, 1406 (1974)

C. Bacci et al.: *Preliminary result of Frascati (ADONE) on the nature of a new 3.1 GeV particle produced in e^+e^- annihilation*,

Phys. Rev. Lett. 33, 1408 (1974)

Sostituendo allora nella terza equazione, abbiamo

$$\cos\theta \sin\phi e^{i(\alpha-\gamma)} + \sin\theta \cos\phi e^{i(\beta-\delta)} = 0$$

ovvero

$$\cos\theta \sin\phi e^{i(\alpha-\gamma)} e^{-i(\beta-\delta)} + \sin\theta \cos\phi = 0$$

Affinché questa equazione possa essere soddisfatta, il fattore di fase deve essere reale ed inoltre, essendo per ipotesi sia $\cos\theta \sin\phi$ che $\sin\theta \cos\phi$ entrambi non negativi, occorre che

$$\begin{aligned} e^{i[(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)]} = -1 &\Rightarrow (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) = \pi \\ \Rightarrow \delta - \beta = -\alpha + \gamma + \pi &\end{aligned} \quad (3.347)$$

L'equazione diviene allora

$$\cos\theta \sin\phi - \sin\theta \cos\phi = 0 \Rightarrow \sin(\phi - \theta) = 0$$

e dunque ne segue che $\phi = \theta$, essendo entrambi gli angoli, per ipotesi, nel primo quadrante. Quanto alle fasi, introducendo l'angolo ξ con la definizione

$$\delta - \beta = \gamma - \alpha + \pi \equiv \xi \Rightarrow \delta = \xi + \beta; \quad \gamma = \alpha + \xi - \pi$$

ecco che, riguardo alla matrice V , si ha infine

$$V \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\beta} \\ -\sin\theta e^{i\alpha} e^{i\xi} & \cos\theta e^{i\beta} e^{i\xi} \end{pmatrix} \quad (3.348)$$

E' evidente, però, che le condizioni (3.344) - (3.346) sono invarianti rispetto al fatto che si moltiplichi una riga o una colonna per un qualunque fattore di fase. Questa invarianza corrisponde, dal punto di vista fisico, alla possibilità di scegliere arbitrariamente la fase di ciascun campo dei quarks.

Usando questa arbitrarietà, le tre fasi che compaiono nella matrice possono essere riassorbite¹⁹⁶ e possiamo arrivare così alla soluzione

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.349)$$

ovvero all'originale soluzione di Cabibbo in cui la matrice di mixing è una matrice ortogonale con determinante +1.

¹⁹⁶Ci si potrebbe chiedere, visto che le fasi libere sui campi dei quarks sono quattro e noi abbiamo usato solo tre gradi di libertà ad esse collegate, dove questo quarto grado di libertà sia finito ! Esso è rimasto libero ma, purtroppo, è anche del tutto inutile ... Ricordiamo infatti che un grado di libertà legato alle fasi è irrilevante dal punto di vista fisico perché è quello per cui la matrice viene semplicemente moltiplicata per un fattore di fase globale.

Con tre famiglie di quarks, la generalizzazione della rotazione di Cabibbo è la matrice unitaria di Cabibbo, Kobayashi e Maskawa^{197,198}

$$V_{CKM} \equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (3.359)$$

¹⁹⁷M. Kobayashi, T. Maskawa: *CP violation in renormalizable theory of weak interactions*, Progr. Theor. Phys. 49, 652 (1973).

¹⁹⁸Il carattere unitario della matrice V_{CKM} è legato alla universalità delle interazioni deboli unitamente al fatto che, nel settore dei quarks, non ci sono altri soggetti, oltre ai quarks noti, con cui questi, quanto alle interazioni deboli, si "mescolano" (sulla base dell'unitarietà, comunque, niente vieterebbe l'esistenza di una quarta generazione, purché indipendente dalle prime tre ...).

Vediamo quali sono le conseguenze che discendono dal carattere unitario di V_{CKM} . Per ipotesi abbiamo

$$V V^\dagger = I \quad \Rightarrow \quad V_{ij} V_{kj}^* = \delta_{ik} \quad (3.350)$$

Immaginiamo ora di porre, in tutta generalità

$$V_{ij} \equiv |V_{ij}| e^{i\phi_{ij}}$$

allora la condizione (3.350) per $i = k$ si limita a dire che la somma dei moduli quadri degli elementi della matrice V_{CKM} presenti in ogni riga deve essere uguale all'unità. Si tratta dunque di tre equazioni (reali) per i moduli $|V_{ij}|$.

Veniamo ora al caso in cui $i \neq k$: osserviamo che

$$V_{ij} V_{kj}^* = (V_{kj} V_{ij}^*)^*$$

e dunque possiamo limitarci alle equazioni che possiamo scrivere a partire dalla (3.350) quando, per esempio, $k > i$ (le altre sono le loro complesse coniugate). Si tratta di tre equazioni complesse che si traducono in tre condizioni su $|V_{ij}|$ e tre condizioni sulle fasi ϕ_{ij} .

A causa delle condizioni legate all'unitarietà di V_{CKM} , dunque, rimaniamo con

$9 - 3 - 3 = 3$ gradi di libertà per i moduli $|V_{ij}|$;

$9 - 3 = 6$ gradi di libertà per le fasi ϕ_{ij} .

Osserviamo adesso che, attraverso la scelta arbitraria delle fasi dei campi dei quarks, possiamo alterare le fasi ϕ_{ij} in modo che risulti

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij} + \theta_i - \xi_j$$

e questo corrisponde alla disponibilità di $6 - 1 = 5$ gradi di libertà per modificare arbitrariamente le fasi ϕ_{ij} (un grado di libertà è assorbito da quello "inutile" che si traduce nella moltiplicazione dell'intera matrice per uno stesso fattore di fase ...).

Usando questa arbitrarietà, finiamo quindi per restare con

3 gradi di libertà per i moduli $|V_{ij}|$,

1 grado di libertà effettivo per le fasi.

Se invece che tre famiglie di quarks ne avessimo n allora, ripetendo quanto detto in precedenza, partiremmo, per quanto riguarda i moduli $|V_{ij}|$, da n^2 gradi di libertà, ridotti di n per le equazioni reali ottenute dalla condizione di unitarietà per $i = k$, cioè riguardo alla diagonale della matrice $V V^\dagger$, ed ancora ridotti di $\frac{n(n-1)}{2}$ a causa delle equazioni complesse per i termini fuori diagonale di $V V^\dagger$.

Resteremmo quindi con

$$n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

gradi di libertà per i moduli $|V_{ij}|$.

Quanto poi alle fasi, partiremmo sempre da n^2 gradi di libertà, da cui dovremmo sottrarre $\frac{n(n-1)}{2}$ (equazioni fuori diagonale, di cui sopra), rimanendo così, sulla base delle sole condizioni legate all'unitarietà, con

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

gradi di libertà per le fasi. Usando poi i $(2n-1)$ gradi di libertà legati alla scelta arbitraria delle fasi dei campi degli stessi quarks, finiremmo infine con

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

gradi di libertà residui sulle fasi (a parte, beninteso, la fase "globale").

Tornando adesso al caso della matrice V_{CKM} , esistono vari modo di parametrizzarla, fermo restando che i gradi di libertà sono tre per i moduli degli elementi della matrice ed uno per una fase (non banale).

Uno è quello di mescolare fra loro generazioni di quarks differenti attraverso varie "rotazioni". Quella più comunemente usata (*PDG*) si ottiene a partire dalla seguente matrice unitaria

$$U = R_{23} \cdot R_{13}(\delta) \cdot R_{12} \quad (3.351)$$

dove

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.352)$$

$$R_{13}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \quad (3.353)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \quad (3.354)$$

moltiplicando l'ultima colonna della matrice U per $e^{-i\delta}$ e la seconda e la terza riga della stessa matrice per $e^{i\delta}$. Si ottiene così l'espressione seguente

$$V_{CKM} \equiv \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.355)$$

dove, per semplicità, abbiamo definito $\cos\theta_{ij} \equiv c_{ij}$; $\sin\theta_{ij} \equiv s_{ij}$ e $\delta \equiv \delta_{ij}$.

Si osservi che la matrice U sopra definita ha determinante

$$\det(U) = e^{-i\delta}$$

mentre la matrice V_{CKM} , ottenuta dalla matrice U nel modo sopra specificato, ha determinante

$$\det(V_{CKM}) = \det(U) \cdot e^{-i\delta} \cdot e^{i\delta} \cdot e^{i\delta} = 1 \quad (3.356)$$

Posto¹⁹⁹ allora

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \equiv V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.364)$$

ecco che, esattamente come nel caso leptonic (universalità delle interazioni deboli), l'interazione di corrente carica a livello dei quarks è descritta nel MS dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CC}(x) = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin\theta_W} [J_\mu(x) W^\mu(x) + J_\mu^\dagger(x) W^{\dagger\mu}(x)] \quad (3.365)$$

con

$$J_\mu = \bar{u} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) d' + \bar{c} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) s' + \bar{t} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) b' \quad (3.366)$$

Siccome sperimentalmente, posto $\lambda \equiv s_{12} = \sin\theta_C$, risulta

$$s_{23} = A \lambda^2, \quad s_{13} e^{-i\delta} = A \lambda^3 (\rho - i\eta) \quad \text{con } A, \rho, \eta \text{ di } \mathcal{O}(1) \quad (3.357)$$

ne segue che, a meno di termini $\mathcal{O}(\lambda^4)$, possiamo scrivere

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A \lambda^3 (\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A \lambda^2 \\ A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta) & -A \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.358)$$

che è la parametrizzazione di Wolfenstein di cui alla referenza

L. Wolfenstein: *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix*, Phys. Rev. Lett. 51, 1945 (1983)

¹⁹⁹Ci si potrebbe chiedere come mai il mixing debba avvenire sui quarks con carica $-1/3$ e non, per esempio, su quelli di carica $+2/3$... In realtà si tratta solo di una scelta convenzionale, nata con l'idea di Cabibbo di mescolare fra loro, con una rotazione, i quarks d ed s (visto che il quark c ancora non era noto)

Per rendercene conto, può essere utile provare a riscrivere le correnti J_μ e J_μ^\dagger dopo aver rinominato i campi dei quarks nel modo seguente:

$$u_1 \equiv u; \quad u_2 \equiv c; \quad u_3 \equiv t \quad (3.360)$$

$$d_1 \equiv d; \quad d_2 \equiv s; \quad d_3 \equiv b \quad (3.361)$$

Risulta

$$J_\mu = \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) V_{ik} d_k = V_{ik} \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) d_k \quad (3.362)$$

$$J_\mu^\dagger = V_{ik}^* \bar{d}_k \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i = \bar{d}_k \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i V_{ik}^* \quad (3.363)$$

ovvero nulla cambia nelle correnti adroniche se il mixing viene descritto sui quarks con carica $+2/3$, pur di usare la matrice hermitiana coniugata della V_{ik} precedentemente introdotta e definita dalla (3.364).

In realtà, volendo essere ancora più "democratici" fra i due tipi di quarks (ma complicandoci un po' la vita), si potrebbero addirittura usare due matrici unitarie, la matrice U che agisce sui quarks di carica $2/3$ e la matrice D che agisce su quelli di carica $-1/3$: l'unico vincolo da rispettare sarebbe quello per cui $U^+ D = V_{CKM}$.

$$J_\mu^\dagger = \bar{d}' \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u + \bar{s}' \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) c + \bar{b}' \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) t \quad (3.367)$$

e così pure l'interazione di corrente neutra mantiene anch'essa la stessa struttura²⁰⁰ che nel caso leptónico, i.e. risulta

$$\mathcal{L}_{NC}(x) = -\frac{e}{\sin(2\theta_W)} J_\mu^0(x) Z^\mu(x) \quad (3.369)$$

con

$$J_\mu^0(x) \equiv \sum_i \bar{q}_i(x) \gamma^\mu (C_V - \gamma_5 C_A) q_i(x) \quad (3.370)$$

dove q_i indica uno qualsiasi dei sei campi dei quark, e C_V e C_A sono ancora definiti dalla (3.335) per cui, come nel caso leptónico, risulta

$$T_3 = +1/2 \quad \text{per } u, c, t \quad (3.371)$$

$$T_3 = -1/2 \quad \text{per } d, s, b \quad (3.372)$$

E' interessante, a questo punto, vedere che cosa succede sotto le simmetrie discrete di parità P e coniugazione di carica C alle correnti deboli: ci limiteremo per semplicità a considerare quelle di corrente carica.

Inizieremo studiando il caso che si avrebbe in assenza di flavour mixing²⁰¹.

In termini dei simboli u_i e d_i definiti in una nota precedente, risulta

$$J_\mu = \bar{u}_i \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d_i \quad (3.373)$$

$$J_\mu^\dagger = \bar{d}_i \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u_i \quad (3.374)$$

Ma l'azione delle simmetrie P e C sui campi di Dirac, affinché esse siano separatamente conservate nell'interazione elettromagnetica, è definita nel modo seguente²⁰²

$$P : \quad \psi(x) \rightarrow \gamma^0 \psi(Px) e^{-i\eta_P} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(Px) \gamma^0 e^{i\eta_P} \quad (3.382)$$

$$C : \quad \psi(x) \rightarrow \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) e^{-i\eta_C} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow -\psi^t(x) \mathcal{C} e^{i\eta_C} \quad (3.383)$$

²⁰⁰Si osservi che il *GIM mechanism*, che impedisce all'ordine più basso l'esistenza di processi deboli di corrente neutra che si accompagnano a cambiamenti di sapore, si estende in modo automatico al caso di tre generazioni a causa proprio dell'unitarietà di V_{CKM} , infatti per i quarks di carica $-1/3$, abbiamo

$$\bar{q}'_i O^\mu q'_i = V_{ij}^* \bar{q}_j O^\mu V_{ik} q_k = \left(V_{ji}^\dagger V_{ik} \right) \bar{q}_j O^\mu q_k = \bar{q}_j O^\mu q_j \quad (3.368)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto, appunto, che la matrice V_{CKM} è unitaria.

²⁰¹Per questo motivo, le conclusioni a cui giungeremo nell'ipotesi di assenza di mixing saranno allo stesso modo valide e applicabili anche nel settore leptónico.

²⁰²In tutta generalità, per il campo di Dirac risulta

$$C a^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} b^{(r)}(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C a^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} b^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (3.375)$$

$$C b^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} a^{(r)}(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C b^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (3.376)$$

$$C \psi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \quad \longleftrightarrow \quad C \bar{\psi}(x) C^{-1} = e^{i\eta_c} \psi^t(x) \mathcal{C}^{-1} \quad (3.377)$$

dove $\mathcal{C} \equiv i\gamma^0 \gamma^2 = -\mathcal{C}^{-1}$ gode della proprietà per cui

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^t$$

mentre, quanto alle fasi η_P ed η_C , risulta $e^{i\eta_P} = \pm 1$ e $e^{i\eta_C}$ è a priori arbitraria.

Occupiamoci dunque, per esempio, della corrente J_μ (i risultati ottenuti saranno poi facilmente estendibili a $J_\mu^\dagger \dots$).

Sulla base di quanto sopra, per quanto riguarda la parità, nell'ipotesi che la parità intrinseca $e^{i\eta_P}$ sia uguale per tutti i quarks, risulta

$$\begin{aligned} P : J_\mu(x) &\rightarrow \bar{u}_i(Px) \gamma^0 \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \gamma^0 d_i(Px) = \bar{u}_i(Px) \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) d_i(Px) = \\ &= \bar{u}_i(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) d_i(Px) \end{aligned} \quad (3.384)$$

dove abbiamo usato il fatto che, per le proprietà delle matrici γ , risulta

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0; \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \Rightarrow \gamma^0 \gamma_\mu = \gamma^\mu \gamma^0$$

La corrente J_μ mostra in modo evidente il fatto che essa è costituita da due parti distinte, le quali si trasformano sotto parità in modo opposto, ovvero

- $\frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu d \rightarrow \frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu d$
in cui le componenti spaziali della corrente cambiano segno mentre quella temporale resta invariata: si tratta della parte vettoriale di J_μ ;
- $\frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 d \rightarrow -\frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 d$
in cui le componenti spaziali della corrente *non* cambiano segno mentre a farlo è la componente temporale: si tratta della parte assiale di J_μ .

Quanto al campo del bosone vettore $W_\mu(x)$, esso, essendo appunto un campo vettoriale, risulta tale per cui

$$P : W_\mu(x) \rightarrow W^\mu(Px)$$

e dunque la simmetria di parità P *non* può essere conservata dall'interazione debole descritta dall'interazione (3.365), bensì, data la presenza dei due termini assiale e vettoriale con lo stesso peso, essa sarà violata in modo massimale.

$$P a^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} a^{(r)}(-\vec{p}) \longleftrightarrow P a^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} a^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (3.378)$$

$$P b^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_P} b^{(r)}(-\vec{p}) \longleftrightarrow P b^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_P} b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (3.379)$$

$$P \psi(x) P^{-1} = e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(Px) \longleftrightarrow P \bar{\psi}(x) P^{-1} = e^{i\eta_P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \quad (3.380)$$

$$e^{i\eta_P} = \pm 1 \quad (3.381)$$

Per le particelle di Dirac si dimostra che la scelta della parità intrinseca $e^{i\eta_P}$ è in realtà un fatto puramente convenzionale. La scelta canonica è che $e^{i\eta_P} = +1$ e quindi ne segue che la parità intrinseca delle particelle è +1 mentre quella delle antiparticelle è, di conseguenza, -1.

Veniamo adesso all'altra simmetria che vogliamo studiare, cioè alla coniugazione di carica C : abbiamo (di nuovo nell'ipotesi che η_C sia lo stesso per tutti i quarks)

$$C : J_\mu(x) \rightarrow -u_i^t(x) \mathcal{C} \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \mathcal{C}^{-1} \bar{d}_i^t(x) \quad (3.385)$$

ma essendo \mathcal{C} il prodotto di due matrici γ , esso commuta con la matrice γ_5 , e dunque

$$\begin{aligned} C : J_\mu(x) &\rightarrow -u_i^t(x) \mathcal{C} \gamma_\mu \mathcal{C}^{-1} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \bar{d}_i^t(x) = \\ &= u_i^t(x) (\gamma_\mu)^t \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \bar{d}_i^t(x) \end{aligned} \quad (3.386)$$

d'altronde la matrice γ_5 è simmetrica, dunque

$$\begin{aligned} C : J_\mu(x) &\rightarrow u_i^t(x) \left[\frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma_\mu \right]^t \bar{d}_i^t(x) = \left[\bar{d}_i(x) \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma_\mu u_i(x) \right]^t = \\ &= \bar{d}_i(x) \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma_\mu u_i(x) = \bar{d}_i(x) \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} u_i(x) \end{aligned} \quad (3.387)$$

dove abbiamo usato il fatto che $(AB)^t = B^t A^t$ e che la combinazione $\bar{d}(1 - \gamma_5)\gamma_\mu u$ è una matrice 1×1 e dunque coincide con la sua trasposta. Come si vede, per coniugazione di carica J_μ "rassomiglia" a J_μ^\dagger (e viceversa) nel senso che, se separiamo la parte vettoriale da quella assiale, allora risulta (omettendo per semplicità l'indice di quadrivettore, covariante su tutti i termini come in J_μ)

$$C : J(x) \equiv J_V(x) - J_A(x) \rightarrow J_V^\dagger(x) + J_A^\dagger(x) \quad (3.388)$$

Poiché, per coniugazione di carica, il campo del W è tale per cui

$$C : W(x) \rightarrow W^\dagger(x) \quad (3.389)$$

risulta evidente, di nuovo che anche la simmetria di coniugazione di carica C è violata in modo massimale nelle interazioni deboli.

La combinazione CP , invece, è conservata. Infatti

$$\begin{aligned} CP : J_\mu(x) &\equiv J_{(V)\mu}(x) - J_{(A)\mu}(x) \rightarrow C \rightarrow J_{(V)\mu}^\dagger(x) + J_{(A)\mu}^\dagger(x) \rightarrow \\ &\rightarrow P \rightarrow J_{(V)}^{\dagger\mu}(Px) - J_{(A)}^{\dagger\mu}(Px) \equiv J^{\dagger\mu}(Px) \end{aligned} \quad (3.390)$$

e per il campo del bosone vettore (assumendo $\eta_C = \eta_P = 0$) si ha

$$CP : W_\mu(x) \rightarrow W^{\dagger\mu}(Px) \quad (3.391)$$

per cui, sotto CP , semplicemente i due addendi di cui alla (3.365) si scambiano fra loro (e vanno valutati nel punto $Px \equiv (x^0, -\vec{x})$).

Questo è corretto in assenza di mescolamento²⁰³ dei flavours dei quarks.

Che succede però se, come avviene in Natura, c'è mescolamento ?

In base alle (3.366) e (3.367), risulta che

$$J_\mu(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d'_i(x) \quad (3.392)$$

$$J_\mu^\dagger(x) = \bar{d}'_i \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u_i(x) \quad (3.393)$$

dove $d'_i \equiv V_{ij} d_j$, essendo V , appunto, la matrice unitaria V_{CKM} : dunque

$$J_\mu(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d_j(x) V_{ij} \quad (3.394)$$

$$J_\mu^\dagger(x) = \bar{d}_j(x) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) u_i(x) V_{ij}^* \quad (3.395)$$

Per quanto abbiamo già visto, essendo i coefficienti V_{ij} semplicemente dei numeri e non degli operatori soggetti a CP , per quanto riguarda, per esempio, $J_\mu(x)$, ponendo per comodità di notazione $\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right)$, risulta

$$CP : \bar{u}_i(x) \Gamma_\mu d_j(x) \leftrightarrow \bar{d}_j(Px) \Gamma^\mu u_i(Px) \quad (3.396)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_\mu(x) = \bar{u}_i(x) \Gamma_\mu d_j(x) V_{ij} \rightarrow \bar{d}_j(Px) \Gamma^\mu u_i(Px) V_{ij} \\ J_\mu^\dagger(x) = \bar{d}_j(x) \Gamma_\mu u_i(x) V_{ij}^* \rightarrow \bar{u}_i(Px) \Gamma^\mu d_j(Px) V_{ij}^* \end{cases} \quad (3.397)$$

per cui, chiaramente, si vede che affinché possa esserci invarianza dell'interazione sotto la simmetria combinata CP occorre che la matrice di mixing V sia reale²⁰⁴.

²⁰³Quindi questo è quello che accade nel settore leptonic, dove CP è conservata nel MS .

²⁰⁴Prima di concludere l'argomento, comunque, facciamoci la domanda seguente.

Abbiamo detto che CP è conservata se e solo se la matrice V_{CKM} è reale. Però sappiamo anche che una scelta differente delle fasi dei campi dei quarks conduce ad una nuova matrice V'_{CKM} che, anche in presenza di una V_{CKM} inizialmente reale, può benissimo non risultarlo più, essendo

$$V_{ij} \rightarrow V'_{ij} = V_{ij} e^{i(\phi_i - \eta_j)} \quad (3.398)$$

dove le fasi ϕ_i e η_j riguardano appunto la ridefinizione dei campi u_i e d_j , rispettivamente.

Le due matrici, però, descrivono equivalentemente lo stesso sistema fisico: come la mettiamo, allora, con la conservazione/violazione di CP ?

Il punto è che la simmetria di coniugazione di carica C è definita per ogni campo a meno di un fattore di fase $e^{-i\eta_C}$ a priori arbitrario. Siamo noi a dover fissare la convenzione di fase in modo da definire univocamente l'azione di C stessa. Nel caso trattato sopra, che ha condotto alla conclusione che CP può essere conservata se e solo se V è reale, abbiamo imposto che questa fase fosse la stessa per tutti i quarks, i.e.

$$u_i(x) \rightarrow C^{-1} \bar{u}_i^t(x) e^{i\alpha} \quad \bar{u}_i(x) \rightarrow u_i^t(x) C^{-1} e^{-i\alpha} \quad (3.399)$$

Con due generazioni di quarks, siccome V_{CKM} può essere sempre scelta in modo che sia reale, *non* c'è quindi modo di rendere conto della violazione²⁰⁵ di CP nell'interazione debole, mentre, con tre generazioni, effettivamente questo è possibile perché, come si è visto, nella matrice V_{CKM} resta "libero" un grado di libertà legato alla fase.

Venendo adesso ai sistemi composti di quarks, a differenza del caso dei leptoni, per gli adroni esiste, come abbiamo già in parte visto, una quantità sterminata, un vero e proprio zoo, di particelle "composite".

I primi adroni composti ad essere scoperti, come è noto, erano stati il protone ed il neutrone, senza che allora, ovviamente, si sapesse che erano così fatti. Essi, come sappiamo, sono quasi degeneri in massa e, a parità di condizioni cinematiche, interagiscono forte nello stesso modo: è la simmetria di *spin isotopico*, o *isospin* di cui abbiamo già avuto modo di parlare in varie occasioni.

Con l'avvento del modello a quarks, si capì alla fine che questa simmetria era accidentale ed era dovuta, in buona sostanza, sia alla *quasi* degenerazione in

$$\overline{d_i(x)} \rightarrow \mathcal{C}^{-1} \bar{d}_i^t(x) e^{i\alpha} \qquad \bar{u}_i(x) \rightarrow u_i^t(x) \mathcal{C}^{-1} e^{-i\alpha} \qquad (3.400)$$

Ma se al posto della matrice reale V vogliamo invece usare la matrice complessa V' , definita in termini della V dalla (3.398), la simmetria di coniugazione di carica che è opportuno definire è adesso la seguente

$$u_i(x) \rightarrow \mathcal{C}^{-1} \bar{u}_i^t(x) e^{2i\phi_i} \qquad \bar{u}_i(x) \rightarrow u_i^t(x) \mathcal{C}^{-1} e^{-2i\phi_i} \qquad (3.401)$$

$$d_i(x) \rightarrow \mathcal{C}^{-1} \bar{d}_i^t(x) e^{2i\eta_j} \qquad \bar{d}_i(x) \rightarrow d_i^t(x) \mathcal{C}^{-1} e^{-2i\eta_j} \qquad (3.402)$$

ed in questo caso la simmetria CP torna ad essere esatta perché, per esempio, si ha

$$\begin{aligned} CP: J_\mu(x) &= \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) d_j(x) V'_{ij} \rightarrow \\ &\rightarrow e^{-2i\phi_i} e^{2i\eta_j} \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V'_{ij} = \\ &= e^{-2i\phi_i} e^{2i\eta_j} \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V_{ij} e^{i(\phi_i-\eta_j)} = \\ &= \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V_{ij} e^{-i(\phi_i-\eta_j)} = \\ &= \bar{d}_j(Px) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u_i(Px) V'_{ij*} = J^{\dagger\mu}(Px) \end{aligned} \qquad (3.403)$$

E' però del tutto evidente da quanto precede che quello che non è possibile fare è rendere CP esatta se non è possibile fare in modo che la matrice di mixing V sia reale con un opportuna scelta delle fasi dei campi che descrivono i quarks !

L'affermazione corretta, quindi, è che si può definire CP in modo che essa sia conservata nei processi deboli di CC che coinvolgono i quarks se e solo se si può rendere V_{CKM} reale (nel modo sopradetto).

²⁰⁵La violazione di CP fu osservata per la prima volta nel 1964 da Cronin et al. nel sistema dei mesoni K neutri.

massa dei quarks u e d , come al fatto che, comunque, la loro massa è molto piccola (MeV) rispetto alla scala di energia tipica delle interazioni forti ($m_\pi \approx 100 MeV$), unitamente al fatto che i loro modi di interazione, come del resto fra tutti i quarks, sono identici.

Pur essendo una simmetria accidentale e non esatta, resta il fatto che essa è molto ben rispettata dalle interazioni forti, per cui, tutte le volte che è possibile, si continua a parlarne anche oggi, e la nozione stessa di spin isotopico è stata "ereditata" in modo naturale dal doppietto (u, d), per cui il quark u ha $I = 1/2$, $I_3 = +1/2$ mentre il quark d ha $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$. Per quanto riguarda, poi, gli antiquarks \bar{u} e \bar{d} , analogamente²⁰⁶ risulta che \bar{u} ha $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$, mentre \bar{d} ha $I = 1/2$, $I_3 = +1/2$.

Occorre però, a questo proposito, fare attenzione alle convenzioni di fase.

Esse, infatti, sono definite in modo tale per cui, se $I_\pm \equiv \frac{1}{2}(I_1 \pm iI_2)$ sono gli operatori che fanno crescere/diminuire dell'unità l'autovalore di I_3 , allora risulta²⁰⁷

$$I_-|u\rangle = +|d\rangle; \quad I_+|d\rangle = +|u\rangle \quad (3.407)$$

$$I_+|\bar{u}\rangle = -|\bar{d}\rangle; \quad I_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle \quad (3.408)$$

Una conclusione analoga vale per la simmetria $SU(3)$ di sapore, dell'*eightfold way* di Gell-Mann. In quel caso la simmetria appare "meno" esatta di quella di spin isotopico perchè il quark s è "meno" degenere in massa con i quarks u e d .

Ma torniamo adesso al MS .

Come abbiamo detto, la teoria che descrive le interazioni fra i quarks è la QCD , la quale prevede che le particelle composite da quarks debbano essere *incolori* (cioè in uno stato di singoletto di $SU(3)_C$) e quindi possano essere fatte solamente o da una coppia ($q\bar{q}$) (i mesoni), oppure da un tripletto di quarks/antiquarks (i barioni/antibarioni).

I mesoni, evidentemente, in quanto composti da due entità di spin $1/2$, hanno spin intero²⁰⁸, tipicamente pari a $J = 0$ (scalari o pseudoscalari) oppure $J = 1$

²⁰⁶La regola è che il segno di I_3 è quello della carica elettrica.

²⁰⁷E' per questa convenzione di fase che, per esempio, partendo dallo stato $|u\bar{d}\rangle$ il quale individua il mesone π^+ , la simmetria di spin isotopico garantisce l'esistenza dei mesoni π^0 e π^- , così fatti in termini di quarks e antiquarks

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad (3.404)$$

$$|\pi^0\rangle \equiv \frac{I_-}{\sqrt{2}}|\pi^+\rangle = \frac{I_-}{\sqrt{2}}|u\bar{d}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \quad (3.405)$$

$$|\pi^-\rangle \equiv \frac{I_-}{\sqrt{2}}|\pi^0\rangle = \frac{I_-}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) = \frac{1}{2}(-|d\bar{u}\rangle - |d\bar{u}\rangle) = -|d\bar{u}\rangle \quad (3.406)$$

²⁰⁸Il fatto che i fermioni costituenti il mesone siano due implica solo che lo spin di quest'ultimo debba essere intero. Quanto al suo valore, per via del contributo del momento orbitale del sistema dei due quarks, esso può essere, a priori, qualsiasi, anche se momenti orbitali alti sono sfavoriti per ragioni energetiche.

(vettoriali o pseudovettoriali).

Vediamo di seguito qualche esempio di mesoni²⁰⁹ pseudoscalari, che in parte abbiamo già avuto modo di conoscere, e che adesso siamo in grado di inquadrare correttamente nel Modello Standard.

- i mesoni π ($m \approx 140 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1$)

$$\begin{aligned} \pi^+(u\bar{d}); \quad \pi^-(-d\bar{u}); \quad \pi^0\left(\frac{-u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}\right) \\ \tau^\pm = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8} s; \quad \tau^0 = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17} s \end{aligned}$$

- i mesoni K ($m \approx 495 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1/2$)

$$\begin{aligned} K^+(u\bar{s}); \quad K^-(-s\bar{u}); \quad K^0(d\bar{s}); \quad \bar{K}^0(s\bar{d}) \\ \tau^\pm = (1.2386 \pm 0.0024) \times 10^{-8} s; \\ \tau_S^0 = (0.8935 \pm 0.0008) \times 10^{-10} s; \quad \tau_L^0 = (5.17 \pm 0.04) \times 10^{-8} s; \end{aligned}$$

- il mesone η ($m \approx 548 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 0, C = 1$)

$$\begin{aligned} \eta\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(-2s\bar{s} + d\bar{d} + u\bar{u})\right); \\ \Gamma = (1.3 \pm 0.07) \text{ keV} \end{aligned}$$

- il mesone η' ($m \approx 957 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 0, C = 1$)

$$\begin{aligned} \eta'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(s\bar{s} + d\bar{d} + u\bar{u})\right); \\ \Gamma = (205 \pm 15) \text{ keV} \end{aligned}$$

- i mesoni D ($m \approx 1870 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1/2$)

$$\begin{aligned} D^+(c\bar{d}); \quad D^-(\bar{c}d); \quad D^0(-c\bar{u}); \quad \bar{D}^0(\bar{c}u) \\ \tau^\pm = (1.051 \pm 0.013) \times 10^{-12} s; \quad \tau^0 = (0.4126 \pm 0.0028) \times 10^{-12} s \end{aligned}$$

$$D_s^\pm (: d \rightarrow s; m \approx 1970 \text{ MeV}, \tau_s^\pm = 0.496 \pm 0.01 \text{ ps})$$

²⁰⁹Usiamo qui la convenzione di fase di Grinstein e Lebed, per cui la rappresentazione $\mathbf{3}$ di $SU(3)$ è fatta dalla base (u, d, s) , mentre la $\bar{\mathbf{3}}$ è fatta da $(\bar{d}, -\bar{u}, \bar{s})$, in modo che le fasi associate agli operatori I_\pm siano le medesime nelle due rappresentazioni.

B. Grinstein, R.F. Lebed: *SU(3) decomposition of two-body B decay amplitudes* Phys. Rev. 53D, 6344 (1996)

- i mesoni B ($m \approx 5280 \text{ MeV}$; $J = 0^-, I = 1/2$)

$$B^+(\bar{b}u); \quad B^-(-\bar{u}b); \quad B^0(\bar{b}d); \quad \bar{B}^0(\bar{d}b)$$

$$\tau^\pm = (1.653 \pm 0.028) \times 10^{-12} s; \quad \tau^0 = (1.548 \pm 0.032) \times 10^{-12} s$$

$$B_c^\pm (: u \rightarrow c; m \approx 6280 \text{ MeV}; \tau_c^\pm = 0.46 \pm 0.17 \text{ ps})$$

$$B_s^0 (: d \rightarrow s; m \approx 5370 \text{ MeV}; \tau_s^0 = 1.49 \pm 0.06 \text{ ps})$$

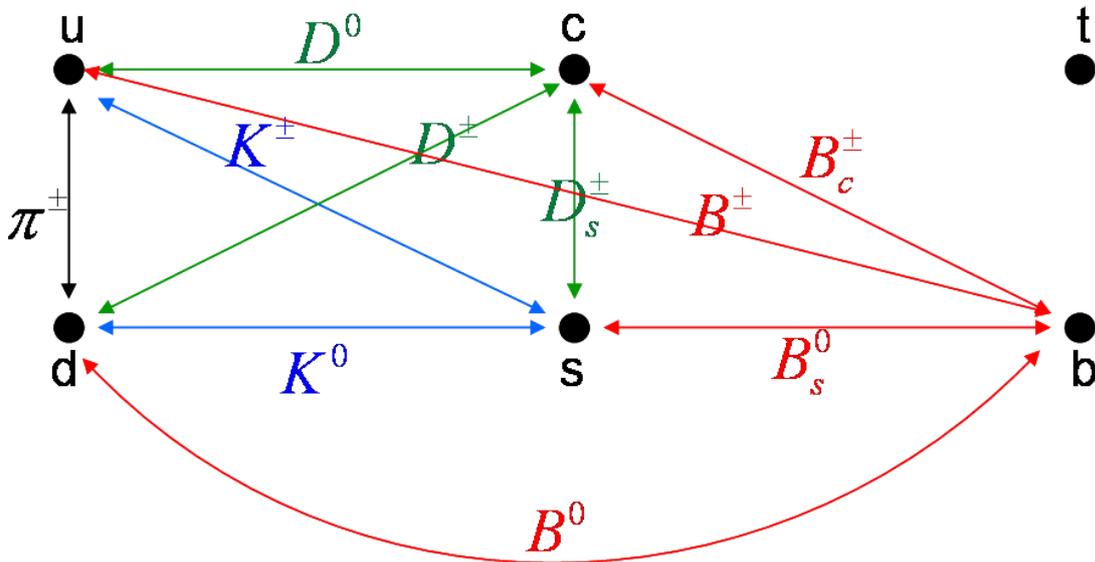


Figure 36: *I mesoni*

Ma non tutti i mesoni, come abbiamo detto prima, hanno necessariamente spin $J = 0$. Per esempio, tra i mesoni pseudovettoriali ($J = 1$) abbiamo i mesoni ρ ($m \approx 770 \text{ MeV}$), simili ai pioni; i mesoni K^* ($m \approx 890 \text{ MeV}$), etc..., fino alla J/ψ , che è un sistema $(c\bar{c})$ con massa circa 3100 MeV e la Υ che è invece un sistema $(b\bar{b})$ con massa circa 9460 MeV : lo zoo dei mesoni è veramente immenso !

La differenza più importante fra questi mesoni e quelli pseudoscalari riportati sopra è che i mesoni pseudovettoriali, per la loro più alta massa, possono decadere, in genere, in mesoni di massa inferiore attraverso l'interazione forte, per cui hanno vita media incomparabilmente più breve dei primi che, essendo i più leggeri della loro serie, non possono decadere in modo forte ma solo in modo debole o, nel migliore dei casi, secondo l'interazione elettromagnetica (come nel caso del π^0).

Per esempio, la $\rho(770)$ decade pressochè sempre in due pioni ed ha una larghezza²¹⁰ $\Gamma \approx 150.2 \pm 0.8 MeV$, mentre il $K^*(890)$ decade pressochè sempre in $K\pi$, con una larghezza $\Gamma \approx 50 MeV$ leggermente inferiore a causa del ridotto spazio delle fasi. Può meravigliare, dunque, quanto accade nel caso della $J/\psi(3100)$, che, come abbiamo detto, è un mesone pseudovettoriale costituito dalla coppia $(c\bar{c})$. Esso ha infatti una larghezza di soli $87 keV$, simile a quella della $\Upsilon(9460)$, sistema $(b\bar{b})$, avente larghezza $52 keV$, estremamente più piccola di quella della ϕ , sistema $(s\bar{s})$, che ha massa solo di $1020 MeV$ ma una larghezza pari a $\Gamma \approx 4 MeV$ ovvero $\tau \approx 1.6 \times 10^{-22} s$.

La ragione è che, mentre la $\phi(1020)$ può decadere forte in due mesoni $K^+ K^-$ oppure $(K^0 \bar{K}^0)$, via l'emissione di un gluone da parte di uno dei due quarks costituenti e la sua successiva materializzazione in una coppia $(u\bar{u})$ oppure $(d\bar{d})$, come mostrato nel grafico di Fig.37,

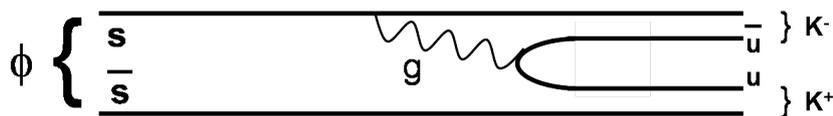


Figure 37: *Decadimento (forte) della ϕ*

nel caso della J/ψ e della Υ , i decadimenti analoghi, i.e.

$$J/\psi \rightarrow D^+ D^-, \quad J/\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \quad \text{e} \quad \Upsilon \rightarrow B^+ B^-, \quad \Upsilon \rightarrow B^0 \bar{B}^0$$

non possono avere luogo per pure ragioni di conservazione dell'energia, essendo la massa della J/ψ circa $3100 MeV$ e la massa dei mesoni D circa $1870 MeV$, come pure la massa della Υ circa $9460 MeV$ e la massa dei B circa $5280 MeV$.

Entrambi questi mesoni decadono quindi, necessariamente, via annichilazione quark/antiquark in gluone (o fotone) e, in questo caso, l'ampiezza del decadimento è soppressa per la regola di Zweig²¹¹, diventando confrontabile con quella elettromagnetica, come dimostrato, per esempio, dal fatto che la somma dei

²¹⁰Ricordiamo il legame fra la larghezza Γ di una particella instabile e la sua vita media τ :

$$\Gamma \tau = \hbar$$

Quindi, essendo $\hbar = 6.58 \times 10^{-22} MeV \cdot s$, abbiamo, nel caso dei mesoni ρ , una vita media $\tau \approx 4 \times 10^{-24} s$.

²¹¹Cfr. D.H. Perkins: *Introduction to High Energy Physics*

Il fatto che la J/ψ sia prodotta copiosamente in reazioni di annichilazione e^+e^- è dovuto al fatto che essa si accoppia elettromagneticamente con il fotone e dunque è autostato della coniugazione di carica per l'autovalore $C = -1$.

Nel caso del suo decadimento forte, poiché il sistema $c\bar{c}$ che costituisce la J/ψ è *sconnesso* dal sistema adronico finale (a differenza, per esempio, di quanto accade nel decadimento delle ϕ , dove i due quarks s ed \bar{s} sono ancora presenti nello stato finale), il sistema gluonico che media il decadimento deve essere in un singoletto di colore e quindi costituito da almeno una

BR dei due decadimenti elettromagnetici puramente leptonici²¹² della J/ψ , cioè $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $J/\psi \rightarrow e^+ e^-$, ammonta a ben il 12%.

Venendo adesso ai barioni, essi essendo costituiti da un sistema di tre quarks e dunque da tre particelle di spin semintero, possono avere solo spin semidispari, tipicamente $S = 1/2, 3/2$ (pur essendo possibili, grazie al contributo orbitale, spin semidispari anche più elevati).

Usando soltanto i quarks della prima generazione possiamo descrivere il protone ed il neutrone (nell'ottetto barionico ...)

$$\begin{aligned} p(uud) & \quad m = 938.27 \text{ MeV} \\ n(udd) & \quad m = 939.56 \text{ MeV} \end{aligned}$$

insieme alle risonanze (nel decupletto barionico ...)

$$\Delta^{++}(uuu); \quad \Delta^+(uud); \quad \Delta^0(udd); \quad \Delta^-(ddd)$$

con massa di circa 1230 MeV e spin $J = 3/2$.

Stati eccitati di questi barioni, sono poi gli appartenenti alle famiglie delle Δ con

$$\begin{aligned} J = 5/2 & \quad m \approx 1905 \text{ MeV} \\ J = 7/2 & \quad m \approx 1950 \text{ MeV} \\ J = 11/2 & \quad m \approx 2420 \text{ MeV} \end{aligned}$$

tutti con spin isotopico $I = 3/2$.

Trattandosi, nel caso delle Δ , di barioni costituiti da quarks della prima generazione, cioè da quarks u e d , esse decadono secondo l'interazione forte, attraverso l'emissione di un gluone che si materializza come coppia q, \bar{q} di prima generazione, la quale, combinandosi con gli stessi quarks della Δ , dà luogo ad un sistema nucleone+pione, come mostrato, nel caso della Δ^{++} , dalla Fig.38.

Dunque, per il fatto che le Δ decadono in modo forte, dobbiamo aspettarci che esse abbiano una vita media molto corta. Infatti, per esempio, nel caso delle Δ con $J = 3/2$, la larghezza misurata è $\Gamma \approx 120 \text{ MeV}$.

coppia di gluoni.

Il fatto che debba essere anche C -dispari implica che questo numero sia dispari e dunque il processo richiede, al minimo, l'emissione (e l'assorbimento) di tre gluoni virtuali. Questo significa che il decadimento avviene solo al terzo ordine della QCD -perturbativa e dunque $\propto \alpha_s^3$ e non $\propto \alpha_s$ che, a queste energie, è dell'ordine di 0.2.

Questo fatto (regola di Zweig) spiega appunto la relativa lunghezza della vita media della J/ψ ($\Gamma \approx 87 \text{ keV}$) che, al momento della scoperta di questo mesone, ne complicò non poco l'interpretazione.

²¹²Chiaramente, il decadimento $J/\psi \rightarrow \tau^+ \tau^-$, di nuovo, è proibito dalla conservazione dell'energia, essendo la massa del leptone τ pari a 1777 MeV , superiore quindi alla metà della massa della J/ψ che è pari a $3096.87 \pm 0.04 \text{ MeV}$.

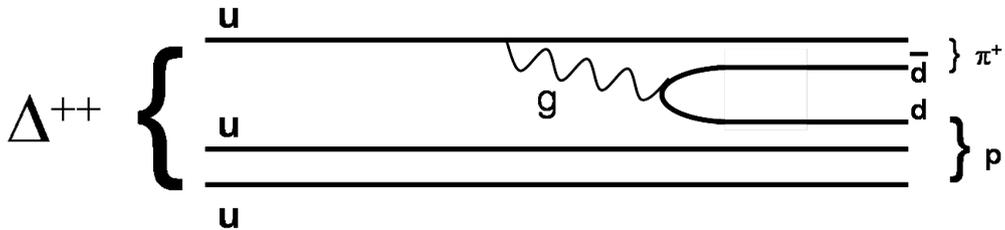


Figure 38: *Decadimento (forte) della Δ^{++}*

Usando poi nel tripletto dei quarks che formano il barione anche il quark piú leggero della seconda generazione, cioé il quark s , abbiamo gli iperoni, ovvero

- la Λ : ($m \approx 1115 \text{ MeV}$; $S = -1, I = 0, J = 1/2$)

Essa è una specie di neutrone, in cui però un quark d è sostituito, appunto, da un quark s ..., i.e. $\Lambda = (uds)$. Essa decade prevalentemente in pione + nucleone, con vita media di circa $2.6 \times 10^{-10} \text{ s}$, quindi, per quanto già detto, incompatibile con le interazioni forti. Il decadimento in questione, infatti, può procedere solo via interazione debole di CC , poiché viola la conservazione della stranezza.

Il grafico relativo al decadimento in $p\pi^-$ è mostrato in Fig.39.

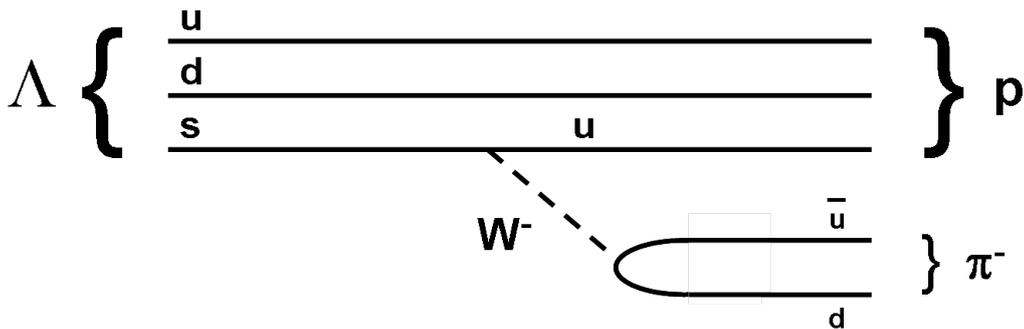


Figure 39: *Il decadimento della Λ*

- la famiglia delle Σ : ($m \approx 1190 \text{ MeV}$; $S = -1, I = 1, J = 1/2$)

$$\Sigma^+(uus); \quad \Sigma^0(uds); \quad \Sigma^-(dds)$$

Le Sigma cariche²¹³ Σ^\pm decadono anch'esse, prevalentemente, in pioni + nucleone, mentre la Sigma neutra Σ^0 decade elettromagneticamente, pressoché sempre, in Λ^0 + fotone. Il primo, presentando una variazione di una unità di stranezza ($|\Delta S| = 1$), è necessariamente un decadimento debole, il quale procede, come nel caso della Λ , attraverso l'emissione virtuale di un W . Da questo, segue che le Σ^\pm hanno vita media piuttosto lunga²¹⁴, intorno ai 10^{-10} s . Il decadimento della Σ^0 , invece, procede attraverso l'emissione di un fotone da parte di uno dei tre quarks e, come nel caso del π^0 , essendo il decadimento dovuto alla forza elettromagnetica, ne consegue una vita media della Σ^0 ben più breve di quella delle Sigma cariche, di circa $(7.4 \pm 0.7) \times 10^{-20} \text{ s}$.

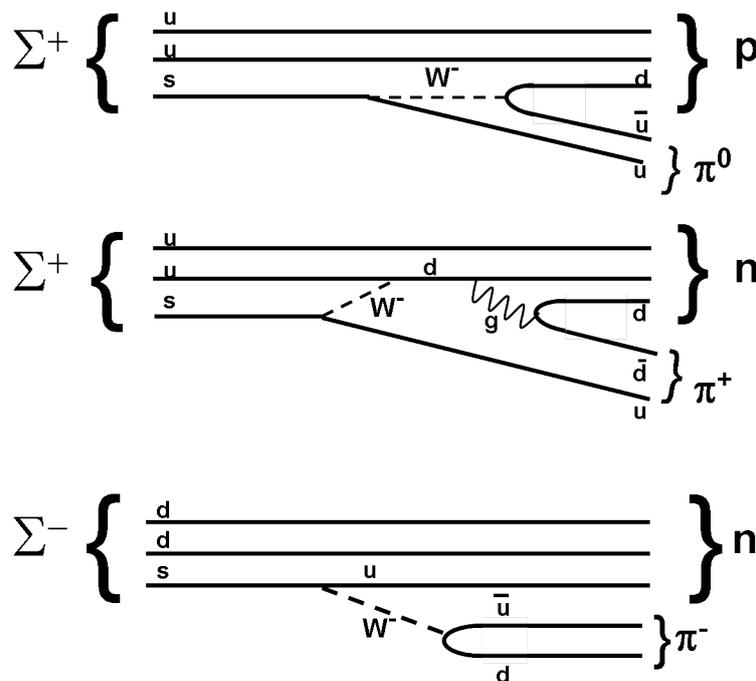


Figure 40: I modi di decadimento delle Σ^\pm

²¹³Si ricordi che Σ^+ e Σ^- non sono antiparticelle una dell'altra !

²¹⁴La Σ^+ decade pressoché unicamente in $p\pi^0$ e $n\pi^+$ ed ha una vita media pari a $\tau = (0.8018 \pm 0.0026) \times 10^{-10} \text{ s}$.

Invece la Σ^- , che ha come quasi unico canale di decadimento quello in $n\pi^-$, ha una vita media quasi doppia, pari a $\tau = (1.479 \pm 0.011) \times 10^{-10} \text{ s}$.

- la famiglia delle Ξ : ($m \approx 1320 \text{ MeV}$; $S = -2, I = 1/2, J = 1/2$)

$$\Xi^0(uss); \quad \Xi^-(dss)$$

Le Ξ hanno stranezza $S = -2$ (le loro antiparticelle, ovviamente, hanno quindi stranezza $S = +2 \dots$) e decadono prevalentemente in $\Lambda^0 +$ pioni, secondo lo schema di decadimento riportato in Fig.41. Di nuovo, poiché c'è variazione di

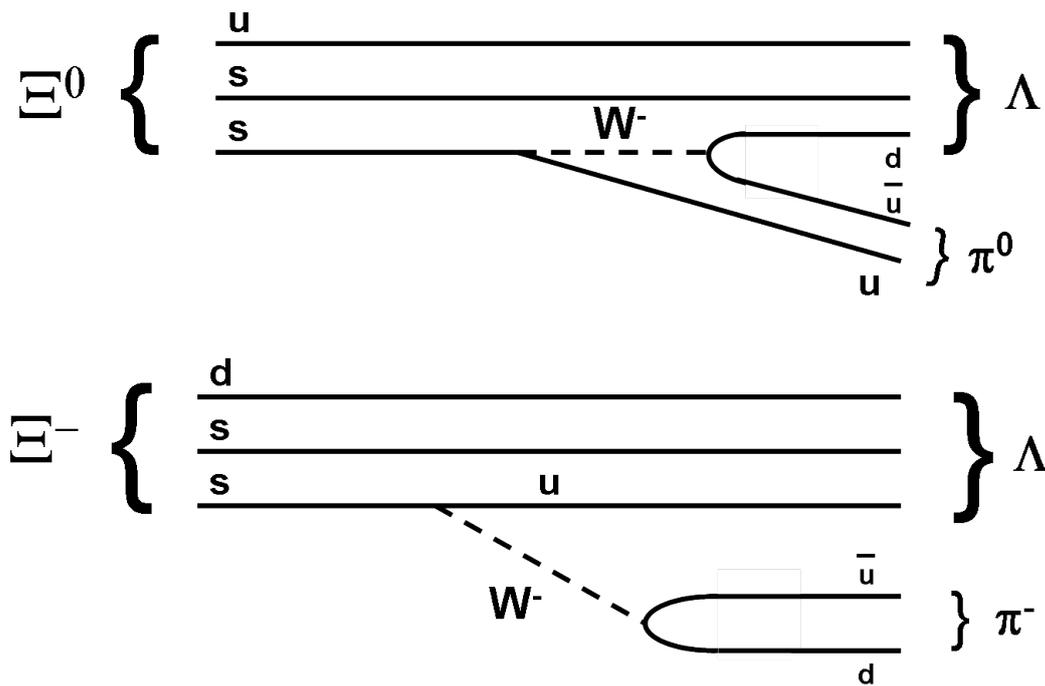


Figure 41: *I modi di decadimento delle Ξ*

stranezza di una unità, il decadimento è debole e la loro vita media è infatti quella tipica dei decadimenti deboli, i.e. di circa $2. \times 10^{-10} \text{ s}$. Poiché lo stato finale contiene, a sua volta, la Λ^0 che è instabile, il decadimento della Ξ dà luogo ad una *cascata* fatta dal susseguirsi di due decadimenti in successione, con vite medie simili.

Questo fatto è all'origine del nome iniziale della Ξ , che era, appunto *Cascade* !

Gli iperoni considerati fin'ora appartengono tutti all'ottetto barionico a cui appartengono anche neutrone e protone.

Vogliamo infine terminare ricordando le proprietà di un altro iperone che contribuì non poco al successo del modello a quark, appartenente al decupletto e quindi con spin $J = 3/2$, cioè

- la Ω^- : ($m \approx 1672 \text{ MeV}$; $S = -3, I = 0, J = 3/2$)

Essa è uno stato fatto dai soli tre quarks s e decade via interazione debole prevalentemente o in $\Lambda^0 K^-$, oppure in $\Xi +$ pione, con vita media di circa $0.8 \times 10^{-10} \text{ s}$. Lo schema dei suoi decadimenti più frequenti è rappresentato in Fig.42.

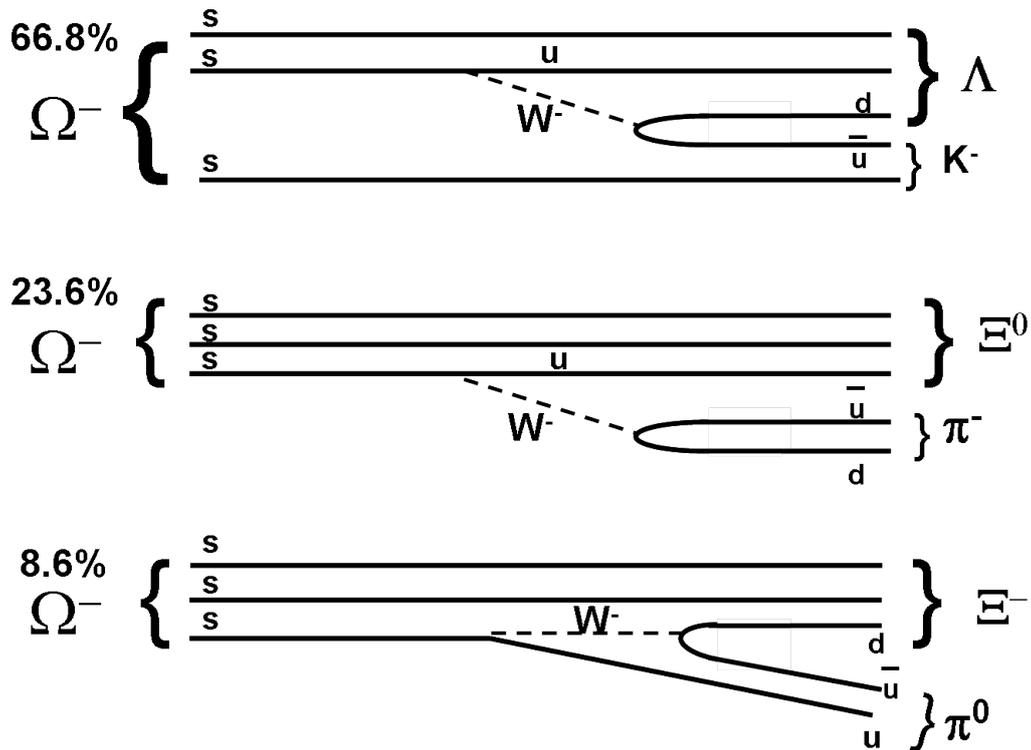


Figure 42: *Decadimenti più frequenti della Ω^-*

La storia dei barioni poi, ovviamente, continua se al posto di un quark u si mette un quark c oppure se al posto di un d si mette un b , etc ...

Comunque, capito il gioco, non merita adesso di entrare oltre nel suo dettaglio.

3.9 Cronologia della scoperta delle particelle elementari

- 1897: elettrone (J.J. Thomson)
- 1914: protone (E. Rutherford)
- 1905-1923: fotone (A. Einstein, Compton)
- 1930-1953: neutrino (W. Pauli, C.L. Cowan e F. Reines)
- 1932: neutrone (J. Chadwick)
- 1932: positrone (C. Anderson)
- 1934-1947: pione (H. Yukawa, C.F. Powell, C. Lattes, G. Occhialini)
- 1937: muone (C.D. Anderson, S. Neddermeyer)
- 1947: kaone K^0 (G.D. Rochester, C.C. Butler)
- 1949: kaone K^+ (C.F. Powell)
- 1950: barione Λ (C.D. Anderson)
- 1955: antiprotone (O. Chamberlain, E. Segre')
- 1956: antineutrone (O. Piccioni)
- 1961: eightfold way (M. Gell-Mann)
- 1963: angolo di Cabibbo
- 1964: barione Ω^- (V.E. Barnes, W.B. Fowler et al.)
- 1970: GIM mechanism
- 1974: J/ψ i.e. quark c (C.C. Ting, B. Richter)
- 1975: leptone τ (M. Perl et al.)
- 1977: Υ i.e. quark b (L. Lederman)
- 1983: bosoni W^\pm, Z^0 (UA1 e UA2 al CERN)
- 1994: quark top (CDF, D0, Fermilab)
- 2012: bosone di Higgs (CERN)
- 2016: onde gravitazionali (Ligo-Virgo)

4 Aspetti di cinematica e dinamica relativistiche

4.1 Processi d'urto

Consideriamo un processo d'urto in cui lo stato iniziale sia rappresentato da due particelle A e B , di massa, rispettivamente, m_A ed m_B .

Per fissare le idee, assumeremo che la particella A sia in moto con impulso spaziale $\vec{p} = (0, 0, p)$ e quindi energia $E = \sqrt{m_A^2 + p^2}$, mentre la particella B sia ferma nel sistema del Laboratorio.

Se A e B sono le sole due particelle presenti anche nello stato finale, allora si parla di processo o urto *elastico*.

Nel caso, invece, in cui lo stato finale sia fatto ancora da *due* particelle ma diverse da quelle dello stato iniziale, che chiameremo C e D , di masse M_C ed M_D , allora si parla di *urto quasi-elastico* perché lo stato finale continua ad essere fatto comunque da due particelle; altrimenti, se il numero di particelle nello stato finale è diverso da due, si parla propriamente di urto *anelastico*.

Essendo il sistema in ogni caso isolato, il quadrimpulso complessivo *si conserva* e questo fatto impone comunque precisi vincoli cinematici²¹⁵.

²¹⁵Si osservi ancora una volta che in un sistema isolato la conservazione del quadrimpulso *implica* che l'energia relativistica si conservi sempre e comunque, quindi sia per l'urto elastico che per quello quasi-elastico o anelastico. Questo accade perché, come si è visto, l'energia relativistica contiene anche l'energia interna del sistema, di qualunque natura essa sia.

4.1.1 L'urto quasi elastico

Iniziamo considerando il caso quasi-elastico (il caso elastico può essere sempre visto come un caso particolare di quello quasi-elastico): assumiamo dunque che

$$p_A + p_B = P_C + P_D \quad (4.409)$$

la quale, nel sistema del centro di massa, diventa, evidentemente

$$(p_A + p_B)_{CM} = (\sqrt{s}, 0, 0, 0) = (P_C + P_D)_{CM} \quad (4.410)$$

dove s è il quadrato della massa (quantità invariante) del sistema, i.e.

$$s \equiv (P_C + P_D)^\mu (P_C + P_D)_\mu = (p_A + p_B)^\mu (p_A + p_B)_\mu \quad (4.411)$$

$$\Rightarrow s = m_A^2 + m_B^2 + 2(p_A)^\mu (p_B)_\mu = m_A^2 + m_B^2 + 2E m_B \quad (4.412)$$

e l'ultima relazione è ottenuta nell'ipotesi, come si è detto, che nel sistema del laboratorio B sia inizialmente ferma mentre A abbia impulso \vec{p} ed energia $E = \sqrt{m_A^2 + p^2}$. Senza perdita di generalità, nel riferimento del CM potremo porre, per quanto riguarda le due particelle nello stato iniziale

$$(p_A)_{CM} = (E_A, 0, 0, a); \quad E_A \equiv \sqrt{m_A^2 + a^2} \quad (4.413)$$

$$(p_B)_{CM} = (E_B, 0, 0, -a); \quad E_B \equiv \sqrt{m_B^2 + a^2} \quad (4.414)$$

dove, evidentemente, risulta

$$\sqrt{s} \equiv E_A + E_B = \sqrt{m_A^2 + a^2} + \sqrt{m_B^2 + a^2} \quad (4.415)$$

ovvero

$$m_A^2 + a^2 + m_B^2 + a^2 + 2\sqrt{m_A^2 + a^2}\sqrt{m_B^2 + a^2} = s$$

e dunque

$$2\sqrt{m_A^2 + a^2}\sqrt{m_B^2 + a^2} = s - m_A^2 - m_B^2 - 2a^2$$

da cui, elevando ancora al quadrato, otteniamo infine

$$\begin{aligned} & 4(m_A^2 + a^2)(m_B^2 + a^2) = \\ & = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4a^2(s - m_A^2 - m_B^2) + 4a^4 \\ & \text{i.e.} \\ & 4m_A^2 m_B^2 + 4a^2(m_A^2 + m_B^2) + 4a^4 = \\ & = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 + 4a^2(m_A^2 + m_B^2) - 4a^2 s + 4a^4 \end{aligned} \quad (4.416)$$

Semplificando opportunamente nella (4.416), si ottiene infine il valore a del modulo dell'impulso delle due particelle A e B presenti inizialmente nel sistema del

CM , come funzione solo del quadrato della massa invariante s del sistema complessivo, nonché delle loro masse. Risulta infatti

$$4s a^2 = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2 \quad (4.417)$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}}{2\sqrt{s}} \quad (4.418)$$

Sostituendo²¹⁶ adesso nella (4.413) e (4.414), per le energie delle due particelle nel CM si ottengono i valori²¹⁷ seguenti

$$\sqrt{m_A^2 + a^2} = E_A = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} \quad (4.421)$$

$$\sqrt{m_B^2 + a^2} = E_B = \frac{s + m_B^2 - m_A^2}{2\sqrt{s}} \quad (4.422)$$

Riguardo alle particelle C e D che emergono dal processo di scattering, sempre nel sistema del CM potremo scrivere, in termini dell'angolo di scattering Θ (definito, per esempio, fra le direzioni di volo delle particelle A e C) e dell'angolo azimutale ϕ , che deve risultare

$$(P_C)_{CM} = (E_C, b \sin\Theta \cos\phi, b \sin\Theta \sin\phi, b \cos\Theta); \quad E_C \equiv \sqrt{m_C^2 + b^2} \quad (4.423)$$

$$(P_D)_{CM} = (E_D, -b \sin\Theta \cos\phi, -b \sin\Theta \sin\phi, -b \cos\Theta); \quad E_D \equiv \sqrt{m_D^2 + b^2} \quad (4.424)$$

dove, evidentemente, a causa della differenza nei valori delle masse presenti nello stato iniziale e finale, sarà in generale $b \neq a$; ma dovrà comunque essere

$$\sqrt{s} \equiv E_C + E_D = \sqrt{m_C^2 + b^2} + \sqrt{m_D^2 + b^2}$$

²¹⁶Si osservi che l'argomento della radice quadrata nella (4.418) è sempre certamente non negativo, infatti se fosse negativo allora giungeremmo all'assurdo per cui

$$(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2 < 0 \Rightarrow |s - m_A^2 - m_B^2| < 2m_A m_B \Rightarrow s - m_A^2 - m_B^2 < 2m_A m_B \Rightarrow \\ \Rightarrow s < m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \Rightarrow s \equiv (E_A + E_B)^2 < (m_A + m_B)^2 !$$

²¹⁷In termini delle variabili nel sistema del Laboratorio, abbiamo poi, chiaramente, che se la particella A è quella in moto con energia E mentre B è ferma, risulta

$$\sqrt{m_A^2 + a^2} = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} = \frac{E m_B + m_A^2}{\sqrt{s}} \quad (4.419)$$

$$\sqrt{m_B^2 + a^2} = \frac{s + m_B^2 - m_A^2}{2\sqrt{s}} = \frac{E m_B + m_B^2}{\sqrt{s}} \quad (4.420)$$

per cui, ripetendo i calcoli fatti sopra riguardo alle particelle A e B , segue che

$$b = \frac{\sqrt{(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2}}{2\sqrt{s}} \quad (4.425)$$

Occorre però, adesso, mettere subito in evidenza una novità rispetto al caso trattato in precedenza. Il modulo b dell'impulso delle due particelle C e D prodotte dalla reazione ed espresso dalla equazione (4.425), dovrà comunque essere una quantità reale (positiva) e questo può accadere se e solo se l'argomento della radice quadrata è non negativo, ovvero se accade che

$$(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2 \geq 0 \quad (4.426)$$

e questo succede se e solo se²¹⁸

$$\begin{aligned} (s - m_C^2 - m_D^2)^2 &\geq 4m_C^2 m_D^2 \Rightarrow s - m_C^2 - m_D^2 \geq 2m_C m_D \\ s &\geq (m_C + m_D)^2 \end{aligned} \quad (4.427)$$

Evidentemente, come è ovvio che sia, questa condizione mentre è sempre soddisfatta nel caso di urto elastico²¹⁹, essa può non essere soddisfatta nel caso quasi-elastico, se le masse finali sono più grandi di quelle iniziali e l'energia della particella incidente non è sufficientemente elevata.

Se questo accade, si dice che C e D non possono essere prodotte in quanto ci troviamo sotto la loro *soglia di produzione*.

A soglia, cioè quando $\sqrt{s} = m_C + m_D$, nel sistema del CM , le due particelle C e D hanno, evidentemente, impulso spaziale nullo, ovvero sono entrambe ferme: in ogni altro riferimento quindi, come in quello del Laboratorio, esse si muovono con la stessa velocità, che è poi quella del CM in quel sistema di riferimento !

Sopra soglia di produzione²²⁰ abbiamo invece concluso che, nel sistema del CM , risulta

$$b = \frac{\sqrt{(s - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2}}{2\sqrt{s}} \quad (4.428)$$

e conseguentemente, quanto alle energie (sempre nel sistema del CM), si ha

$$E_C = \frac{s + m_C^2 - m_D^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_D = \frac{s + m_D^2 - m_C^2}{2\sqrt{s}} \quad (4.429)$$

²¹⁸Si ricordi che deve essere necessariamente che $s - m_C^2 - m_D^2 \geq 0$...

²¹⁹Abbiamo già osservato, infatti, che valutando s sullo stato iniziale, si ha comunque che $\sqrt{s} = E_A + E_B \geq m_A + m_B$.

²²⁰Dovrebbe essere ormai chiaro da quanto precede che, riguardo agli aspetti cinematici di cui ci stiamo occupando, le conclusioni che adesso trarremo quanto alle particelle C e D *coincidono* con quelle che potremmo trarre se esse, invece che originarsi da un processo d'urto fra le due particelle A e B per un quadrimpulso complessivo (nel sistema del Laboratorio) P^μ , si originassero da un decadimento di una singola particella Z avente, nel riferimento del laboratorio, lo stesso quadrimpulso P^μ del sistema fatto dalle due particelle A e B e dunque avente massa $M_Z = \sqrt{P^\mu P_\mu} \equiv \sqrt{s}$.

Per conoscere ora la forma dei quadrimpulsi delle particelle C e D nel sistema del Laboratorio, occorre applicare alle (4.423) e (4.424) il boost di Lorentz che porta dal sistema del CM a quello del Laboratorio.

Se ci occupiamo, quindi, per esempio, della particella C (per la particella D il risultato è lo stesso che nel caso di C , solo che occorre cambiare E_C con E_D e mandare Θ in $\Theta + \pi$) e vogliamo determinare il suo quadrimpulso nel sistema del Laboratorio, indicando con $p_{\perp} \equiv b \sin\Theta$ e $p_{\parallel} \equiv b \cos\Theta$ l'impulso trasverso e longitudinale di C nel CM , rispetto alla direzione della velocità relativa $\vec{\beta}$ del sistema del CM vista in quello del Laboratorio, otteniamo allora

$$E'_{(lab)} = \gamma E_C + \beta\gamma b \cos\Theta \quad (4.430)$$

$$p'_{\perp(lab)} = b \sin\Theta \quad (4.431)$$

$$p'_{\parallel(lab)} = \beta\gamma E_C + \gamma b \cos\Theta \quad (4.432)$$

dove β e γ si riferiscono al boost in questione, definito univocamente dalle condizioni iniziali, ovvero dal quadrimpulso complessivo del sistema considerato visto nel sistema del Laboratorio, che per le ipotesi fatte sullo stato di moto di A e B , come abbiamo già osservato, vale appunto

$$P^{\mu} = p_A^{\mu} + p_B^{\mu} = (E, \vec{p}) + (m_B, \vec{0}) = (E + m_B, \vec{p})$$

per cui ne risulta che

$$\gamma = \frac{P^0}{\sqrt{s}} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}}; \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{P^0} = \frac{\vec{p}}{E + m_B}; \quad \gamma\beta = \frac{p}{\sqrt{s}} \quad (4.433)$$

Evidentemente, dalle (4.431) e (4.432), risulta immediato che, in funzione di Θ , il luogo dei punti descritti da $\vec{p}'_{(lab)}$ è un'ellisse²²¹ di semiasse minore b nel piano trasverso e semiasse maggiore $b\gamma \equiv b \frac{E+m_B}{\sqrt{s}}$ lungo z , traslata in z della quantità²²² $A \equiv \beta\gamma E_C = \frac{p}{\sqrt{s}} E_C = \frac{p}{\sqrt{s}} \sqrt{m_C^2 + b^2} = p \frac{s+m_C^2-m_D^2}{2s}$ (ellisse di

²²¹L. Landau, E. Lifchitz: *The Classical Theory of fields*, Pergamon Press, 1962, pag. 42
Usando le coordinate p'_{\perp} e p'_{\parallel} , la figura è, in realtà, una semiellisse poiché, essendo $0 \leq \Theta \leq \pi$, risulta, come la sua stessa definizione impone, che $p'_{\perp} \geq 0$.

In tre dimensioni, detto z l'asse lungo cui è diretta la velocità $\vec{\beta}$, la figura è un'ellissoide di rotazione intorno a z stesso, con $p'_x = p'_{\perp} \cos\phi$ e $p'_y = p'_{\perp} \sin\phi$, essendo ϕ l'angolo azimutale.

Nella figura 43 abbiamo omesso, per semplicità, di disegnare l'asse p'_x e posto $\phi = \pi/2$.

²²²Nella meccanica newtoniana, il luogo dei punti descritti da $\vec{p}'_{(lab)}$ è un semicerchio, essendo, in questo caso $\gamma = 1$ ed $A = \beta m$, visto che la legge di trasformazione dell'impulso è tale per cui la sola componente che cambia è

$$p'_{\parallel} = b \cos\Theta + \beta m$$

Questa è anche l'espressione a cui tende la (4.432) nel limite NR, dato che essa può essere

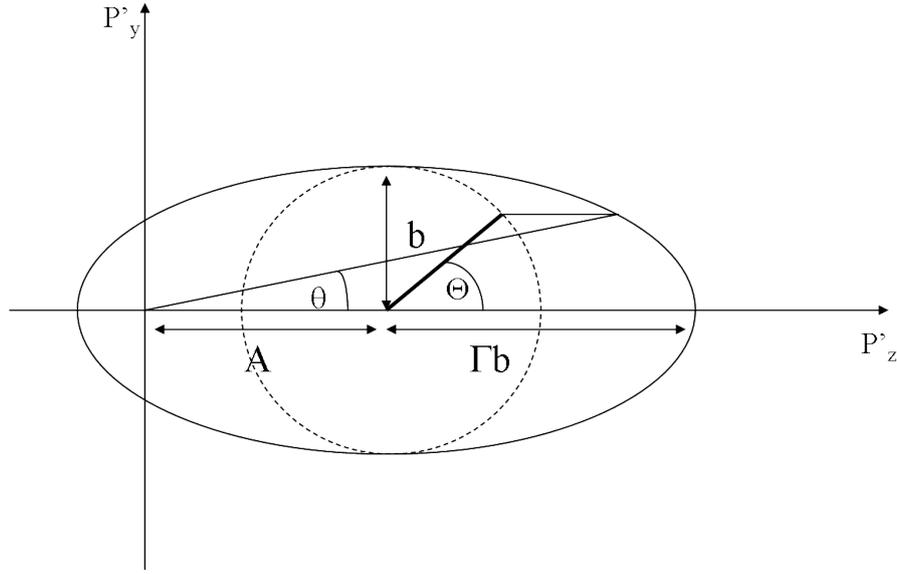


Figure 43: *Impulso nel Laboratorio e nel CM quando $v > v_{rel}$*

Blaton²²³).

Iniziamo considerando la situazione corrispondente alla fig.43, per la quale abbiamo implicitamente assunto che sia

$$\begin{aligned} \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} b \equiv \gamma b \geq A \equiv \beta \gamma E_C = \frac{p}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{m_C^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow b \geq \beta E_C \Leftrightarrow \beta \leq \frac{b}{E_C} = \beta_0 \end{aligned} \quad (4.434)$$

ovvero corrisponda al caso in cui il modulo β_0 della velocità della particella C considerata, vista nel sistema del CM , sia maggiore del modulo β della velocità relativa fra i due riferimenti.

In questo caso, infatti, come è intuitivo che sia e come è mostrato graficamente dalla fig.43, anche nel sistema del laboratorio, sono possibili tutti gli angoli di scattering²²⁴, i.e., $0 \leq \theta \leq \pi$ e $p'(\theta)$, fissato θ , è unico, visto che l'origine del sistema degli assi si trova all'interno dell'ellisse.

scritta anche come

$$p'_{\parallel} = \beta \gamma \sqrt{m^2 + b^2} + \gamma b \cos \Theta$$

(essendo, per quanto visto sopra, $\gamma \beta = \frac{p}{\sqrt{s}}$ e $\gamma = \frac{E+M}{\sqrt{s}}$)

e, nel limite NR, $\gamma \rightarrow 1$, $\sqrt{m^2 + b^2} \rightarrow m$...

²²³J. Blaton: *On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes*, Mat.-Fys Medd. Vol. 24, nr.20, 1 (1950)

²²⁴Si osservi che, nel caso in cui la distribuzione angolare delle particelle scatturate di massa m sia isotropa, allora metà delle stesse vengono emesse nel sistema del Laboratorio con un angolo

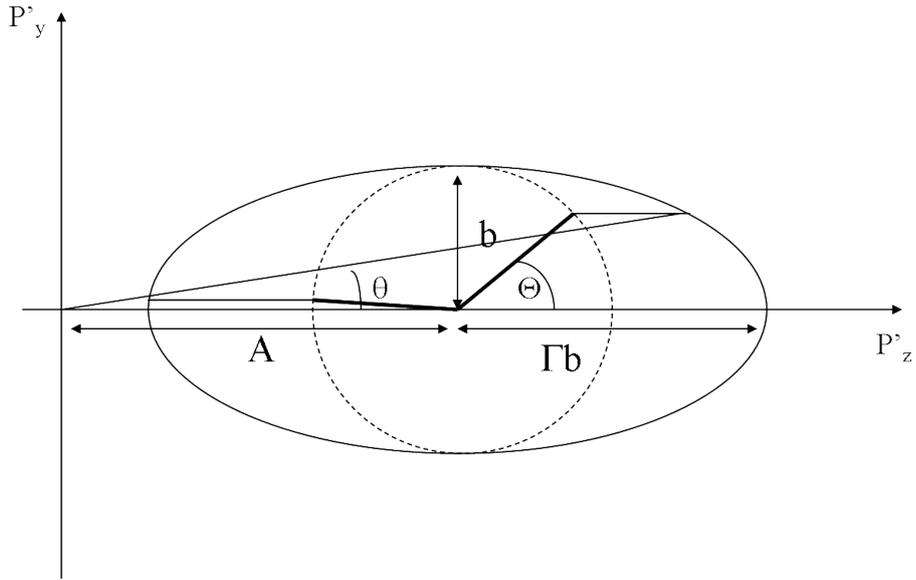


Figure 44: *Impulso nel Laboratorio e nel CM quando $v < v_{rel}$*

Nel caso, invece, in cui $\beta_0 < \beta$, allora, da quanto precede è, evidentemente, $\gamma b < A$ e dunque la configurazione che si realizza è quella illustrata in fig.44, in cui l'origine del sistema degli assi è esterno all'ellisse, per cui sono possibili solo

di scattering tale che

$$0 \leq \Theta \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq tg\theta \leq \frac{b}{A} = \frac{b}{\beta\gamma E_C} = \frac{\beta_0}{\beta\gamma}$$

dove β_0 è la velocità nel *CM* della particella considerata, mentre $\beta\gamma$ si riferiscono al moto del *CM* visto dal sistema del Laboratorio.

Nel caso la particella *C* sia un fotone ($\beta_0 = 1$) ed il *CM* si muova di moto ultrarelativistico nel sistema del Laboratorio, allora la condizione precedente diviene, evidentemente, la seguente

$$0 \leq tg\theta \leq \frac{1}{\beta\gamma} \approx \frac{1}{\gamma}$$

angoli di scattering θ nel primo quadrante, inferiori ad un opportuno²²⁵ θ_{MAX} , e ad ognuno di essi corrispondono, stavolta, due angoli di scattering Θ nel sistema del centro di massa e, corrispondentemente, due valori di $p'(\theta)$.

Questo, per quanto riguarda le componenti spaziali del quadriimpulso.

Quanto poi alla sua componente temporale, cioè all'energia, dalla (4.430) abbiamo che risulta comunque

$$E'_C = \gamma E_C + \gamma\beta b \cos \Theta = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C + \frac{pb}{\sqrt{s}} \cos \Theta \quad (4.436)$$

Questo risultato, per prima cosa, ci conferma la cosa ovvia che la particella C non appare monocromatica nel sistema del Laboratorio, come lo è in quello del CM , e la sua energia vista nel Laboratorio, va da un massimo, per $\Theta = 0$, pari a

$$E_{MAX} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C + \frac{pb}{\sqrt{s}} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} \sqrt{m_C^2 + b^2} + \frac{pb}{\sqrt{s}} \quad (4.437)$$

ad un minimo, per $\Theta = \pi$, pari a

$$E_{min} = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C - \frac{pb}{\sqrt{s}} = E_{MAX} - 2\frac{pb}{\sqrt{s}} \quad (4.438)$$

ovvero copre una "larghezza" in energia ΔE che, in generale, è data da

$$\Delta E = 2\gamma\beta b = 2\frac{pb}{\sqrt{s}} \quad (4.439)$$

²²⁵Se, per comodità di notazione si pone $p'_\perp \equiv y$, $p'_z \equiv x$, allora l'angolo di scattering massimo nel sistema del Laboratorio si determina, evidentemente, imponendo l'esistenza di un solo $p'(\theta_{MAX})$, ovvero di un solo punto di intersezione fra l'ellisse di Blaton, di equazione

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x-A}{\gamma b}\right)^2 = 1$$

con la retta di equazione $y = tx$ dove $t \equiv tg \theta_{MAX}$. Risulta

$$(\gamma tx)^2 + (x-A)^2 = (\gamma b)^2 \Rightarrow x^2(\gamma^2 t^2 + 1) - 2Ax + A^2 - \gamma^2 b^2 = 0 \Rightarrow \Delta/4 = A^2 - (1 + \gamma^2 t^2)(A^2 - \gamma^2 b^2)$$

e dunque la condizione di tangenza retta-ellisse (ovvero di θ_{MAX}) risulta essere la seguente

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta/4 = A^2 - (1 + \gamma^2 t^2)(A^2 - \gamma^2 b^2) \Rightarrow 0 = A^2 - A^2 + \gamma^2 b^2 - \gamma^2 t^2 (A^2 - \gamma^2 b^2) \\ &\Rightarrow \gamma^2 t^2 (A^2 - \gamma^2 b^2) = \gamma^2 b^2 \Rightarrow t = \frac{b}{\sqrt{A^2 - \gamma^2 b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\beta^2 \gamma^2 E_C^2 - \gamma^2 b^2}} = \frac{1}{\gamma \sqrt{\beta^2 \left(\frac{E_C}{b}\right)^2 - 1}} \Rightarrow \\ t \equiv tg \theta_{MAX} &= \frac{1}{\gamma \sqrt{\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^2 - 1}} \end{aligned} \quad (4.435)$$

Nel caso particolare dell'urto elastico $a = b$ e, chiaramente, essendo B inizialmente ferma nel sistema del Laboratorio, risulta

$$b = a = m_B \gamma \beta = m_B \frac{p}{\sqrt{s}} \quad (4.440)$$

per cui la (4.439) diventa

$$\Delta E = \frac{2 m_B p^2}{s} = \frac{2 m_B (E^2 - m_A^2)}{s} \quad (4.441)$$

Per $\Theta_{CM} = 0$, però, non c'è urto e quindi, per la particella urtante A (identificata con la particella uscente C) deve²²⁶ essere $E_{MAX} = E$.

Nel caso poi in cui $m_A = m_B \equiv m$, è facile convincersi che $E_{MIN} = m$, che si realizza per $\Theta = \pi$, quando la particella A dopo l'urto resta ferma nel Laboratorio.

Ritornando al caso quasi-elastico, quanto all'altra particella D prodotta, risulta evidentemente che

$$E'_D = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_D - \frac{p b}{\sqrt{s}} \cos \Theta \quad (4.443)$$

da cui segue in particolare che la somma delle energie delle particelle C e D nel sistema del Laboratorio vale

$$E'_C + E'_D = \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} (E_C + E_D) = E + m_B \quad (4.444)$$

come è ovvio che debba essere^{227,228}.

²²⁶Formalmente risulta

$$E_C = E_A = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_A^2 + m_B^2 + 2E m_B + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_A^2 + E m_B}{\sqrt{s}} \quad (4.442)$$

e dunque, usando anche la (4.440), risulta appunto che

$$\begin{aligned} E_{MAX} &= \frac{E + m_B}{\sqrt{s}} E_C + \frac{p b}{\sqrt{s}} = \frac{(E + m_B)(m_A^2 + E m_B)}{s} + \frac{p^2 m_B}{s} = \\ &= \frac{E m_A^2 + E^2 m_B + m_B m_A^2 + E m_B^2 + p^2 m_B}{s} = \frac{E m_A^2 + E^2 m_B + E m_B^2 + E^2 m_B}{s} = \\ &= E \frac{m_A^2 + m_B^2 + 2E m_B}{s} = E \end{aligned}$$

²²⁷Dalla (4.444) segue in particolare che, nel caso dell'urto elastico, l'energia della particella urtata parte da un minimo pari proprio alla sua massa, che si realizza nel caso di scattering in avanti ($\Theta = 0$).

²²⁸Naturalmente, l'analisi del processo fatta nel sistema del CM e poi riportata nel sistema del Laboratorio, può essere effettuata in questo riferimento anche in modo diretto. Per questo

occorre partire dall'identità

$$p'^{\mu} + P'^{\mu} = (E + M, \vec{p}) \quad (4.445)$$

Poniamo allora, per comodità di notazione

$$p'^{\mu} = (w', \vec{p}'); \quad w' \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (4.446)$$

$$P'^{\mu} = (W', \vec{P}'); \quad W' \equiv \sqrt{M^2 + |\vec{P}'|^2} \quad (4.447)$$

Evidentemente, dalla conservazione dell'impulso spaziale nel sistema del Laboratorio, risulta

$$\vec{p} + \vec{P}' = \vec{p} \quad \Rightarrow \quad |\vec{P}'|^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta \quad (4.448)$$

mentre dalla conservazione dell'energia si ha

$$E + M = \sqrt{M^2 + |\vec{P}'|^2} + \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (4.449)$$

e dunque

$$\sqrt{M^2 + |\vec{P}'|^2} = (E + M) - \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2}$$

da cui, elevando al quadrato ed usando l'espressione (4.448), si ottiene

$$M^2 + p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta = E^2 + M^2 + 2EM + m^2 + p'^2 - 2(E + M)\sqrt{m^2 + p'^2}$$

i.e., semplificando, si ha

$$E^2 + 2EM + m^2 - p^2 + 2pp' \cos\theta = 2(E + M)\sqrt{m^2 + p'^2}$$

ma $E^2 - p^2 = m^2$, per cui sostituendo e dividendo per 2, abbiamo

$$m^2 + EM + pp' \cos\theta = (E + M)\sqrt{m^2 + p'^2} \quad (4.450)$$

da cui, elevando ancora al quadrato, si ottiene

$$\begin{aligned} m^4 + E^2M^2 + p^2p'^2 \cos^2\theta + 2EMm^2 + 2m^2pp' \cos\theta + 2EMpp' \cos\theta &= \\ = (E^2 + 2EM + M^2)(m^2 + p'^2) &= \\ = E^2m^2 + E^2p'^2 + 2EMm^2 + 2EMp'^2 + m^2M^2 + M^2p'^2 \end{aligned}$$

Semplificando e ordinando come polinomio in p' , risulta

$$\begin{aligned} p'^2 (p^2 \cos^2\theta - E^2 - 2EM - M^2) + 2p' (m^2p \cos\theta + EMP \cos\theta) + \\ m^4 + E^2M^2 - E^2m^2 - m^2M^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.451)$$

ovvero

$$\begin{aligned} p'^2 (p^2 (1 - \sin^2\theta) - E^2 - 2EM - M^2) + 2pp' \cos\theta (m^2 + EM) + \\ m^4 + (p^2 + m^2)M^2 - (p^2 + m^2)m^2 - m^2M^2 = 0 \\ \Downarrow \\ p'^2 (p^2 - p^2 \sin^2\theta - E^2 - 2EM - M^2) + 2pp' \cos\theta (m^2 + EM) + \\ m^4 + p^2M^2 + m^2M^2 - p^2m^2 - m^4 - m^2M^2 = 0 \end{aligned}$$

da cui, sostituendo $p^2 - E^2 = -m^2$ e cambiando tutto di segno, si ottiene finalmente l'equazione

$$\begin{aligned} p'^2 (p^2 \sin^2\theta + 2EM + M^2 + m^2) - 2pp' \cos\theta (m^2 + EM) + \\ + p^2 (m^2 - M^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.452)$$

Questa equazione può essere vista come una equazione di secondo grado in p' , in cui le condizioni iniziali (fissate le masse M ed m) entrano attraverso il modulo p dell'impulso della particella incidente, mentre le condizioni finali sono contenute nel valore dell'angolo di scattering θ : si tratta dunque di una equazione di secondo grado, *parametrica* in θ . Evidentemente le soluzioni saranno accettabili per ragioni fisiche solo se reali e positive (p' è il modulo dell'impulso spaziale della particella di massa m , dopo l'urto), per cui occorre studiare il discriminante dell'equazione, che vale

$$\begin{aligned} \Delta/4 &= [p \cos\theta (EM + m^2)]^2 - p^2 (p^2 \sin^2\theta + 2EM + M^2 + m^2) (m^2 - M^2) = \\ &= p^2 \cos^2\theta (EM + m^2)^2 - p^2 [(m^2 - M^2)p^2 \sin^2\theta + (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ &= p^2 (1 - \sin^2\theta) (EM + m^2)^2 - p^2 [(m^2 - M^2)p^2 \sin^2\theta + (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ &= p^2 (EM + m^2)^2 - p^2 \sin^2\theta (EM + m^2)^2 - \\ &\quad - p^2 [(m^2 - M^2)p^2 \sin^2\theta + (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ &= -p^2 \sin^2\theta [(EM + m^2)^2 + (m^2 - M^2)p^2] + \\ &\quad p^2 [(EM + m^2)^2 - (2EM + M^2 + m^2)(m^2 - M^2)] = \\ &= p^2 [E^2 M^2 + 2EMm^2 + m^4 - 2EMm^2 + 2EM^3 - m^2 M^2 + M^4 - m^4 + m^2 M^2] \\ &\quad - p^2 \sin^2\theta [E^2 M^2 + 2EMm^2 + m^4 + m^2 E^2 - m^4 - M^2 E^2 + m^2 M^2] = \\ &= p^2 [(EM + M^2)^2] - p^2 \sin^2\theta [m^2(2EM + E^2 + M^2)] = \\ &= p^2 M^2 (E + M)^2 - p^2 m^2 \sin^2\theta (E + M)^2 = \\ &= p^2 (E + M)^2 [M^2 - m^2 \sin^2\theta] \end{aligned}$$

e le due soluzioni, se $\Delta/4 > 0$, sono

$$p'_{\pm} = \frac{p \cos\theta (EM + m^2) \pm p (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{p^2 \sin^2\theta + 2EM + M^2 + m^2} \quad (4.453)$$

Quanto al denominatore, che è evidentemente strettamente positivo essendo somma di quantità tutte strettamente positive, ricordando che $p^2 + m^2 = E^2$, esso può essere scritto come

$$\begin{aligned} p^2 \sin^2\theta + 2EM + M^2 + m^2 &= p^2 - p^2 \cos^2\theta + 2EM + M^2 + m^2 = \\ &= E^2 + 2EM + M^2 - p^2 \cos^2\theta = (E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta \end{aligned}$$

per cui le due soluzioni dell'equazione diventano infine

$$p'_{\pm} = p \frac{(EM + m^2) \cos\theta \pm (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \quad (4.454)$$

La condizione di positività del determinante, e quindi di realtà delle soluzioni p'_{\pm}

$$M^2 - m^2 \sin^2\theta \geq 0 \quad (4.455)$$

non impone limitazioni sull'angolo di scattering θ se e solo se $M \geq m$, altrimenti richiede che

$$0 \leq \theta \leq \arcsin \frac{M}{m} \quad (4.456)$$

per cui, quando $M < m$ non tutti gli angoli di scattering θ , nel Laboratorio, sono possibili. Cerchiamo ora di determinare il numero delle soluzioni accettabili, nei vari casi.

- Siccome il coefficiente di p'^2 nella (4.452) è positivo, le soluzioni sono entrambe dello stesso segno se il termine noto dell'equazione di secondo grado (4.452) è positivo, i.e. se $m^2 - M^2 > 0 \Rightarrow m > M$. In questo caso, θ sta nel primo quadrante e la soluzione p'_+ è evidentemente positiva e dunque lo è anche p'_- . Entrambe le soluzioni p'_+ e p'_- dunque sono accettabili, con la conseguenza che, per lo stesso angolo di scattering θ , esistono due possibili valori di p' .

Si osservi, a proposito di queste soluzioni, che la condizione (4.455) è pari in $\sin\theta$, per cui, a priori, se θ soddisfa la condizione per cui $\Delta \geq 0$, allora anche $\theta' = \pi - \theta$ la soddisfa. Comunque, nel secondo quadrante (dove si trova θ'), essendo $\cos\theta' < 0$, chiaramente p'_- è negativo e dunque anche p'_+ lo è, per cui, in questo caso, non esistono soluzioni positive in p'_\pm .

- Nel caso in cui $m^2 - M^2 < 0$, i.e. quando $M > m$, allora le due soluzioni hanno segno discorde. Non c'è limitazione ai possibili valori di θ fra 0 e π , ma solo la soluzione p'_+ sarà accettabile in quanto, come abbiamo già osservato, p' deve essere comunque una grandezza reale positiva e, dalla definizione, si ha che $p'_+ > p'_-$ (ovvio!).

Evidentemente poi, fissato il valore di p' è anche fissata l'energia E' della massa m dopo l'urto: usando la (4.450), si ottiene, per le due soluzioni, rispettivamente

$$E'_\pm = \frac{(M + E)(EM + m^2) \pm p^2 \cos\theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \quad (4.457)$$

Risulta infatti che, per la (4.450), è

$$m^2 + EM + pp' \cos\theta = (E + M)\sqrt{m^2 + p'^2} \Rightarrow m^2 + EM + pp' \cos\theta = (E + M) E'$$

ovvero, usando il fatto che

$$p'_\pm = \frac{p \cos\theta (EM + m^2) \pm p (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta}$$

si ha

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m^2 + EM + pp' \cos\theta}{E + M} = \\ &= \frac{1}{E + M} \frac{(m^2 + EM)[(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta] + p^2 \cos^2\theta (EM + m^2)}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \\ &\pm \frac{p^2 \cos\theta (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} = \\ &= \frac{1}{E + M} \frac{(m^2 + EM)(E + M)^2 \pm p^2 \cos\theta (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} = \\ &= \frac{(m^2 + EM)(E + M) \pm p^2 \cos\theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2\theta} \quad c.v.d. \end{aligned}$$

Come risulta chiaro da quanto precede, la determinazione nel Sistema del Laboratorio dei quadrimpulsi delle particelle coinvolte nell'urto è solitamente abbastanza laboriosa ... per questo abbiamo preferito affrontare il problema partendo piuttosto dal sistema del *CM*.

Prima di lasciare l'argomento, è utile ribadire che le conclusioni tratte riguardo alla cinematica delle due particelle C e D prodotte nel processo quasi-elastico considerato, si applicano esattamente allo stesso modo al caso del decadimento di una particella X in C e D , pur di identificare \sqrt{s} con la massa M_X di X e $\vec{\beta}$ con la velocità di X nel riferimento del Laboratorio. Riguardo all'espressione di E'_C di C nel laboratorio, abbiamo visto che

$$E'_C = \gamma E_C + \gamma \beta b \cos \Theta \quad (4.458)$$

da cui

$$\gamma(E_C - \beta b) \leq E \equiv E'_C \leq \gamma(E_C + \beta b) \quad (4.459)$$

Ma qual è la funzione di distribuzione $F(E)$ dell'energia di C , all'interno dell'intervallo di energie permesso (E_{min}, E_{MAX}) ?

Nel sistema del CM C è evidentemente monocromatica in quanto $E_C = \sqrt{M_C^2 + b^2}$, mentre nel sistema del Laboratorio questo non è più vero, data la (4.459).

Se C è prodotta nel CM in modo isotropo, allora la distribuzione di probabilità associata a C è data da

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{2} d(-\cos \Theta) \quad (4.460)$$

e siccome dalla (4.458) risulta

$$dE'_C = \gamma \beta b d(\cos \Theta) \quad (4.461)$$

ne segue che la funzione di distribuzione $F(E)$ cercata è la seguente

$$F(E) \equiv \left| \frac{d\mathcal{P}}{dE'_C} \right| = \frac{1}{2\gamma\beta b} \quad (4.462)$$

ovvero essa è *piatta* fra E_{min} ed E_{MAX} .

4.1.2 L'effetto Compton

L'effetto Compton²²⁹ consiste nello scattering elastico di un fotone con un elettrone

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e \quad (4.463)$$

in cui l'elettrone nello stato iniziale può essere considerato fermo nel sistema di riferimento del Laboratorio.

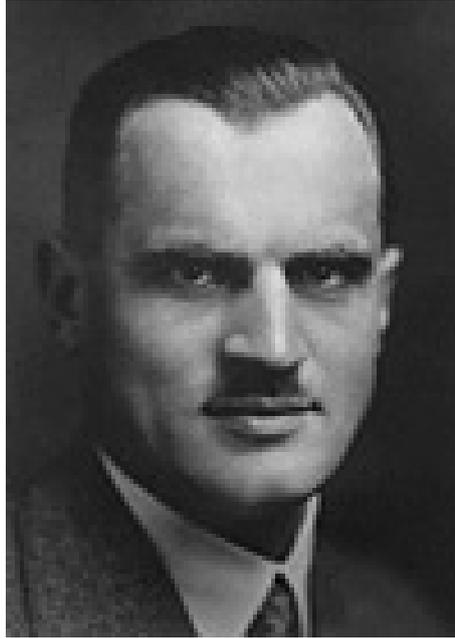


Figure 45: *Arthur H. Compton (1892-1962)*

Volendo studiare le caratteristiche cinematiche del fotone nello stato finale, poiché la sua velocità è certamente maggiore della velocità del CM del sistema, possiamo intanto concludere per quanto già osservato in precedenza che saranno possibili tutti gli angoli di scattering $0 \leq \theta \leq \pi$ anche nel sistema del Laboratorio. Dalla (4.436), nel caso particolare in cui $E = k$ (massa del fotone μ nulla, massa dell'elettrone pari a m), si ha

$$\begin{aligned} E'_{(lab)} &= \gamma\sqrt{\mu^2 + b^2} + \gamma\beta b \cos \Theta = \frac{E + m}{\sqrt{s}} \sqrt{\mu^2 + b^2} + \frac{k b}{\sqrt{s}} \cos \Theta = \\ &= \frac{k + m}{\sqrt{s}} b + \frac{k b}{\sqrt{s}} \cos \Theta = \frac{m b}{\sqrt{s}} + \frac{k b}{\sqrt{s}} (1 + \cos \Theta) \end{aligned} \quad (4.464)$$

²²⁹A.H. Compton: *A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements*
Phys. Rev. 21, 483 (1923)

dove Θ è l'angolo di scattering del fotone nel riferimento del CM .

Dalle espressioni (4.412), (4.425) e (4.440), riscritte nel caso in cui $\mu = 0$, risulta

$$s = 2k m + m^2; \quad b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{k m}{\sqrt{s}} \quad (4.465)$$

da cui, evidentemente

$$\frac{b}{\sqrt{s}} = \frac{k m}{s} = \frac{k m}{2k m + m^2} = \frac{k}{2k + m} \quad (4.466)$$

per cui, sostituendo nella (4.464), si ha infine, in accordo con la (4.436), (4.437) e (4.438), che

$$\begin{aligned} E'_{(lab)} = k'_{(lab)} &= \frac{m b}{\sqrt{s}} + \frac{k b}{\sqrt{s}} (1 + \cos\Theta) = \\ &= \frac{m k}{m + 2k} + \frac{k^2}{m + 2k} (1 + \cos\Theta) \end{aligned} \quad (4.467)$$

↓

$$E'_{min} = \frac{m k}{m + 2k} = k \frac{m}{m + 2k} \quad (4.468)$$

$$E'_{max} = \frac{m k}{m + 2k} + \frac{2k^2}{m + 2k} = k \quad (4.469)$$

$$\Rightarrow \Delta E' \equiv E'_{max} - E'_{min} \equiv \Delta k' = k - k \frac{m}{m + 2k} = \frac{2k^2}{m + 2k} \quad (4.470)$$

Il risultato ottenuto consente di affermare che l'energia del fotone, vista dal riferimento del Laboratorio

- non cambia, se l'angolo Θ è nullo (ovvero se il fotone non subisce deflessione nel sistema del CM , e quindi non subisce scattering "tout court"...);
- assume il valore minimo, quando il fotone viene fatto "rimbalzare" all'indietro nel CM .

Vogliamo adesso esprimere l'energia del fotone uscente, di cui alla (4.467), in termini dell'angolo di scattering θ , misurato nel sistema del Laboratorio.

Ripartiamo dunque dalla (4.467) la quale stabilisce che

$$\begin{aligned} k' &= \frac{m k}{m + 2k} + \frac{k^2}{m + 2k} (1 + \cos\Theta) = \\ &= \frac{m k}{m + 2k} + \frac{2k^2}{m + 2k} - \frac{k^2}{m + 2k} (1 - \cos\Theta) = \\ &= k - \frac{k^2}{m + 2k} (1 - \cos\Theta) \end{aligned} \quad (4.471)$$

da cui ricaviamo che il cambiamento di energia subito del fotone a causa del processo d'urto è espresso dalla relazione

$$\Delta k \equiv k - k' = \frac{k^2}{2k + m} (1 - \cos\Theta) = \frac{m k^2}{s} (1 - \cos\Theta) \quad (4.472)$$

Volendo far intervenire adesso l'angolo di scattering θ del fotone nel sistema del Laboratorio, iniziamo osservando che, con ovvio significato di simboli, risulta

$$k'_{\parallel} = k' \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta \equiv \frac{k'_{\parallel}}{k'} \quad (4.473)$$

D'altronde, la componente k'_{\parallel} si trasforma, come sappiamo, nel modo seguente

$$k'_{\parallel} \equiv k' \cos\theta = \beta\gamma b + \gamma b \cos\Theta \quad (4.474)$$

e dunque si ha

$$\begin{aligned} k' - k' \cos\theta &\equiv k'(1 - \cos\theta) = \gamma b + \beta\gamma b \cos\Theta - \beta\gamma b - \gamma b \cos\Theta = \\ &= \gamma b(1 - \beta) - \gamma b(1 - \beta) \cos\Theta = (1 - \beta) \gamma b(1 - \cos\Theta) = \\ &= \frac{m}{k + m} \frac{k + m}{\sqrt{s}} \frac{k m}{\sqrt{s}} (1 - \cos\Theta) = \frac{k m^2}{s} (1 - \cos\Theta) \end{aligned} \quad (4.475)$$

per cui risulta che (nell'ultima espressione di Δk abbiamo ripristinato la presenza di c , per rendere il risultato più chiaro dal punto di vista dimensionale)

$$\begin{aligned} \Delta k &\equiv k - k' = \frac{m k^2}{s} (1 - \cos\Theta) = \frac{k}{m} (k' - k' \cos\theta) = \frac{k k'}{m} (1 - \cos\theta) \\ \Rightarrow \Delta k &= \frac{k k'}{m c} (1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.476)$$

ovvero, in termini della frequenza,

$$\begin{aligned} \Delta k &= \frac{h}{c} (\nu - \nu') = \left(\frac{h}{c}\right)^2 \frac{\nu \nu'}{m c} (1 - \cos\theta) \\ \Rightarrow \Delta \nu &\equiv \nu - \nu' = \frac{h}{m c^2} \nu \nu' (1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.477)$$

che, in termini della lunghezza d'onda ($\lambda = \frac{c}{\nu}$), diviene

$$\begin{aligned} \Delta \nu \equiv \nu - \nu' &\equiv \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h}{M c^2} \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} (1 - \cos\theta) \\ \Rightarrow c \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'} &= \frac{h}{m c^2} \frac{c^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos\theta) \\ \Rightarrow \Delta \lambda \equiv \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m c} (1 - \cos\theta) \equiv \lambda_c (1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.478)$$

dove abbiamo definito²³⁰ la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone* nel modo consueto

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m c} = 2.42631 \times 10^{-10} \text{ cm} \quad (4.480)$$

in termini della massa m dell'elettrone, della velocità della luce nel vuoto e della costante di Planck.

Lo scattering Compton, essendo un processo elastico, avviene qualunque sia l'energia k del fotone incidente; però la sua manifestazione caratteristica, rappresentata dal cambiamento di frequenza del fotone, si manifesta in modo sperimentalmente evidente solo quando la lunghezza d'onda λ_0 del fotone incidente non è troppo grande rispetto a λ_c , altrimenti, l'effetto rappresentato dall'aumento di lunghezza d'onda diventa praticamente inosservabile.

Se richiediamo, per esempio, che l'effetto sulla lunghezza d'onda sia del 10%, occorre assumere che $\lambda_0 = a \lambda_c$, con $a = 20$, così che i fotoni che subiscono scattering all'indietro hanno lunghezza d'onda $\lambda' = \lambda_0 + 2\lambda_c = 22 \lambda_c \dots$

Dato il valore di λ_c , questi fotoni hanno energia

$$k = h \nu = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{a \lambda_c} = \frac{hc}{a \frac{h}{mc}} = \frac{mc^2}{a} \approx 25 \text{ keV} \quad (4.481)$$

e dunque si trovano nel dominio dei raggi X .

Quanto poi alla cinematica del processo, osserviamo che in questa regione di energie del fotone $k \ll m$, la massa invariante del sistema, data dalla (4.465), vale

$$s = 2k m + m^2 = m^2 \left(1 + \frac{2k}{m} \right) \Rightarrow \sqrt{s} \approx m \left(1 + \frac{k}{m} \right) = m + k \quad (4.482)$$

ovvero è poco diverso da m .

Quanto poi all'impulso e quindi all'energia del fotone nel sistema del CM , dato ancora dalla (4.465), esso vale

$$b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{k m}{\sqrt{s}} \approx k \frac{m}{k + m} \quad (4.483)$$

²³⁰Per ragioni che verranno più chiare in seguito, si definisce anche la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton ridotta* nel modo seguente

$$\chi_c \equiv \frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{m c} = \frac{r_e}{\alpha} = 3.8615926 \cdot 10^{-11} \text{ cm} \quad (4.479)$$

Essa rappresenta la scala naturale di lunghezza associata alla particella di massa m e, per esempio, nel caso la particella sia il mediatore di una forza, essa ne individua il *range*.

non molto dissimile da k stesso perché il CM si muove in modo non relativistico nel sistema del laboratorio, essendo

$$\beta_{CM} = \frac{k}{m+k} \quad (4.484)$$

Un'applicazione interessante dell'effetto Compton è quella che lo utilizza per ottenere fotoni monocromatici di energia variabile nel dominio, per esempio, delle decine di MeV .

Consideriamo per questo un fascio laser di luce (verde) di lunghezza d'onda $\lambda \approx 500 \text{ nm}$, il quale si propaga lungo la direzione positiva dell'asse z e immaginiamo di inviare in verso opposto un fascio di elettroni ultrarelativistici di impulso p ed energia E . Il quadrimpulso del sistema elettrone-fotone, nel riferimento del Laboratorio, vale quindi

$$P^\mu = (\epsilon, 0, 0, \epsilon) + (E, 0, 0, -p) \quad (4.485)$$

dove $\epsilon \approx 2.5 \text{ eV}$ rappresenta l'energia del fotone.

La massa invariante quadra del processo è dunque

$$s = P^\mu P_\mu = m^2 + 2\epsilon(E+p) \quad (4.486)$$

per cui, nel CM , l'energia del fotone (coincidente con il modulo del suo impulso spaziale) vale

$$b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{\epsilon(E+p)}{\sqrt{s}} \quad (4.487)$$

Assumendo, per esempio, $E = 1 \text{ GeV}$, abbiamo ($E \approx p$)

$$\begin{aligned} s &= m^2 + 2\epsilon(E+p) = (0.511)^2 + 2 \cdot 2.5 \times 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 = \\ &= (0.511)^2 + 10^{-2} \text{ MeV}^2 \end{aligned} \quad (4.488)$$

Poiché risulta numericamente, in questo caso, che il termine $2\epsilon(E+p) \ll m^2$, possiamo riscrivere s nel modo seguente

$$\begin{aligned} s &= m^2 + 2\epsilon(E+p) = m^2 \left(1 + \frac{2\epsilon(E+p)}{m^2} \right) \\ \Rightarrow \sqrt{s} &\approx m + \frac{\epsilon(E+p)}{m} = m + k \end{aligned} \quad (4.489)$$

dove abbiamo definito $k \equiv \frac{\epsilon(E+p)}{m}$ e risulta che $k \approx 10 \text{ keV}$, in perfetta analogia con quanto accade nel caso di scattering Compton "classico", cioè su elettrone fermo, considerato in precedenza.

Poiché l'energia del fotone nel CM dipende unicamente da s , anche questa quantità sarà analoga al caso "classico" considerato sopra, infatti

$$b = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{\epsilon(E + p)}{\sqrt{s}} \approx k \quad (4.490)$$

La differenza fondamentale che c'è fra i due casi è che in questo secondo caso il CM ha un moto ultrarelativistico, mentre nel primo caso, come avevamo notato, è non relativistico. Adesso abbiamo infatti che, quanto al moto del CM nel Laboratorio, risulta

$$\gamma = \frac{E + \epsilon}{\sqrt{s}} \quad (4.491)$$

$$\beta = \frac{-p + \epsilon}{E + \epsilon} \approx \frac{-p}{E} \quad (4.492)$$

$$\gamma\beta = \frac{-p + \epsilon}{\sqrt{s}} \quad (4.493)$$

ovvero, nel Laboratorio, la velocità del CM è quasi coincidente con quella dell'elettrone incidente.

Riprendendo in esame l'energia del fotone nel Laboratorio, per la quale abbiamo

$$E = \gamma b + \beta\gamma b \cos\Theta \quad (4.494)$$

ecco che, nel caso di scattering all'indietro ($\Theta = \pi$), risulta

$$\begin{aligned} E &= \gamma b - \beta\gamma b = b \left(\frac{E + \epsilon}{\sqrt{s}} + \frac{p - \epsilon}{\sqrt{s}} \right) = \frac{b}{\sqrt{s}}(E + p) = \frac{\epsilon(E + p)}{s}(E + p) = \\ &= \epsilon \left(\frac{E + p}{\sqrt{s}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.495)$$

Ma se l'elettrone è ultrarelativistico, ecco che $p \approx E$ e dunque, per i fotoni di back-scattering abbiamo che

$$E \approx \epsilon \left(\frac{2E}{m + k} \right)^2 \approx \epsilon \left(\frac{2E}{m} \right)^2 = 4\epsilon\gamma_e^2 \quad (4.496)$$

dove abbiamo indicato con γ_e il fattore gamma relativistico dell'elettrone nel sistema del Laboratorio.

Nel caso considerato, essendo $\gamma_e \approx 2000$, avremmo, per i fotoni di back-scattering una energia dell'ordine di 40 MeV ...

Osserviamo che il risultato (4.495) ottenuto per l'energia del fotone di back-scattering può essere ricavato anche in modo diretto, usando le formule dell'effetto Doppler longitudinale. Se, infatti, nel sistema del Laboratorio il quadrimpulso del fotone incidente è dato da

$$k^\mu = \epsilon(1, 0, 0, 1) \quad (4.497)$$

allora, nel CM del sistema fotone-elettrone, esso diventa (effetto Doppler longitudinale)

$$k'^{\mu} = k'(1, 0, 0, 1) \quad (4.498)$$

dove

$$\begin{aligned} k' &= \gamma\epsilon - \beta\gamma\epsilon = \epsilon\gamma(1 - \beta) = \epsilon\gamma \left(1 - \frac{\epsilon - p}{E + \epsilon}\right) = \epsilon\gamma \frac{E + p}{E + \epsilon} = \\ &= \epsilon \frac{E + \epsilon}{\sqrt{s}} \frac{E + p}{E + \epsilon} = \epsilon \frac{E + p}{\sqrt{s}} \equiv b \end{aligned} \quad (4.499)$$

In caso di back-scattering, accade che il nuovo quadrimpulso del fotone nel CM diventa

$$k'^{\mu} = k'(1, 0, 0, -1) \quad (4.500)$$

e la trasformazione di Lorentz inversa dal CM al Laboratorio agisce su questo quadrimpulso con lo stesso fattore moltiplicativo della trasformazione diretta sul quadrimpulso iniziale, ovvero, nel Laboratorio, questo fotone di back-scattering ha un quadrimpulso dato da

$$k''^{\mu} = k''(1, 0, 0, -1) \quad (4.501)$$

dove, in accordo con la (4.495), risulta

$$k'' = b \frac{E + p}{\sqrt{s}} = \epsilon \left(\frac{E + p}{\sqrt{s}} \right)^2 \quad (4.502)$$

4.1.3 L'urto anelastico

Veniamo ora all'urto anelastico.

Chiaramente, anche in questo caso, si pone il problema del vincolo cinematico sulla reazione (*soglia*) che, in questo caso, ha uno dei due seguenti possibili stati finali

- una sola particella;
- più di due particelle (per esempio, tre o più).

Non sembri strano che si consideri anche la possibilità per cui due particelle interagiscono fra loro per produrne una sola: si tratta di un processo meno accademico di quanto potrebbe sembrare²³¹.

Vediamo quali sono i vincoli cinematici relativi a un tale processo.

Indichiamo con M la massa della particella prodotta: evidentemente, si tratta esattamente dell'inverso del processo di decadimento a due corpi.

Affinchè il processo si produca, per quanto concerne unicamente la cinematica, occorre e basta semplicemente che sia

$$\sqrt{s} = M \quad (4.503)$$

Va detto comunque che le reazioni in cui una particella A avente energia E , si fonde con una particella B inizialmente ferma, per dare luogo ad una terza particella C , possono avvenire perché, almeno la particella C , tipicamente, non ha una massa univocamente determinata, bensì essa è definita entro una *larghezza* propria $\Gamma \equiv \hbar/\tau$, per cui il valore di E necessario ad A affinché la reazione possa avvenire non è unico. Se fosse unico, infatti, la probabilità che la reazione si potesse realizzare sarebbe nulla perché non ci sarebbe spazio delle fasi in grado di garantire la reazione.

Nel caso, per esempio, in cui M^* abbia larghezza Γ , i valori di E possibili

²³¹Di questo tipo è, per esempio, la reazione per cui un fotone è assorbito da un atomo (o da un nucleo), che si porta in uno stato eccitato. In questo caso, se l'atomo è inizialmente fermo ed ha massa M , mentre la massa dell'atomo eccitato è M^* , l'energia del fotone può essere unicamente pari a $E = \frac{M^{*2} - M^2}{2M}$ e dopo l'interazione, l'atomo eccitato, di massa M^* , si muove con la velocità del CM , i.e. con $\beta = \frac{E}{M+E}$. Infatti deve essere $(E, E\vec{n}) + (M, \vec{0}) = M^*(\gamma, \gamma\vec{\beta})$. L'energia necessaria alla transizione non coincide con la differenza $M^* - M$, bensì vale

$$E = \frac{(M^*)^2 - M^2}{2M} = (M^* - M) \frac{2M + M^* - M}{2M} = (M^* - M) + \frac{(M^* - M)^2}{2M}$$

la quale ci dice che affinché la reazione avvenga, occorre che il fotone supplisca, oltre alla differenza di massa $\mathcal{E} \equiv M^* - M$ anche l'inevitabile termine cinetico legato alla conservazione nel processo dell'impulso spaziale (moto del baricentro). Questo impulso, per l'atomo eccitato, è quello del fotone, ovvero $p = E$, da cui origina il termine $\frac{\mathcal{E}^2}{2M}$ che, nel caso di atomo non relativistico, può essere approssimato appunto con $\frac{p^2}{2M^*}$.

saranno a loro volta $\approx (M^* - M) \pm \Gamma$ e la reazione si manifesterà appunto come un picco di risonanza di larghezza Γ .

Consideriamo adesso l'altro caso di urto anelastico; quello in cui le particelle nello stato finale sono più di due e consideriamo, per esempio, quello in cui esse sono tre, i.e.

$$A + B \rightarrow C + D + F \quad (4.504)$$

Evidentemente, nel sistema del centro di massa, sarà

$$\begin{aligned} (\sqrt{s}, 0, 0, 0) &= (E_C, \vec{p}_C) + (E_D, \vec{p}_D) + (E_F, \vec{p}_F) \\ \Rightarrow \sqrt{s} &= E_C + E_D + E_F; \quad \vec{p}_C + \vec{p}_D + \vec{p}_F = \vec{0} \end{aligned} \quad (4.505)$$

da cui segue immediatamente che, essendo $E \geq m$, deve essere

$$\sqrt{s} \geq m_C + m_D + m_F \equiv \sqrt{s_{th}} \quad (4.506)$$

potendo, la condizione sull'impulso spaziale, essere soddisfatta con tutti gli impulsi dei prodotti identicamente nulli.

Nel caso particolare in cui le due particelle incidenti si ritrovino anche nello stato finale, insieme a una terza particella, i.e.

$$A + B \rightarrow A + B + F \quad (4.507)$$

per la (4.506) si ha che la soglia di produzione di F è posta a

$$s_{th} = (m_A + m_B + m_F)^2 \quad (4.508)$$

e, siccome

$$s = (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2p_A p_B$$

abbiamo che la soglia di reazione può essere scritta nel seguente modo *invariante*

$$\begin{aligned} s_{th} &= (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2p_A p_B = (m_A + m_B + m_F)^2 = \\ &= m_A^2 + m_B^2 + m_F^2 + 2m_A m_B + 2m_F(m_A + m_B) \\ \Rightarrow 2p_A p_B &= m_F^2 + 2m_A m_B + 2m_F(m_A + m_B) \end{aligned} \quad (4.509)$$

Supponiamo ora che B sia ferma nel sistema del laboratorio e vediamo cosa diventa la (4.509): indicando con \mathcal{E}_A l'energia di A nel laboratorio, abbiamo che

$$2p_A p_B = 2\mathcal{E}_A m_B \quad (4.510)$$

e quindi la (4.509) stabilisce che siamo sopra la soglia di produzione di F se

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_A m_B &\geq m_F^2 + 2m_A m_B + 2m_F(m_A + m_B) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_A &\geq m_A + \frac{m_F}{2m_B}(m_F + 2m_A + 2m_B) \end{aligned}$$

Questa relazione, nel caso in cui A e B abbiano la stessa massa M (per esempio, nel caso dello scattering di due protoni con produzione di un π^0 ...), posto $\mathcal{E}_A = \gamma M$ ed $m_F = m$, fornisce la condizione

$$2\gamma M^2 \geq m^2 + 2M^2 + 4mM \quad (4.511)$$

ovvero

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 + 4\left(\frac{m}{M}\right) + 2(1 - \gamma) \leq 0 \quad (4.512)$$

la quale, fissata l'energia della particella incidente, cioè fissato γ , può essere vista come una disequazione di secondo grado nella massa m della particella che vogliamo produrre. La disequazione è soddisfatta nell'intervallo compreso fra le radici dell'equazione, che sono, evidentemente, le seguenti

$$\frac{m}{M} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8(1 - \gamma)}}{2}$$

e quindi le soluzioni accettabili, dovendo essere positive, sono

$$0 \leq \frac{m}{M} \leq -2 + \sqrt{2(1 + \gamma)} \quad (4.513)$$

e dunque, fissato γ , non si potrà produrre alcuna massa m superiore a m_{th} , data da

$$m \leq m_{th} \equiv M \left(-2 + \sqrt{2(1 + \gamma)} \right)$$

Osserviamo adesso che se A è non relativistica, allora $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$ e dunque

$$m_{th} \approx M \left[-2 + \sqrt{2 \left(2 + \frac{\beta^2}{2} \right)} \right] = M \left[-2 + 2\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}} \right] \approx M \frac{\beta^2}{4}$$

in accordo con il fatto che, a soglia, l'energia nello stato iniziale dovrà uguagliare la somma delle masse presenti nello stato finale e supplire anche all'inevitabile (conservazione dell'impulso !) energia cinetica²³² delle stesse, i.e.

$$M + M \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = (2M + m_{th}) + \frac{1}{2} \frac{(M\beta)^2}{(2M + m_{th})}$$

da cui

$$2M + M \frac{\beta^2}{2} \approx 2M + m_{th} + \frac{M^2 \beta^2}{4M} \Rightarrow m_{th} = M \frac{\beta^2}{4}$$

In questo caso, dunque, il *costo* di mantenere in moto il CM del sistema è pari a metà dell'energia cinetica disponibile nel Laboratorio: dobbiamo disporre di

²³²Classicamente abbiamo infatti che $E_{cin} = p^2/(2M_{tot}) = (M\beta)^2/[2(2M + m)]$.

$M\beta^2/2$ per poter creare una massa $M\beta^2/4$: metà energia cinetica resta indisponibile per creare nuova materia !

Le cose vanno molto peggio nel caso ultrarelativistico, infatti se $\gamma \gg 1$, si ha

$$m_{th} = M(-2 + \sqrt{2 + 2\gamma}) \approx M\sqrt{2\gamma} \quad (4.514)$$

e se confrontiamo questa quantità con l'energia presente nel sistema del laboratorio

$$\mathcal{E} = M + \gamma M \approx \gamma M$$

vediamo che il processo di produzione di nuova materia per urto su bersaglio fisso risulta essere estremamente inefficiente.

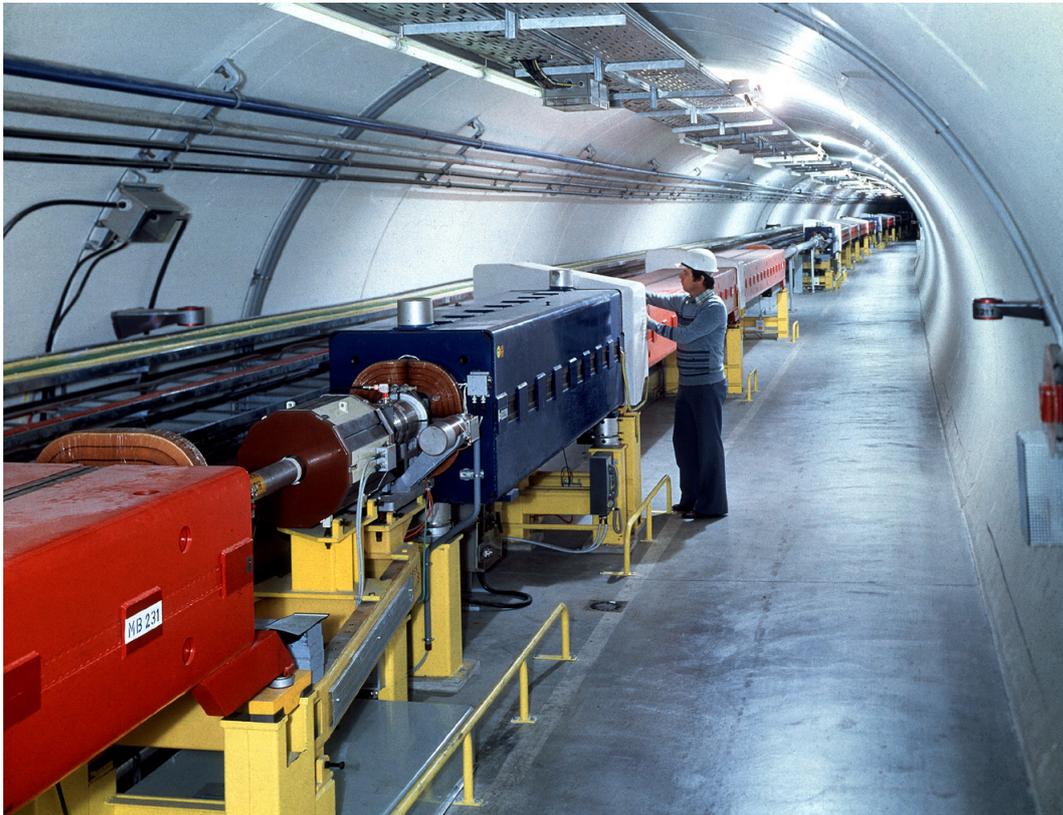


Figure 46: Tunnel dell'SPS del CERN (3.8 Km di circonferenza): accelera protoni fino a 450 GeV

Per esempio, il processo di scattering (acceleratore SPS del CERN, a bersaglio fisso) di un protone da 450 GeV contro un protone fermo $M \approx 0.938$ GeV ha una

soglia di produzione che non può comunque eccedere

$$m \approx 0.938(\sqrt{960} - 2) \approx 27.2 \text{ GeV}$$

La ragione è che dei 451 GeV presenti nel sistema in interazione, almeno 422 sono, in realtà indisponibili, per il fatto che servono a garantire il moto del centro di massa del sistema...

Un processo molto più efficiente per creare nuova materia è quello dell'urto *frontale*, così come accade, per esempio, nei collisionatori (*colliders*), fra particelle aventi impulsi opposti.

In questo caso, il sistema del Laboratorio coincide con il sistema del CM , per cui abbiamo

$$\sqrt{s} = 2M\gamma \quad (4.515)$$

e la condizione di soglia diviene semplicemente

$$m_{th} = 2M(\gamma - 1) \quad (4.516)$$

ovvero, adesso, dal punto di vista cinematico, a priori *tutta* l'energia è disponibile per creare nuova materia²³³.

Per esempio, al LEP, nella sua prima fase venivano fatti scontrare elettroni e positroni con una energia di poco superiore a 45 GeV per fascio per produrre la Z^0 .

Se avessimo voluto produrla facendo urtare un positrone contro un elettrone fermo, il positrone avrebbe dovuto possedere una energia²³⁴ tale che

$$\sqrt{s} = 91.19 \text{ GeV} \approx m_e \sqrt{2\gamma} \Rightarrow \sqrt{2\gamma} \approx \frac{91188}{0.511} = 178000 \Rightarrow \gamma \approx 1.6 \times 10^{10}$$

ovvero una energia $\mathcal{E} = \gamma m_e = 1.6 \times 10^{10} \times 0.5 \text{ MeV} = 0.8 \times 10^{10} \text{ MeV} = 0.8 \times 10^{16} \text{ eV}$, al di là del bene e del male ...!

²³³Come mai, allora, per produrre la Z^0 , la cui massa è $M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$ ($\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}$), al collider del CERN si facevano scontrare protoni ed antiprotoni con un'energia di 420 GeV per fascio ?

²³⁴In questo caso elettrone e positrone non sono più presenti nello stato finale; ma, poiché siamo giunti alle conclusioni generali di cui sopra trascurando, in buona sostanza, la presenza nello stato finale delle masse delle particelle incidenti ancorché presenti, queste conclusioni risultano adesso valide a maggior ragione !



Figure 47: *Vista aerea del LEP al CERN (27 Km di circonferenza), in grado di accelerare elettroni e positroni dapprima fino a 50 GeV e poi fino a 105 GeV. LEP ha cessato di funzionare a fine 2000 e il suo tunnel ospita adesso LHC.*

Venendo ai giorni nostri, in *LHC*, sono stati realizzati, nel 2010, urti fra protoni ad una energia di $3.5 + 3.5 TeV$, ovvero ad una $\sqrt{s} = 7 TeV$, passati poi nel 2012 a $4 + 4 TeV$, previsti diventare $7 + 7 TeV$ nel 2016. Per poter realizzare quest'ultimo valore di \sqrt{s} su protone fermo, occorrerebbe che quello in moto avesse un gamma tale che

$$\sqrt{s} \approx M \sqrt{2\gamma} = 14 TeV \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\gamma} = 1.5 \cdot 10^4$$

ovvero $\gamma = 1.1 \cdot 10^8$, corrispondente ad una energia del protone incidente di circa $10^{17} eV$, impossibile da raggiungere con le attuali tecnologie (ma presente, come vedremo, nei raggi cosmici, di cui parleremo più oltre).

4.2 Massa trasversa e picco Jacobiano

Abbiamo già considerato in diverse occasioni la *massa invariante* M di un sistema, legata al quadrimpulso P^μ dello stesso dalla ben nota relazione $M^2 \equiv P^\mu P_\mu$.

Nel caso del decadimento di una particella instabile

$$A \rightarrow B + C + \dots + D \quad (4.517)$$

poter ricostruire dai quadrimpulsi dei frammenti la massa invariante di A significa poterla mettere in relazione con i frammenti stessi e dunque, in particolare, dimostrarne l'esistenza.

Purtroppo non sempre l'evento è "chiuso" cinematicamente, ovvero tutti i quadrimpulsi dei frammenti sono osservati (osservabili). Se questo accade, allora, per la conservazione del quadrimpulso di un sistema isolato, sarà

$$\begin{aligned} P_A^\mu &= P_B^\mu + P_C^\mu + \dots + P_D^\mu \\ \Rightarrow M^2 &= (P_B + P_C + \dots + P_D)^\mu (P_B + P_C + \dots + P_D)_\mu = \\ &= m_B^2 + m_C^2 + \dots + m_D^2 + 2[(P_B)^\mu (P_C)_\mu + (P_B)^\mu (P_D)_\mu + (P_C)^\mu (P_D)_\mu + \dots] \end{aligned}$$

Per esempio, un caso in cui questo accade è quando i prodotti sono carichi per cui, a meno di effetti di accettazione, uno spettrometro può misurare tutti i loro quadrimpulsi, come, per esempio, nelle reazioni²³⁵

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

²³⁵In linea di principio non è necessario che i prodotti del decadimento siano carichi, purchè essi interagiscano con il rivelatore e questo ne possa definire il quadrimpulso. Consideriamo, per esempio, il decadimento del π^0 , i.e.

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Se l'energia dei due fotoni E_1 ed E_2 può essere misurata con precisione e si conosce il punto \vec{R}_0 dove il π_0 ha avuto origine (la sua vita media trascurabilmente piccola, pari a $8.4 \times 10^{-17} s \Rightarrow c\tau = 25.1 nm$, è tale per cui il punto di origine coincide anche con la sua posizione di decadimento) nonchè i punti di impatto \vec{R}_1 e \vec{R}_2 dei due fotoni sul rivelatore, allora, posto

$$\vec{n}_1 \equiv \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|}; \quad \vec{n}_2 \equiv \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_0|}$$

risulta

$$P_1^\mu = (E_1, E_1 \vec{n}_1); \quad P_2^\mu = (E_2, E_2 \vec{n}_2)$$

e dunque il quadrimpulso del sistema dei due fotoni è

$$P^\mu = (E_1 + E_2, E_1 \vec{n}_1 + E_2 \vec{n}_2)$$

ovvero tale sistema possiede una massa invariante pari a

$$P^\mu P_\mu \equiv M_{inv}^2 = (E_1 + E_2)^2 - |E_1 \vec{n}_1 + E_2 \vec{n}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 - (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$$

per cui, se definiamo allora

$$\cos\theta \equiv \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

$$K^\pm \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^\pm$$

Nei casi in cui l'evento non è cinematicamente chiuso, una grandezza che aiuta all'identificazione della presenza della particella A fra quelle prodotte, è la sua *massa trasversa*.

Essa è utile tutte le volte che

- è determinabile a priori la direzione di volo \vec{n} della particella A (anche se non se ne conosce nè l'energia nè l'impulso)
- è possibile osservare molti decadimenti simili, in modo da poter studiare statisticamente²³⁶ la cinematica dei prodotti.

Vediamo un esempio concreto

Nell'interazione $p\bar{p}$ all'SPS-Collider del CERN, furono prodotti ed osservati per la prima volta nel 1983 i bosoni vettori W^\pm . Nonostante che i due fasci di protoni ed antiprotoni abbiano impulsi esattamente opposti, siccome il W è originato dalla "fusione" di un quark del protone con un "antiquark" dell'antiprotone, l'impulso longitudinale del W non è definito nel sistema del Laboratorio. Invece è definita la sua direzione di volo, che sostanzialmente coincide con quella dei due fasci incrociati (può sussistere un piccolo moto trasverso che, a questo stadio, possiamo senz'altro trascurare).

Un decadimento molto caratteristico del W è il seguente

$$W^- \rightarrow e^- \bar{\nu} \quad (4.518)$$

in cui, mentre dell'elettrone si può agevolmente determinare l'energia e l'impulso, per quanto riguarda l'antineutrino, esso non è osservabile e dunque questo canale di decadimento non è cinematicamente chiuso. Vista l'esiguità della massa dei prodotti di decadimento, elettrone e neutrino, in confronto alla massa M del W , il loro impulso, nel sistema del CM, dove il W è a riposo, ha modulo costante e pari a

$$|\vec{p}| \equiv \bar{p} = M/2 \quad (4.519)$$

ovvero se indichiamo con θ l'angolo fra le direzioni di propagazione dei due fotoni, è

$$M_{inv}^2 = 2 E_1 E_2 (1 - \cos\theta)$$

e, se i due fotoni, provengono dal decadimento di un π^0 , questa deve coincidere, ovviamente, con $m_{\pi^0}^2$. Si osservi che, se il π_0 ha alta energia, ($E_1 + E_2 \gg m_{\pi_0}$) allora l'angolo di apertura θ dell'evento è verosimilmente piccolo, per cui si ha

$$M_{inv}^2 \approx 2E_1 E_2 [1 - (1 - \theta^2/2 + \dots)] \approx E_1 E_2 \theta^2$$

²³⁶Nel caso di un decadimento cinematicamente chiuso, a priori ne basta uno solo, in assenza di fondo, per identificare la presenza di A fra le particelle generate.

dovendo appunto risultare

$$(M, 0, 0, 0) = \left(\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\vec{u}\right)_e + \left(\frac{M}{2}, -\frac{M}{2}\vec{u}\right)_\nu \quad (4.520)$$

essendo \vec{u} il versore di propagazione dell'elettrone nel sistema del CM.

Nel sistema del Laboratorio, solo la parte trasversa dell'impulso dell'elettrone

$$\vec{p}^T = \frac{M}{2} \sin\theta \vec{u}_T \quad (4.521)$$

ha relazione diretta con la cinematica del decadimento, essendo uguale a quella nel sistema del CM, a differenza della sua parte longitudinale

$$p_L = \frac{\gamma M}{2}(\beta + \cos\theta) \quad (4.522)$$

che risente anche dell'effetto del trascinamento dovuto al moto del sistema del CM rispetto a quello del Laboratorio, che avviene con velocità β , a priori ignota. Per l'elettrone, definiamo allora un *quadrimpulso trasverso*

$$(p_e^T)^\mu = (p_e^T, \vec{p}_e^T) \quad (4.523)$$

Poichè l'evento deve essere complessivamente bilanciato nel piano trasverso, se si tratta di un vero decadimento $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}$, allora dovrà esistere un sensibile impulso trasverso mancante \vec{p}_{miss}^T , che identificheremo con quello associato al neutrino, che, in condizioni ideali, a parte dunque le incertezze di misura, dovrebbe essere uguale ed opposto a quello dell'elettrone. Poniamo

$$(p_\nu^T)^\mu = (p_{miss}^T, \vec{p}_{miss}^T) \equiv (p_\nu^T, \vec{p}_\nu^T) \quad (4.524)$$

Definiamo adesso il quadrimpulso seguente

$$(P^T)^\mu \equiv (p_e^T)^\mu + (p_\nu^T)^\mu = (p_e^T + p_\nu^T, \vec{p}_e^T + \vec{p}_\nu^T) \quad (4.525)$$

La massa trasversa del sistema elettrone-neutrino è definita come

$$M_T^2 = (P^T)^\mu (P^T)_\mu = (p_e^T + p_\nu^T)^2 - |\vec{p}_e^T + \vec{p}_\nu^T|^2 = 2 p_e^T p_\nu^T (1 - \cos\phi) \quad (4.526)$$

dove ϕ è l'angolo, nel piano trasverso, fra i due vettori \vec{p}_e^T e \vec{p}_ν^T , che, in condizioni ideali dovrebbe essere esattamente π .

Idealmente dovrebbe dunque essere

$$\begin{aligned} M_T^2 &= 4(p_e^T)^2 = 4\left(\frac{M}{2}\right)^2 \sin^2\theta = M^2 \sin^2\theta \\ \Rightarrow M_T &= 2 p_e^T = M \sin\theta \end{aligned} \quad (4.527)$$

Come si vede, per un sistema elettrone-neutrino ($e - \nu$) originatosi dal decadimento del W ,

- la massa trasversa M_T del sistema $e-\nu$ è *comunque* inferiore alla sua massa invariante;
- *dipende* dall'angolo polare di emissione dell'elettrone nel riferimento del CM (la direzione dell'asse polare z è quella che abbiamo chiamato "longitudinale" ed è, come abbiamo già osservato, allineato con i fasci di protoni ed antiprotoni: il verso scelto è quello del fascio dei protoni ...).

Ne segue che una sola misura non è in grado di consentirci alcuna conclusione sul fatto che ci sia stato veramente nell'evento un W che è decaduto e quindi, nemmeno, che sia stato prodotto. La certezza del fenomeno può essere acquisita solo su base statistica, accumulando molti eventi.

Vediamo allora come sono distribuiti gli eventi in funzione della massa trasversa M_T , che, chiaramente, a parte un fattore 2, equivale a studiare la distribuzione degli eventi in funzione del momento trasverso p_T dell'elettrone !

Cominciamo assumendo (non è vero !) che il decadimento sia isotropo nel sistema del CM del W . Evidentemente, in questo caso, per un numero totale N di W che decadono, quelli che hanno l'elettrone nell'angolo solido $d\Omega$ sono

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad dn = \frac{N}{2} \sin\theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dn}{d\theta} = \frac{N}{2} \sin\theta \quad (4.528)$$

Volendo mettere in relazione il numero di eventi con la loro massa trasversa, cioè valutare $\frac{dn}{dM_T}$, iniziamo osservando che la funzione $M_T = M(\theta)$ non è iniettiva, quindi

$$\frac{dn}{dM_T} = \frac{dn}{d\theta_+} \left| \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_+}} \right| + \frac{dn}{d\theta_-} \left| \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_-}} \right|$$

dove gli angoli θ_{\pm} sono definiti da

$$M_T = M \sin\theta_{\pm} \Rightarrow \theta_+ \equiv \theta = \arcsin \frac{M_T}{M}; \quad \theta_- = \pi - \theta, \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

da cui segue che

$$\left| \frac{dM_T}{d\theta_{\pm}} \right| = M \cos\theta \quad (4.529)$$

Dunque, in termini di questo angolo $\theta \equiv \arcsin \frac{M_T}{M}$, risulta infine

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dM_T} &= \frac{N}{2} \sin\theta \frac{1}{M \cos\theta} + \frac{N}{2} \sin\theta \frac{1}{M \cos\theta} = N \frac{M_T}{M} \frac{1}{M \sqrt{1 - \sin^2\theta}} \\ &= N \frac{M_T}{M} \frac{1}{\sqrt{M^2 - M_T^2}} \end{aligned} \quad (4.530)$$

Ovvero, in termini della variabile adimensionale

$$\mu \equiv \frac{M_T}{M}$$

abbiamo

$$\frac{dn}{d\mu} = N \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (4.531)$$

da cui, finalmente, consegue una densità di probabilità degli eventi per $0 \leq \mu \leq 1$ data da²³⁷

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathcal{P}}{d\mu^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2}} \quad (4.532)$$

Questa densità di probabilità presenta un picco (asintoto verticale !) per $\mu = 1$, che è dovuto all'annullarsi, della derivata $\frac{dM}{d\theta}$ per $\theta = \pi/2$. Per questo motivo, essendo il picco dovuto al cambiamento di variabile $\theta \rightarrow M_T$, esso viene detto *picco jacobiano*. Usualmente il picco jacobiano non è così netto come la matematica vorrebbe, a causa dello *smearing* di M_T , dovuto sia alle incertezze di misura come alla indeterminazione naturale del valore della massa della particella che decade, legata al principio di indeterminazione.

Per quanto riguarda l'effetto delle incertezze dovute alla misura di M_T , se indichiamo con $P(m|\mu)$ la densità di probabilità di misurare un valore compreso fra m ed $m + dm$, quando il valore vero di M_T/M è compreso fra μ e $\mu + d\mu$, i dati sperimentali relativi ad m si distribuiscono secondo la curva

$$\frac{d\mathcal{P}}{dm} = \int_0^1 \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} P(m|\mu) d\mu \quad (4.533)$$

La figura (48) mostra l'effetto di smearing dovuto all'accuratezza della misura della massa trasversa (normalizzata), nel caso in cui

$$P(m|\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.534)$$

con $\sigma = 0.2$, $\sigma = 0.1$ e $\sigma = 0.05$, rispettivamente.

Nella realtà, sia il W^- come il W^+ , prodotti, rispettivamente, dalla fusione di due quarks \bar{u} , d e \bar{d} , u , dell'antiprotone e del protone, operata dalle interazioni deboli, sono completamente polarizzati longitudinalmente ed il loro spin è diretto, in entrambi i casi, nel verso del fascio degli antiprotoni (vedi fig 49).

Questo accade perchè le interazioni deboli selezionano l'elicità della particella pari a -1 e quella dell'antiparticella pari a $+1$.

²³⁷E' immediato verificare che questa densità di probabilità è normalizzata ad 1, come deve.

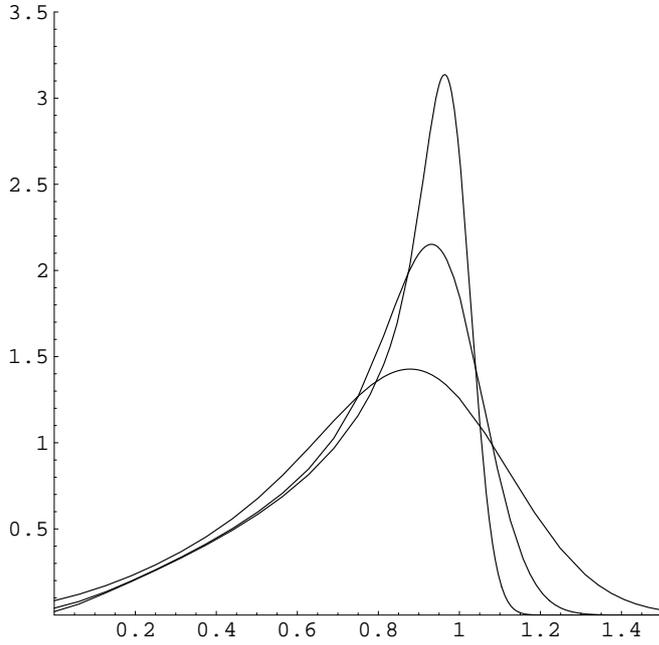


Figure 48: *Picco jacobiano $\frac{d\mathcal{P}}{dm}$ per tre diverse risoluzioni della massa*

La polarizzazione del W rende non isotropo il decadimento. Per il W^- , infatti, la distribuzione degli elettroni è data da

$$d\mathcal{P} = \frac{3}{8} (1 - \cos\theta)^2 \sin\theta d\theta \quad (4.535)$$

mentre, per quanto riguarda il W^+ , polarizzato come il W^- , essendo, per quanto detto sopra circa le interazioni deboli, l'elicità del positrone emesso opposta a quella dell'elettrone, risulta

$$d\mathcal{P} = \frac{3}{8} (1 + \cos\theta)^2 \sin\theta d\theta \quad (4.536)$$

Mediando allora le due distribuzioni, ovvero prescindendo dal segno della carica elettrica dell'elettrone, la distribuzione risultante è, ovviamente, la seguente:

$$d\mathcal{P} = \frac{3}{8} (1 + \cos^2\theta) \sin\theta d\theta \quad (4.537)$$

e quindi, ripetendo i conti fatti prima, si ha²³⁸ stavolta

$$\frac{d\mathcal{P}}{dM_T} = 2 \frac{d\mathcal{P}}{d\theta} \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta}} = \frac{3}{4} (1 + \cos^2\theta) \sin\theta \frac{1}{M \cos\theta} =$$

²³⁸Il fattore 2, come già, detto, dipende dal fatto che esistono due angoli, θ e $\pi - \theta$, che forniscono lo stesso M_T .

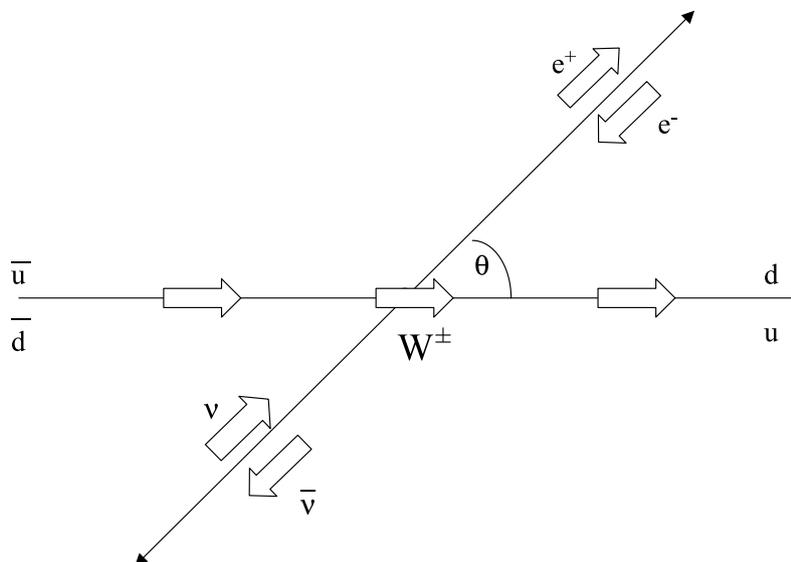


Figure 49: Polarizzazione del W

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{4} (1 + 1 - \sin^2\theta) \frac{\sin\theta}{M \cos\theta} \\
 \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} &= \frac{3}{4} (2 - \mu^2) \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad (4.538)
 \end{aligned}$$

ovvero, al posto della (4.532), otteniamo²³⁹ adesso

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = \frac{3}{4} (2 - \mu^2) \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathcal{P}}{d\mu^2} = \frac{3}{8} \frac{2 - \mu^2}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad (4.539)$$

che continua, naturalmente, a presentare un picco jacobiano del tutto simile a quello già discusso nel caso (4.532), riferito al decadimento isotropo del W nel CM, dato che questo è originato dalla trasformazione di variabile, intorno a $\mu = 1$, dove, in entrambi i casi, le funzioni sono comunque diverse da zero e regolari.

Il picco jacobiano, comunque, è tipico del decadimento a due corpi, infatti, nel caso di un decadimento a più di due corpi, la distribuzione in impulso trasverso di una qualunque delle particelle prodotte *non* presenta più alcun picco !

Come esempio, dove di nuovo si possono trascurare le masse, si può considerare il decadimento

$$\tau \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau \quad (4.540)$$

²³⁹Risulta immediato dimostrare che la distribuzione di probabilità così ottenuta è normalizzata ad 1, come deve essere.

In questo caso, se è lecito continuare a trascurare la massa dell'elettrone (0.511 MeV) nei confronti di quella del τ (1.77 GeV), *non* è lecito invece trascurare la *massa invariante* del sistema ($\bar{\nu}_e \nu_\tau$), che sarà pari a

$$m^2 = 2 E_{\nu_e} E_{\nu_\tau} (1 - \cos\theta)$$

dove θ è l'angolo fra le direzioni di volo dei due neutrini mentre E_{ν_e} ed E_{ν_τ} sono le loro energie. La conservazione del quadrimpulso richiede ancora che se (p, \vec{p}) è il quadrimpulso dell'elettrone, allora

$$(M_\tau, \vec{0}) = (p, \vec{p}) + (\sqrt{m^2 + p^2}, -\vec{p})$$

da cui ricaviamo ($M = M_\tau$)

$$p = \frac{M^2 - m^2}{2M}$$

e dunque, per l'elettrone risulta

$$p_T = p \sin\theta = \frac{M^2 - m^2}{2M} \sin\theta$$

dove, adesso, m è una variabile, essendo, come detto sopra, la massa invariante del sistema dei due neutrini. Questo fatto implica che non esista più una corrispondenza diretta fra l'angolo θ e l'impulso trasverso dell'elettrone p_T .

In questo caso la probabilità di decadimento del τ con l'elettrone di impulso trasverso p_T vale²⁴⁰

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp_T} = \int \delta(p \sin\theta - p_T) \mathcal{P}(m^2, \theta) dm^2 \sin\theta d\theta$$

²⁴⁰Così come nel caso di un decadimento isotropo a due corpi essa valeva (per definizione, in questo caso, la massa trasversa era doppia dell'impulso trasverso del solo elettrone ...)

$$\frac{d\mathcal{P}}{dm_T} = \int \delta(M \sin\theta - m_T) \mathcal{P}(\theta) \sin\theta d\theta = \int \delta(M \sin\theta - m_T) \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$$

che infatti fornisce

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dm_T} &= \int \delta(\theta - \bar{\theta}) \frac{1}{2} \sin\theta d\theta \frac{1}{\left. \frac{d(M \sin\theta - m_T)}{d\theta} \right|_{M \sin\theta = m_T}} \\ &= \frac{1}{2} \sin\bar{\theta} \frac{1}{M \cos\bar{\theta}} 2 \end{aligned}$$

dove il fattore 2 è dovuto all'esistenza di due soluzioni in $\bar{\theta}$ per l'equazione $M \sin\bar{\theta} = m_T$, dalla quale si ricava $\sin\bar{\theta} = \mu \equiv \frac{m_T}{M}$ e quindi, come già visto,

$$\frac{d\mathcal{P}}{dm_T} = \frac{\mu}{M \sqrt{1 - \mu^2}} \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

Essendo $\mathcal{P}(m^2, \theta)$ adesso una funzione di due variabili, il risultato dell'integrale non presenta più alcuna divergenza. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}}{dp_T} &= \int \delta(p \sin\theta - p_T) \mathcal{P}(m^2, \theta) dm^2 \sin\theta d\theta \\
&= \int \delta\left(\frac{M^2 - m^2}{2M} \sin\theta - p_T\right) \mathcal{P}(m^2, \theta) dm^2 \sin\theta d\theta \\
&= \int \frac{1}{\frac{\sin\theta}{2M}} \delta(m^2 - m^2(\theta)) \mathcal{P}(m^2, \theta) dm^2 \sin\theta d\theta \\
&= 2M \int \mathcal{P}(m^2(\theta), \theta) d\theta
\end{aligned}$$

dove $m^2(\theta)$ è, fissato p_T , la soluzione, in m^2 dell'equazione

$$\frac{M^2 - m^2}{2M} \sin\theta - p_T = 0 \Rightarrow m^2(\theta) = M^2 - \frac{2M p_T}{\sin\theta}$$

Nel caso in cui, per esempio, \mathcal{P} fosse costante, essa varrebbe

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp_T} = 2M \mathcal{P} \Delta\theta$$

dove $\Delta\theta$ è l'intervallo angolare per cui, fissati p_T ed M , può essere verificata la condizione

$$\frac{M^2 - m^2}{2M} \sin\theta - p_T = 0$$

da un opportuno valore di m^2 per il sistema dei due neutrini.

Ritornando adesso alla massa trasversa, nel caso di un generico decadimento

$$A \rightarrow B + C + \dots + D$$

fissata comunque una direzione longitudinale²⁴¹ \vec{n} e quindi un piano *trasverso* ad essa, avremo

$$(E_A, \vec{p}_A^T + p_A^L) = (E_B, \vec{p}_B^T + p_B^L) + (E_C, \vec{p}_C^T + p_C^L) + \dots + (E_D, \vec{p}_D^T + p_D^L) \quad (4.541)$$

dove, separatamente, deve accadere che

$$\begin{aligned}
\vec{p}_A^T &= \vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T \\
p_A^L &= p_B^L + p_C^L + \dots + p_D^L
\end{aligned}$$

²⁴¹Essa, solitamente, coincide con la direzione di volo della particella A , anche se, per quanto stiamo per dire, non è strettamente necessario.

Se definiamo, per ognuna delle particelle prodotte, il suo quadrimpulso trasverso nel modo già illustrato, che corrisponde a trascurarne comunque la massa, il quadrimpulso trasverso complessivo che potremo definire per i prodotti è

$$\left(p_B^T + p_C^T + \dots + p_D^T, \vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T\right) \quad (4.542)$$

a cui corrisponde una *massa trasversa* del sistema pari a

$$M_T^2 \equiv \left(p_B^T + p_C^T + \dots + p_D^T\right)^2 - \left|\vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T\right|^2 \quad (4.543)$$

Si può dimostrare che la massa trasversa è sempre inferiore alla massa invariante del sistema: questa informazione può essere utile se vogliamo usare, la massa trasversa, per esempio, per verificare se la particella all'origine del decadimento sia o no la particella A : se la massa trasversa (rispetto ad una direzione arbitraria) dei prodotti risulta maggiore di M_A , questi non possono essere stati originati dal decadimento di A .

Ma veniamo alla dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} M_A^2 &= (E_B + E_C + \dots + E_D)^2 - \left|\vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T\right|^2 - \left(p_B^L + p_C^L + \dots + p_D^L\right)^2 = \\ &= E_B^2 + E_C^2 + \dots + E_D^2 + 2E_B E_C + 2E_B E_D + \dots + 2E_C E_D - \\ &\quad - (p_B^L)^2 - (p_C^L)^2 - \dots - (p_D^L)^2 - 2p_B^L p_C^L - 2p_B^L p_D^L - \dots - 2p_C^L p_D^L - \\ &\quad - \left|\vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T\right|^2 = \\ &= \left[E_B^2 - (p_B^L)^2\right] + \left[E_C^2 - (p_C^L)^2\right] + \dots + \left[E_D^2 - (p_D^L)^2\right] + \\ &\quad + 2\left(E_B E_C - p_B^L p_C^L\right) + 2\left(E_B E_D - p_B^L p_D^L\right) + \dots + 2\left(E_C E_D - p_C^L p_D^L\right) - \\ &\quad - \left|\vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T\right|^2 = \\ &= \left[m_B^2 + |\vec{p}_B^T|^2\right] + \left[m_C^2 + |\vec{p}_C^T|^2\right] + \dots + \left[m_D^2 + |\vec{p}_D^T|^2\right] + \\ &\quad + 2\left(E_B E_C - p_B^L p_C^L\right) + 2\left(E_B E_D - p_B^L p_D^L\right) + \dots + 2\left(E_C E_D - p_C^L p_D^L\right) - \\ &\quad - \left|\vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T\right|^2 \end{aligned}$$

da cui, usando la definizione (4.543) di massa trasversa, si ha

$$\begin{aligned} M_A^2 &= m_B^2 + m_C^2 + \dots + m_D^2 + M_T^2 + 2\left(E_B E_C - p_B^L p_C^L - p_B^T p_C^T\right) + \\ &\quad + 2\left(E_B E_D - p_B^L p_D^L - p_B^T p_D^T\right) + \dots + 2\left(E_C E_D - p_C^L p_D^L - p_C^T p_D^T\right) \end{aligned} \quad (4.544)$$

D'altronde, ciascun termine in parentesi è non negativo. Prendiamo infatti, per esempio, il primo addendo: dalla definizione risulta

$$\begin{aligned} E_B &= \sqrt{m_B^2 + (p_B^T)^2 + (p_B^L)^2} \geq \sqrt{(p_B^T)^2 + (p_B^L)^2} \equiv p_B \geq 0 \\ E_C &= \sqrt{m_C^2 + (p_C^T)^2 + (p_C^L)^2} \geq \sqrt{(p_C^T)^2 + (p_C^L)^2} \equiv p_C \geq 0 \end{aligned}$$

mentre esisteranno due angoli α e β nel primo quadrante, tali che

$$\begin{aligned} p_B^T &= p_B \sin\alpha; & p_B^L &= p_B \cos\alpha \\ p_C^T &= p_C \sin\beta; & p_C^L &= p_C \cos\beta \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} E_B E_C - p_B^L p_C^L - p_B^T p_C^T &\geq E_B E_C - p_B p_C \cos\alpha \cos\beta - p_B p_C \sin\alpha \sin\beta \\ &\geq E_B E_C - E_B E_C \cos\alpha \cos\beta - E_B E_C \sin\alpha \sin\beta = E_B E_C [1 - \cos(\alpha - \beta)] \geq 0 \end{aligned}$$

Dalla (4.544) si ha allora

$$\begin{aligned} M_A^2 &= m_B^2 + m_C^2 + \dots + m_D^2 + M_T^2 + 2(E_B E_C - p_B^L p_C^L - p_B^T p_C^T) + \\ &\quad + 2(E_B E_D - p_B^L p_D^L - p_B^T p_D^T) + \dots + 2(E_C E_D - p_C^L p_D^L - p_C^T p_D^T) \geq \\ &\geq m_B^2 + m_C^2 + \dots + m_D^2 + M_T^2 \end{aligned} \quad (4.545)$$

e dunque, finalmente,

$$M_T^2 \leq M_A^2 - \sum_{\text{prodotti}} m^2 \leq M_A^2 \quad (4.546)$$

Talvolta, per le particelle finali identificate, si definisce il quadrimpulso trasverso tenendo conto della massa, i.e. ponendolo pari a

$$(\sqrt{m^2 + |\vec{p}^T|^2}, \vec{p}^T) \quad (4.547)$$

E' facile vedere allora che, in questo caso, la disuguaglianza (4.546) diventa

$$M_T^2 \leq M_A^2 - \sum_j m_j^2 \quad (4.548)$$

dove la somma è estesa alle sole particelle per cui *non* si è usata la definizione (4.547). Supponiamo, infatti, che B sia identificabile fra i prodotti del decadimento e per questa particella si usi la (4.547). Risulta

$$\begin{aligned} M_A^2 &= [m_B^2 + |\vec{p}_B^T|^2] + [m_C^2 + |\vec{p}_C^T|^2] + \dots + [m_D^2 + |\vec{p}_D^T|^2] + 2(E_B E_C - p_B^L p_C^L) \\ &\quad + 2(E_B E_D - p_B^L p_D^L) + \dots + 2(E_C E_D - p_C^L p_D^L) - |\vec{p}_B^T + \vec{p}_C^T + \dots + \vec{p}_D^T|^2 = \\ &= [m_B^2 + |\vec{p}_B^T|^2] + [m_C^2 + |\vec{p}_C^T|^2] + \dots + [m_D^2 + |\vec{p}_D^T|^2] + 2(E_B E_C - p_B^L p_C^L) \\ &\quad + 2(E_B E_D - p_B^L p_D^L) + \dots + 2(E_C E_D - p_C^L p_D^L) + \\ &\quad + M_T^2 - (E_B^T + p_C^T + \dots + p_D^T)^2 = \\ &= m_C^2 + \dots + m_D^2 + M_T^2 + 2(E_B E_C - p_B^L p_C^L - E_B^T p_C^T) + \\ &\quad + 2(E_B E_D - p_B^L p_D^L - E_B^T p_D^T) + \dots + 2(E_C E_D - p_C^L p_D^L - p_C^T p_D^T) \end{aligned}$$

e ripetendo lo stesso argomento già usato sopra, si dimostra che anche le nuove espressioni entro parentesi tonda sono non negative, per cui la (4.548) risulta dimostrata.

4.3 Trasformazione di una distribuzione di particelle

Considereremo adesso il problema di come viene alterata una distribuzione in impulso, riferentesi a particelle di massa m assegnata, a causa di una trasformazione di riferimento.

Supponiamo dunque che, in un certo riferimento inerziale, sia data una distribuzione di particelle, che scriveremo nella forma

$$dn = N f(\vec{p}) d^3p \Rightarrow d\mathcal{P} = f(\vec{p}) d^3p \quad (4.549)$$

dove $f(\vec{p})$ è la funzione di distribuzione associata, i.e. la distribuzione di probabilità, normalizzata appunto in modo che

$$\int f(\vec{p}) d^3p = 1 \quad (4.550)$$

Secondo la Relatività di Galileo, osservando il sistema di particelle dato da un altro riferimento inerziale, la distribuzione f' che lo descrive è semplicemente ottenuta dalla f attraverso una traslazione nello spazio dell'impulso, infatti, nel nuovo riferimento avremo semplicemente che

$$\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{v}$$

dove \vec{v} è la velocità relativa del secondo riferimento rispetto al primo.

Ne segue dunque che

$$d^3p' = d^3p$$

e quindi che

$$f(\vec{p}) d^3p = f(\vec{p}' + m\vec{v}) d^3p' \equiv f'(\vec{p}') d^3p' \quad (4.551)$$

dove si è posto appunto

$$f'(\vec{p}') \equiv f(\vec{p}(\vec{p}')) = f(\vec{p}' + m\vec{v}) \quad (4.552)$$

In meccanica relativistica, la prima differenza a cui ci troviamo di fronte è che l'elemento di volume d^3p *non* è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Una quantità, legata in modo semplice a d^3p che, fissata la particella e quindi la sua massa m , è invariante per trasformazioni di Lorentz è, invece, la quantità

$$d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0) \quad (4.553)$$

dove la δ è la funzione δ di Dirac, mentre la funzione $\theta(p^0)$ vale 1 quando $p^0 > 0$, mentre vale 0 altrimenti. E' chiaro che la (4.553) è una quantità invariante, essendo il prodotto di tre scalari che sono

- d^4p : esso è scalare perchè le trasformazioni di Lorentz hanno determinante 1 e quindi lo jacobiano della trasformazione $J = \left| \frac{\partial p}{\partial p'} \right| = |\det(\Lambda_{Lorentz})| = 1$;

- $\delta(p^\mu p_\mu - m^2)$, in quanto funzione di scalari;
- $\theta(p^0)$, in quanto il segno di p^0 non cambia per trasformazioni di \mathcal{L}_+^\uparrow , come abbiamo già dimostrato per i quadrivettori time-like come il quadrimpulso.

Più esplicitamente, abbiamo

$$\begin{aligned} d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0) &= d^3p dp^0 \delta(p_0^2 - p^2 - m^2) \theta(p^0) = \\ &= d^3p dp^0 \theta(p^0) \left[\frac{\delta(p^0 - \sqrt{m^2 + p^2})}{2\sqrt{m^2 + p^2}} + \frac{\delta(p^0 + \sqrt{m^2 + p^2})}{2\sqrt{m^2 + p^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.554)$$

dove abbiamo usato il fatto che se x_1, \dots, x_n sono le radici dell'equazione $f(x) = 0$, allora se $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \neq 0$, risulta

$$\delta(f(x)) dx = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \right|} dx \quad (4.555)$$

Integrando²⁴² in dp^0 , risulta allora che, siccome $\theta(p^0)$ è nullo se p^0 è negativo, il secondo addendo dell'espressione (4.554) non contribuisce e quindi risulta

$$\begin{aligned} d^3p \int dp^0 \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0) &= d^3p \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{m^2 + p^2})}{2\sqrt{m^2 + p^2}} = \\ &= \frac{d^3p}{2E} \end{aligned} \quad (4.556)$$

dove abbiamo posto, per semplicità $E \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$ ed è inteso altresì che, in qualunque punto della funzione integranda comparisse p^0 , occorre sostituirlo con $E = E(p)$.

Dunque, se è vero che d^3p non è invariante di Lorentz, $\frac{d^3p}{2E}$ lo è²⁴³ (naturalmente lo sarebbe anche senza il 2 al denominatore ...).

²⁴²Evidentemente, per garantire che anche il risultato dell'integrazione sia invariante di Lorentz, occorre, oltrechè accertarci, come abbiamo fatto, che la funzione integranda sia scalare, accertarci anche che il volume di integrazione lo sia. Nel caso in questione, stiamo integrando su tutti i possibili valori di p^0 , ovvero per $p^0 \geq m$, e questo è evidentemente un "volume" Lorentz-invariante.

²⁴³Possiamo giungere allo stesso risultato, i.e. che $\frac{d^3p}{E}$ è invariante, anche in un altro modo, ed è quello di procedere direttamente osservando che, a parte rotazioni, che lasciano comunque sia d^3p che E invarianti, fra i due riferimenti ci sarà di mezzo un boost di Lorentz che possiamo assumere avvenga lungo z (a meno di rotazioni che sono ininflenti). A causa del boost, avremo allora

$$\begin{aligned} E' &= \gamma E + \beta \gamma p_z \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= \beta \gamma E + \gamma p_z \end{aligned}$$

Ripartiamo, allora, dalla distribuzione data:

$$dn = N f(\vec{p}) d^3p \quad \Leftrightarrow \quad d\mathcal{P} = f(\vec{p}) d^3p \quad (4.557)$$

che fornisce la probabilità che una particella si trovi nell'elemento di volume d^3p , quando viene osservata nel riferimento di partenza RS . Visto quanto concluso circa l'invarianza degli elementi di volume, possiamo riscrivere la (4.557) in modo che compaia l'elemento di volume invariante, ponendo

$$d\mathcal{P} = f(\vec{p}) d^3p = 2E f(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \equiv F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \quad (4.558)$$

dove abbiamo definito

$$F(\vec{p}) \equiv 2E f(\vec{p}) \quad (4.559)$$

In un altro sistema di riferimento inerziale RS' avremo, in generale

$$\vec{p}' = \vec{G}(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = \vec{G}^{-1}(\vec{p}') \quad (4.560)$$

dove la funzione G è determinata unicamente dalla trasformazione di Lorentz e dalla massa m della particella²⁴⁴.

Per conoscere l'espressione della distribuzione delle particelle nel riferimento RS' ripartiamo dalla definizione iniziale, secondo cui, in RS , avevamo

$$dn = N F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \quad (4.561)$$

per cui lo jacobiano (si ricordi che E ed E' non sono indipendenti da p e p' , risultando $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ e, analogamente $E' = \sqrt{m^2 + p'^2}$) associato al cambiamento di variabile è

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p'}{\partial p} \right| &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma \frac{p_x}{E} & \beta\gamma \frac{p_y}{E} & \beta\gamma \frac{p_z}{E} + \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \gamma \left(1 + \beta \frac{p_z}{E} \right) = \frac{\gamma}{E} (E + \beta p_z) = \frac{E'}{E} \end{aligned}$$

ovvero

$$d^3p' = \left| \frac{\partial p'}{\partial p} \right| d^3p \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'} \quad c.v.d.$$

²⁴⁴Per esempio, per un boost lungo l'asse z , si ha

$$\begin{aligned} p'_x &= G_x(\vec{p}) = p_x \\ p'_y &= G_y(\vec{p}) = p_y \\ p'_z &= G_z(\vec{p}) = \gamma(p_z + \beta E) = \gamma \left(p_z + \beta \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \right) \\ E' &\equiv \sqrt{m^2 + p'^2} \end{aligned}$$

dove dn rappresenta, dato un numero complessivo²⁴⁵ N di particelle, quelle che hanno in RS impulso compreso fra \vec{p} e $\vec{p} + d\vec{p}$, con $d^3p = dp_1 dp_2 dp_3$.

Evidentemente, nel riferimento RS' il numero dn di particelle che stanno nel volume d^3p' trasformato di d^3p sarà lo stesso che in RS ; dunque, dato che, fissata la massa, \vec{p} identifica completamente la cinematica della particella ed N è uno scalare, potremo scrivere senz'altro ancora che anche in RS' sarà

$$dn = N F'(\vec{p}') \frac{d^3p'}{2E'} \quad (4.562)$$

dove \vec{p}' è il trasformato di \vec{p} .

Uguagliando allora la (4.561) con la (4.562) e ricordando che $\frac{d^3p}{2E} = \frac{d^3p'}{2E'}$, ne segue finalmente che

$$F'(\vec{p}') = F(\vec{p}) = F(G^{-1}(\vec{p}')) \Leftrightarrow F' = F \circ G^{-1} \quad (4.563)$$

che è l'equivalente relativistico della relazione classica (4.551) e dimostra che la distribuzione F definita attraverso la (4.558), è invariante per trasformazioni di Lorentz, ovvero è una funzione scalare.

Si osservi infine che per basse velocità relative fra i sistemi di riferimento e basse velocità delle particelle presenti nel sistema considerato, essendo allora

$$E \approx E' \approx m \quad (4.564)$$

ritroviamo, a meno del fattore di scala altrimenti irrilevante $\frac{1}{2m}$, la conclusione "galileiana".

²⁴⁵Evidentemente questo numero di particelle non cambia al cambiare del riferimento, ovvero esso è uno scalare di Lorentz.

4.4 Decadimento di una particella in volo

Supponiamo adesso che, in un riferimento assegnato RS , siano presenti particelle ferme, che decadono in modo isotropo. Se il decadimento avviene in due particelle C e D , la distribuzione associata a ciascuna di loro sarà, per quanto già visto, *monocromatica* (siamo nel riferimento del CM ...). Ognuna possiede lo stesso impulso b , legato alla massa M ($M = \sqrt{s}$!) della particella instabile ed alle masse m_C ed m_D delle due particelle²⁴⁶ prodotte, dalla consueta relazione (4.428), i.e.

$$b = \frac{\sqrt{(M^2 - m_C^2 - m_D^2)^2 - 4m_C^2 m_D^2}}{2M} \quad (4.565)$$

mentre, per la (4.429), abbiamo che

$$E_C = \sqrt{m_C^2 + b^2} = \frac{M^2 + m_C^2 - m_D^2}{2M} \quad (4.566)$$

$$E_D = \sqrt{m_D^2 + b^2} = \frac{M^2 + m_D^2 - m_C^2}{2M} \quad (4.567)$$

la cui somma coincide, ovviamente, con M .

Consideriamo adesso, sempre nel riferimento RS del CM , la distribuzione in impulso di una delle due particelle prodotte, diciamo della particella C , ed indichiamo semplicemente con m la sua massa. Essendo per ipotesi il decadimento isotropo, risulterà

$$dn = N \delta(p - b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (4.568)$$

e la particella avrà quindi, in generale, un quadrimpulso²⁴⁷ dato da

$$p^\mu = (E, p \sin\theta \cos\phi, p \sin\theta \sin\phi, p \cos\theta); \quad E = \sqrt{m^2 + p^2} \quad (4.569)$$

Quanto alla distribuzione di probabilità, dalla (4.568) segue evidentemente che

$$d\mathcal{P} = \delta(p - b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (4.570)$$

²⁴⁶Ricordiamo che il Q della reazione è definito da

$$Q \equiv M - m_C - m_D$$

e quindi rappresenta l'energia di massa che il decadimento trasformerà in energia cinetica dei prodotti, nel CM .

²⁴⁷La presenza della delta impone poi che $p = b$...

ovvero, in termini della funzione di distribuzione Lorentz-invariante $F(\vec{p})$ definita dalla relazione

$$d\mathcal{P} \equiv F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} \quad (4.571)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} F(\vec{p}) \frac{d^3p}{2E} &= \delta(p-b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \Rightarrow F(\vec{p}) \frac{p^2}{2E} dp d\Omega = \delta(p-b) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &\Rightarrow F(\vec{p}) = \frac{2E}{4\pi p^2} \delta(p-b) \end{aligned} \quad (4.572)$$

Supponiamo ora di voler conoscere la forma assunta dalla distribuzione descritta in RS dalla (4.572), quando le particelle sono osservate da un altro riferimento inerziale RS' , in moto rispetto ad RS , tale, per esempio che una particella in quiete in RS sia vista muoversi in RS' con velocità β lungo z . Il boost di Lorentz da RS in RS' , evidentemente, è

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (4.573)$$

per cui, il generico quadrimpulso (E, \vec{p}) in RS è visto in RS' come

$$(E', \vec{p}') = (\gamma E + \beta\gamma p_z, p_x, p_y, \beta\gamma E + \gamma p_z) \quad (4.574)$$

ovvero, nel caso di una particella della distribuzione considerata, in cui il quadrimpulso in RS è dato dalla (4.569), risulta

$$(E', \vec{p}') = (\gamma E + \beta\gamma p \cos\theta, p \sin\theta \cos\phi, p \sin\theta \sin\phi, \beta\gamma E + \gamma p \cos\theta) \quad (4.575)$$

dove θ e ϕ sono le coordinate polari definite in RS .

Da quanto precede, essendo per quanto visto precedentemente $F(\vec{p}) = F'(\vec{p}')$, ecco che, quanto alla distribuzione delle particelle in RS' , segue che

$$d\mathcal{P} = F'(\vec{p}') \frac{d^3p'}{2E'} = \frac{2E}{4\pi p^2} \delta(p-b) \frac{d^3p'}{2E'} \quad (4.576)$$

dove le quantità E e p che compaiono nella (4.576) devono essere considerate entrambe funzioni di \vec{p}' . Queste funzioni si ottengono semplicemente invertendo la (4.574), per cui si ha²⁴⁸

$$E = \gamma E' - \beta\gamma p' \cos\theta' \quad (4.577)$$

²⁴⁸Basta per questo applicare $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$ al quadrivettore (E', \vec{p}') ...

da cui

$$p^2 = E^2 - m^2 \Rightarrow p = \sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta']^2 - m^2} \quad (4.578)$$

dove θ' indica l'angolo polare in RS' che descrive \vec{p}' .

Esplicitamente, risulta

$$d\mathcal{P} = \frac{\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta'}{2\pi[(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2]} \delta(\sqrt{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} - b) \cdot \frac{p'^2}{2E'} dp' d\Omega' \quad (4.579)$$

la cui integrazione nell'angolo azimutale ϕ' , data la simmetria assiale intorno a z , produce semplicemente un fattore moltiplicativo 2π , per cui²⁴⁹, in definitiva, si ha

$$d\mathcal{P} = \frac{\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta'}{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} \delta(\sqrt{[(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2]} - b) \cdot \frac{p'^2}{2E'} dp' d(-\cos \theta') \quad (4.580)$$

la quale diventa un po' più comprensibile se la integriamo in una qualsiasi delle due variabili da cui continua a dipendere, cioè p' oppure $\cos \theta'$.

Distribuzione in energia

La distribuzione in energia si ottiene integrando la (4.580) nella variabile angolare $d(\cos \theta')$ e questo conduce al risultato già noto di una distribuzione piatta. Per dimostrarlo iniziamo riscrivendo la (4.580) in termini delle variabili E e p di cui alle (4.577) e (4.578): abbiamo allora

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2}{2E'} dp' d(-\cos \theta') \quad (4.581)$$

Osserviamo adesso che, a p' fissato, la (4.577) stabilisce che²⁵⁰

$$dE = \beta \gamma p' d(-\cos \theta') \Rightarrow d(-\cos \theta') = \frac{dE}{\beta \gamma p'} \quad (4.582)$$

Sostituendo allora nella (4.581), si ha

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2}{2E'} dp' \frac{dE}{\beta \gamma p'} = \frac{E dE}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2 dp'}{2E' \beta \gamma p'} \quad (4.583)$$

²⁴⁹Si ricordi che $d\Omega' \equiv \sin \theta' d\theta' d\phi'$ per cui, dopo l'integrazione in $d\phi'$, dell'elemento di angolo solido $d\Omega'$ resta solamente la quantità $\sin \theta' d\theta' = d(-\cos \theta')$...

²⁵⁰Questo corrisponde più propriamente a dire che, al posto delle variabili $(p', \cos \theta')$ usiamo le variabili (p', E) e lo jacobiano della trasformazione di variabili è appunto $J = \frac{1}{\beta \gamma p'}$.

D'altronde, essendo

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow 2E dE = 2p dp \quad (4.584)$$

risulta dunque

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{p dp}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2 dp'}{2E' \beta \gamma p'} = \frac{dp}{p} \delta(p - b) \frac{p' dp'}{2E' \beta \gamma} = \\ &= \frac{dp}{p} \delta(p - b) \frac{E' dE'}{2E' \beta \gamma} = \frac{dp}{p} \delta(p - b) \frac{dE'}{2\beta \gamma} \end{aligned} \quad (4.585)$$

che, integrata in dp , fornisce finalmente

$$d\mathcal{P} = \frac{dE'}{2b \beta \gamma} \quad (4.586)$$

la quale afferma appunto che una distribuzione isotropa e monocromatica in RS di particelle di massa m e modulo di impulso b , appare in RS' distribuita in modo *piatto* in energia, fra i valori estremi²⁵¹

$$E'_{min} = \gamma E - \beta \gamma b \quad E'_{max} = \gamma E + \beta \gamma b \quad (4.587)$$

Distribuzione angolare

Volendo determinare ora la distribuzione angolare, riprendiamo l'espressione (4.580), secondo cui, sempre usando le variabili implicite E e p , come si è già visto, si ha

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p - b) \frac{p'^2}{2E'} dp' d(-\cos\theta') \quad (4.588)$$

Occorre adesso integrare l'espressione di cui sopra nella variabile dp' .

Come sappiamo, quanto alla delta, in generale risulta

$$\delta(p - b) dp' \equiv \sum_i \frac{\delta(p' - p'_i)}{\left| \frac{dp}{dp'} \right|} dp' \quad (4.589)$$

dove p'_i sono radici dell'equazione $p - b = 0$.

D'altronde, per la (4.578), risulta

$$p = \sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos\theta']^2 - m^2}; \quad \text{con} \quad E' = \sqrt{p'^2 + m^2} \quad (4.590)$$

²⁵¹Si noti che, come deve essere, risulta

$$\int_{E_{min}}^{E_{max}} d\mathcal{P} = \int_{\gamma E - \beta \gamma b}^{\gamma E + \beta \gamma b} \frac{dE'}{2b \beta \gamma} = 1$$

e dunque

$$\frac{dp}{dp'} = \frac{2[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta'] \left(\gamma \frac{dE'}{dp'} - \beta \gamma \cos \theta' \right)}{2\sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta']^2 - m^2}} \quad (4.591)$$

Siccome però

$$\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta' = E \quad (4.592)$$

$$\sqrt{[\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta']^2 - m^2} = b \quad (4.593)$$

$$\frac{dE'}{dp'} = \frac{p'}{E'} \quad (4.594)$$

ecco che la (4.591) diventa

$$\frac{dp}{dp'} = \frac{\gamma E \left(\frac{p'}{E'} - \beta \cos \theta' \right)}{b} = \frac{\gamma E}{b E'} (p' - \beta E' \cos \theta') \quad (4.595)$$

Bisogna ora determinare il punto o i punti dove calcolare la derivata di cui sopra e per questo è necessario, come già detto, trovare gli zeri della funzione $p - b = 0$, i.e. risolvere in funzione di p' l'equazione seguente

$$p - b = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} - b = 0 \quad (4.596)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{(\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 - m^2} - b = 0 &\Rightarrow (\gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta')^2 = m^2 + b^2 \\ \Rightarrow \gamma E' - \beta \gamma p' \cos \theta' &= \sqrt{m^2 + b^2} \equiv E \end{aligned}$$

ovvero che

$$\gamma E' \equiv \gamma \sqrt{m^2 + p'^2} = E + \beta \gamma p' \cos \theta' \quad (4.597)$$

e dunque, posto

$$\epsilon \equiv \frac{E}{\gamma} \quad (4.598)$$

risulta

$$\sqrt{m^2 + p'^2} = \epsilon + \beta p' \cos \theta' \quad (4.599)$$

da cui otteniamo

$$m^2 + p'^2 = \epsilon^2 + \beta^2 p'^2 \cos^2 \theta' + 2\epsilon \beta p' \cos \theta' \quad (4.600)$$

e cioè

$$p'^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') - 2 \epsilon \beta p' \cos \theta' + m^2 - \epsilon^2 = 0 \quad (4.601)$$

L'equazione di secondo grado in p' così ottenuta ha per discriminante la quantità seguente

$$\begin{aligned} \Delta/4 &= \epsilon^2 \beta^2 \cos^2 \theta' - (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') (m^2 - \epsilon^2) = \\ &= \epsilon^2 \beta^2 \cos^2 \theta' + \epsilon^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') - m^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta') = \\ &= \epsilon^2 - m^2 + m^2 \beta^2 \cos^2 \theta' \end{aligned} \quad (4.602)$$

A priori, non è detto che l'espressione (4.602) sia positiva, nel qual caso, evidentemente, significa che *non* esistono soluzioni in p' , per quel dato valore di ϵ e $\cos \theta'$, dovendo, queste soluzioni, essere comunque reali positive.

D'altronde, è evidente che affinché Δ sia non negativo per qualunque valore di $\cos \theta'$, e quindi possa esistere una soluzione in p' per ogni suo valore, occorre e basta che

$$\epsilon^2 - m^2 \geq 0 \quad (4.603)$$

ovvero che

$$\epsilon \geq m \Leftrightarrow E \geq m \gamma \quad (4.604)$$

dove $E \equiv m \gamma_0$ è l'energia della particella nel sistema RS , per cui la (4.604) si può scrivere anche come

$$\sqrt{m^2 + b^2} \equiv m \gamma_0 \geq m \gamma \Leftrightarrow \beta_0 \geq \beta \quad (4.605)$$

ovvero ritroviamo il ben noto risultato secondo cui, affinché tutti gli angoli θ' siano possibili, occorre e basta che la velocità relativa fra i due riferimenti $\vec{\beta}$ sia in modulo inferiore a quello delle velocità $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{b}}{m \gamma_0}$ delle particelle in RS .

Supponiamo²⁵² dunque di essere nelle condizioni per cui²⁵³

$$\epsilon \geq m$$

²⁵²Nel caso in cui $m^2 > \epsilon^2$, ovvero nel caso in cui non tutti i θ' sono possibili, ma solo quelli del primo quadrante inferiori ad un opportuno θ'_{max} , definito dalle condizioni $\theta'_{max} \geq 0$, $\epsilon^2 - m^2(1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{max})' = 0$, le soluzioni p'_+ e p'_- dell'equazione di secondo grado (4.601) sono, per quanto osservato prima, dello stesso segno. Siccome però, quando θ' è nel primo quadrante p'_+ , per come è definito, non può che essere positivo, ne segue che anche p'_- deve esserlo.

Ci troviamo così nella situazione in cui, dunque, non tutti i θ' sono possibili, ma per quelli che lo sono le soluzioni in p' sono due e distinte, per cui, corrispondentemente, la (4.589) non è fatta dal solo termine riportato ma dalla somma di quello con l'analogo per p'_- .

²⁵³Si ricordi che ci troviamo certamente in questa ipotesi ogni qual volta la particella abbia massa nulla e dunque viaggi alla velocità della luce in ogni riferimento. Evidentemente, infatti, in questo caso ci troviamo sempre nella condizione di cui le velocità soddisfano la (4.605), ovvero ci troviamo nel caso in cui la particella ha, in RS , velocità superiore a quella relativa fra i due riferimenti...

ovvero nell'ipotesi in cui, quindi $\Delta \geq 0 \quad \forall \theta'; \quad 0 \leq \theta' < \pi$.

Siccome il coefficiente del termine in p'^2 dell'equazione di secondo grado (4.601) è positivo mentre il termine noto della stessa equazione ha il segno di $m^2 - \epsilon^2$, ovvero ha segno negativo, le due soluzioni in p' hanno segno discorde: ma d'altronde p' è il modulo di un vettore e non può che essere positivo per cui solo una soluzione è accettabile. Essa non può dunque essere che p'_+ , definita da

$$p'_+ = \frac{\epsilon \beta \cos\theta' + \sqrt{\Delta/4}}{1 - \beta^2 \cos^2\theta'} \quad (4.606)$$

visto che $p'_+ > p'_-$, per definizione.

In definitiva, dunque, la (4.588) può essere riscritta come²⁵⁴

$$d\mathcal{P} = \frac{E}{p^2} \delta(p' - p'_+) \frac{b E'}{\gamma E (p' - \beta E' \cos\theta')} \frac{p'^2}{2E'} dp' \sin\theta' d\theta' \quad (4.615)$$

²⁵⁴In questo modo si sta implicitamente assumendo che la quantità $\frac{\gamma E'}{p E'} (p' - \beta E' \cos\theta')$ sia comunque sempre positiva. Questo è vero se e solo se, evidentemente, risulta

$$p' - \beta E' \cos\theta' > 0 \quad (4.607)$$

Per dimostrare che questo è effettivamente vero, procediamo per assurdo e supponiamo che la (4.607) sia falsa, i.e. che risulti

$$p' - \beta E' \cos\theta' \leq 0 \quad (4.608)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} p' - \beta E' \cos\theta' \leq 0 &\Rightarrow (p')^2 \leq \beta E' p' \cos\theta' \Leftrightarrow E'^2 - m^2 \leq \beta p' E' \cos\theta' \\ &\Leftrightarrow E'^2 - \beta p' E' \cos\theta' \leq m^2 \Leftrightarrow E' (E' - \beta p' \cos\theta') \leq m^2 \end{aligned} \quad (4.609)$$

Usando la (4.592), abbiamo così che dalla (4.608) ne segue necessariamente che

$$\frac{E E'}{\gamma} \leq m^2 \Leftrightarrow E E' \leq \gamma m^2 \quad (4.610)$$

Dimostriamo che questa disuguaglianza è assurda. Consideriamo per questo il quadrimpulso della particella data nel CM . Esso è pari a $p^\mu = m\gamma_0(1, \vec{\beta}_0)$ dove $m\gamma_0 \equiv E$. Nel riferimento del laboratorio, l'energia diviene $E' = m\gamma_0\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}_0)$ dove $\vec{\beta}$ è la velocità del riferimento del CM vista dal sistema del laboratorio. Dunque

$$E' \geq m\gamma_0\gamma(1 - \beta\beta_0) \Leftrightarrow E E' \geq m\gamma_0\gamma(1 - \beta\beta_0) m\gamma^0 = m^2\gamma\gamma_0^2(1 - \beta\beta_0) \quad (4.611)$$

D'altronde $\beta < \beta_0$ per ipotesi, infatti abbiamo assunto che il riferimento del CM si muova "più piano" delle particelle nel CM stesso, dunque

$$1 - \beta\beta_0 > 1 - \beta_0^2 = \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (4.612)$$

e quindi, sostituendo, abbiamo

ovvero, integrando in dp' e ricordando che l'impulso che corrisponde in RS a p'_+ è comunque b , otteniamo

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{E}{b^2} \frac{p'_+{}^2}{2E'_+} \frac{b E'_+}{\gamma E(p'_+ - \beta E'_+ \cos\theta')} \sin\theta' d\theta' = \\ &= \frac{1}{2\gamma b} \frac{p'_+{}^2}{p'_+ - \beta E'_+ \cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \end{aligned} \quad (4.616)$$

dove, secondo la (4.606), risulta

$$p'_+ = \frac{\epsilon \beta \cos\theta' + \sqrt{\Delta/4}}{1 - \beta^2 \cos^2\theta'} \quad (4.617)$$

Nel caso in cui la massa della particella sia nulla²⁵⁵, essendo $E = b$ ed $E' = p'$, la relazione (4.616) si semplifica e diventa

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2\gamma b} \frac{p'_+}{1 - \beta \cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \quad (4.618)$$

dove

$$\begin{aligned} p'_+ &= \frac{\epsilon \beta \cos\theta' + \epsilon}{1 - \beta^2 \cos^2\theta'} = \frac{\epsilon(1 + \beta \cos\theta')}{1 - \beta^2 \cos^2\theta'} = \frac{\epsilon}{1 - \beta \cos\theta'} \\ &= \frac{E}{\gamma(1 - \beta \cos\theta')} \end{aligned} \quad (4.619)$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{1}{2\gamma b} \frac{E}{\gamma(1 - \beta \cos\theta')^2} \sin\theta' d\theta' = \\ &= \frac{1}{2\gamma^2(1 - \beta \cos\theta')^2} \sin\theta' d\theta' \end{aligned} \quad (4.620)$$

$$E E' > m^2 \gamma \gamma_0^2 \frac{1}{\gamma_0^2} = m^2 \gamma \quad (4.613)$$

che contraddice la (4.610) e quindi dimostra la validità della (4.607).

A rigore, quanto dimostrato vale solo per $m \neq 0$. Per $m = 0$, però, la condizione (4.607) è sempre certamente vera, infatti, essendo $E' = p'$, risulta

$$p' - \beta E' \cos\theta' = E' - \beta E' \cos\theta' = E'(1 - \beta \cos\theta') > 0 \quad (4.614)$$

²⁵⁵Evidentemente, in questo caso, la condizione $\epsilon^2 - m^2 \geq 0$ è sempre soddisfatta e dunque, fissati comunque ϵ e θ' , esiste sempre una ed una sola soluzione positiva in p' .

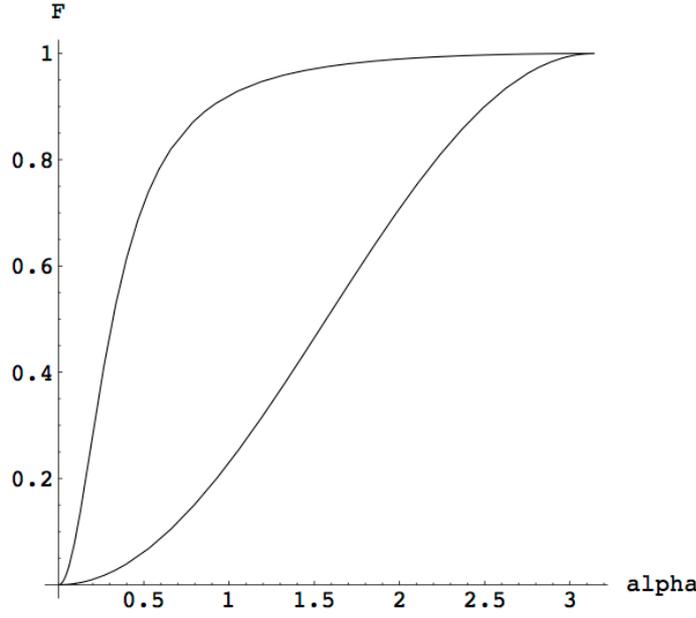


Figure 50: *Confronto fra due distribuzioni integrali di probabilità, relative allo stesso processo, così come appaiono in due riferimenti in moto relativo.*

L'andamento della funzione $\frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')}$, mentre è piatto (ovviamente) per $\beta = 0$, diventa sempre più piccato intorno a $\theta' = 0$ al crescere di β .

Infatti la funzione $\frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')}$ è chiaramente monotona decrescente in θ' e risulta

$$\begin{aligned} \theta' = 0 & : \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')} = \frac{1}{2\gamma^2(1-\beta)^2} = \frac{1-\beta^2}{2(1-\beta)^2} = \frac{1+\beta}{2(1-\beta)} \approx \frac{1}{1-\beta} \\ \theta' = \pi & : \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos\theta')} = \frac{1}{2\gamma^2(1+\beta)^2} = \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta)^2} = \frac{1-\beta}{2(1+\beta)} \approx \frac{1-\beta}{4} \end{aligned}$$

E' opportuno introdurre adesso la seguente distribuzione integrale

$$I(\alpha) \equiv \int_0^\alpha d\mathcal{P} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (4.621)$$

Risulta

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{2\gamma^2} \int_0^\alpha \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \frac{1}{2\gamma^2} \int_0^\alpha \frac{d(-\cos\theta)}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} \int_{-1}^{-\cos\alpha} \frac{dz}{(1+\beta z)^2} = \frac{1}{2\gamma^2} \left. \frac{-1}{\beta(1+\beta z)} \right|_{-1}^{-\cos\alpha} = \\ &= \frac{1}{2\beta\gamma^2} \left(\frac{-1}{1-\beta\cos\alpha} - \frac{-1}{1-\beta} \right) = \frac{1}{2\beta\gamma^2} \frac{-1+\beta+1-\beta\cos\alpha}{(1-\beta)(1-\beta\cos\alpha)} = \\ &= \frac{1}{2\beta(1-\beta)\gamma^2} \frac{\beta(1-\cos\alpha)}{1-\beta\cos\alpha} \quad (4.622) \end{aligned}$$

ma

$$\gamma^2(1 - \beta) = \frac{1}{1 + \beta} \quad \Rightarrow \quad I(\alpha) = \frac{1 + \beta}{2} \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \beta \cos\alpha} \quad (4.623)$$

La funzione $I(\alpha)$ è mostrata in fig.50 nel caso di $\beta = 0$ e $\beta = 0.95$.
Chiaramente, per la sua stessa definizione, risulta comunque che

$$I(\pi) = 1 \quad (4.624)$$

Infine, per apprezzare meglio il significato della funzione $I(\alpha)$, osserviamo che se prendiamo $\alpha = 1/\gamma$ allora, assumendo $\gamma \gg 1$, abbiamo

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

e dunque

$$I\left(\frac{1}{\gamma}\right) \approx \frac{1 + \beta}{2} \frac{\frac{1}{2\gamma^2}}{1 - \beta\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)} \quad (4.625)$$

Ma poichè, se $\gamma \gg 1$, allora risulta

$$\frac{1}{2\gamma^2} \approx 1 - \beta$$

ne segue infine che

$$I\left(\frac{1}{\gamma}\right) \approx \frac{(1 + \beta)(1 - \beta)}{2(1 - \beta + \beta(1 - \beta))} \approx \frac{(1 + \beta)(1 - \beta)}{2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{1}{2} \quad (4.626)$$

ovvero ritroviamo il fatto già osservato in precedenza per cui ben metà degli eventi sono tutti concentrati nel cono di apertura angolare $\frac{1}{\gamma}$.

Il risultato (4.626), come si è detto, è approssimato ed è valido solo nel caso ultrarelativistico, i.e. quando $\gamma \gg 1$.

Determiniamo, per questa strada, il risultato esatto, valido indipendentemente dal valore di γ .

Imponiamo dunque che $I(\alpha) = 1/2$ e determiniamo α . Risulta

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{1 + \beta}{2} \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \beta \cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow (1 + \beta) \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \beta \cos\alpha} = 1 \\ &\Rightarrow (1 + \beta)(1 - \cos\alpha) = 1 - \beta \cos\alpha \\ &\Rightarrow 1 - \cos\alpha + \beta - \beta \cos\alpha = 1 - \beta \cos\alpha \\ &\Rightarrow \cos\alpha = \beta \end{aligned} \quad (4.627)$$

e dunque

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \frac{1}{\beta\gamma} \quad (4.628)$$

valida per ogni β , anche per $\beta = 0$, quando fornisce l'ovvio risultato di $\alpha = \pi/2$!

4.5 Sistemi soggetti a forze esterne

La seconda legge della Dinamica di Newton prevede che, in presenza di forze esterne,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$$

L'analogia già usata ci induce a generalizzarla nel caso relativistico, ponendo

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \equiv ma^\mu = f^\mu \quad (4.629)$$

dove f^μ dovrà essere il quadrivettore che generalizza la *forza* al caso relativistico. Evidentemente, di nuovo, se questa equazione, poi, descriverà o no la realtà fisica è materia soggetta a conferma sperimentale... Infatti solo l'esperienza può giudicare sull'accettabilità o meno dell'equazione (4.629), che Einstein ha posto alla base della dinamica relativistica. Oggi però sappiamo che tutta la Fisica delle particelle elementari può essere interpretata solo partendo da tale legge, per cui questa nuova dinamica risulta ampiamente confermata !

Prima di procedere nello studio di alcuni esempi, osserviamo che dalla (4.629) si ricava subito che

$$f^\mu = ma^\mu \Rightarrow f^\mu u_\mu = m a^\mu u_\mu \equiv 0 \quad (4.630)$$

Questo significa che le quattro componenti della forza f^μ non sono indipendenti, infatti

$$f^\mu u_\mu = 0 \Rightarrow f^0 u^0 = \vec{f} \cdot \vec{u} \Rightarrow f^0 \gamma = \gamma \vec{f} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow f^0 = \vec{f} \cdot \vec{\beta} \quad (4.631)$$

Si osservi che questo risultato esprime semplicemente la conservazione dell'energia, infatti la componente temporale dell'equazione (4.629) stabilisce che

$$f^0 = m \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d(m\gamma)}{d\tau}$$

e quindi, data la (4.631), che

$$\frac{d(m\gamma)}{d\tau} = \vec{f} \cdot \vec{\beta} \quad (4.632)$$

4.5.1 Applicazione al campo elettromagnetico

Vediamo ora alcune applicazioni di questa nuova dinamica, considerando il caso di una particella di massa m e carica elettrica q , in presenza di un campo elettromagnetico.

Come sappiamo, le equazioni del moto classiche di una particella carica in un campo elettromagnetico statico sono

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \quad (4.633)$$

Questa equazione, in termini del tensore del campo elettromagnetico²⁵⁶

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.634)$$

si generalizza nel seguente modo relativisticamente covariante

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad (4.635)$$

Chiaramente, come abbiamo già detto, dovrà poi essere l'esperienza a mostrare se la generalizzazione ipotizzata è corretta o meno; infatti, nonostante la loro eleganza, in queste generalizzazioni non c'è nulla di "automatico" e non si tratta in nessun senso di "teoremi"... non dimentichiamoci che stiamo parlando di Fisica!

²⁵⁶Ricordiamo, a questo proposito, che, per trasformazioni di Lorentz, i campi elettrici e magnetici si trasformano come segue:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

ovvero, in termini delle componenti parallele e perpendicolari a $\vec{\beta}$

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp + \gamma \vec{\beta} \times \vec{B}_\perp \\ \vec{B}' &= \vec{B}_\parallel + \gamma \vec{B}_\perp - \gamma \vec{\beta} \times \vec{E}_\perp \end{aligned}$$

4.5.2 Carica elettrica in campo magnetico

Assumiamo che il moto avvenga in campo magnetico uniforme e costante, che, senza perdita di generalità, assumeremo diretto secondo l'asse z . Risulta

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dp^1}{d\tau} &= -qB u_2 \\ \frac{dp^2}{d\tau} &= qB u_1 \\ \frac{dp^3}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.636)$$

Siccome $p^0 = m\gamma$, la prima equazione dice semplicemente che γ rimane costante durante il moto, ovvero che la velocità della particella resta comunque costante in modulo (sappiamo infatti che il campo magnetico statico non fa lavoro, quindi l'energia cinetica della particella non può cambiare ...).

Dalla quarta equazione abbiamo poi che, evidentemente, $mu^3 \equiv m\gamma\beta_z$ è indipendente da τ , dunque che anche la componente della velocità lungo l'asse z , i.e., nella direzione del campo magnetico, resta costante nel tempo.

Si noti che queste due conclusioni (velocità in modulo costante e componente costante della stessa nella direzione del campo) erano già note dalla dinamica non relativistica di una carica in campo magnetico, descritta dalla forza di Lorentz.

Ma vediamo allora dove sta la novità ...

Le altre due equazioni forniscono²⁵⁷ (si ricordi che γ è costante)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(m\gamma\beta_x) &= qB\gamma\beta_y & m\frac{d\beta_x}{d\tau} &= qB\beta_y \\ \frac{d}{d\tau}(m\gamma\beta_y) &= -qB\gamma\beta_x & m\frac{d\beta_y}{d\tau} &= -qB\beta_x \end{aligned} \Rightarrow$$

Ma $\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \equiv \gamma \frac{d}{dt}$, per cui le equazioni di sopra diventano

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_x}{dt} &= \frac{qB}{m\gamma} \beta_y & \beta_x &= A \sin(\Omega t + \phi) \\ \frac{d\beta_y}{dt} &= -\frac{qB}{m\gamma} \beta_x & \beta_y &= A \cos(\Omega t + \phi) \end{aligned} \Rightarrow$$

dove abbiamo definito, al solito, la frequenza di *betatrone* Ω come $\Omega \equiv \frac{qB}{m\gamma}$ ed A e ϕ sono costanti di integrazione²⁵⁸. La novità della dinamica relativistica rispetto a quella classica è nel fatto che *la frequenza di betatrone Ω non è costante, bensì*

²⁵⁷Si ricordi che $p^{1,2} \equiv mu^{1,2} = m\gamma\beta_{x,y}$, mentre $u_{1,2} = -u^{1,2}$.

²⁵⁸Evidentemente A è nient'altro che il modulo di $\vec{\beta}_\perp$, cioè il modulo della componente della velocità nel piano xy , cioè nel piano ortogonale alla direzione del campo.

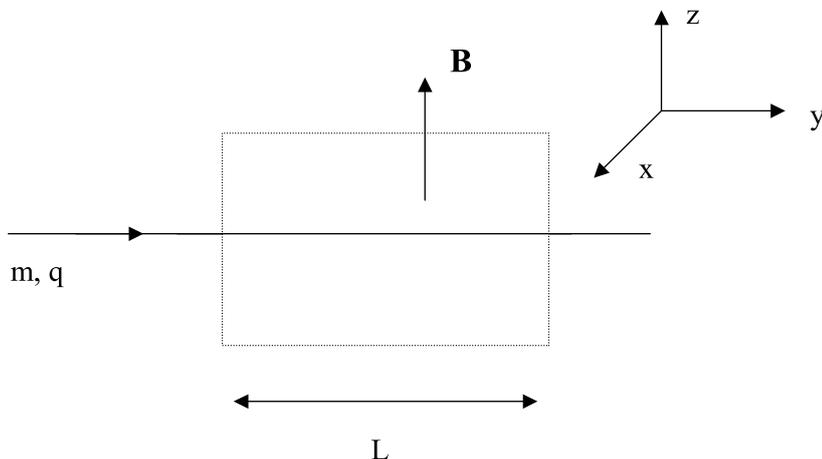


Figure 51: *Deflessione magnetica su una particella in moto.*

dipende da γ , cioè dall'energia della particella stessa²⁵⁹. È un fatto sperimentale, verificato con altissima precisione, per esempio, negli acceleratori di particelle, che Ω dipende linearmente da γ^{-1} e quindi che la dinamica corretta, da usare nel trattare il moto di particelle che si muovono in campo magnetico con velocità prossime a quella della luce, è proprio quella relativistica.

Da quanto precede, segue dunque che

$$\begin{aligned} \beta_x &= \beta_{\perp} \sin(\Omega t + \phi) & x(t) &= x_0 - \frac{\beta_{\perp}}{\Omega} \cos(\Omega t + \phi) \\ \beta_y &= \beta_{\perp} \cos(\Omega t + \phi) & \Rightarrow & & y(t) &= y_0 + \frac{\beta_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t + \phi) \\ \beta_z &= \beta_{\parallel} & & & z(t) &= z_0 + \beta_{\parallel} t \end{aligned}$$

Se il moto avviene sempre all'interno della zona dove è presente il campo magnetico uniforme e costante \vec{B} , allora il moto è un'elica di passo costante

$$\delta = \beta_{\parallel} T = \frac{2\pi\beta_{\parallel}}{\Omega} = \frac{2\pi\beta_{\parallel} m \gamma}{qB} = \frac{2\pi p_{\parallel}}{qB}$$

e di raggio

$$R = \frac{\beta_{\perp}}{\Omega} = \frac{\beta_{\perp} m \gamma}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB}$$

Vediamo invece cosa succede, per esempio, quando la particella non si trova permanentemente intrappolata all'interno del campo magnetico (come accade, per esempio, in uno spettrometro o in un elemento magnetico di un sincrotrone). Consideriamo per questo una particella di impulso p assegnato ed assumiamo che viaggi nella direzione dell'asse y . Durante il suo moto, essa incontra una zona lunga L dove è presente un campo magnetico uniforme e costante \vec{B} , diretto ortogonalmente alla direzione iniziale di moto della particella, p.es. lungo l'asse z .

²⁵⁹In taluni testi, soprattutto un po' datati, si prende spunto da questo fatto per concludere che la massa dipende dalla velocità. Noi non ci adegneremo a questa tradizione, perchè riteniamo che essa sia più sorgente di equivoci che altro. La massa inerziale è una costante caratteristica della particella ed il suo quadrato coincide appunto con l'invariante $p^{\mu}p_{\mu}$: il sostenere che la massa dipende dall'energia nasconde semplicemente il desiderio di continuare ad usare la dinamica newtoniana ed, in particolare, il concetto sostanzialmente non relativistico di *forza*.

Da quanto detto sopra, la particella inizierà un movimento a spirale (in questo caso, date le condizioni iniziali scelte, di passo nullo ...). Se, come assumeremo, L è molto minore del raggio della spirale, il moto della particella sarà solo debolmente deviato. Imponendo le condizioni iniziali e tenendo conto che il moto diviene di nuovo inerziale dopo che la particella è uscita, cioè dopo un tempo $\delta t = \frac{L}{\beta}$, risulta

$$\begin{aligned} p_x^{out} &= m\gamma\beta \sin(\Omega \delta t) \approx m\gamma\beta\Omega \delta t = m\gamma\beta \frac{qB L}{m\gamma \beta} = qBL \\ p_y^{out} &= m\gamma\beta \cos(\Omega \delta t) \approx m\gamma\beta \end{aligned}$$

La particella ha dunque acquistato un impulso trasversale a \vec{B} ed alla direzione del suo moto originario, pari a²⁶⁰

$$\Delta p_t = qBL$$

L'angolo di deflessione nel piano xy vale dunque

$$\Theta_{out} = \frac{\Delta p_t}{p} = \frac{qBL}{m\gamma\beta} = \Omega \frac{L}{\beta}$$

e la traiettoria di uscita, per una ovvia proprietà geometrica delle tangenti alla circonferenza, è la stessa di un punto materiale che continua dritto per $\frac{L}{2}$ e quindi devia di Θ_{out} , proseguendo poi di moto rettilineo ...

4.5.3 Carica elettrica in campo elettrico

Un altro caso interessante è quello in cui la carica si muove in un campo elettrico uniforme e costante, che, senza perdita di generalità, assumeremo di nuovo diretto secondo l'asse z . In questo caso il tensore elettromagnetico risulta

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= -qE u_3 \\ \frac{dp^1}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dp^2}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dp^3}{d\tau} &= qE u_0 \end{aligned} \quad (4.637)$$

La seconda e la terza equazione, relative alle componenti x ed y del quadrimpulso, dicono semplicemente che p^1 ed p^2 sono costanti e quindi che le componenti della

²⁶⁰In generale, e dunque anche se \vec{B} non è costante, l'impulso trasverso acquistato vale $\Delta \vec{p}_t = q\delta t \int \vec{dl} \times \vec{B}$, come si può vedere facilmente usando l'espressione della forza di Lorentz, i.e.

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}\delta t = q\delta t \vec{\beta} \times \vec{B} = q\vec{L} \times \vec{B}$$

quadrivelocità u^1 ed u^2 non cambiano nel tempo²⁶¹ (in questo caso, tempo del riferimento o tempo proprio non fa differenza, visto che si tratta di costanti ...). Passiamo a considerare le altre due equazioni (si ricordi che $u^3 = -u_3$ mentre $u^0 = u_0$)

$$\begin{aligned} m \frac{du^0}{d\tau} &= E q u^3 \\ m \frac{du^3}{d\tau} &= E q u^0 \end{aligned}$$

Come abbiamo già avuto modo di osservare, l'equazione relativa alla componente di tipo tempo esprime la conservazione dell'energia meccanica, infatti, esplicitamente essa afferma che

$$m \frac{d\gamma}{d\tau} = E q \gamma \beta_z$$

ma, $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$, essendo $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$, quindi l'equazione in questione afferma che

$$m\gamma \frac{d\gamma}{dt} = E q \gamma \beta_z \Rightarrow \frac{d(m\gamma)}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{\beta}$$

che, appunto, stabilisce che il lavoro fatto nel nostro riferimento nel tempo dt dalla forza elettrica sulla carica q va semplicemente ad aumentare l'energia relativistica $m\gamma$ della particella.

Ma veniamo alla soluzione delle equazioni di moto scritte sopra. Poniamo, per comodità, $a \equiv \frac{qE}{m}$: questa è l'accelerazione classica a cui sarebbe soggetta la carica nel campo elettrico dato²⁶². Risulta

$$\frac{du^0}{d\tau} = a u^3 \qquad \Rightarrow \qquad u^0 = \frac{1}{2} (A e^{a\tau} + B e^{-a\tau}) \quad (4.638)$$

$$\frac{du^3}{d\tau} = a u^0 \qquad \Rightarrow \qquad u^3 = \frac{1}{2} (A e^{a\tau} - B e^{-a\tau}) \quad (4.639)$$

dove A e B sono le costanti di integrazione. Se si mette l'origine del tempo proprio nel momento in cui $\beta_z = 0$, allora $u^3(0) = 0$ e quindi $A = B$, ovvero

$$u^0 = A \operatorname{ch}(a\tau) = \gamma \quad (4.640)$$

$$u^3 = A \operatorname{sh}(a\tau) = \beta_z \gamma \quad (4.641)$$

²⁶¹Attenzione perchè questo non significa che anche β_x e β_y restano costanti, ma solo che $\gamma\beta_x$ e $\gamma\beta_y$ non cambiano nel tempo. Siccome γ dipende ovviamente anche da β_z che, come vedremo, cambia nel tempo, in realtà β_x e β_y non restano affatto costanti ...

²⁶²Per trasformazioni di Lorentz lungo l'asse z il campo elettrico non cambia di intensità, visto che E_{\parallel} è invariante. Dunque, se ci mettiamo nel riferimento inerziale in cui β_z è momentaneamente nullo, troviamo qui la stessa intensità di campo elettrico che nel riferimento di partenza. Se $p_x = p_y = 0$, questo riferimento è tangente e allora la quantità a rappresenta effettivamente l'accelerazione subita dalla carica; però, se p_x o p_y non sono nulli, questa conclusione, in generale, è falsa: come vedremo, infatti, in questo caso il modulo della quadriaccelerazione non coincide con $-a^2$...

Evidentemente, per $\tau = 0$, quando $\beta_z = 0$ per ipotesi, può essere che le componenti $\beta_x(0)$ e $\beta_y(0)$ della velocità siano non nulle, nel qual caso, dalla (4.640), risulta

$$u^0(\tau = 0) \equiv \gamma(0) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2(0) - \beta_y^2(0)}} = A \quad (4.642)$$

Quindi, in definitiva, da quanto precede risulta che, in generale, sarà

$$\gamma(\tau) = u^0(\tau) = A \operatorname{ch}(a\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2(0) - \beta_y^2(0)}} \operatorname{ch}(a\tau) \quad (4.643)$$

$$\beta_x(\tau) = \frac{\gamma(0)\beta_x(0)}{\gamma(\tau)} = A \frac{\beta_x(0)}{\gamma(\tau)} \quad (4.644)$$

$$\beta_y(\tau) = \frac{\gamma(0)\beta_y(0)}{\gamma(\tau)} = A \frac{\beta_y(0)}{\gamma(\tau)} \quad (4.645)$$

$$\beta_z(\tau) = \frac{u^3(\tau)}{u^0(\tau)} = \operatorname{th}(a\tau) \quad (4.646)$$

Per quanto riguarda poi la quadriaccelerazione, derivando la quadrivelocità rispetto al tempo proprio, si ottiene immediatamente che

$$\begin{aligned} a^\mu &= \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (u^0(\tau), u^1, u^2, u^3(\tau)) = \\ &= (A a \operatorname{sh}(a\tau), 0, 0, A a \operatorname{ch}(a\tau)) = a (u^3, 0, 0, u^1) \end{aligned} \quad (4.647)$$

che, nella metrica di Minkowski, è ortogonale ad u^μ (come deve essere...) ed ha modulo quadro pari a

$$a^\mu a_\mu = -(aA)^2$$

Come si vede, questa quantità coincide con $-a^2$ solo se la particella non ha componenti della velocità nella direzione trasversa al campo elettrico²⁶³. Possiamo

²⁶³La ragione è che se esistono in RS componenti della velocità della particella trasverse rispetto al campo elettrico in RS stesso, allora, in ogni caso, per poter andare nel riferimento tangente alla particella, laddove l'accelerazione è certamente pari a $E'q/m$, occorre eseguire un boost non parallelo alla direzione del campo elettrico. La conseguenza, date le proprietà di trasformazione del solo campo elettrico, i.e.

$$\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp$$

è che nel riferimento tangente il campo elettrico appare di intensità E' maggiore che nel riferimento RS in cui vale appunto E e si può dimostrare che, nel caso considerato, è sempre, comunque, pari, appunto, ad AE .

ora esprimere le grandezze di cui sopra in termini del tempo t misurato nel sistema di riferimento "fisso". Si ha

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = A \operatorname{ch}(a\tau) \Rightarrow t = \frac{A}{a} \operatorname{sh}(a\tau) + t_0$$

e quindi, scegliendo la costante t_0 in modo che sia $t = 0$ quando $\tau = 0$, risulta

$$t = \frac{A}{a} \operatorname{sh}(a\tau) \Rightarrow \operatorname{sh}(a\tau) = \frac{at}{A}$$

per cui risulta infine che ($A \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta_x^2(0)-\beta_y^2(0)}}$)

$$\gamma(t) = A \operatorname{ch}(a\tau) = A \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(a\tau)} = \sqrt{A^2 + (at)^2} \quad (4.648)$$

$$\beta_x(t) = A \frac{\beta_x(0)}{\gamma(t)} = A \frac{\beta_x(0)}{\sqrt{A^2 + (at)^2}} \quad (4.649)$$

$$\beta_y(t) = A \frac{\beta_y(0)}{\gamma(t)} = A \frac{\beta_y(0)}{\sqrt{A^2 + (at)^2}} \quad (4.650)$$

$$\beta_z(t) = \operatorname{th}(a\tau) = \frac{at}{\sqrt{A^2 + (at)^2}} \quad (4.651)$$

Quanto poi alla coordinata z , si ha semplicemente che

$$u^3 = \frac{dz}{d\tau} = A \operatorname{sh}(a\tau) \Rightarrow z = z_0 + \frac{A}{a} \operatorname{ch}(a\tau) = z_0 + \frac{1}{a} \sqrt{A^2 + (at)^2} \quad (4.652)$$

Come si vede, se è vero che per piccoli tempi rispetto a $\frac{1}{a}$ il moto è parabolico, infatti

$$z \cong z_0 + \frac{A}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A^2} t^2 \right) = z_0 + \frac{A}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{A} t^2$$

asintoticamente abbiamo visto sopra che il moto tende ad assumere velocità *solo* lungo z e pari ad 1, i.e. a c (anche se, al tempo $t = 0$, erano presenti componenti di velocità trasverse ...). Se scegliamo $z_0 = 0$, risulta

$$z(t) = \frac{1}{a} \sqrt{A^2 + a^2 t^2} \Rightarrow a^2(z^2 - t^2) = A^2 \Rightarrow z^2 - t^2 = \frac{A^2}{a^2} \quad (4.653)$$

che è l'equazione di una iperbole equilatera (di cui, nel caso specifico, interessa una sola falda, cioè quella per $z > 0$): per questo motivo, il moto descritto è detto anche *moto iperbolico*.

Si noti infine il nuovo comportamento della carica, rispetto alla previsione classica, lungo gli assi x ed y . Essendo

$$\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{A^2 + a^2 t^2}} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{aT}{A}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh} \frac{aT}{A}$$

poichè per $x \rightarrow \infty$ la funzione $\operatorname{arcsinh}(x)$ va come $\ln(2x)$, integrando la (4.649) e la (4.650), ne segue che $x(t)$ ed $y(t)$, quando $t \rightarrow \infty$, divergono logaritmicamente, i.e. $\propto \ln(t)$, e non linearmente con t , come ci saremmo attesi classicamente.

5 Alcuni approfondimenti ...

Dopo la panoramica, necessariamente approssimativa, svolta precedentemente riguardo alle particelle e alle loro interazioni, tratteremo adesso alcuni loro approfondimenti, che, con le conoscenze che già abbiamo, siamo comunque in grado di affrontare.

5.1 La teoria di Fermi

Secondo la teoria di Fermi²⁶⁴, i raggi β si originano dal decadimento del neutrone,



Figure 52: *Enrico Fermi (1901-1954)*

che avviene secondo la reazione seguente²⁶⁵:



L'idea del tutto nuova e originale che è presente in questa teoria è che la coppia leptonica ($e^- \nu$) *non* preesiste nel nucleo, bensì essa è creata al momento del processo di disintegrazione, esattamente come nel caso in cui un atomo eccitato si diseccita emettendo un fotone, il gamma non è presente nell'atomo prima della sua diseccitazione, ma viene creato al momento.

A differenza dell'elettrodinamica, però, dove l'accoppiamento avviene fra la corrente elettromagnetica J^μ ed il campo mediatore dell'interazione, cioè il campo del fotone A_μ , nella teoria di Fermi della disintegrazione β non esiste un campo mediatore dell'interazione.

Essa prevede, infatti, l'esistenza di un'interazione di contatto fra i quattro fermioni che partecipano all'interazione (interazione corrente-corrente).

²⁶⁴E. Fermi: *Tentativo di una teoria dei raggi β* , Il Nuovo Cimento 11,1, (1934)

E. Fermi: *Versuch einer Theorie der β -Strahlen*, Zeitschrift für Physik 88, 161 (1934)

²⁶⁵Va detto che, nella teoria originale, Fermi chiama neutrino quello che oggi viene chiamato antineutrino.

La teoria postula infatti una interazione diretta fra la corrente debole (carica) "adronica"

$$j_{adr}^\mu(x) \equiv \bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu \psi_n(x) \equiv \bar{p}(x) \gamma^\mu n(x) \quad (5.2)$$

costruita con i campi del neutrone $\psi_n(x) \equiv n(x)$ e del protone $\psi_p(x) \equiv p(x)$, con la corrente debole (carica) "leptonica"

$$l_\mu(x) = \bar{\psi}_\nu(x) \gamma_\mu \psi_e(x) \equiv \bar{\nu}(x) \gamma_\mu e(x) \quad (5.3)$$

costruita con i campi dell'elettrone $\psi_e(x) \equiv e(x)$ e del neutrino $\psi_\nu(x) \equiv \nu(x)$. La lagrangiana che descrive l'interazione debole nella teoria di Fermi ha, infatti, la forma seguente

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -G_F \left(j_{adr}^\mu(x) l_\mu^\dagger(x) + h.c. \right) \\ &\Rightarrow \mathcal{H} = G_F \left[(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p) (\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \psi_e) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove si è usato il fatto che, non contenendo l'interazione accoppiamenti derivativi, risulta $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$.

La costante G_F è chiamata, appunto, *costante di Fermi*, ed è la grandezza che misura la "forza" dell'interazione debole: essa ha le dimensioni²⁶⁶ dell'inverso del quadrato di una energia e vale²⁶⁷

$$G_F = (1.16637 \pm 0.00001) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (5.5)$$

mentre ψ e $\bar{\psi}$ sono i campi di Dirac²⁶⁸ delle particelle indicate.

²⁶⁶Dal punto di vista dimensionale, essendo $\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ una densità lagrangiana con dimensioni, quindi $[E/L^3]$, ne segue evidentemente che

$$[m \bar{\psi}\psi] = [E/L^3] \Rightarrow [\bar{\psi}\psi] = [L^{-3}] \Rightarrow [\psi] = [L^{-3/2}]$$

Ma in unità naturali $[L] = [E^{-1}]$ (si ricordi che $\hbar c$ è una energia per una lunghezza ...), dunque $[\psi] = [E^{3/2}]$.

Dovendo allora essere $[\mathcal{H}] = [G_F][\psi]^4 = [G_F][E^6] = [E/L^3] = [E^4]$, ne segue che G_F deve avere appunto le dimensioni dell'inverso del quadrato di una energia.

²⁶⁷Il valore della costante di Fermi qui citata è ricavata dalla vita media del leptone μ^- , che decade secondo la reazione $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

Oggi sappiamo che l'espressione corretta della lagrangiana di Fermi, alla base del decadimento, è così fatta

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{(\nu)} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{(\mu)}) (\bar{\psi}_{(e)} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{(\nu)})$$

Trascurando le correzioni radiative, nell'ambito della teoria di Fermi, risulta che la larghezza del decadimento ($\hbar = c = 1$) è espressa dalla relazione $\Gamma \equiv \tau^{-1} = (G_F^2 m_\mu^5)/(192\pi^3) \Rightarrow \tau = (2.19703 \pm 0.00004)10^{-6} \text{ s}$.

²⁶⁸Può essere utile ricordare che il campo ψ_a crea la particella a ed annichila la sua antiparticella \bar{a} , mentre il campo $\bar{\psi}_a$ crea la antiparticella \bar{a} ed annichila la particella a .

Inoltre, poiché $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, ne segue, come sappiamo, che

$$(\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p)^\dagger = \psi_p^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\bar{\psi}_n)^\dagger = \psi_p^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\psi_n^\dagger \gamma^0)^\dagger = \bar{\psi}_p \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \psi_n = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \quad (5.6)$$

Anche alla luce di quanto già detto per le interazioni deboli di corrente carica nel MS , è istruttivo adesso considerare la struttura dell'interazione di contatto corrente-corrente proposta da Fermi, ripartendo proprio dal caso ben noto dell'interazione elettromagnetica.

Supponiamo quindi di voler trattare l'interazione elettromagnetica, per esempio, fra due elettroni assunti, per comodità, distinguibili.

La densità di corrente associata al campo del primo elettrone, come già detto, è

$$J_1^\mu(x) = -\bar{\psi}_1(x)\gamma^\mu\psi_1(x) \quad (5.7)$$

e la sua interazione con il campo elettromagnetico $A_\mu(x)$ prodotto da un'altra qualsiasi distribuzione di carica è descritta, in generale, dalla densità lagrangiana²⁶⁹

$$\mathcal{L}(x) = -e J_1^\mu(x) A_\mu(x) \quad \text{con } e \equiv |e| \quad (5.8)$$

Nel caso considerato $A_\mu(x)$ sarà il campo prodotto dall'altro elettrone, i.e. tale che (sistema di unità di misura di Lorentz-Heaviside)

$$\square A^\mu(x) = e J_2^\mu(x) \equiv -e \bar{\psi}_2(x) \gamma^\mu \psi_2(x) \quad (5.9)$$

la quale ci ricorda appunto che la sorgente del campo elettromagnetico è la densità di corrente elettromagnetica e che il campo mediatore libero $A_\mu(x)$ ha massa nulla.

Introducendo allora la funzione di Green (propagatore) $D_G(z)$ tale che

$$\square D_G(z) = \delta^4(z) \quad \Rightarrow \quad A^\mu(x) = \int d^4y D_G(x-y) e J_2^\mu(y) \quad (5.10)$$

e ponendo $D_{\mu\nu}(x-y) \equiv \delta_{\mu\nu} D_G(x-y)$, risulta infine che

$$\mathcal{L}(x) = -e^2 J_1^\mu(x) \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) J_2^\nu(y) \quad (5.11)$$

da cui si può adesso procedere direttamente, per esempio, al calcolo della sezione d'urto del processo di scattering, senza che compaia più esplicitamente in $\mathcal{L}(x)$ il campo A_μ ma solo il suo propagatore e le correnti coinvolte (similmente dunque, almeno per certi aspetti, all'interazione alla Fermi): questo è possibile solo perché nel sistema considerato non sono presenti fotoni *reali* e dunque il campo A_μ

²⁶⁹La quantità $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ è una densità lagrangiana, dunque, dal punto di vista dimensionale, risulta che $[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = [E/L^3]$ e quindi $[L^{-1}A] = [EL^{-3}] \Rightarrow A^2 = EL^{-1} = E^2$ ovvero il campo del fotone A_μ ha le dimensioni di un'energia.

Data la forma (5.8) dell'interazione, poiché si è già visto che $[J] = [L^{-3}]$, ne segue dunque che

$$[e][J][A] \equiv [E/L^3] \Rightarrow [e][L^{-3}][E] = E/L^3$$

cioè che la costante di accoppiamento dell'interazione elettromagnetica (sistema di unità di misura di Lorentz-Heaviside con $\hbar = c = 1$) $e = \sqrt{4\pi\alpha\hbar c}$ è una quantità adimensionale.

entra solo come mediatore della forza elettromagnetica fra le due cariche, dunque attraverso fotoni *virtuali*.

Quello che ci interessa al momento, però, non è effettuare qualche calcolo esplicito, bensì approfondire piuttosto gli aspetti relativi alla forma stessa del propagatore, i.e. della funzione $D_G(z)$.

Ammettiamo dunque che $D_G(z)$ abbia trasformata di Fourier (ancorché in senso generalizzato), i.e. che si possa scrivere

$$D_G(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \hat{D}_G(q) \quad (5.12)$$

L'equazione $\square D_G(z) = \delta(z)$ implica allora che

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} (-q^2) \hat{D}_G(q) &= \delta^4(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \\ \Rightarrow \hat{D}_G(q) &= -\frac{1}{q^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

ovvero possiamo concludere che, per il campo elettromagnetico, risulta²⁷⁰

$$D_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \frac{1}{-q^2} \delta_{\mu\nu} \quad (5.14)$$

Ma supponiamo ora che il campo mediatore dell'interazione, che chiameremo $W^\mu(x)$ per distinguerlo da quello del fotone, non abbia massa nulla, bensì abbia massa $M_W = M$.

In questo caso l'equazione del campo mediatore, in tutta analogia, è

$$(\square + M^2) W^\mu(x) = e J^\mu(x) \quad (5.15)$$

ed il propagatore ha dunque la forma seguente²⁷¹

$$D_G(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \frac{1}{-q^2 + M^2} \quad (5.17)$$

²⁷⁰In realtà la singolarità al denominatore richiede di sostituire q^2 con $q^2 + i\epsilon$ e poi di fare l'integrazione secondo un cammino opportuno nel campo complesso prima di passare al limite per $\epsilon \rightarrow 0 \dots$

²⁷¹Più correttamente, per un campo vettoriale come quello del W^μ , si dimostra che il propagatore è in realtà un tensore della forma

$$D_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{-q^2 + M^2} \quad (5.16)$$

che comunque, nel limite di bassi impulsi trasferiti, conduce agli stessi risultati della forma semplificata $D_{\mu\nu}(z) \approx \frac{\delta_{\mu\nu}}{M^2}$

il quale, per grandi masse del mediatore ($M^2 \gg q^2$), ovvero per bassi valori di q^2 (q rappresenta il momento trasferito dal campo mediatore fra le due particelle cariche in interazione ...), si può evidentemente approssimare con

$$D_G(z) \approx \frac{1}{M^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q e^{iqz} = \frac{1}{M^2} \delta^4(z) \Rightarrow D_{\mu\nu}(z) = \frac{\delta^4(z)}{M^2} \delta_{\mu\nu} \quad (5.18)$$

che, sostituita nella (5.11), dà luogo ad una lagrangiana di interazione che, con ovvio significato dei simboli, risulta pari a

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e^2}{M^2} J_{(a)}^\mu(x) J_{(b)}^\nu(x) \delta_{\mu\nu} = -\frac{4\pi\alpha}{M^2} J_{(a)}^\mu(x) J_{(b)}^\nu(x) \delta_{\mu\nu} \quad (5.19)$$

e quindi, appunto, ad una interazione *di contatto* di tipo corrente-corrente, esattamente del tipo della teoria di Fermi, in cui $G_F = \frac{e^2}{M^2} \equiv \frac{4\pi\alpha}{M^2}$, essendo α la costante²⁷² di struttura fina: l'accordo con il valore sperimentalmente determinato di G_F si ottiene²⁷³ per $M = 88.68 \text{ GeV}$.

Va detto, comunque, che questa deduzione *non* è rigorosa perché, per esempio, non tiene in nessun conto della struttura di gauge della teoria elettrodebole; ciò non di meno, la conclusione è sostanzialmente giusta.

La teoria delle interazioni elettrodeboli di Glashow Weinberg e Salam, che, come oggi sappiamo, sostituisce nel Modello Standard la teoria di Fermi (che non è rinormalizzabile ...), fornisce infatti, all'ordine perturbativo piú basso

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 M_W^2 \sin^2 \theta_W} \quad (5.20)$$

dove θ_W è l'angolo²⁷⁴ di Weinberg e risulta

$$\frac{8 \sin^2 \theta_W}{\sqrt{2}} \approx 1.308 \quad (5.21)$$

Concludendo, possiamo quindi aspettarci che almeno finché i processi non raggiungono momenti trasferiti confrontabili con M_W , la teoria di Fermi debba funzionare perfettamente !

Nonostante quindi essa sia una teoria fenomenologica, non deve esserci alcuna meraviglia nel constatare come la teoria delle interazioni deboli di Fermi risultasse in completo accordo con i dati sperimentali noti all'epoca in cui essa fu formulata e sia tuttora usata per descrivere una grande varietà di fenomeni di "bassa" energia.

²⁷²Ricordiamo che il valore misurato di questa costante è $\alpha^{-1} = 137.03599976(50)$.

²⁷³In particolare, dalla deduzione fatta, risulta chiaro il motivo per cui la costante di Fermi G_F deve avere le dimensioni dell'inverso del quadrato di una massa (energia) ...

²⁷⁴Il valore sperimentalmente oggi noto di questa costante, come già detto parlando del *MS*, è il seguente $\sin^2 \theta_W = 0.23122(15)$.

Essa prediceva, tra l'altro, vari fenomeni ancora sconosciuti e che furono, in seguito, puntualmente osservati. Per esempio, la lagrangiana di Fermi descrive anche il processo di scattering quasi-elastico (anti)neutrino-protone^{275,276}

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (5.23)$$

Questo processo poteva essere un modo per verificare l'esistenza del neutrino, per cui Bethe e Peierls, già nel 1934, ne stimarono²⁷⁷ la sezione d'urto, ottenendo il valore²⁷⁸ sconsolatamente piccolo di

$$\sigma \approx 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (5.32)$$

²⁷⁵Questo processo è legato a quello del decadimento del neutrone dalla crossing-symmetry e dalla time-reversal che, nella teoria di Fermi, è una simmetria esatta.

²⁷⁶Questa reazione beta-inversa, assumendo il protone fermo nel sistema del laboratorio, avviene solo se l'antineutrino ha una energia E superiore a quella di soglia che è data dalla relazione

$$2EM_p + M_p^2 = (M_n + m)^2 \quad (5.22)$$

dove abbiamo indicato rispettivamente con M_n ed M_p le masse del neutrone e del protone, con m quella dell'elettrone ed abbiamo assunto che il neutrino abbia massa nulla. Risulta

$$E = \frac{M_n^2 - M_p^2 + m^2 + 2mM_n}{2M_p} \approx \frac{M_n + M_p}{2M_p}(M_n - M_p) + m \frac{M_n}{M_p} \approx 1.294 + 0.512 = 1.806 \text{ MeV}$$

²⁷⁷H. Bethe, R. Peierls: *The neutrino*, Nature, 133, 532 (1934)

Gli stessi autori stimarono così basso il valore della sezione d'urto trovata che essi stessi commentarono "If, therefore, the neutrino has no interaction with other particles besides the process of creation and annihilation mentioned, ..., one can conclude that there is no practically possible way of observing the neutrino."

²⁷⁸L'argomento usato è euristico e parte dal legame fra la sezione d'urto σ del processo

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$$

e la vita media τ del decadimento del (anti)neutrone, ad esso coniugato per crossing.

La stima di σ , infatti, è fatta osservando che la *forza* dell'interazione (la costante d'accoppiamento ...) entrerà in σ ed in $\Gamma \equiv \hbar/\tau$ nella stessa maniera, cioè attraverso il modulo quadro dell'elemento di matrice; dunque dobbiamo aspettarci che sia

$$\sigma = A/\tau$$

dove la quantità A deve avere le dimensioni di $\text{cm}^2 \cdot s$ e deve dipendere solo da costanti fondamentali e dalla scala di energia E dei due processi che abbiamo assunto avvenire alla stessa scala di energia. D'altronde, con \hbar , c ed E , possiamo solo costruire la lunghezza $\frac{\hbar c}{E}$ ed il tempo $\frac{\hbar}{E}$, dunque $A = (\frac{\hbar c}{E})^2 (\frac{\hbar}{E})$, ovvero

$$\sigma \tau = A = (\hbar c)^2 \hbar E^{-3} \quad (5.24)$$

e dunque, in particolare, se $\hbar = c = 1$

$$\sigma \tau = E^{-3} \quad (5.25)$$

per (anti)neutrini di energia dell'ordine del MeV .

Questo valore era effettivamente troppo esiguo per le sorgenti dell'epoca (sorgenti radioattive β^-) e bisognò così aspettare una ventina d'anni per avere una conferma diretta del processo in questione...

Ricordando ora che

$$\hbar c = 197.32696 \text{ MeV} \cdot \text{fm}; \quad \hbar = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$$

ne segue che, sulla scala delle energie del MeV , tipica dei decadimenti nucleari deboli, prendendo τ dell'ordine del minuto (in realtà $\tau_n = 886.7 \pm 1.9 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$), ne risulta appunto per σ il valore (5.32).

E' chiaro, comunque, per il modo come è stato ottenuto, che questo valore è solo una stima: il valore corretto (trascurando comunque la differenza di massa fra protone e neutrone, nonché la massa dell'elettrone) risulta, in realtà, maggiore del valore previsto, risultando (cfr., per esempio, L.B. Okun: *Leptons and quarks*, North-Holland 1984, pag. 144)

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+) &= G_F^2 \left(\frac{g_V^2 + 3g_A^2}{\pi} \right) E_\nu^2 = (1.166 \cdot 10^{-5})^2 \frac{1 + 3.75}{\pi} (E_\nu(\text{MeV})10^{-3})^2 \text{ GeV}^{-2} = \\ &= 2.056 \cdot 10^{-16} (E_\nu(\text{MeV}))^2 \text{ GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Per avere la sezione d'urto in cm^2 occorre moltiplicare per $(\hbar c)^2$, che vale

$$\hbar c = 197.327 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm} \quad (5.27)$$

per cui risulta infine, per $E_\nu = 1 \text{ MeV}$, che

$$\begin{aligned} \sigma &= 2.056 \cdot 10^{-16} \times (0.197)^2 = 8.0 \cdot 10^{-18} \text{ fm}^2 = 8.0 \cdot 10^{-20} \text{ barn} = \\ &= 8.0 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \approx 10^{-43} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Va osservato che è proprio vero che "la fortuna aiuta gli audaci" ... infatti, usando la teoria di Fermi, per quanto riguarda la vita media del neutrone, si ottiene

$$\frac{1}{\tau} = G_F^2 \frac{0.47}{60\pi^3} \Delta^5 \quad (5.29)$$

dove $\Delta \equiv M_n - M_p \approx 1.29 \text{ MeV}$ ed il termine 0.47 viene dallo spazio delle fasi. Per quanto riguarda invece lo scattering quasi-elastico

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

essa fornisce, per (anti)-neutrini di energia $M_p \gg E_\nu \gg m_e$

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} E_\nu^2 \quad (5.30)$$

e quindi, per neutrini da $E_\nu = 1.29 \text{ MeV} \equiv \Delta$, risulta

$$\sigma \tau = \frac{G_F^2}{\pi} \Delta^2 \frac{60\pi^3}{G_F^2 0.47 \Delta^5} = \Delta^{-3} \frac{60\pi^2}{0.47} \quad (5.31)$$

ed il fattore adimensionale $\frac{60\pi^2}{0.47}$, ignorato da Bethe e Peierls, vale comunque circa 1260 !

5.2 Verifica dell'esistenza del neutrino

Dal valore della sezione d'urto (5.28) si ricava, per esempio, che il libero cammino λ in acqua di un antineutrino da 1 MeV , essendo il numero N di protoni per centimetro cubo pari a (densità dell'acqua $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, 2 protoni²⁷⁹ per molecola, peso molecolare della grammomolecola: 18 g ...)

$$N = \frac{2}{18} \times 6.022 \cdot 10^{23} \approx 0.67 \cdot 10^{23}$$

risulta²⁸⁰ pari a (ricordiamo che $1 \text{ anno luce} = 0.946 \cdot 10^{18} \text{ cm}$)

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} = \frac{1}{0.67 \cdot 10^{23} \times 10^{-43}} \approx 1.5 \times 10^{20} \text{ cm} \approx 160 \text{ ly} \quad (5.33)$$

Questo valore dà un'idea della difficoltà sperimentale che si incontra quando si vogliono rivelare queste particelle !

Con l'esperimento²⁸¹ di Rodeback e Allen del 1952, si ebbe comunque una prima evidenza, seppure indiretta, dell'esistenza del neutrino.

Essi studiarono il seguente processo di cattura nucleare²⁸² in ^{37}Ar di un elettrone K (Q-valore della reazione: $Q = 0.814 \text{ MeV}$, tempo di dimezzamento $\approx 35 \text{ giorni}$)



Essendo lo stato iniziale sostanzialmente a riposo ($\vec{P} = 0$), i nuclei di ^{37}Cl devono essere monoenergetici se il processo è davvero a due corpi nello stato finale. Questo non è completamente vero perchè l'atomo di Cloro che si forma risulta eccitato (è improvvisamente cambiata la carica del nucleo ...) e si diseccita emettendo uno o più elettroni Auger di energia comunque non superiore a 3 keV ... Sperimentalmente Rodeback e Allen osservarono, dalla distribuzione dei tempi di volo, che la velocità di rinculo degli atomi di Cloro valeva

$$v = (0.71 \pm 0.06) \times 10^6 \text{ cm/sec} \quad (5.35)$$

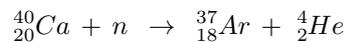
²⁷⁹Contiamo solo i protoni non legati nel nucleo, quindi i nuclei di idrogeno.

²⁸⁰Parlando dell'effetto *GZK* abbiamo già derivato la relazione per cui $\lambda = 1/(N\sigma)$.

Possiamo anche intuitivamente giungere a questa conclusione se osserviamo che il libero cammino rappresenta la distanza percorsa dalla particella che le garantisce, in media, un urto. D'altronde, detto L un percorso qualsiasi, se σ è la sezione d'urto del processo, nel volume σL si trovano $\sigma L N$ centri scatteratori; dunque il libero cammino medio deve essere tale che $\sigma \lambda N = 1 \dots$

²⁸¹G.W Rodeback, J.S. Allen: *Neutrino recoils following the capture of orbital electrons in A^{37*}* , Phys. Rev. 86, 446 (1952)

²⁸²La sorgente fu preparata al reattore nucleare di Oak Ridge, irraggiando Calcio con neutroni e sfruttando quindi la seguente reazione di trasmutazione



ovvero, la loro energia cinetica²⁸³ era $1/2 Mv^2 = (9.7 \pm 1.0) eV$. Questo risultato²⁸⁴ implicava l'emissione di una particella neutra al momento della cattura e dunque confermava l'ipotesi dei neutrini di Pauli, inoltre consentiva di fornire una prima valutazione, seppur grossolana, della massa del neutrino²⁸⁵, che risultava appunto, in accordo con l'ipotesi di Pauli, molto minore di quella del protone, dell'ordine di quella dell'elettrone e, addirittura, compatibile con zero.

Una sezione della camera usata da Rodeback e Allen è mostrata in fig. 53. La sezione ombreggiata, definita da diversi diagrammi, indica il volume fiduciale per l'Argon. I diaframmi, gli schermi e le griglie erano tutti a potenziale nullo, con la sola eccezione della griglia 3, davanti al rivelatore di ioni, la quale si trovava a circa $-4500 V$ per consentire l'accelerazione degli ioni cloro una volta che avevano passato la griglia 2 e quindi permettere la loro rivelazione. Il segnale era rappresentato da una coincidenza ritardata fra l'elettrone Auger eventualmente emesso durante il processo di riassetamento della nuvola elettronica del Cloro, susseguente alla cattura K , seguito dalla rivelazione dello ione stesso. La distanza temporale di circa $7 \mu s$ fra i due segnali, tenendo conto che il cammino inerziale mediamente compiuto dal Cloro era di circa $5 cm$ e che il tempo che esso impiegava per accelerare verso il rivelatore era trascurabile, consentiva di determinare la velocità di rinculo del Cloro stesso.

²⁸³Se la massa del neutrino è molto minore di quella del protone e quindi della massa M del nucleo di ^{37}Cl , allora l'energia della reazione è portata via, praticamente in modo completo, dal neutrino, i.e. se indichiamo con p il suo impulso (uguale, naturalmente, a quello di rinculo del nucleo di cloro ...) è

$$Q = pc$$

Ma, per il nucleo di cloro, del tutto non relativistico, $p = Mv$, dove v è la velocità di rinculo, dunque l'energia di rinculo vale

$$E_r = \frac{p^2}{2M} = \frac{1}{2M} \left(\frac{Q}{c} \right)^2 = \frac{Q^2}{2Mc^2}$$

ovvero, essendo $Q = (816 \pm 4) keV$, mentre $M \approx 35 GeV$, si ha

$$E_r \approx \frac{(0.816 \times 10^{-3})^2}{2 \times 35} = 0.95 \times 10^{-8} GeV = 9.5 eV$$

in accordo con il risultato sperimentale di Rodeback ed Allen.

²⁸⁴In realtà, evidenze analoghe erano già state osservate, per esempio, da Crane e Halpern usando la reazione $^{38}_{17}Cl \rightarrow ^{38}_{18}Ar + e^- + \bar{\nu}_e$

H.R. Crane, Z. Halpern: Phys. Rev. 53, 789 (1938); Phys. Rev. 56, 232 (1939)

ma non erano altrettanto conclusive riguardo alla apparente non conservazione dell'impulso.

²⁸⁵Classicamente, in un decadimento a due corpi, il rapporto fra le energie cinetiche dei prodotti è pari all'inverso del rapporto fra le loro masse... !

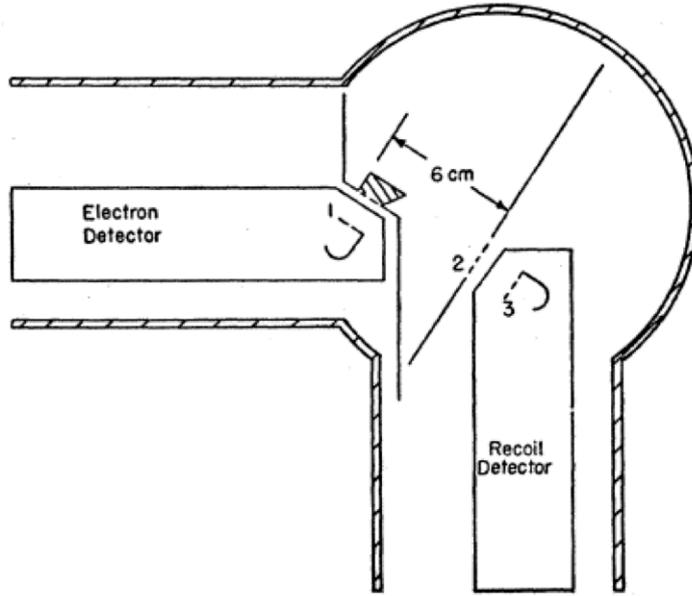
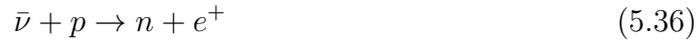


Figure 53: Camera di misura usata da Rodeback e Allen nel loro esperimento

Il primo progetto di rivelazione²⁸⁶ diretta degli anti-neutrini è nel 1953, ma furono necessari 7 anni per arrivare ad un risultato, quando finalmente Reines e Cowan osservarono la reazione beta-inversa



presso la centrale nucleare di Savannah River, negli USA, in grado di fornire un flusso²⁸⁷ di ben $10^{13} \bar{\nu}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$.

²⁸⁶F. Reines, C.L. Cowan jr: *A proposed experiment to detect the free neutrino*, Phys. Rev. 90, 492 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr: *Detection of free neutrino*, Phys. Rev. 92, 830 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr, F.B. Harrison, A.D. McGuire, H.W. Kruse: *Detection of free antineutrino*, Phys. Rev. 117, 159 (1960)

D. O. Caldwell: *Current aspects of neutrino physics* Springer-Verlag Berlin 2001

²⁸⁷In un processo di fissione neutronica del nucleo ^{235}U , si ottengono tipicamente due nuclei ricchi di neutroni ed un paio di neutroni che consentono la prosecuzione della reazione a catena (per es. $^{235}_{92}\text{U} + n \rightarrow ^{140}_{54}\text{Xe} + ^{94}_{38}\text{Sr} + 2n$). I prodotti di fissione danno luogo a decadimenti β di corta vita media (ms), a cascata. In media si hanno circa 6 $\bar{\nu}_e$ di varia energia per ogni fissione, ed un totale di circa 200 MeV di energia prodotta. Dunque, il numero di antineutrini emessi dal reattore, per secondo, vale

$$N_{\bar{\nu}} \approx 6 N_{fis} = \frac{6 P_{th}}{2 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}$$

dove P_{th} è la sua potenza termica. Assumendo $P_{th} \approx 1 \text{ GW}$, ne segue che, nell'intero angolo solido, vengono emessi dell'ordine di $\frac{6 \times 1 \cdot 10^9}{3.2 \cdot 10^{-11}} = 1.9 \cdot 10^{20}$ antineutrini per secondo. Ad una distanza di 11 m dal reattore, il loro flusso F_{ν} vale quindi

$$F_{\nu} = \frac{1.9 \cdot 10^{20}}{4\pi(1100)^2} \approx 1.2 \cdot 10^{13} \bar{\nu}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$$

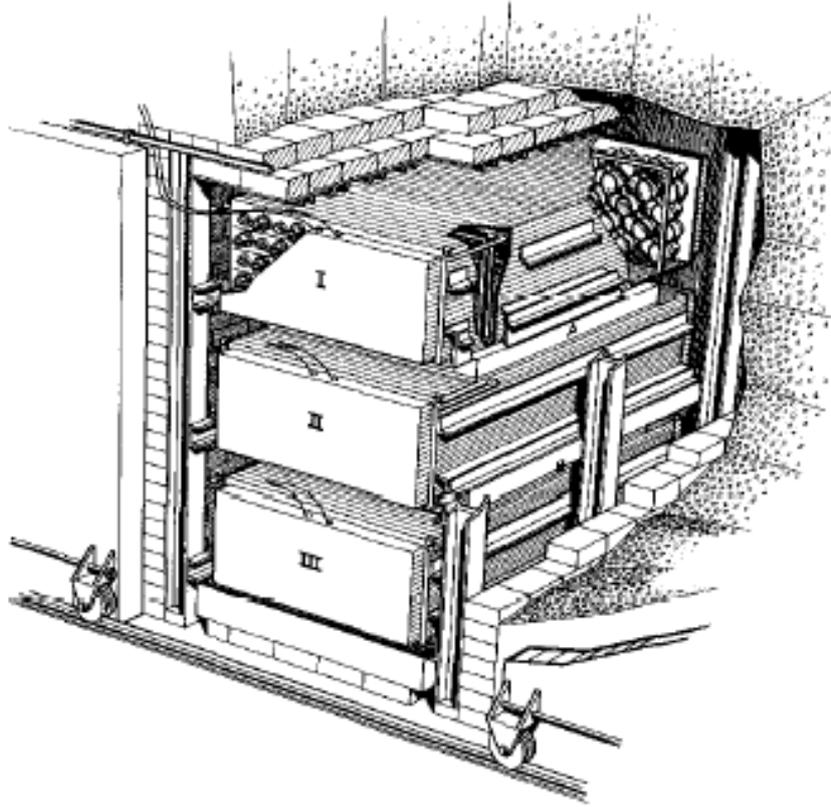


Figure 54: *Apparato sperimentale usato da Cowan e Reines*

Il bersaglio²⁸⁸ era costituito, in totale, da 200 litri di acqua in cui erano disciolti 40 Kg di cloruro di cadmio ($CdCl_2$). Il segnale era costituito dall'osservazione dei due gamma da 0.511 MeV di annichilazione del positrone, osservati in coincidenza ritardata (circa 30 μsec) con i gamma emessi dal nucleo di Cadmio che cattura il neutrone.

Reines e Cowan osservarono che la differenza di conteggi "reattore on" - "reattore off" era di 3 ± 0.2 conteggi all'ora, in sostanziale accordo con la previsione. Da questa differenza di conteggi essi estrassero²⁸⁹ una sezione d'urto pari a

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12_{-4}^{+7} \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (5.38)$$

²⁸⁸Il rivelatore (vedi fig.54) era fatto da tre contenitori di scintillatore liquido, per un totale di 5400 litri. Ciascun contenitore era visto da 55 fotomoltiplicatori per parte. Fra i contenitori I e II e fra II e III si trovavano, rispettivamente, i contenitori A e B, ognuno riempito di 100 l di acqua e 20 Kg di cloruro di cadmio, disciolto in essa, che costituivano il bersaglio per gli antineutrini. Il rivelatore era posto a circa 11 m dal core della centrale e si trovava a 12 m di profondità, per schermare al meglio i raggi cosmici.

²⁸⁹Il modo per estrarre il valore della sezione d'urto totale del processo si basa sul fatto che il rate di eventi di scattering che si producono è dato, in generale, dall'espressione

$$n = I \sigma N$$

dove I misura il flusso delle particelle incidenti (gli antineutrini, nel nostro caso) ed N rappresenta il numero di particelle bersaglio (protoni, nel caso studiato).

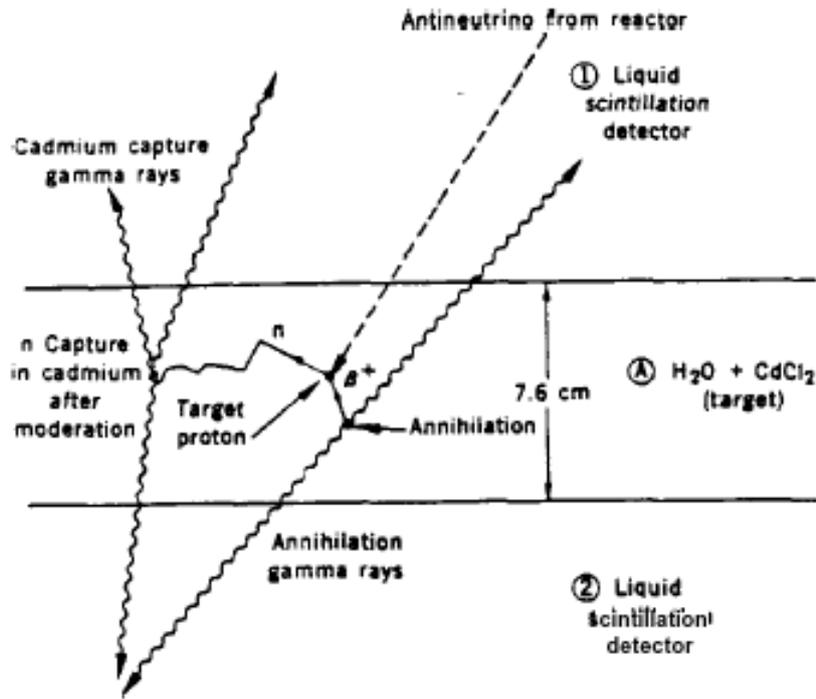


Figure 55: *Principio di funzionamento dell'esperimento di Cowan e Reines*

contro un valore atteso²⁹⁰ (prima della scoperta della violazione di parità) di

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{th} = (6.3 \pm 1.5) \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (5.39)$$

Abbiamo detto che venivano osservati sperimentalmente $n \approx 3 \text{ eventi/ora} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ ev/s}$ mentre abbiamo prima valutato che il flusso degli antineutrini valeva $I \approx 10^{13} \bar{\nu}/(\text{cm}^2 \text{ s})$. Quanto al numero di protoni bersaglio, essendo esso costituito da 200 l di acqua, esso valeva

$$N = 200 \times 1000 \times \frac{2}{18} \times 6.0 \cdot 10^{23} \approx 1.3 \cdot 10^{28}$$

per cui ne segue che

$$\sigma = \frac{n}{I \times N} = \frac{0.83 \cdot 10^{-3}}{1.2 \cdot 10^{13} \times 1.3 \cdot 10^{28}} \approx 0.53 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (5.37)$$

Questo risultato non coincide con il valore di sezione d'urto a cui giunsero Cowan e Reines perchè non abbiamo tenuto conto né dell'accettanza effettiva dell'esperimento né dell'efficienza di rivelare l'evento stesso. Queste due quantità hanno entrambe l'effetto di aumentare il valore della sezione d'urto calcolato in quanto l'accettanza A diminuisce il numero di centri bersaglio mentre l'efficienza ϵ stabilisce che il numero di eventi che si sono effettivamente realizzati è maggiore di quello osservato, i.e.

$$\sigma = \frac{n/\epsilon}{I \times N \cdot A}$$

L'effetto combinato delle due quantità conduce dalla (5.37) alla (5.38) ...

²⁹⁰Esso era valutato a partire dalla valutazione della costante di Fermi fatta attraverso la misura della vita media del neutrone, come pubblicato in J.M. Robson: *The radioactive decay of the neutron*; Phys. Rev 83, 349, 1951 ed in base allo spettro beta dei frammenti di fissione misurato.

5.3 Misura della massa del $\bar{\nu}_e$

Dopo l'osservazione di Cowan e Reines dell'antineutrino, restava assolutamente aperto il problema della sua massa: si sapeva solo che doveva essere dell'ordine o piu' piccola della massa dell'elettrone ma niente di più !

Un modo per misurare questa massa è quello che fa uso del cosiddetto Kurie plot²⁹¹, metodo già previsto da Fermi nel suo lavoro del '34 sul Nuovo Cimento.

Consideriamo il decadimento beta più studiato a questo riguardo, cioè quello del trizio²⁹²



Riguardo alla parte nucleare, si tratta di una transizione $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$, dunque con $\Delta J = 0$ e senza cambio di parità, la quale avviene all'interno dello stesso multipletto di isospin, dunque con $\Delta T = 0$. E' una transizione superpermessa, con contributi sia del tipo di Fermi che del tipo di Gamow-Teller.

Il rate W di decadimenti (probabilità per unità di tempo), dalla teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, per la Regola d'oro di Fermi, è noto essere dato da

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 d\Phi$$

dove M_{fi} è l'elemento di matrice che descrive l'accoppiamento fra lo stato iniziale e quello finale prodotto dall'interazione mentre $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi, cioè una misura della densità degli stati finali accessibili cinematicamente. Però, dati sia il piccolo valore dell'energia massima E_0 (Q -valore) messa

²⁹¹F.N.D. Kurie, J.R. Richardson, H.C. Paxton: *The radiations emitted from artificially produced radioactive substances: The upper limits and shapes of the β -ray spectra from several elements*, Phys. Rev. 49, 368 (1936).

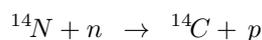
²⁹²J.J. Simpson: *Measurement of the β -energy spectrum of ${}^3\text{H}$ to determine the antineutrino mass*, Phys. Rev. 23D, 649 (1981).

Ricordiamo che il trizio (Tritium, simbolo chimico $T \equiv {}^3\text{H}$) è un isotopo dell'idrogeno in cui il nucleo è fatto dal protone e due neutroni. Esso decade β^- con una vita media di 12.3 *anni*, liberando complessivamente un'energia E_0 pari a $E_0 = 18567 \pm 5 \text{ eV}$.

Esso si forma continuamente nell'alta atmosfera per assorbimento da parte dell'azoto di un neutrone prodotto in interazione di raggi cosmici, e successiva disintegrazione del nucleo secondo la reazione



Come curiosità ricordiamo che questo è lo stesso meccanismo che conduce alla produzione di ${}^{14}\text{C}$, isotopo radioattivo del Carbonio estesamente usato nelle datazioni di materiali originati da esseri viventi (tempo di dimezzamento $\lambda_{1/2} = 5568 \pm 30 \text{ anni} \Rightarrow$ vita media $\tau = 8033 \pm 43 \text{ anni}$). In quel caso la reazione, prodotta da neutroni termici, è la seguente:



in gioco dalla reazione rispetto alle masse dei nuclei in gioco che l'enorme differenza di massa esistente fra l' ${}^3\text{He}$ e l'elettrone (e quindi l'antineutrino ...), si può senz'altro assumere che il nucleo di ${}^3\text{He}$ assorba tutto l'impulso senza che il suo rinculo "costi" in termini di energia.

In altre parole, invece che un decadimento a tre corpi in cui si conserva energia ed impulso, si può pensare ad un decadimento a due corpi $(e, \bar{\nu}_e)$ dove si conserva solo l'energia. Se indichiamo con \vec{p} l'impulso dell'elettrone e con \vec{q} quello dell'antineutrino, si ha che lo spazio delle fasi accessibile è dato quindi da

$$d\Phi = d^3p d^3q \delta(E_0 - E - E_\nu) \quad (5.41)$$

dove E_0 è l'energia disponibile nel decadimento, E è l'energia dell'elettrone ed E_ν quella dell'antineutrino.

Quanto poi all'elemento di matrice del decadimento in esame, esso può essere considerato sostanzialmente indipendente dalla cinematica degli stati finali.

Per rendercene conto, iniziamo osservando che, a causa del basso Q-valore della reazione, quanto alla parte adronica, essa può essere senz'altro trattata in approssimazione non relativistica. Inoltre, per lo stesso motivo, l'impulso trasferito \vec{P} al sistema nucleare, cioè $\vec{P} \equiv \vec{p} + \vec{q}$, è tale per cui la lunghezza d'onda di De Broglie ad esso associata risulta molto grande rispetto alle dimensioni del nucleo. Questo significa che l'elemento di matrice non dipende dal momento trasferito, a meno di correzioni legate all'interazione coulombiana dell'elettrone con il nucleo. In particolare, per la parte adronica, abbiamo

$$\langle {}^3\text{He} | J_\mu | {}^3\text{H} \rangle \propto (1_F, -\beta \vec{\sigma}_{GT}) \quad (5.42)$$

dove β misura il rapporto fra il contributo assiale e quello vettoriale (che è +1 se la struttura di J_μ è di tipo $V - A$ puro, senza fattori di forma ...).

Da tutto questo segue che il rate di decadimento dipende dalle variabili cinematiche solo attraverso lo spazio delle fasi. Abbiamo dunque che il numero di decadimenti dn tali per cui l'elettrone ha impulso compreso fra p e $p + dp$ e l'antineutrino ha impulso compreso fra q e $q + dq$ è proporzionale semplicemente allo spazio delle fasi disponibile, i.e.

$$dn \propto p^2 dp d\Omega_e q^2 dq d\Omega_\nu \delta(E_0 - E - E_\nu) \quad (5.43)$$

D'altronde, se indichiamo con m_ν la massa²⁹³ dell'antineutrino, si ha ($c = 1$)

$$E_\nu^2 = q^2 + m_\nu^2 \Rightarrow q dq = E_\nu dE_\nu \quad (5.44)$$

dunque

$$dn \propto p^2 dp d\Omega_e q E_\nu dE_\nu d\Omega_\nu \delta(E_0 - E - E_\nu) \quad (5.45)$$

²⁹³Ricordiamo che particella ed antiparticella, secondo il teorema CPT, devono avere la stessa massa; quindi, a meno di violazioni del teorema in questione che viene dimostrato in *QFT* sotto ipotesi davvero molto generali, parlare di massa del neutrino e dell'antineutrino è la stessa cosa.

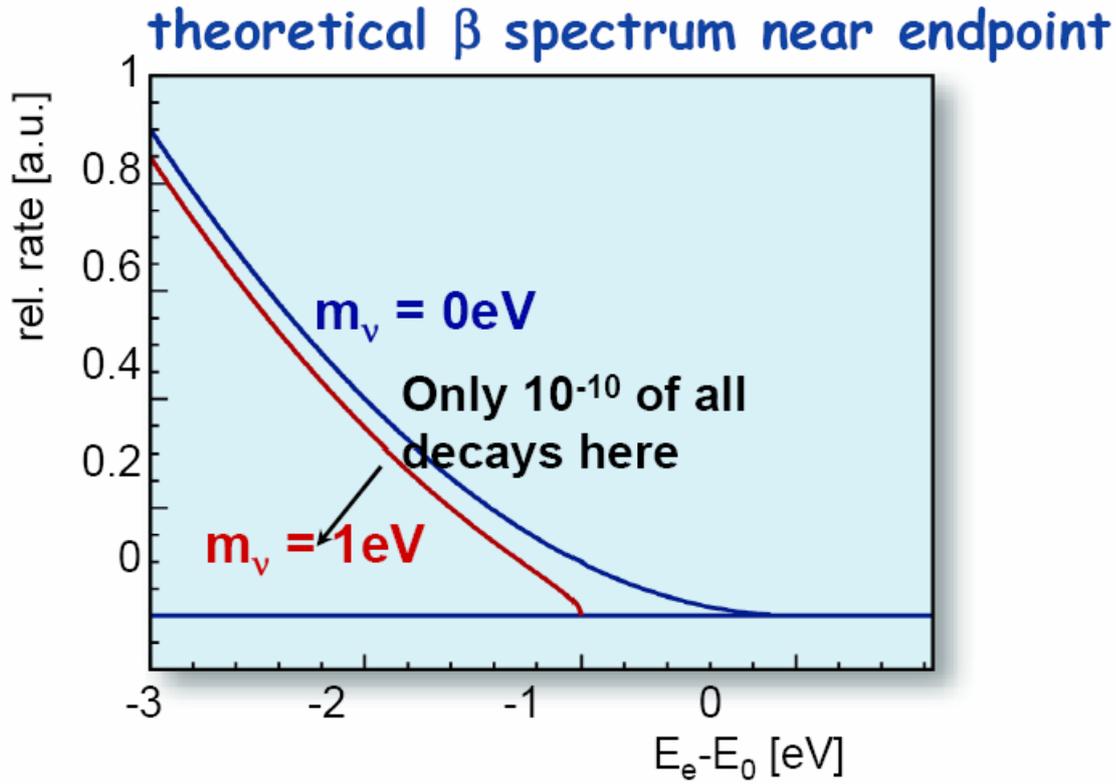


Figure 56: *Kurie plot*

e se integriamo su E_ν e sulle variabili angolari, otteniamo

$$dn \propto p^2 dp (E_0 - E) \sqrt{((E_0 - E)^2 - m_\nu^2)} \quad (5.46)$$

D'altronde, detta $E_M = E_0 - m_\nu$ la massima energia cinetica possibile per l'elettrone, e posto $I(p) = dn/dp$, risulta

$$\sqrt{\frac{I(p)}{p^2}} \propto \sqrt{(E_M - E + m_\nu) \sqrt{E_M - E} \sqrt{E_M - E + 2m_\nu}} \quad (5.47)$$

che, nel limite $E \rightarrow E_M$ va come $(E_M - E)$ se $m_\nu = 0$ e come $(E_M - E)^{\frac{1}{4}}$ se $m_\nu \neq 0$.

Dal punto di vista sperimentale, comunque, la misura è complicata da vari fattori, come, per esempio, la stessa struttura molecolare a cui il Trizio è legato. Essendo le energie di legame non dissimili dalla massa cercata dell'antineutrino, la loro presenza è sorgente di errori sistematici che occorre valutare molto accuratamente.

Vari gruppi sperimentali hanno lavorato e stanno lavorando a questo tipo di misura: il risultato recente più preciso del gruppo di Troitsk, fornisce²⁹⁴

$$m_{\nu_e} < 2.5 \text{ eV} \quad (5.48)$$

²⁹⁴V.M. Lobashev: *The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study in the project KATRIN*, Nucl. Phys. 719A, 153c (2003)

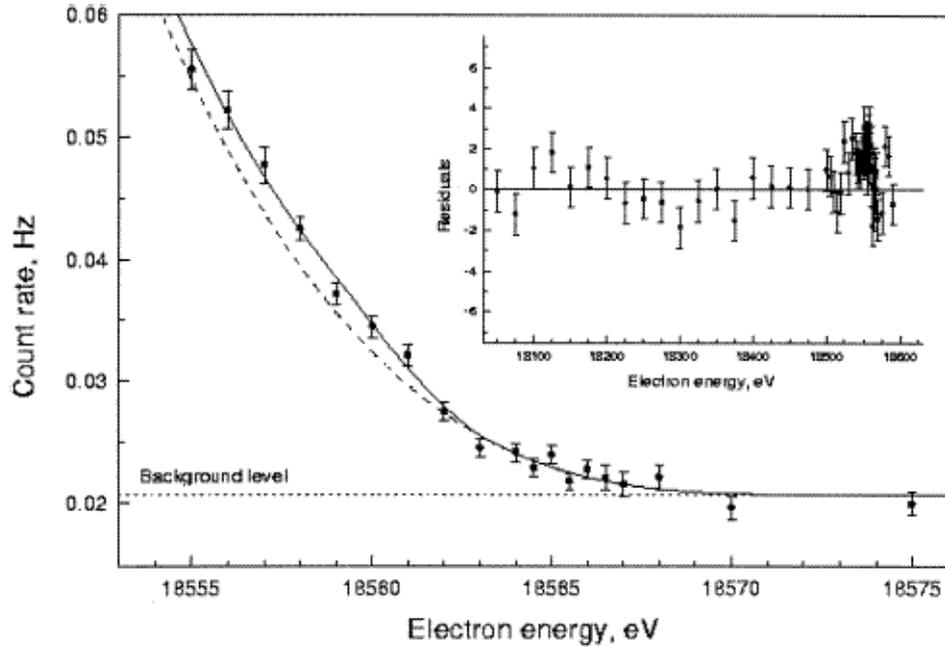


Figure 57: *Kurie plot sperimentale del gruppo di Troitsk*

compatibile con zero (cfr. fig.(57)).

Prima di concludere questo argomento, ricordiamo brevemente anche quali sono i limiti diretti che oggi conosciamo sulle masse del neutrino muonico e tauonico.

Quanto al neutrino muonico, la sua massa viene misurata direttamente attraverso uno studio cinematico completo della reazione di decadimento del pione a riposo

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (5.49)$$

La prima sua determinazione²⁹⁵ attraverso questo metodo risale al 1956. Esso è tutt'ora il metodo seguito più preciso ed il risultato più recente fornisce²⁹⁶ come limite il valore seguente:

$$m_{\nu_\mu} < 170 \text{ keV} \quad (5.50)$$

Infine, quanto alla massa del neutrino tauonico, la sua determinazione più precisa è quella fornita dalla Collaborazione ALEPH che, al LEP del CERN ha studiato la reazione seguente:

$$\tau^- \rightarrow 2\pi^- + \pi^+ + \nu_\tau \quad (5.51)$$

stabilendo il limite

$$m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV} \quad (5.52)$$

²⁹⁵W.H. Barkas et al: *Mass ratio method applied to the measurement of L-meson masses and the energy balance in pion decay*, Phys. Rev. 101, 778 (1956)

²⁹⁶K. Assamagan et al: *Upper limit of the muon-neutrino mass and the charged pion mass from momentum analysis of a surface muon beam*, Phys. Rev. 53D, 6065 (1996)

5.4 Il fenomeno delle oscillazioni di neutrino

Nel Modello Standard i neutrini sono di tre *sapori* diversi: ν_e , ν_μ e ν_τ .

I fatti sperimentali indicano però oggi che il *sapore* dei neutrini non è una costante del moto, ovvero che essi possono *oscillare*²⁹⁷ uno nell'altro.

Il meccanismo di oscillazione, suggerito²⁹⁸ fin dal 1958 da B. Pontecorvo (anche se in un diverso contesto), prevede che gli autostati di *sapore* debole dei neutrini non siano autostati della loro matrice di massa, bensì loro opportune combinazioni lineari, essendo $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$, $|\nu_3\rangle$ gli autostati in questione, cor-

²⁹⁷Citeremo solo il fatto sperimentale che costituisce il punto di partenza del problema.

Nell'esperimento di Davies e Bachall, iniziato nel 1969 e conclusosi nel 1993, situato nella miniera di Homestake nel South Dakota, si cercava evidenza per la reazione (l'inversa di quella studiata da Rodeback ed Allen)



dove i neutrini, adesso, erano quelli prodotti nel Sole. Nel nucleo della stella, infatti, attraverso varie reazioni, si realizza il risultato netto della fusione



con i 26.14 MeV emessi sotto forma radiativa ed i due neutrini che si dividono un'energia restante di circa 0.59 MeV.

(Cfr. K. Winter: *Neutrino physics*: Cambridge Univ. Press, 1990, Ch.6)

Il flusso di neutrini di origine solare che giungono sulla superficie della Terra, vista la relazione precedente, può essere allora stimato a partire dal flusso di radiazione elettromagnetica: si ha

$$\mathcal{N}_\nu = \frac{2 \times S}{26.14 \times 1.6 \cdot 10^{-13}} \quad (5.55)$$

dove S è la costante solare, i.e. $S = 1370 \text{ W/m}^2$ mentre $1.6 \cdot 10^{-13}$ è il fattore di conversione fra MeV e Joule. Risulta così

$$\mathcal{N}_\nu \approx 6.5 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} = 6.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (5.56)$$

Non tutto questo flusso di neutrini, però, è utile per la reazione (5.53) che ha come soglia ben 814 keV ed il fatto che siano neutrini molto "marginali" quelli che determinano la reazione, ha costituito per molto tempo un argomento di critica al risultato che, tenuto conto dello spettro in base al modello solare noto, mostrava circa un terzo delle reazioni previste. Questo fatto, oggi confermato anche da altri esperimenti indipendenti, è ormai interpretato come evidenza di oscillazione di flavour dei neutrini: i neutrini elettronici emessi dal Sole, durante la strada per arrivare sulla Terra, oscillavano negli altri flavours per cui ne arrivava solo un terzo di tipo elettronico, un terzo di tipo muonico ed un terzo di tipo tauonico. Siccome, per pure ragioni energetiche, né i ν_μ né i ν_τ potevano produrre, via interazione di corrente carica, i rispettivi leptoni carichi, ecco che se ne osservava solo un terzo di quelli generati ...

²⁹⁸B. Pontecorvo: *Mesonium and antimesonium*, JETP 6, 429 (1958)

S.M. Bilen'ki, B.M. Pontecorvo: *Lepton mixing and neutrino oscillations*, Uspekhi 20, 776 (1977)

rispondenti agli autovalori m_1, m_2, m_3 . Si ha quindi

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (5.57)$$

con U matrice unitaria, per cui

$$|\nu_i\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (5.58)$$

Se prendiamo allora un neutrino di impulso definito \vec{p} , creato come $|\nu_\alpha\rangle$ al tempo $t = 0$, ecco che, al tempo t , esso sarà descritto dal vettore di stato

$$|\nu, t\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (5.59)$$

dove le energie $E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}$ sono differenti per i tre autostati a causa del diverso valore delle rispettive masse. Questo ha come conseguenza che, con il passare del tempo, ci sia oscillazione di sapore (*flavour oscillation*).

Facciamo, per comodità, il caso di due sole generazioni di neutrini, i.e.

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle \quad (5.60)$$

$$|\nu_\beta\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle \quad (5.61)$$

dove θ è l'angolo di mixing²⁹⁹. Asumiamo dunque che, per $t = 0$, sia

$$|\nu\rangle = |\nu_\alpha\rangle \quad (5.62)$$

Risulta

$$|\nu(t)\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(\cos\theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \right) \quad (5.63)$$

La probabilità che, osservando lo stato $|\nu(t)\rangle$ esso sia trovato nello stato $|\nu_\beta\rangle$ vale, evidentemente

$$\begin{aligned} P_{\alpha\rightarrow\beta}(t) &= |\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle|^2 = \\ &= \left| (-\sin\theta \langle \nu_1 | + \cos\theta \langle \nu_2 |) (e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle) \right|^2 = \\ &= \left| -\sin\theta \cos\theta e^{-iE_1 t} + \sin\theta \cos\theta e^{-iE_2 t} \right|^2 = \\ &= \left| 2 \sin\theta \cos\theta \frac{e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}}{2} \right|^2 = \sin^2 2\theta \left| \frac{e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}}{2} \right|^2 = \\ &= \sin^2 2\theta \frac{(e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t})(e^{iE_1 t} - e^{iE_2 t})}{4} = \sin^2 2\theta \frac{1 - e^{i\Delta E t} - e^{-i\Delta E t} + 1}{4} = \\ &= \sin^2 2\theta \frac{2 - 2 \cos \Delta E t}{4} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta E t}{2} \end{aligned} \quad (5.64)$$

²⁹⁹Come si è dimostrato nel caso dei quarks, se ci si limita a due generazioni, la più generale matrice unitaria di mixing può sempre essere ricondotta, attraverso una oculata scelta delle fasi dei campi, ad una matrice reale e dunque ad una semplice *rotazione* piana di un opportuno angolo θ dei vettori della base.

dove abbiamo posto $\Delta E \equiv E_1 - E_2$.

D'altronde, per una particella ultrarelativistica come il neutrino (in ogni caso risulta infatti $m \ll E$), risulta

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} \approx p + \frac{m^2}{2p} \quad (5.65)$$

per cui, trascurando comunque la massa del neutrino rispetto alla sua energia ($p \approx E_\nu$), si ha

$$\Delta E \approx \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E_\nu} \equiv \frac{\Delta m^2}{2E_\nu} \quad (5.66)$$

e dunque

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 t}{4E_\nu} \quad (5.67)$$

ovvero, in termini di distanza percorsa ($L = ct$, $c = 1$), abbiamo

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E_\nu} \quad (5.68)$$

Definendo allora, per comodità, la quantità λ nel modo seguente

$$\frac{\lambda}{2\pi} \equiv \frac{4E_\nu}{\Delta m^2} \Rightarrow \lambda \equiv \frac{8\pi E_\nu}{\Delta m^2} = 8\pi \frac{E_\nu \hbar c}{\Delta m^2 c^4} \approx 4.96 \frac{E_\nu(\text{MeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \text{ metri} \quad (5.69)$$

risulta infine

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{2\pi L}{\lambda} \Leftrightarrow P_{\alpha \rightarrow \alpha}(L) = 1 - P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) \quad (5.70)$$

Nella espressione di sopra, abbiamo messo in evidenza che, oltre ad esperimenti di comparsa di un nuovo tipo di neutrino in un fascio che non ne possiede, si possono anche fare esperimenti di scomparsa. Questi però sono piuttosto complicati perché è necessario conoscere molto bene la normalizzazione del fascio stesso ...

Un esempio di esperimento di comparsa è l'esperimento OPERA, che si trova installato nei Laboratori Nazionali del Gran Sasso. Esso è illuminato da un fascio di neutrini muonici proveniente dal *CERN* di Ginevra (fascio *CNGS*) e risulta

$$L = 732 \text{ Km}, \quad \langle E_\nu \rangle = 17 \text{ GeV} \quad (5.71)$$

Nell'ipotesi che il valore del Δm^2 fra le masse quadre dei due neutrini il cui mescolamento porta al ν_μ ed al ν_τ sia quello centrale misurato nell'esperimento giapponese di SuperKamiokande, i.e. $\Delta m^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, abbiamo

$$\lambda = 4.96 \times \frac{1.7 \times 10^4}{2.4 \times 10^{-3}} \approx 3.5 \times 10^7 \text{ m} = 35 \times 10^3 \text{ Km} \quad (5.72)$$

e dunque, nell'ipotesi di mixing massimale fra i due neutrini, i.e. $\theta = \frac{\pi}{4}$, una probabilità di oscillazione

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) = \sin^2 \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) \approx 1.7 \times 10^{-2} \quad (5.73)$$

Si osservi, in generale, che affinché si possa manifestare il fenomeno delle oscillazioni, è necessario che siano soddisfatte entrambe le seguenti due condizioni:

- i neutrini ν_1 , ν_2 e ν_3 devono avere masse non tutte e tre coincidenti (e quindi almeno una non può essere nulla) ...;
- i neutrini di sapore debole definito devono risultare da un mixing non banale ($U \neq I$) fra i diversi autostati di massa.

Nel caso di tre generazioni, così come abbiamo avuto modo di vedere per i quarks, la più generale matrice di mixing U è intrinsecamente definita attraverso tre parametri reali (angoli di rotazione) ed una fase, per cui essa può senz'altro essere scritta, al solito, come prodotto delle tre matrici di mixing fra i tre tipi di neutrino, i.e.

$$U = R_{23} \cdot R_{13}(\delta) \cdot R_{12} \quad \text{con} \quad |\nu_\alpha \rangle \equiv \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i \rangle \quad (5.74)$$

dove

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

Ciascuna di queste matrici R_{ij} descrive separatamente il mixing fra le due specie (i, j) di neutrino, autostati di massa, che le contraddistingue e l'eventuale presenza della fase $e^{i\delta} \neq 1$, per gli stessi motivi già visti per i quarks, è sinonimo di violazione diretta di CP anche nelle interazioni deboli di corrente carica puramente leptoniche.

5.5 L'elicità del neutrino

La presenza del proiettore $(1 - \gamma_5)$ nella corrente debole ha come conseguenza che solo la corrispondente proiezione chirale può contribuire all'interazione.

D'altronde, quando l'energia E è molto maggiore della massa, chiralità diviene sinonimo di elicità ovvero di proiezione dello spin nella direzione dell'impulso, per cui, nel caso del neutrino, dove $E \gg m$ praticamente sempre, si ha che solo lo stato di elicità -1 (spin opposto al momento) è coinvolto nell'interazione, mentre l'opposto accade per l'antineutrino. Determinare il valore negativo dell'elicità del

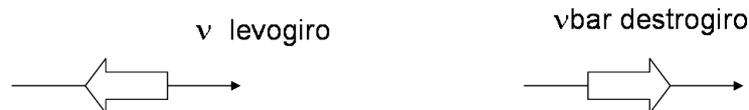


Figure 58: *Elicità del neutrino e dell'antineutrino*

neutrino, evidente indice della correttezza della teoria $V - A$, poteva sembrare una impresa pressochè disperata, ma invece questo fu possibile nel 1958 a Goldhaber, Grodzins e Sunyar in un esperimento³⁰⁰ che, per la sua profondità di concezione e la sua semplicità di arrangiamento, va considerato senz'altro come una pietra miliare nella fisica delle particelle elementari.

L'Europio è un lantanide (terra rara) che ha un isotopo isomerico, ${}^{152}_{63}\text{Eu}^m$, il quale è radioattivo³⁰¹ con un tempo di dimezzamento di circa 9.3 ore. Il suo nucleo ha $J^P = 0^-$ e decade per cattura K (i.e., per cattura di un elettrone orbitale in onda S), attraverso una transizione di Gamow-Teller pura, in Samario eccitato Sm^* , in uno stato nucleare avente $J = 1^-$. Il Samario eccitato Sm^* decade a sua volta nel suo stato fondamentale 0^+ emettendo un fotone di energia pari a circa 960 keV . La vita media del Sm^* è di circa 30 fs , un tempo così breve per cui l'effetto del rinculo ricevuto nell'emissione del neutrino, avvenuta in seguito alla cattura K , non fa in tempo a disperdersi termicamente, neppure in un solido.

Indichiamo allora con z la direzione in cui è emesso, nel suo verso positivo, il neutrino, e sia questo il nostro asse di quantizzazione del momento angolare. Se il neutrino ν_e ha elicità positiva ($s_z = +1/2$), allora, poiché l'elettrone ha spin $1/2$ ed è in una shell K (momento orbitale nullo) per cui può contribuire al momento angolare solo per $\pm 1/2$, ecco che la componente z del momento angolare del Sm^*

³⁰⁰M. Goldhaber, L. Grodzins, A.W. Sunyar: *Helicity of neutrinos* Phys. Rev. 109, 1015 (1958)

³⁰¹Un isomero nucleare è uno stato metastabile del nucleo per la cui diseccitazione occorre che un neutrone o un protone inverta il proprio spin con emissione, per esempio, di un fotone. Nel caso considerato questo processo non avviene perché il nucleo trasmuta per cattura K . Data la breve vita media di questo radionuclide, esso fu preparato per bombardamento neutronico di sesquiossido d'Europio (Eu_2O_3), presso il reattore di Brookhaven. In natura l'Europio possiede solo due isotopi stabili, cioè ${}^{151}\text{Eu}$ e ${}^{153}\text{Eu}$, pressochè in eguali quantità. L' ${}^{151}\text{Eu}$ è l'isotopo che viene trasformato nel radionuclide ${}^{152}\text{Eu}^m$.

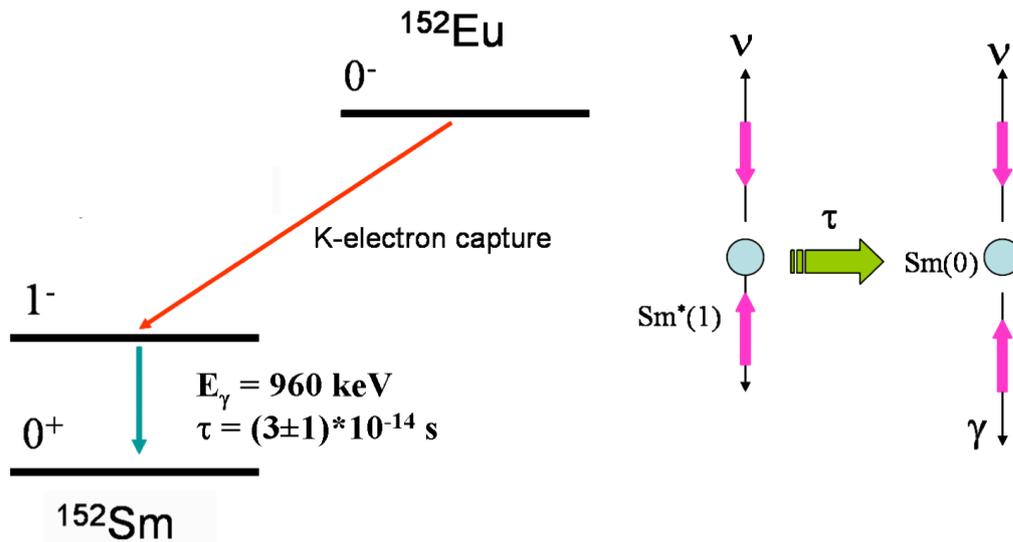


Figure 59: *Schema dei livelli interessati nella misura dell'elicità del neutrino*

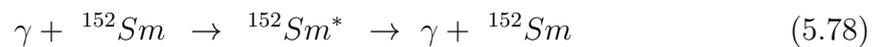
potrà essere solo $J_z = -1, 0$. Analogamente, se il neutrino ha elicità negativa, allora potremo realizzare solo stati di Samario eccitato con $J_z = +1, 0$.

Ci occupiamo adesso, per ragioni che saranno chiare fra breve, dei fotoni di diseccitazione verso il livello fondamentale 0^+ , emessi nella stessa direzione di moto del Samario. Se lo stato eccitato aveva $J_z = 0$, la transizione ha $\Delta J_z = 0$ e dunque avviene per emissione di un fotone linearmente polarizzato mentre se lo stato di partenza aveva $J_z = \pm 1$ il fotone emesso è circolarmente polarizzato ed è facile convincersi che questo ha la stessa elicità del neutrino !

Misurare la polarizzazione del fotone di diseccitazione emesso nella direzione di volo del Samario eccitato equivale quindi a misurare l'elicità del neutrino. Ma come distinguere i fotoni emessi in avanti dagli altri ?

Occorre a questo punto ricordare che i fotoni non trasportano la totalità della differenza di energia fra i due stati del Samario di 960 keV : il nucleo di Samario, nella diseccitazione elettromagnetica, riceverà a sua volta un piccolo rinculo, dell'ordine di 3.2 eV , che risulta fortuitamente essere quasi identico a quello ricevuto nella precedente cattura K , dato che il neutrino viene emesso con circa 840 keV .

Ne segue allora che quando i fotoni sono emessi "in avanti", cioè nella direzione di volo del Samario eccitato essi recuperano, per spostamento Doppler, praticamente tutta l'energia persa nell'emissione (ed il nucleo di Samario diseccitato va a riposo) in modo che essi sono in grado di effettuare scattering risonante con altri nuclei di Samario a riposo



Questi fotoni li si potrà così distinguere da quelli emessi in direzioni diverse, proprio usando questa loro caratteristica. Quindi, per determinare l'elicità dei neutrini emessi nella transizione, basta misurare la polarizzazione dei fotoni che contribuiscono maggiormente allo scattering risonante su Samario. Questa misura viene realizzata facendo attraversare ai fotoni, prima di giungere sul Samario, del ferro magnetizzato lungo l'asse di quantizzazione.

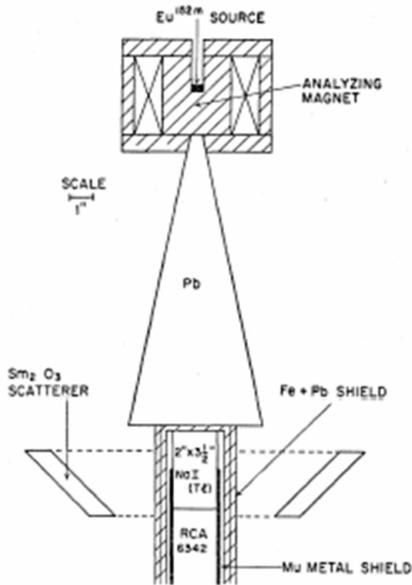


FIG. 1. Experimental arrangement for analyzing circular polarization of resonant scattered γ -rays. Weight of Sm_2O_3 scatterer: 1850 grams.

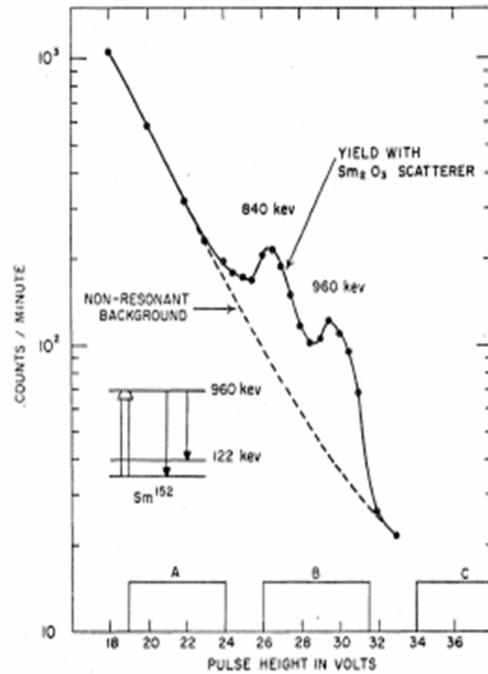


FIG. 2. Resonant-scattered γ rays of Eu^{152} . Upper curve is taken with arrangement shown in Fig. 1 with unmagnetized iron. Lower curve shows nonresonant background (including natural background).

Figure 60: *Arrangiamento sperimentale e risultati dell'esperimento di Goldhaber, Grodzins e Sunyar*

Nel ferro magnetizzato, due elettroni hanno lo spin preferibilmente allineato in verso opposto a quello del campo magnetico.

In generale, d'altronde, in uno scattering Compton elettrone-fotone come quello che accade nel ferro magnetizzato, lo spin dell'elettrone potrà essere invertito solo se quest'ultimo è antiparallelo allo spin del fotone. Questo significa che, per una data elicità dei fotoni, solo per una particolare polarizzazione³⁰² del ferro la sezione d'urto Compton conterà *anche* il termine di spin-flip e quindi sarà maggiore che nel caso di polarizzazione opposta, conducendo ad una maggiore attenuazione del fascio stesso. Basta allora misurare la frequenza con cui avviene lo scattering risonante in Samario nelle due configurazioni di campo magnetico allineato nel verso del moto dei fotoni e poi in verso opposto, per determinare infine l'elicità del fotone e quindi, per quanto visto sopra, quella del neutrino !

In questo modo, Goldhaber, Grodzins e Sunyar determinarono l'elicità del neutrino, che risultò essere -1 .

³⁰²Affinché ci possa essere spin-flip nel processo di scattering Compton occorre che lo spin dell'elettrone sia antiparallelo a quello del fotone.

5.6 Modifiche alla Teoria di Fermi

Al di là del problema della sua non rinormalizzabilità, con l'accumularsi dei dati sperimentali, ben presto ci si rese conto che la teoria di Fermi necessitava comunque di modifiche.

A causa del piccolo valore della velocità ($\beta \leq 3 \cdot 10^{-2}$) dei nucleoni nel nucleo, le piccole componenti³⁰³ degli spinori che compaiono nella corrente adronica sono trascurabili, per cui, in questa approssimazione, data la forma delle matrici γ^μ , è facile convincersi che risulta

$$J_{adr}^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \rightarrow (J^0, \vec{0}) \quad \text{con } J^0 = \bar{\psi}_p \gamma^0 \psi_n \equiv \hat{\psi}_p^\dagger \hat{\psi}_n \quad (5.80)$$

dove $\hat{\psi}_{n,p}$ stanno ad indicare le grandi componenti degli spinori di Dirac del neutrone e del protone, rispettivamente.

Questo operatore, come componente temporale di un operatore quadrivettoriale, è evidentemente scalare per rotazioni e quindi non ha elementi di matrice fra stati nucleari aventi diverso valore di momento angolare complessivo J , per cui può descrivere solo le cosiddette *transizioni di Fermi*, cioè quelle caratterizzate dall'aver $\Delta J_{nucl} = 0$ (fra nuclei aventi la stessa parità, poiché l'operatore $\hat{\psi}_p^\dagger \hat{\psi}_n$ è pari visto che, sotto parità la corrente sopra definita è tale che $J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Px)$ e dunque la componente temporale della corrente non cambia ...).

Però ben presto ci si rese conto che esistevano anche dei decadimenti che avvenivano con intensità comparabile con quelle di Fermi, dette *transizioni di Gamow-Teller*³⁰⁴, per le quali era $\Delta J_{nucl} = 1$ e questo richiedeva necessariamente di modificare la struttura della corrente inizialmente proposta da Fermi. D'altronde, questa corrente

$$J_{adr}^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \quad (5.81)$$

era stata scritta in questo modo solo per analogia con la corrente elettromagnetica; però, dopotutto, l'interazione debole era molto differente da quella elettro-

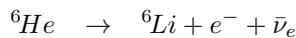
³⁰³Ricordiamo che le soluzioni ad energia positiva dell'equazione di Dirac hanno la seguente struttura generale

$$\psi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E}} \begin{pmatrix} (m+E) \hat{\psi}_0 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \hat{\psi}_0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \hat{\psi}_0 \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (5.79)$$

Le prime due componenti dello spinore, i.e. $\sqrt{m+E} \hat{\psi}_0 \equiv \hat{\psi}(\vec{p})$ sono dette *grandi componenti* mentre le seconde due, i.e. $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{m+E}} \hat{\psi}_0 \equiv \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m+E} \hat{\psi}(\vec{p})$ sono chiamate *piccole componenti*.

Nel limite non relativistico, evidentemente le prime dominano sulle seconde, essendo quest'ultime proporzionali alle prime sostanzialmente attraverso la velocità ...

³⁰⁴G.Gamow, E.Teller: *Selection rules for the β -disintegration* Phys. Rev. 49, 895 (1936)
Un esempio di transizione di questo genere è quella relativa al decadimento



dove si passa, appunto, da uno stato nucleare 0^+ ad uno stato nucleare 1^+ .

magnetica (interazione di contatto fra correnti cariche) per cui ci si poteva ben aspettare anche qualcosa di differente.

Volendo mantenere la forma bilineare³⁰⁵ nei campi (senza derivate), sulla base delle proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz, e quindi in vista di una interazione che poi risultasse relativisticamente invariante, per la "sorgente" dell'interazione debole carica esistevano, tenendo conto anche della parità, ben *cinque* possibilità indipendenti per combinare³⁰⁶ tra loro i $4 \times 4 = 16$ gradi di libertà associati a $\bar{\psi}$ e ψ , e cioè

$$S : \bar{\psi} \psi; \quad P : \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (5.88)$$

$$V : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi; \quad A : \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \quad (5.89)$$

$$T : \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \quad (5.90)$$

dove S e P assorbono entrambi un grado di libertà, V ed A ne assorbono quattro ciascuna e T assorbe i sei restanti³⁰⁷.

³⁰⁵Questa forma, infatti, garantisce la continuità al vertice tanto delle linee adroniche che di quelle leptoniche, ovvero la conservazione sia del numero barionico che del numero leptonico.

³⁰⁶Ricordiamo ancora una volta le definizioni delle matrici γ . Abbiamo

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

In questa rappresentazione, la matrice γ_5 è data da

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

per cui ne segue che

$$\gamma^0 \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^j \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

mentre, poiché per definizione è

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (5.86)$$

risulta che

$$\sigma^{0j} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^{jk} = -\epsilon_{jkl} \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

³⁰⁷Si osservi che $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi$ non è indipendente dal termine $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$, bensì le componenti $(0, j)$ ed $\epsilon_{jmn}(mn)$ si scambiano semplicemente tra loro, come è evidente dalla (5.87) e dalla (5.84).

Il termine pseudoscalare (5.88), nel limite non relativistico, dava comunque contributo nullo, per cui non poteva rendere conto in alcun modo dell'esistenza delle transizioni di Gamow-Teller. Rimasero così in lizza i termini di tipo A, S, T oltre a quello originale, V . Di questi, S e V potevano spiegare le transizioni di Fermi, mentre A e T potevano farlo per quelle di Gamow-Teller, riducendosi questi ultimi, nel limite non relativistico, infatti a³⁰⁸

$$\bar{\psi}_p \gamma^\mu \gamma_5 \psi_n \rightarrow (0, \hat{\psi}_p^\dagger \sigma_i \hat{\psi}_n) \quad (5.91)$$

$$\bar{\psi}_p \sigma^{0i} \psi_n \rightarrow 0; \quad \bar{\psi}_p \sigma^{ij} \psi_n \rightarrow -\epsilon_{ijk} \hat{\psi}_p^\dagger \sigma_k \hat{\psi}_n \quad (5.92)$$

dove le σ_i al secondo membro sono le consuete matrici di Pauli.

Occorsero circa vent'anni di sperimentazione per arrivare a fissare definitivamente la struttura delle correnti deboli nella teoria di Fermi.

In particolare, nel 1956, avvenne un fatto importantissimo per la loro comprensione. Lee e Yang³⁰⁹, mossi dalla strana eguaglianza di massa e vita media delle

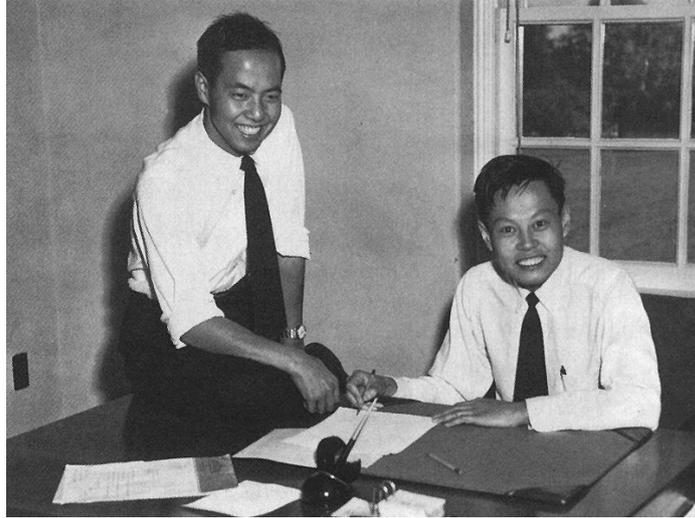


Figure 61: *T.D. Lee (1926), C.N. Yang (1922)*

³⁰⁸Si osservi che, essendo $\vec{\sigma}$ un operatore vettoriale per rotazioni, sia l'operatore (5.91) come l'operatore (5.92), per il teorema di Wigner-Eckart, possono descrivere sia transizioni $\Delta J = 0$ che transizioni $\Delta J = 1$, ma non possono descrivere transizioni fra $J_i = J_f = 0$, che, dunque, possono avere origine solo da transizioni di Fermi, come per esempio il decadimento ($0^+ \rightarrow 0^+$)

$${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N} + e^+ + \nu$$

Questo significa che le transizioni di Fermi e di Gamow-Teller non possono essere descritte da un unico termine di corrente.

Si osservi infine che nei nuclei, anche le transizioni permesse che sono indotte dall'operatore $\vec{\sigma}$, poiché sotto parità risulta $P : A^\mu \rightarrow -A_\mu; T^{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu}$, devono comunque avvenire fra stati con la stessa parità sia nel caso di corrente assiale A che tensoriale T .

³⁰⁹T.D. Lee, C.N. Yang: *Question of parity conservation in weak interactions*
Phys. Rev. 104, 254 (1956)

due particelle allora chiamate τ^+ e θ^+ , che decadevano³¹⁰ in stati di parità opposta (era il cosiddetto $\theta - \tau$ puzzle), effettuarono uno studio approfondito dei risultati sperimentali sulle interazioni deboli, dal quale emerse che da nessun esperimento fino ad allora eseguito sarebbe stato possibile evincere la conservazione della parità nelle interazioni deboli.

³¹⁰Nell'articolo pubblicato su Nature 163, 47 (1949), Brown et al. riportarono di aver osservato, in emulsioni esposte in alta montagna (Jungfrauoch, in Svizzera), il seguente processo

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (5.93)$$

Dall'analisi del decadimento, ottennero per il mesone τ^+ un valore di massa pari a $m \approx (1080 \pm 160)m_e$. Successivamente, O'Ceallaigh e Menon, nel 1954, osservarono il decadimento

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \quad (5.94)$$

concludendo che il θ^+ era anch'esso un mesone con massa $(1125 \pm 140)m_e$ e dunque molto prossima a quella del τ^+ .

Erano per caso la stessa particella?

Il problema erano i numeri quantici del θ^+ e del τ^+ . Iniziamo dalla θ^+ . Siccome lo stato finale è fatto di particelle senza spin, evidentemente lo spin S della θ^+ coincide con il momento angolare relativo $J = L$ dei due pioni prodotti (poiché assumiamo, ovviamente, che il momento angolare sia conservato nel decadimento ...). Dunque, a priori

$$S = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.95)$$

Se la parità è conservata nel decadimento, allora essendo quella dello stato finale pari a $(-1)^2(-1)^L$ (i pioni sono pseudoscalari, dunque hanno parità intrinseca -1), i casi possibili sono

$$S^P = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots \quad (5.96)$$

Nel caso del τ^+ , l'assegnazione è meno semplice, a causa dello stato finale a tre corpi.

Possiamo però studiarlo come composto da due sistemi: il primo fatto dai due pioni π^+ ed il secondo fatto dal primo sistema e dal terzo pione di segno opposto. Se indichiamo rispettivamente con \vec{l} ed \vec{l}' il momento angolare del sistema dei due π^+ e quello del π^- rispetto al sistema precedente, lo spin del τ^+ deve essere la somma dei due, i.e.

$$\vec{S} = \vec{l} + \vec{l}' \quad \Rightarrow \quad |l - l'| \leq S \leq l + l' \quad (5.97)$$

mentre l'eguaglianza dei due pioni del primo sistema implica che l sia pari, essendo bosoni. Quanto poi alla parità, quella dello stato finale essa è data da

$$P = (-1)^3 (-1)^l (-1)^{l'} \quad (5.98)$$

dove, di nuovo, il primo fattore nasce dal fatto che i pioni sono particelle pseudoscalari.

La relazione (5.97) suggerisce una descrizione dello stato finale come sovrapposizione di onde uscenti caratterizzate dai valori di l ed l' , tali da soddisfare appunto la (5.97). L'analisi della distribuzione dei tre pioni nello spazio delle fasi accessibile al decadimento (Dalitz-Fabri plot) mostrò una densità di punti uniforme e permise così di concludere che doveva essere $l = l' = 0$ per cui, al contrario della θ^+ , il τ^+ doveva essere 0^- .

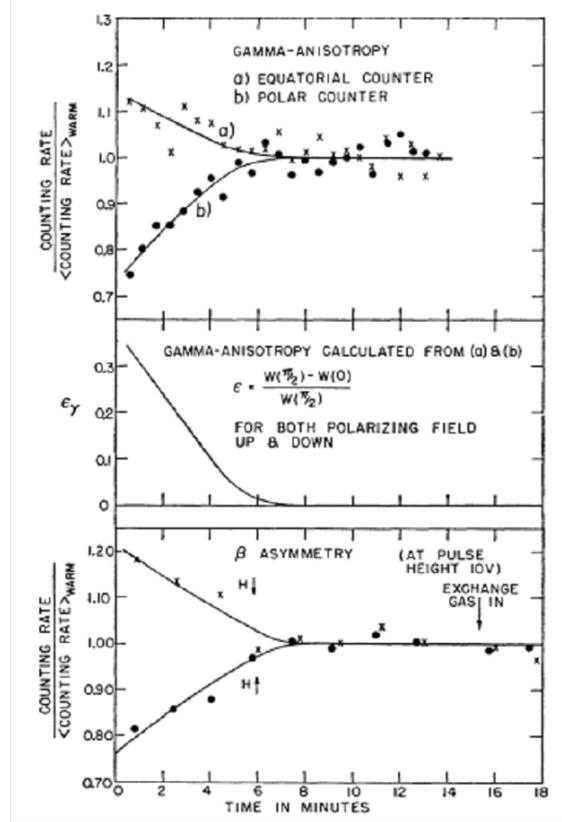
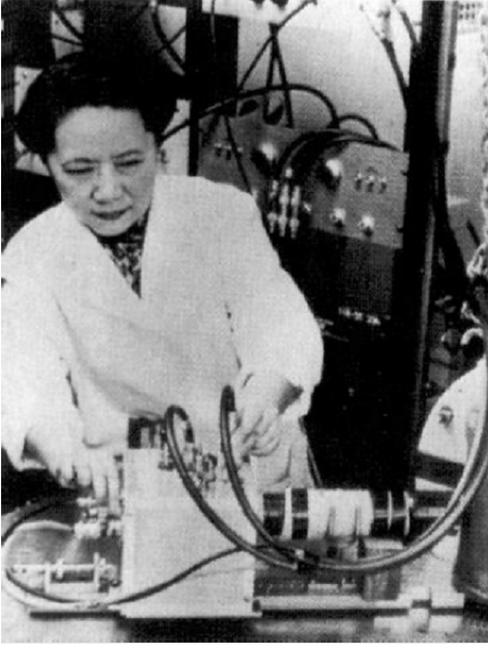


Figure 62: M.me Wu ed i risultati del suo esperimento con il ^{60}Co

Pochi mesi dopo il sasso nello stagno di Lee e Yang, che valse loro il Nobel³¹¹ nel 1957, arrivarono i primi risultati sperimentali che mostrarono come, effettivamente, la parità fosse violata nelle interazioni deboli, addirittura in modo massimale.

Ciò condusse alla struttura, cosiddetta, $V - A$ della hamiltoniana debole, che ancor oggi è perfettamente valida e, come si è visto, risulta ormai assorbita nel MS esattamente in questa forma, i.e.

$$H_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_n] [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu] + h.c. \quad (5.99)$$

Gli esperimenti cruciali che provarono la correttezza dell'ipotesi di Lee e Yang furono quello di M.me Wu e quello di Garwin e Lederman.

E' interessante notare come entrambi siano stati ricevuti dall'editore il 15/1/1957: una coincidenza che mostra un evidente accordo fra i due gruppi sperimentali, entrambi della Columbia University.

Veniamo alla loro descrizione ed iniziamo da quello di M.me Wu³¹².

³¹¹T.D. Lee, C.N. Yang: Nobel lecture 1957

³¹²C.S. Wu et al.: *Experimental test of parity conservation in beta decay* Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

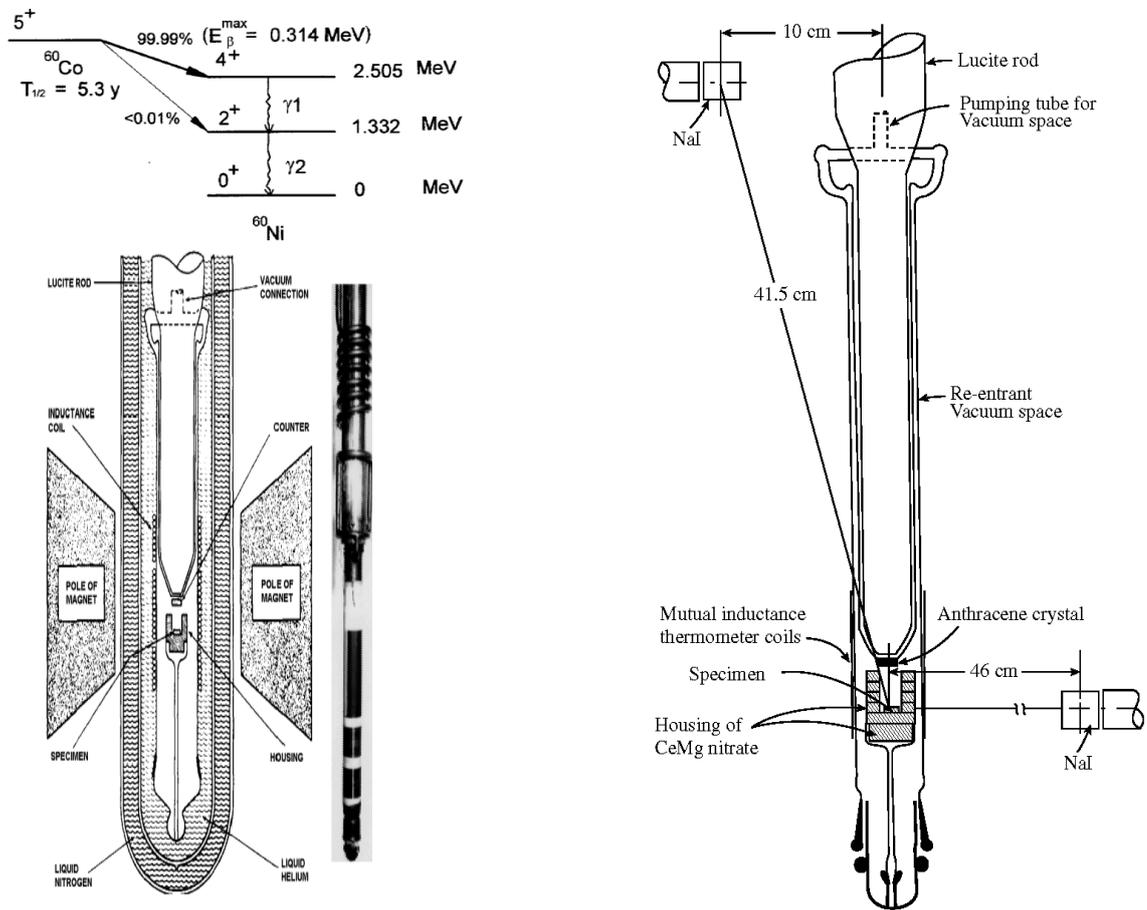


Figure 63: *Esperimento di M.me Wu*

L'esperimento fu fatto allo scopo di mettere in evidenza e quindi misurare possibili asimmetrie nella distribuzione degli elettroni emessi nel processo di decadimento β relativamente al piano normale allo spin del ^{60}Co polarizzato. L'orientamento dei nuclei di Cobalto era ottenuto attraverso un campo magnetico relativamente poco intenso ($B \approx 500 \text{ gauss}$) agente su questi atomi, raffreddati fino a $\approx 0.01^0\text{K}$ mediante la tecnica del raffreddamento tramite demagnetizzazione adiabatica, di Rose e Gorter³¹³.

³¹³M.E. Rose: "On the production of nuclear polarization", Phys. Rev. 75, 213 (1949)
C.J. Gorter: "A new suggestion for aligning certain atomic nuclei", Physica 14, 504 (1949)

Iniziamo osservando che una temperatura molto bassa risulterà senz'altro necessaria in quanto il magnetone nucleare $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ vale $\mu_N = 3.152 \times 10^{-8} \text{ eV} \cdot T^{-1}$ e dunque, anche con immaginando di disporre di campi magnetici molto intensi per esempio di 10T e tenendo conto che il nucleo di Cobalto ha un momento magnetico pari a circa tre magnetoni nucleari, risulta $\mu_{Co} B \approx 10^{-6} \text{ eV}$, da confrontare con un $kT = 82 \cdot 10^{-6} \text{ eV} @ 1^0\text{K}$.

Il problema di riuscire a produrre una temperatura così bassa è risolto attraverso, appunto, il metodo messo a punto da Rose e Gorter, citati sopra. Nel caso specifico, esso fu realizzato ponendo in un bagno termico di He liquido a pressione di vapore inferiore alla pressione atmosferica ($T_{He} \approx 1^0\text{K}$) un cristallo di Nitrato di Cerio e Magnesio ($2\text{Ce}(\text{NO}_3)_3 \cdot 3\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 24\text{H}_2\text{O}$), realizzato in modo che, al suo interno, potesse essere poi depositato un layer molto sottile ($\approx 50\mu\text{m}$) di ^{60}Co . Questo sale è una sostanza fortemente paramagnetica e anisotropa, che presenta due assi di magnetizzazione con costante di polarizzabilità molto differente: l'asse di maggiore polarizzabilità era disposto nel piano orizzontale mentre quello di minore polarizz-

Il processo di decadimento del ${}^{60}\text{Co}$ inizia con un decadimento β con $\Delta J = 1$ (transizione di Gamow-Teller permessa, tempo di dimezzamento $5.3 a$) ${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}$ da un livello 5^+ ad un livello 4^+ ($E_{\beta}^{max} = 314 \text{ KeV}$), seguito da una cascata elettromagnetica $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ con emissione di due fotoni via transizioni $E2$ da 1.173 MeV e 1.332 MeV , rispettivamente. I due fotoni sono emessi preferibilmente in una direzione ortogonale alla polarizzazione nucleare del ${}^{60}\text{Co}$ e dunque, la loro asimmetria poteva essere usata come controllo dell'allineamento nucleare.

Un sottile cristallo di antracene nel criostato rivelava gli elettroni: la luce emessa dal cristallo raggiungeva un fotomoltiplicatore posto in cima al criostato, attraverso una guida di luce. Due contatori a scintillazione di ioduro di sodio esterni al criostato, posti in una configurazione che permetteva il controllo dell'asimmetria di emissione dei gamma, verificavano lo stato di polarizzazione del ${}^{60}\text{Co}$ in funzione del tempo.

Per invertire lo spin nucleare bastava procedere di nuovo ad un raffreddamento dell'intero sistema e quindi invertire il senso di circolazione della corrente nel solenoide: la dipendenza angolare osservata doveva mostrare un'intensità che cambiava di segno, e questo sarebbe stata la firma conclusiva dell'esistenza della

abilità era allineato con la direzione verticale.

Come illustrato nella parte destra (in basso) della Fig.63, veniva prodotto un forte campo magnetico orizzontale. Questo allineava gli spin elettronici (ricordiamo che μ_e è circa 2000 volte maggiore di μ_N) del sale paramagnetico: i livelli che prima dell'imposizione del campo magnetico erano equipopolati, si popolavano favorendo, secondo la statistica di Boltzmann, i livelli di energia più bassa. Questo processo libera energia che viene però assorbita dal bagno di Elio e dunque la temperatura resta costante. Una volta raggiunto l'equilibrio spin-reticolo, veniva tolto il bagno di Elio, isolando così termicamente il cristallo di nitrato di Cerio e Magnesio e quindi la sorgente radioattiva di ${}^{60}_{27}\text{Co}$. Diminuendo il campo magnetico in modo adiabatico (ovvero su tempi più brevi di quelli di rilassamento spin-reticolo, dell'ordine della decina di minuti), poiché la popolazione dei vari livelli non varia (transizione adiabatica), ecco che il sistema, restando con la stessa distribuzione di popolazione, calava la temperatura del cristallo e della sorgente su di esso, restando, almeno in prima approssimazione, $\mu B/kT = \text{cost}$. Partendo allora da campi $B \approx 2T$, si potevano raggiungere, in questo modo, temperature di pochi milliKelvin, partendo da quella dell'Elio liquido. Una volta effettuato il raffreddamento, il magnete veniva tolto e veniva invece inserito un solenoide che serviva per polarizzare il Cobalto. Esso generava un campo dell'ordine di 500 gauss . Questo non riscaldava apprezzabilmente il sistema sia perché era molto meno intenso del campo usato in precedenza, sia perché era applicato secondo l'asse di minor magnetizzazione del sale. Questo campo B , comunque, era in grado di polarizzare gli spin *elettronici* del Cobalto, essendo, infatti, alla temperatura di $10 \text{ m}^0\text{K}$

$$\frac{\mu_e B}{kT} \approx \frac{5.788 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-2}}{8.617 \cdot 10^{-5} \times 10^{-2}} \approx 3.3$$

La polarizzazione nucleare era determinata dal campo magnetico che i momenti magnetici associati agli elettroni, allineati dal campo esterno, generavano sul nucleo, campi che sono dell'ordine dei Tesla.

Al passare del tempo, in circa sei minuti, la temperatura risaliva distruggendo così la polarizzazione nucleare.

violazione della parità nel decadimento (correlazione spin/impulso).

L'esperimento mostrò una notevole asimmetria³¹⁴ nell'emissione β , la quale seguiva strettamente l'evoluzione nel tempo della polarizzazione nucleare $\mathcal{P}(t)$, come misurata dall'anisotropia di emissione dei fotoni, i.e.

$$Y(\theta) = 1 - \mathcal{P}(t) \left\langle \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E} \right\rangle = 1 - \mathcal{P}(t) \frac{\langle v \rangle}{c} \cos\theta \quad (5.100)$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di volo dell'elettrone e la direzione della polarizzazione nucleare e, per il decadimento considerato, risulta $\langle v/c \rangle \approx 0.6$.

Veniamo adesso all'esperimento³¹⁵ di Garwin e Lederman, condotto presso il ciclotrone di Nevis.

Essi misero in evidenza la violazione di parità nel decadimento debole del pione, studiando le caratteristiche del decadimento del μ^+ generato dalla disintegrazione del π^+ , ovvero studiando la catena

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ (+\nu_\mu); \quad \mu^+ \rightarrow e^+ (+\nu_e + \bar{\nu}_\mu) \quad (5.101)$$

Come era stato osservato da Lee e Yang, il muone doveva nascere polarizzato longitudinalmente e questo stato di polarizzazione doveva a sua volta essere correlato con la direzione di emissione del positrone. Il fascio, che conteneva circa il 10% di μ^+ dal decadimento di π^+ in volo, veniva filtrato dai pioni stessi fermanone ed assorbendone quanti più possibile in 8" di carbone ($\lambda_I = 5''$).

In questo modo veniva massimizzato il numero di *mu-stop* nel bersaglio, posto davanti al telescopio che osservava i positroni di decadimento, realizzato con due scintillatori ed un moderatore fra loro in modo da dare un segnale di coincidenza solo quando l'energia dei positroni era superiore a 25 MeV (35 MeV in una seconda fase dell'esperimento).

Un campo magnetico $B(I) = 80 \text{ gauss}/A$ nella regione del bersaglio induceva una precessione³¹⁶ nota (ma variabile in funzione di I) dello spin del muone.

³¹⁴La presenza del campo solenoidale durante la misura si limita a canalizzare il moto degli elettroni lungo le linee di forza dello stesso, intorno a cui, data la relativamente bassa energia degli stessi, descrivono spirali piuttosto strette.

³¹⁵R.L. Garwin, L.M. Lederman, M. Weinrich: *Observation of the failure of Conservation of parity and Charge Conjugation in meson decays: the magnetic moment of the free muon* Phys. Rev. 105, 1415 (1957)

³¹⁶Ricordiamo che in campo magnetico uniforme e costante B , uno spin s che non sia allineato con il campo stesso, precece con una frequenza angolare pari a (SI)

$$2\pi\nu \equiv \omega = \frac{\mu B}{s\hbar} \quad \text{dove} \quad \mu = \frac{e\hbar}{2m} \quad (5.102)$$

e dunque, nel caso del muone ($s = 1/2$), assumendo nessun momento anomalo, abbiamo

$$\omega = \frac{eB}{2sm} \Rightarrow \frac{\omega}{B} = \frac{e}{m} = \frac{ec^2}{mc^2} \quad (5.103)$$

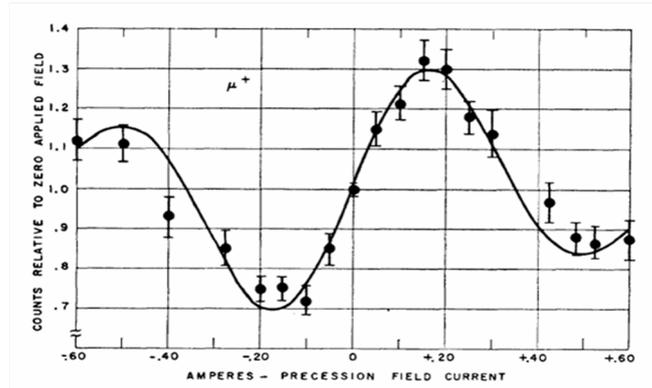
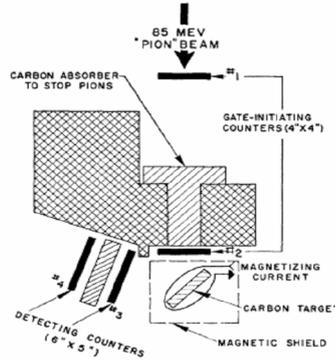


Figure 64: *L'apparato sperimentale usato da Garwin e Lederman per osservare la violazione di parità nel decadimento del muone ed i risultati ottenuti.*

Sperimentalmente si osservava una modulazione del numero dei positroni emessi fra $0.75 \mu s$ e $2.0 \mu s$ dopo il trigger di μ -stop in funzione della corrente di induzione magnetica I , compatibile con una correlazione di tipo $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ fra lo spin del muone al momento del decadimento e la direzione di volo del positrone, indice di violazione di parità sia nel decadimento del pione (se il muone non fosse stato polarizzato, anche se nel suo decadimento si fosse poi violata la parità, non avremmo potuto osservare alcuna modulazione poichè lo stato di spin del muone sarebbe stato distribuito isotropicamente) che nel decadimento del muone.

D'altronde

$$m c^2 = 105.66 \cdot 10^6 eV = 1.06 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19} J \quad (5.104)$$

e dunque

$$\frac{\omega}{B} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} (3 \cdot 10^8)^2}{1.06 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.06 \cdot 10^8} \approx 8.5 \cdot 10^8 s^{-1} T^{-1} \quad (5.105)$$

da cui, per un campo di $50 \text{ gauss} = 50 \cdot 10^{-4} T$ (massimo valore raggiunto sul bersaglio ...) ne risulta una frequenza di precessione pari a

$$\omega = 8.5 \cdot 10^8 \times 50 \cdot 10^{-4} = 4.25 \cdot 10^6 s^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,48 \cdot 10^{-6} s \quad (5.106)$$

A Appendix: Generalità

A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ($1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$, $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)

$$\begin{array}{ll} \text{carica dell'elettrone} & e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues} \\ \text{massa dell'elettrone} & m = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g} \\ \text{costante di Planck} & \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} \\ \text{velocità della luce} & c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s} \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito come

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AAngstrom};$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{\text{eV}}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{\text{eV}}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v , possiede un impulso³¹⁷

$$p = mv = mc\beta = 0.511 \beta \frac{\text{MeV}}{c}.$$

³¹⁷Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\gamma\beta$, dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho; & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; & \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{A.2})$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (*SI*) ed in quello di Heaviside-Lorentz (*HL*) risulta³¹⁸

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi \hbar c} \right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \quad (\text{A.4})$$

Ricordiamo infine che, sempre nel *SI*, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10 ²⁴	yotta	Y	10 ⁻¹	deci	d
10 ²¹	zetta	Z	10 ⁻²	centi	c
10 ¹⁸	exa	E	10 ⁻³	milli	m
10 ¹⁵	peta	P	10 ⁻⁶	micro	μ
10 ¹²	tera	T	10 ⁻⁹	nano	n
10 ⁹	giga	G	10 ⁻¹²	pico	p
10 ⁶	mega	M	10 ⁻¹⁵	femto	f
10 ³	kilo	k	10 ⁻¹⁸	atto	a
10 ²	hecto	h	10 ⁻²¹	zepto	z
10 ¹	deka	da	10 ⁻²⁴	yocto	y

Figure 65: *Prefissi nel Sistema Internazionale*

³¹⁸Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho; & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; & \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

In particolare, $q_{HL} = \sqrt{4\pi} q_{cgs}$, da cui, se $\hbar = c = 1$, ne segue che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

A.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, \dots) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italici (i, j, \dots) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \quad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \quad (\text{A.5})$$

ed il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq , oppure (pq) , se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \quad (\text{A.6})$$

Dato un quadrivettore p , rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (pp) = p^\mu p_\mu \quad (\text{A.7})$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.8})$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\text{A.9})$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\text{A.10})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{A.11})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.12})$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu \equiv \not{p} \quad (\text{A.13})$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.14})$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{A.16})$$

$$(\gamma_5)^2 = I \quad (\text{A.17})$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.18})$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ , i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

ed in questa rappresentazione, la matrice γ_5 assume la forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$