

# Elementi di FISICA II

## Cenni di idrostatica, idrodinamica elettrostatica e magnetostatica

E. Iacopini

16 gennaio 2022



*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica  
e tutta l'abilità messe in un lavoro  
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.  
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

*La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.*

*Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

Il Saggiatore (1623)

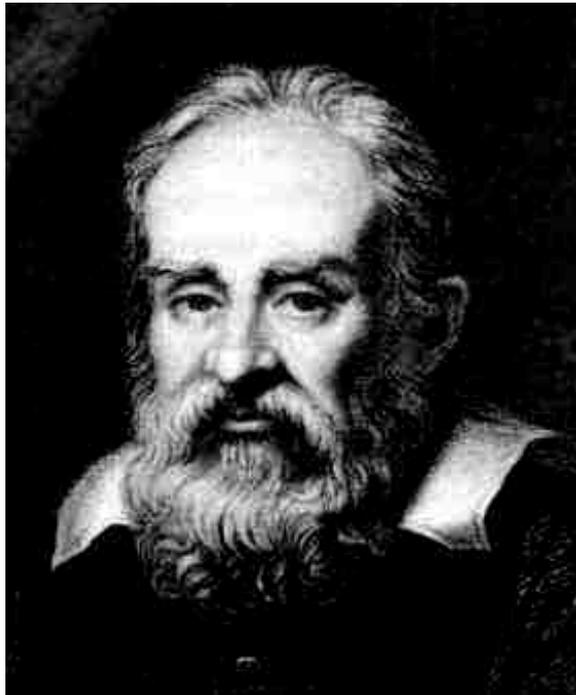


Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

## Simboli usati

### Idrostatica, Idrodinamica, Suono

$p$  : pressione

$\vec{F}$  : forza

$S, \sigma, \Sigma$  : superficie

$d\vec{S}$  : elemento di superficie orientata

$\vec{n}$  : versore

$\rho$  : densità del fluido

$\vec{v}$  : velocità del fluido

$\vec{j} = \rho \vec{v}$  : densità di flusso del fluido

$\vec{a}$  : accelerazione del fluido

$g$  : accelerazione di gravità

$m$  : massa

$U$  : potenziale per unità di massa

$\vec{\nabla}$  : operatore  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$\Omega, \omega$  : pulsazione o velocità angolare

$R, r$  : raggio

$V, dV$  : volume ed elemento infinitesimo di volume

$\phi$  : flusso

$Q$  : portata volumetrica

$P$  : portata (di massa)

## **Elettrostatica, Magnetismo**

$\rho$  : densità di carica elettrica di volume

$\sigma$  : densità di carica elettrica di superficie

$q, Q$  : carica elettrica

$\vec{F}$  : forza

$R, r, D$  : raggio, distanza

$e$  : carica dell'elettrone

$c$  : velocità della luce nel vuoto

$\epsilon_0$  : costante dielettrica del vuoto

$\mu_0$  : permeabilità magnetica del vuoto

$\vec{P}$  : momento di dipolo elettrico

$Q_{ij}$  : momento di quadrupolo elettrico

$S, \Sigma$  : superficie

$d\vec{l}$  : elemento di linea orientata

## **Correnti elettriche**

$R$  : resistenza elettrica

$C$  : capacità del condensatore

$M_{ij}$  : coefficiente di mutua induzione

$L$  : coefficiente di auto induzione



# Indice

<b>1</b>	<b>Idrostatica</b>	<b>11</b>
1.1	I liquidi . . . . .	11
1.2	La pressione . . . . .	12
1.3	La legge di Stevino . . . . .	14
1.4	Il barometro di Torricelli . . . . .	18
1.5	Il paradosso idrostatico . . . . .	19
1.6	La legge di Pascal . . . . .	23
1.7	Equilibrio di un liquido in rotazione uniforme intorno a un asse fisso . . . . .	24
1.8	La legge di Archimede . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Idrodinamica</b>	<b>31</b>
2.1	Introduzione . . . . .	31
2.2	Divergenza del campo di velocità . . . . .	35
2.3	Teorema di Leonardo . . . . .	37
2.4	Equazioni di Eulero . . . . .	40
2.5	Teorema di Bernoulli . . . . .	44
2.6	Teorema di Torricelli . . . . .	46
2.7	Tubo di Venturi . . . . .	47
2.8	Moto di liquidi reali . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Il suono</b>	<b>55</b>
3.1	L'equazione delle onde sonore . . . . .	55
3.1.1	Onde sonore in una dimensione . . . . .	60
3.1.2	Onde piane in tre dimensioni . . . . .	64
3.1.3	Le onde sferiche . . . . .	66
3.1.4	Riflessione e rifrazione di un'onda sonora . . . . .	69
3.1.5	Onde evanescenti e riflessione totale . . . . .	73
3.1.6	Energia associata all'onda sonora . . . . .	75
3.1.7	Interferenza e battimenti . . . . .	80

<b>4</b>	<b>Elettricità</b>	<b>85</b>
4.1	L'elettrostatica . . . . .	85
4.1.1	La carica elettrica . . . . .	85
4.1.2	La forza di Coulomb . . . . .	86
4.1.3	Il Principio di sovrapposizione . . . . .	90
4.1.4	Il campo elettrico . . . . .	92
4.1.5	La legge di Gauss . . . . .	93
4.1.6	Il campo elettrico è conservativo . . . . .	101
4.1.7	Il potenziale elettrostatico . . . . .	103
4.1.8	Energia di un sistema di cariche . . . . .	110
4.1.9	Sviluppo in multipoli . . . . .	116
4.1.10	Il dipolo elettrico . . . . .	120
4.1.11	Elettrostatica di un conduttore . . . . .	122
4.1.12	Induzione elettrostatica . . . . .	124
4.1.13	Campo elettrico in prossimità di un conduttore . . . . .	126
4.1.14	La capacità di un conduttore isolato . . . . .	128
4.1.15	Elettrostatica di un sistema di conduttori . . . . .	130
4.1.16	Il condensatore . . . . .	133
4.1.17	Collegamenti fra condensatori . . . . .	139
4.1.18	I dielettrici . . . . .	141
4.1.19	La polarizzazione . . . . .	148
4.2	La corrente continua . . . . .	153
4.2.1	La densità di corrente . . . . .	156
4.2.2	Considerazioni su alcuni circuiti elettrici in cc . . . . .	158
4.2.3	Il generatore . . . . .	161
4.2.4	Le leggi di Kirchhoff . . . . .	164
4.2.5	Carica e scarica del condensatore . . . . .	168
<b>5</b>	<b>Magnetismo</b>	<b>173</b>
5.1	La magnetostatica . . . . .	173
5.1.1	Il campo magnetico . . . . .	173
5.1.2	La forza magnetica di un circuito su se stesso . . . . .	182
5.1.3	Proprietà locali del campo di induzione magnetica . . . . .	185
5.1.4	Proprietà integrali del campo $\vec{B}$ . . . . .	189
5.1.5	Legge di Biot-Savart . . . . .	190
5.1.6	Campo magnetico prodotto da una spira sul proprio asse . . . . .	196
5.1.7	Campo magnetico prodotto da un solenoide . . . . .	198
5.1.8	Azioni meccaniche su una spira in campo magnetico . . . . .	203
5.1.9	Sviluppo in multipoli del potenziale vettore . . . . .	206
5.2	L'elettromagnetismo . . . . .	210
5.2.1	La forza di Lorentz . . . . .	210
5.2.2	Leggi di trasformazione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ . . . . .	212
5.2.3	Induzione elettromagnetica . . . . .	214
5.2.4	Legge di Lenz . . . . .	219

5.2.5	Equazioni di Maxwell dipendenti dal tempo . . . . .	221
5.2.6	Mutua induzione . . . . .	224
5.2.7	Energia associata a un sistema di correnti stazionarie .	225
5.3	Circuiti elettrici elementari . . . . .	227
5.3.1	Circuito RL . . . . .	227
5.3.2	Circuito RLC in serie . . . . .	230
5.4	Le correnti alternate . . . . .	238
5.5	Magnetismo nella materia . . . . .	248

# Introduzione

In questo volume sono raccolte le note relative alle lezioni di Fisica II, tenute agli studenti del corso di laurea in Scienze della Terra presso l'Università degli studi di Firenze, negli anni dal 1994 al 2000.

Il Corso, molto elementare, iniziava trattando argomenti di idrostatica e idrodinamica, che solitamente fanno parte del programma di Fisica I, per poi passare a quelli tipici della Fisica II, cioè all'elettricità e al magnetismo. Questo scambio era per compensare il fatto che, allo scopo di rendere comprensibile la Cristallografia, che veniva trattata prima del Corso di Fisica II, nel Corso di Fisica I venivano anticipate nozioni di Ottica, argomento tipico, invece, della Fisica II.

Il Corso giungeva fino alle equazioni di Maxwell, senza però sviluppare la parte relativa alle onde elettromagnetiche.

Le conoscenze matematiche presunte sono quelle che normalmente si raggiungono alla fine della scuola secondaria, come, per esempio, la nozione di numero reale, numero complesso, di derivata e integrale. Viene dato per acquisito anche il concetto di scalare e vettore e quindi quello di grandezza scalare e vettoriale.

# Capitolo 1

## Idrostatica

### 1.1 I liquidi

Iniziamo definendo che cosa intendiamo per *una sostanza liquida*.

Come sappiamo dalla Fisica elementare, le differenze essenziali che ci sono fra corpi solidi, liquidi e gassosi sono che

- i corpi solidi possiedono volume e forma propria;
- i corpi liquidi hanno volume proprio (e dunque sono incompressibili) ma possono variare di forma;
- i corpi gassosi non hanno né volume né forma propri: occupano qualunque volume è posto a loro disposizione, di qualunque forma esso sia.

Pur esistendo corpi che non appartengono a nessuna delle categorie sopra elencate (colloidi), e pur esistendo corpi di difficile collocazione (come vetri, lave, etc. ...), la classificazione data è molto generale e noi cominceremo occupandoci delle proprietà dei liquidi perfetti.

Che cosa è un *liquido perfetto* ?

Si tratta di un liquido la cui densità non può essere modificata in alcun modo e tale da non possedere attrito interno, ovvero tale che non ci sono forze interne che si oppongono allo scorrimento di uno strato di liquido su un altro. Come conseguenza di questa seconda proprietà, il lavoro compiuto contro le forze interne del liquido, allorché se ne varia la forma, è sempre nullo.

L'acqua, la benzina, l'alcool possono essere visti come una buona approssimazione di liquido perfetto, mentre l'olio, il miele, ... sono liquidi molto viscosi (cioè con forte attrito interno) e dunque lontani dall'approssimazione di liquido perfetto.

## 1.2 La pressione

Un liquido esercita su tutte le superfici con le quali è a contatto delle forze, dette *forze di pressione*. Consideriamo, per esempio, cosa accade a dell'acqua presente in un secchio.



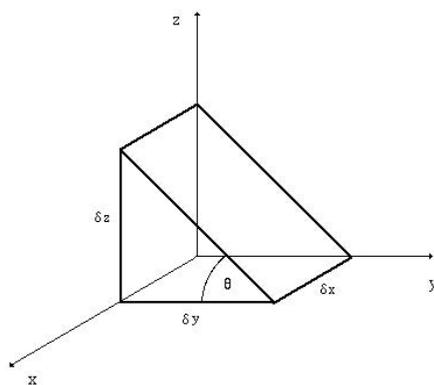
**Figura 1.1:** Secchio pieno di acqua

L'acqua esercita delle forze sulle pareti del secchio, le quali reagiscono con forze uguali e opposte, realizzando così una situazione di equilibrio. Che le cose vadano proprio in questo modo lo capiamo immediatamente praticando un foro nella parete del secchio: in quella zona, la parete non può opporre alcuna forza contro l'acqua, per cui essa non è più in equilibrio e fuoriesce dal secchio...

In assenza di attrito interno (liquido perfetto) in un liquido in quiete la forza  $d\vec{F}$  esercitata dal liquido su una superficie infinitesima  $dS$  ha una intensità proporzionale a  $dS$ , ed è diretta secondo la normale  $\vec{n}$  a  $dS$ . La costante di proporzionalità fra l'intensità della forza e la superficie su cui agisce viene chiamata *pressione*

$$d\vec{F} = p dS \vec{n} \quad (1.2.1)$$

e dipende unicamente dal punto dove si trova l'elemento di superficie  $dS$ , ma non da come esso è orientato: questo fatto va sotto il nome di *Principio di Pascal* (Blaise Pascal, 1623-1662).



**Figura 1.2:** prisma

Per rendercene conto, consideriamo per esempio, all'interno di un liquido in quiete, il volume di liquido racchiuso nel prisma retto di cui alla fig.2, avente dimensioni infinitesime  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$ . Se il liquido contenuto nel prisma è in equilibrio, significa che la somma vettoriale delle forze esterne che agiscono su di esso è nulla, ovvero che la somma algebrica di ciascuna delle tre componenti delle forze che agiscono sulle varie

superfici è nulla. Iniziamo con la risultante lungo l'asse  $y$ . Poiché le forze sono ortogonali alle superfici, lungo questa direzione contribuiscono solo le due forze che agiscono rispettivamente contro la faccia verticale, di lati  $\delta x$  e  $\delta z$  e contro la faccia obliqua. Indichiamo rispettivamente con  $p_y$  e con  $p$  le pressioni che agiscono contro le due facce.

Perché sia soddisfatta la condizione di equilibrio deve essere

$$p_y \delta x \delta z = p \delta x \sqrt{\delta y^2 + \delta z^2} \sin \theta \quad (1.2.2)$$

ma si riconosce immediatamente che

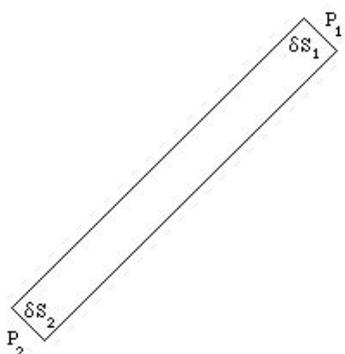
$$\sqrt{\delta y^2 + \delta z^2} \sin \theta = \delta z \quad (1.2.3)$$

e dunque deve essere

$$p_y = p \quad (1.2.4)$$

E' facile adesso convincersi come questo risultato dimostri in generale che, in un liquido ideale, la pressione in un punto non dipenda dall'orientamento della superficie in quel punto. Nel sistema di unità di misura internazionale (*SI*), dove la forza si misura in newton (*N*) e la superficie in metri quadri, la pressione si misura in pascal:  $N/m^2 = Pa$ . Per ragioni storiche, esistono altre unità di misura della pressione ancora diffuse come, per esempio<sup>1</sup>

- 1 *baria* = 1 *dine/cm*<sup>2</sup> (unità di pressione nel sistema *cgs*) =  $10^{-5} N / 10^{-4} m^2 = 10^{-1} N / m^2 = 0.1 Pa$
- 1 *bar* =  $10^6$  *barie*



**Figura 1.3:** pressione uguale

Dimostriamo adesso che in un liquido ideale, *in assenza di campi di forze esterne* agenti su di esso, la pressione è ovunque la stessa.

Consideriamo infatti, in un liquido, due punti generici  $P_1$  e  $P_2$  e costruiamo il cilindro avente come generatrice la congiungente i due punti e come basi due superfici circolari infinitesime  $\delta S_1$  e  $\delta S_2$ , aventi lo stesso raggio  $\delta r$ , centrate rispettivamente intorno a  $P_1$  e  $P_2$  e disposte ortogonalmente all'asse del cilindro (vedi figura).

Applichiamo le solite considerazioni di statica al liquido nel cilindro: poiché esso è in quiete, la risultante delle forze esterne dovrà essere nulla.

Occupiamoci della componente  $F_g$  della risultante delle forze lungo la direzione definita dalla generatrice del cilindro (orientata, per esempio, da  $P_1$  a  $P_2$ ).

<sup>1</sup>Le previsioni del tempo riportano pressioni atmosferiche dell'ordine di 1000 *mbar* ovvero di 1 *bar* =  $10^6$  *barie* =  $10^5 Pa$  (1000 *hectopascal*) =  $10^5 N/m^2 \approx 10^4 Kg_p/m^2 = 1Kg_p/cm^2$ .

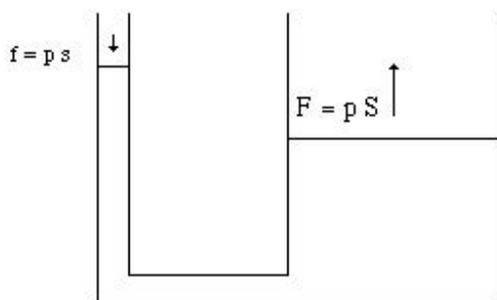
Chiaramente la pressione sulla parete laterale del cilindro non produce una componente lungo questa direzione: solo la pressione esercitata sulle due superfici di base possono contribuire a questa componente, la quale vale dunque ( $p_1$  è la pressione in  $P_1$ , mentre  $p_2$  è la pressione in  $P_2$ )

$$F_g = p_1 \delta S_1 - p_2 \delta S_2 \quad (1.2.5)$$

Poiché  $F_g$  deve essere nulla e le due superfici hanno la stessa ampiezza, segue che la pressione nei due punti deve essere la stessa.

Basata su questo fatto è una macchina nota come *Torchio idraulico*.

Esso consente, per esempio, di sollevare oggetti molto pesanti (come, per esempio, un'auto...), ovvero di generare forze intense a partire da forze molto meno intense (vedi figura)



Poiché la pressione nel liquido è la stessa, usando la forza  $f$  sulla superficie  $s$  possiamo produrre sulla superficie  $S$  ( $S > s$ ) una forza  $F = p S = f \frac{S}{s}$ , che può essere anche molto maggiore di  $f$  pur di fare il rapporto delle superfici  $\frac{S}{s} \gg 1$ !

È l'analogo della leva.

**Figura 1.4:** torchio idraulico

Come nel caso di quest'ultima, durante il funzionamento del torchio, se la forza  $\vec{f}$  sposta il suo punto di applicazione di una quantità  $\delta \vec{x}$ , allora, poiché il liquido è incomprimibile e quindi il suo volume non può cambiare, la forza  $\vec{F}$  sposta il suo punto di applicazione di  $\delta \vec{X} = -\delta \vec{x} \frac{s}{S}$ : il lavoro fatto dalla forza  $\vec{f}$  e quello fatto dalla forza  $\vec{F}$  risultano così uguali e opposti.

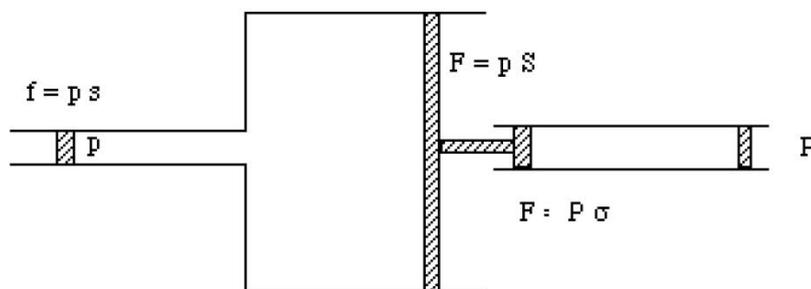
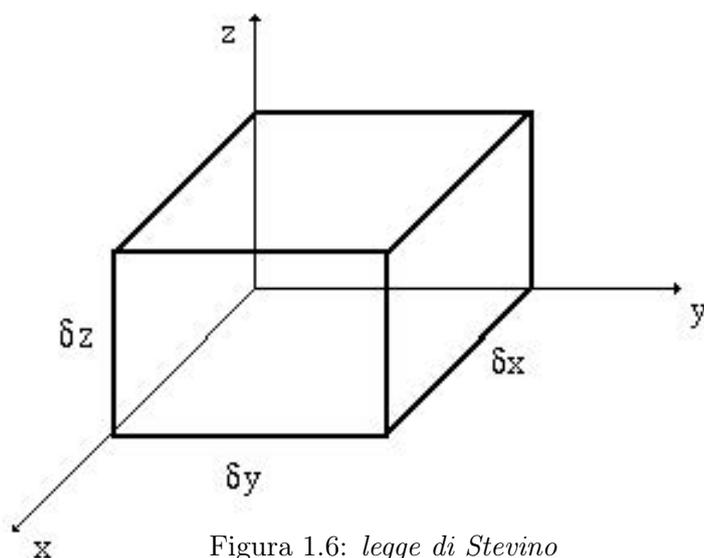
Anche nel torchio idraulico, visto che siamo in assenza di attriti, ovviamente l'energia meccanica si conserva.

Si può infine, con un marchingegno (compressore) per certi versi simile al torchio, trasformare una pressione  $p$  in una pressione  $P \gg p$ : la macchina in questione è rappresentata in fig.(1.5) e si può verificare facilmente che, anche nel compressore, l'energia meccanica si conserva.

### 1.3 La legge di Stevino

In un liquido, in presenza della forza di gravità (campo di forze esterno ...), la pressione dipende dall'altezza.

Consideriamo infatti il parallelepipedo di liquido rappresentato in fig.(1.6). Se la porzione di liquido è in equilibrio (situazione statica), la risultante delle forze esterne agenti su di essa deve essere nulla. Sia dunque  $\rho$  la densità

Figura 1.5: *Compressore idraulico*Figura 1.6: *legge di Stevino*

del liquido mentre indichiamo con  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità: consideriamo la componente verticale agente sulla superficie orizzontale più bassa: essa è dovuta alla somma della forza di pressione sulla faccia superiore  $p(z + \delta z) \delta x \delta y$  con il peso del liquido  $\rho g \delta x \delta y \delta z$ , alla quale si oppone la forza di pressione sulla faccia inferiore  $p(z) \delta x \delta y$ :

$$p(z + \delta z) \delta x \delta y + \rho g \delta x \delta y \delta z = p(z) \delta x \delta y \quad (1.3.6)$$

da cui si ricava immediatamente che

$$p(z + \delta z) - p(z) = -\rho g \delta z \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (1.3.7)$$

Questa legge può essere generalizzata al caso in cui il liquido sia soggetto a una *forza di massa conservativa*, cioè a una forza che è proporzionale alla massa di liquido su cui essa agisce e che può essere dedotta da un potenziale

$U(\vec{r})$  per unità di massa.

Per ipotesi, dunque, la forza esterna che agisce sulla massa  $dm$  vale<sup>2</sup>

$$d\vec{F} = dm[-grad U] = -\rho dV \vec{\nabla} U \quad (1.3.9)$$

Consideriamo allora, di nuovo, il liquido contenuto nel parallelepipedo di fig.(1.6). Poiché il liquido, per ipotesi, è fermo, la risultante delle forze agenti su di esso è nulla. Questo significa che ogni componente della risultante deve essere separatamente nulla. Occupiamoci, per esempio, della componente  $z$ . Si ha

$$0 = p(z) \delta x \delta y - p(z + \delta z) \delta x \delta y + \delta F_z \quad (1.3.10)$$

dove  $\delta F_z$  è la componente  $z$  della forza esterna dovuta al campo conservativo in cui il liquido si trova. A meno di infinitesimi di ordine superiore, questa componente vale

$$\delta F_z = -dm \frac{\partial U(\vec{P})}{\partial z} = -\rho \delta x \delta y \delta z \frac{\partial U(\vec{P})}{\partial z} \quad (1.3.11)$$

dove  $\vec{P}$  è un punto qualunque del parallelepipedo (per esempio, il suo centro: avendo il parallelepipedo dimensioni infinitesime, la scelta del punto interessa solo agli ordini superiori al primo). Sostituendo e facendo tendere a zero le dimensioni del parallelepipedo, otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial z} \delta z \delta x \delta y - \rho \delta x \delta y \delta z \frac{\partial U(\vec{P})}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{\partial U}{\partial z} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(p + \rho U) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

dove abbiamo usato il fatto che in un liquido ideale la densità è costante. Ripetendo il ragionamento per le altre componenti e ricordando la definizione di gradiente, si ricava

$$grad(p + \rho U) \equiv \vec{\nabla}(p + \rho U) = \vec{0} \quad (1.3.13)$$

che si integra immediatamente fornendo

$$p + \rho U = cost \quad (1.3.14)$$

Questo ci dice che il valore della quantità  $p + \rho U$  non cambia se lo valutiamo in punti diversi del liquido.

---

<sup>2</sup>Ricordiamo che la definizione dell'operatore gradiente è la seguente: data una funzione scalare  $f(\vec{r})$ , cioè una funzione che associa a un punto  $\vec{r}$  dello spazio un numero reale, si definisce *gradiente* di  $f$  in  $\vec{r}$  la seguente funzione vettoriale

$$grad f(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{\vec{r}} \quad (1.3.8)$$

Il risultato ottenuto, che costituisce l'equazione fondamentale della statica dei liquidi, stabilisce in particolare che, in un liquido ideale sottoposto a forze di massa conservative, le superfici di uguale pressione (isobare) sono anche superfici equipotenziali.

Nel caso particolare della gravità, dove, per piccole distanze dalla superficie della Terra, il potenziale gravitazionale per unità di massa vale semplicemente

$$U(x, y, z) = g z \quad (1.3.15)$$

(essendo  $z$  l'altezza, positiva verso l'alto, misurata rispetto a un livello convenzionale come, per esempio, quello del mare), risulta la seguente dipendenza della pressione con  $z$

$$p(z) + \rho g z = p(z+h) + \rho g (z+h) \quad \Rightarrow \quad p(z) = p(z+h) + \rho g h \quad (1.3.16)$$

Questo risultato è noto in generale come legge di Stevino: esso afferma che *in un liquido in equilibrio idrostatico nel campo della gravità, la differenza di pressione fra due punti è data dalla pressione esercitata alla base da una colonna di quel liquido, avente altezza uguale al dislivello fra i due punti considerati.*

Infatti se  $h$  è il dislivello ed  $S$  è l'area della base del cilindro, il peso della colonna di liquido vale  $mg = \rho h S g$  e dunque la pressione alla base vale  $p = mg/S = \rho h g$ .

Una dimostrazione sperimentale di questa legge fu suggerita nel 1648 da Blaise Pascal, mostrando come si potesse provocare lo scoppio di una botte semplicemente collegandola a un tubo verticale (di sezione qualsiasi) e riempiendo quest'ultimo di acqua. Alla base del tubo e dunque sulla superficie interna della botte, è presente infatti una pressione

$$p = p_{atm} + \rho g h \quad (1.3.17)$$

dove  $h$  è l'altezza dell'acqua nel tubo (si trascura l'altezza della botte...). Naturalmente, la pressione atmosferica è presente, anche all'esterno della botte, per cui la quantità  $\rho g h$  fornisce direttamente la differenza di pressione a cui è sottoposta la parete della botte.

Basta allora, per esempio, che  $h = 10$  m perché questa differenza di pressione sia già dell'ordine della pressione atmosferica, infatti

$$\rho g h = 1000 \times 9.8 \times 10 = 0.98 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (1.3.18)$$

Da questo risultato segue altresì che la pressione a cui viene sottoposto un subacqueo, mentre scende nelle profondità marine, cresce, appunto, di circa una atmosfera ogni dieci metri di discesa.

## 1.4 Il barometro di Torricelli

Fu Evangelista Torricelli, allievo di Galileo, il primo a utilizzare la legge di Stevino per mettere in evidenza sia l'esistenza del vuoto che l'esistenza di una pressione esercitata dall'atmosfera presente intorno a noi.

Egli, inventò per questo uno strumento, oggi noto appunto come *barometro di Torricelli*, o anche *barometro a mercurio*.

Si tratta semplicemente di un tubo chiuso a una estremità che, riempito preventivamente di mercurio, viene capovolto in una bacinella ripiena dello stesso liquido (vedi fig. 1.7).

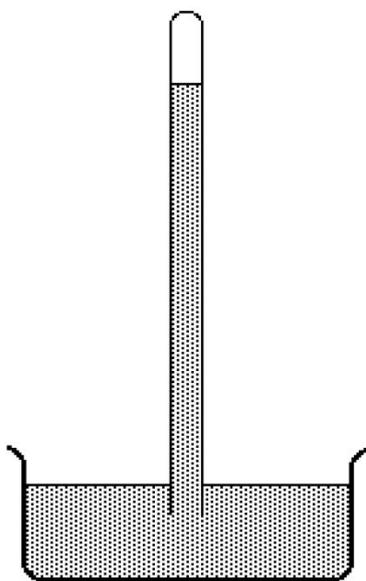


Figura 1.7: *Barometro di Torricelli*

Il pelo libero del liquido nel tubo e la superficie libera nella bacinella non stanno alla stessa altezza: la differenza di altezza  $h$  è dovuta al fatto che le due superfici libere del mercurio non si trovano alla stessa pressione.

Sulla superficie del mercurio nella bacinella si esercita infatti la pressione atmosferica  $P_a$ , mentre il pelo libero nel tubo si trova a pressione praticamente nulla (nel volume di tubo che si è vuotato del mercurio preesistente, la pressione residua è pari alla tensione di vapore  $T_{Hg}$  del mercurio a temperatura ambiente, molto inferiore alla pressione atmosferica).

Dalla legge di Stevino, segue che

$$T_{Hg} + \rho_{Hg} g h = P_a \quad \Rightarrow \quad P_a - T_{Hg} \approx P_a = \rho_{Hg} g h \quad (1.4.19)$$

dove  $\rho_{Hg}$  è la densità del mercurio ( $13595.5 \text{ Kg/m}^3$ ), mentre  $g$ , al solito, indica l'accelerazione di gravità.

Sperimentalmente risulta che, in condizioni normali e sul livello del mare  $h \approx 760 \text{ mm}$ . Una unità di misura di pressione legata direttamente a questa legge è il Torricelli (torr): essa è definita come la pressione esercitata alla base da una colonna di mercurio alta  $1 \text{ mm}$  (per cui viene anche detta  $\text{mmHg}$ ). Questa è l'unità attraverso la quale, per esempio, viene tutt'oggi espressa la pressione sanguigna... Risulta

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} &\equiv 1 \text{ mmHg} = \rho_{Hg} g h \approx 13.6 \cdot 10^3 \text{ Kg m}^{-3} \times 9.8 \text{ m s}^{-2} \times 10^{-3} \text{ m} = \\ &= 133.3 \text{ N m}^{-2} = 133.3 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

## 1.5 Il paradosso idrostatico

Consideriamo i due recipienti rappresentati nella figura riportata sotto.

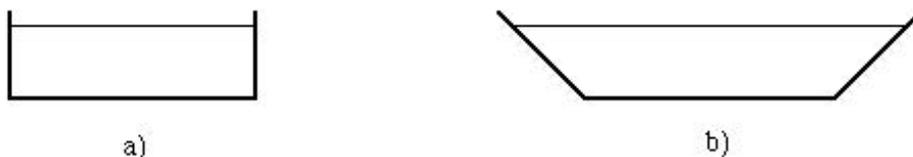


Figura 1.8: *confronto recipienti*

Entrambi i recipienti hanno la stessa superficie di base  $S$  e sono riempiti dello stesso liquido fino alla stessa altezza: chiaramente però non contengono la stessa massa di liquido ... eppure, per quanto ci assicura la legge di Stevino, la pressione che il liquido esercita sulla base del recipiente è la stessa nei due casi. Poiché anche la superficie di base è la stessa, ne segue che la forza di pressione che il liquido esercita sulla base è uguale nei due casi. Dunque questa forza, necessariamente, non può coincidere con il peso del liquido, perché esso, nei due casi è chiaramente diverso !

D'altronde, se noi dovessimo sostenere i due recipienti, lo faremmo applicando alle loro basi una forza uguale e opposta al peso del liquido in essi contenuto (ammettiamo, per semplicità, di poter trascurare la massa del contenitore in confronto con quella del liquido che contiene ...).

Come si esce da questo apparente paradosso?

Occorre ricordare che le forze di pressione sono ortogonali alle superfici su cui agiscono: è immediato allora notare che

- nel caso a), la pressione sulle superfici laterali non ha componente verticale, mentre le varie componenti orizzontali si elidono a vicenda;
- nel caso b), la pressione sulle superfici laterali continua a produrre una forza risultante sulle pareti che non ha componente orizzontale, ma, essendo le superfici oblique, **possiede** una componente verticale...

E proprio questa componente verticale che si origina sulle pareti laterali la quale, sommata algebricamente alla forza di pressione sul fondo, uguaglia il peso del liquido !



Figura 1.9: *analisi componente forza di pressione verticale*

Per renderci conto quantitativamente che le cose stanno proprio così, consideriamo un recipiente qualsiasi (vedi figura 1.9) riempito di liquido fino a una certa altezza.

Su ogni superficie  $\delta S$  a contatto con il liquido, la colonna di liquido sovrastante l'elemento di superficie, di altezza  $h$ , esercita una pressione che, per la legge di Stevino, vale

$$p = \rho g h \quad (1.5.21)$$

e la forza sulla superficie vale

$$\delta \vec{F} = p \delta \vec{S} \quad (1.5.22)$$

dove  $\delta \vec{S}$  è un vettore che ha per modulo l'area  $\delta S$ , per direzione quella della normale all'elemento di superficie considerato e come verso quello uscente dal volume del liquido<sup>3</sup>. Nel nostro problema, siamo interessati alla componente verticale (lungo l'asse  $z$ ) di  $\delta \vec{F}$ .

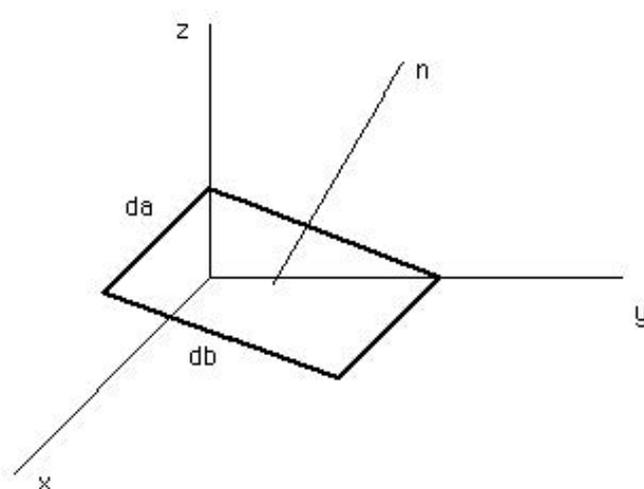
Introduciamo dunque il versore  $\vec{k} \equiv (0, 0, -1)$  : possiamo così scrivere la componente verticale di  $\delta \vec{F}$  nel modo seguente:

$$\delta F_z = \vec{k} \cdot \delta \vec{F} = p \vec{k} \cdot \delta \vec{S} = \rho g h \vec{k} \cdot \delta \vec{S} \quad (1.5.23)$$

Osserviamo che, pur di effettuare una opportuna rotazione intorno all'asse  $z$ , si può sempre fare in modo che il versore normale alla superficie  $\delta S$  si trovi nel piano  $zy$  (vedi figura 1.10). Risulta allora evidente che

$$\vec{k} \cdot \delta \vec{S} = da \, db \cos \theta = dx \, dy \cos \theta = dx \, dy \quad (1.5.24)$$

<sup>3</sup>Questa è la definizione di *superficie orientata*, sulla quale avremo modo di tornare per vederne altre applicazioni tanto nel contesto dell'idrostatica/idrodinamica come in quello dell'elettricità e del magnetismo.

Figura 1.10: *superficie orientata*

fornisce il valore della proiezione della superficie  $\delta\vec{S}$  lungo  $\vec{k}$ , cioè secondo la verticale. Nel nostro caso, essa è dunque, semplicemente, l'area di base della colonna di liquido che stiamo considerando, misurata proprio nel piano di cui  $\vec{k}$  è la normale, cioè nel piano orizzontale.

Ne segue che la quantità  $h\vec{k} \cdot \delta\vec{S}$  è niente altro che il volume  $\delta V$  del liquido che costituisce la colonna, per cui abbiamo

$$\delta F_z = \rho g \delta V = g \delta m \quad (1.5.25)$$

dove  $\delta m$  è la massa di liquido contenuta nella colonna sovrastante  $\delta\vec{S}$ .

Integrando allora su tutta la superficie del recipiente bagnata dal liquido, ecco che la componente verticale della forza dovuta alla pressione del liquido nei vari punti della superficie del recipiente, uguaglia il peso del liquido stesso...

Per concludere questo argomento, verificiamo infine che le forze di pressione sulle pareti del recipiente non possono produrre una risultante avente componente orizzontale (infatti, non si è mai visto un recipiente pieno di liquido, appoggiato a un tavolo orizzontale, accelerare a causa della pressione del liquido sulle sue pareti!).

Consideriamo la figura (1.11) e occupiamoci, per esempio, della componente  $y$  della forza di pressione sulla parete del recipiente. Consideriamo la porzione di liquido compresa fra  $z$  e  $z + \delta z$  e suddividiamo ancora tale porzione di liquido attraverso piani paralleli al piano  $zy$  e distanti fra di loro  $\delta x$ . Consideriamo uno qualunque di questi parallelepipedi: esso individua sulla superficie del recipiente due superfici  $\delta S_1$  e  $\delta S_2$  (o, comunque, un numero pari...), rispettivamente con coordinata  $y_1 < y_2$ .

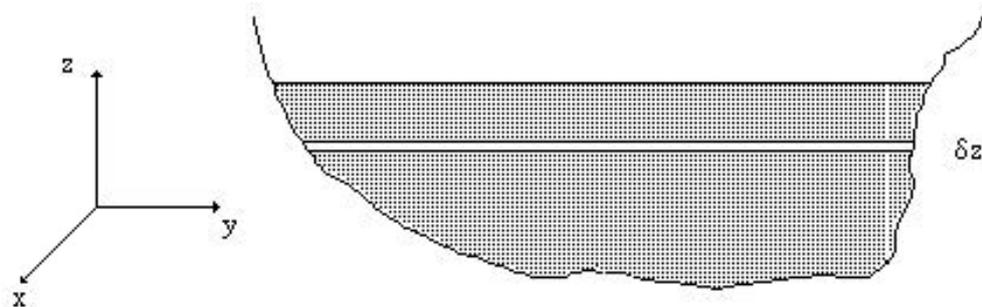


Figura 1.11: componente orizzontale

La pressione agente su entrambe le superfici è la stessa, poichè esse si trovano alla medesima altezza  $z$ . Valutiamo la componente della forza di pressione nella direzione  $y$ . Risulta

$$\delta F_y = p \delta \vec{S}_1 \cdot \vec{j} + p \delta \vec{S}_2 \cdot \vec{j} \quad (1.5.26)$$

dove abbiamo indicato con  $\vec{j}$  il versore dell'asse  $y$ .

Da quanto detto prima circa il significato del prodotto scalare  $\vec{k} \cdot \delta \vec{s}$ , risulta evidente

$$\delta \vec{S}_1 \cdot \vec{j} = -\delta \vec{S}_2 \cdot \vec{j} = \delta x \delta y \quad (1.5.27)$$

Dunque, la componente  $y$  della forza di pressione agente sulla porzione di superficie del recipiente individuata dal parallelepipedo infinitesimo considerato, risulta identicamente nulla.

Integrando sulla coordinata  $x$ , abbiamo quindi che anche la componente  $y$  della forza di pressione agente sull'intera superficie del recipiente compresa fra  $z$  e  $z + \delta z$  è nulla. Ovvero, integrando su  $z$ , possiamo concludere che la componente nella direzione  $y$  della risultante della forza di pressione sulla intera superficie del recipiente è nulla.

Analogamente possiamo procedere per la componente  $x$ , per cui resta dimostrato che la pressione sulla parete di un recipiente qualsiasi *non* produce componente orizzontale.

## 1.6 La legge di Pascal

Una conseguenza della legge di Stevino (le isobare sono equipotenziali...) è la legge di Pascal, che stabilisce che *in presenza della gravità, in un liquido in equilibrio la pressione è la stessa in tutti i punti che si trovano alla stessa quota dal suolo.*

Da questa legge discende direttamente il *Principio dei vasi comunicanti.*

Se diversi recipienti contenenti lo stesso liquido (vedi fig.1.12a-1.12c) sono posti in comunicazione fra di loro, le superfici libere, se aperte, o comunque se in comunicazione diretta fra di loro, si trovano tutte allo stesso livello, indipendentemente dalla forma e dalla capacità dei diversi recipienti.

Naturalmente, questo non è più vero (vedi fig.1.12b) se i liquidi (immiscibili) sono di natura diversa, come, per esempio, acqua e olio, benzina e acqua, mercurio e acqua, etc...

In questo secondo caso occorre eguagliare le pressioni alla stessa quota<sup>4</sup> per lo stesso liquido (la pressione è comunque una funzione continua).

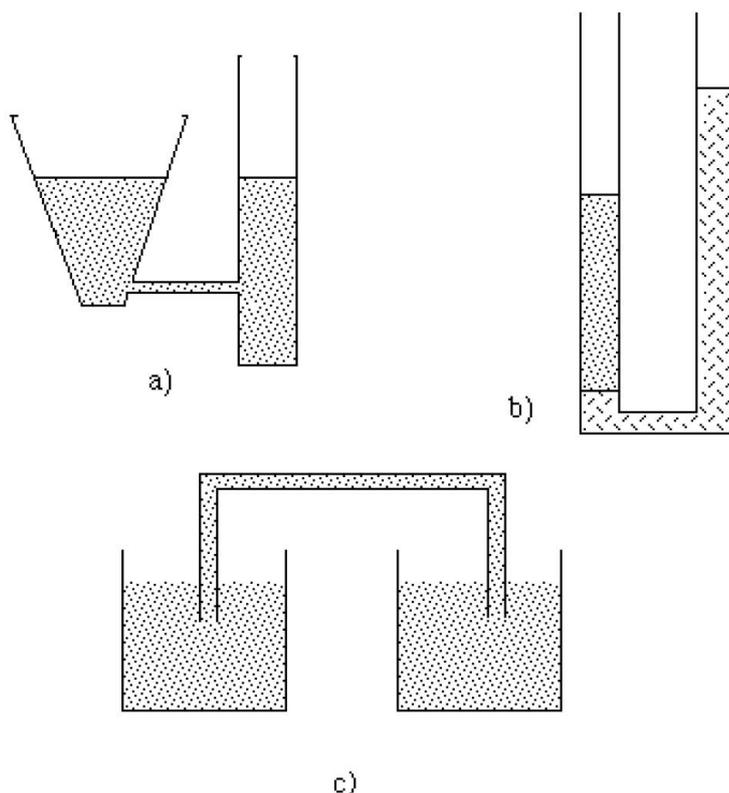


Figura 1.12: *vasi comunicanti*

<sup>4</sup>Per esempio, nel caso rappresentato in fig.1.12b, possiamo imporre l'uguaglianza della pressione nella colonna di sinistra, al livello della superficie di separazione fra i due liquidi, con quella per lo stesso liquido nella colonna di destra, allo stesso livello.

## 1.7 Equilibrio di un liquido in rotazione uniforme intorno a un asse fisso

Consideriamo un recipiente contenente un liquido e ammettiamo che il recipiente sia in rotazione con velocità angolare costante  $\omega$  intorno a un asse verticale (asse  $z$ ). E' un fatto che, dopo un po' di tempo, appunto perché il liquido non è ideale e ha attrito interno, anche il liquido si porrà in rotazione con la stessa velocità angolare del contenitore. Se ci poniamo nel riferimento rotante rigido con il contenitore, in esso, oltre alla solita forza peso, compare un campo di forze centrifugo, che cresce proporzionalmente con la distanza dall'asse e che è proporzionale alla massa su cui agisce la forza.

Essendo la forza radiale e dipendente solo dalla distanza dall'asse, questo campo di forze ammette un potenziale  $U_c(x, y, z)$  che è dato da

$$U_c(x, y, z) = -\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (1.7.28)$$

A questo potenziale si deve poi aggiungere il consueto potenziale gravitazionale  $gz$ . Ne segue che, nel riferimento rotante, il potenziale complessivo (per

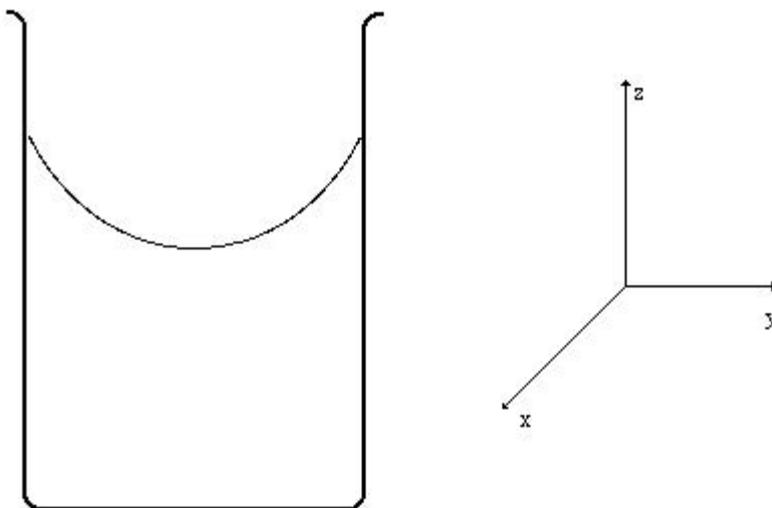


Figura 1.13: *liquido in rotazione uniforme*

unità di massa) vale

$$U(x, y, z) = gz - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (1.7.29)$$

In questo sistema di riferimento il liquido, naturalmente, è a riposo, per cui possiamo applicare le conclusioni a cui siamo giunti circa la statica di un

## 1.7. EQUILIBRIO DI UN LIQUIDO IN ROTAZIONE UNIFORME INTORNO A UN ASSE FISSO 25

liquido in un campo di forze di massa che ammette potenziale, secondo le quali *la superficie libera del liquido (isobara) è una superficie equipotenziale*. L'equazione della superficie libera sarà dunque la seguente

$$gz - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = cost \rightarrow z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) = \frac{v^2}{2g} \quad (1.7.30)$$

la quale è l'equazione di un paraboloide di rotazione intorno all'asse  $z$ , avente la concavità rivolta verso l'alto.

### Qualche numero ...

Immaginiamo che il recipiente abbia un diametro di  $30\text{ cm}$  e che ruoti a  $1$  giro/secondo (quasi come in un vecchio giradischi...). Determiniamo di quanto sarà più alto il livello del liquido al bordo del recipiente rispetto al centro. Da quanto sopra, segue che, detto  $R$  il raggio del recipiente, è

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} R^2 \quad (1.7.31)$$

Risulta ( $\omega = 2\pi\text{rad/s} \approx 6.28\text{rad/s}$ ;  $g = 9.81\text{m/s}^2$ ;  $R = 15\text{cm}$ )

$$z - z_0 = \frac{6.28^2}{19.62} \times 0.0225 \approx 0.045\text{ m} = 4.5\text{ cm} \quad (1.7.32)$$

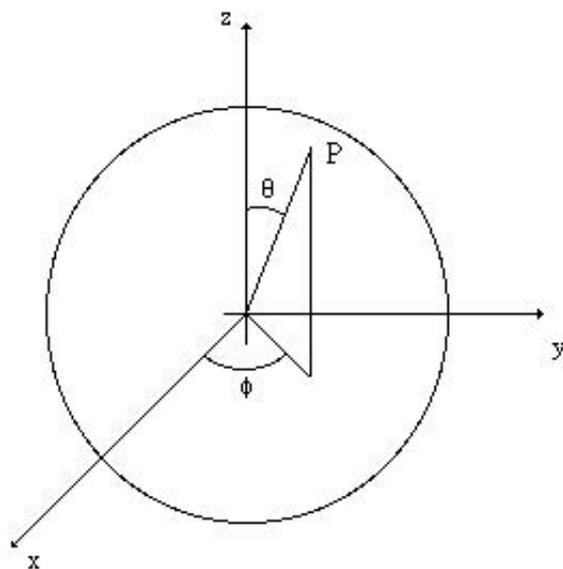
Un altro caso interessante di equilibrio di un liquido in rotazione è quello costituito dagli oceani sulla Terra stessa. Come sappiamo, la superficie della Terra è, per la maggior parte, coperta di acqua. Assumendo che la superficie del mare sia una superficie isobarica a livello mondiale (vero solo in media) e che la densità dell'acqua sia costante ovunque (salinità e temperatura costanti), ne segue che sulla superficie del mare il potenziale per unità di massa determinato dalla gravità e dal campo centrifugo dovuto alla rotazione diurna della Terra sul proprio asse deve avere un valore costante, ovvero la superficie del mare deve essere una superficie equipotenziale.

Circa la gravità, assumeremo in prima approssimazione che sia lecito trattare il problema come se tutta la massa della Terra fosse concentrata nel suo centro<sup>5</sup>. Chiamando allora  $\Omega$  la velocità angolare della Terra intorno al proprio asse

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}\text{ rad/s} \approx 7.272 \times 10^{-5}\text{ rad/s} \quad (1.7.33)$$

indicando con  $G$  la costante di gravitazione universale ( $G = 6.67259 \times 10^{-11}$ ) e indicando con  $M$  la massa dell'intera Terra, in coordinate sferiche la superficie oceanica deve verificare l'equazione

$$-\frac{GM}{R} - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta = cost \quad (1.7.34)$$

Figura 1.14: *Superficie equipotenziale della Terra*

L'equazione implicita

$$R = R(\theta, \phi) \quad (1.7.35)$$

che deriva dalla condizione precedente è l'equazione della superficie dell'oceano. Si osservi che, se la rotazione non ci fosse, l'equazione fornirebbe

$$R = \text{cost} \quad (1.7.36)$$

ovvero definirebbe una superficie sferica, come era da attendersi.

Nel caso sia presente la rotazione, allo scopo di esplicitare l'equazione precedente per la superficie oceanica, cominciamo con il definire la quantità  $R_0$  ( $R_0 \approx 6400 \text{ km}$ ) come la distanza fra tale superficie al polo nord (cioè per  $\theta = 0$ ) e il centro della Terra.

Dall'equazione precedente si ha allora

$$-\frac{GM}{R} - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta = \text{cost} = -\frac{GM}{R_0} \quad (1.7.37)$$

Osserviamo adesso che, nelle stesse approssimazioni, l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre vale  $g = \frac{GM}{R_0^2}$ , per cui risulta

$$\frac{GM}{R_0} = g R_0 = 9.81 \times 6.4 \cdot 10^6 = 6.28 \cdot 10^7 \text{ (m/s)}^2 \quad (1.7.38)$$

<sup>5</sup>Questo, a rigore, è vero solo se la distribuzione della massa nella Terra ha simmetria sferica.

## 1.7. EQUILIBRIO DI UN LIQUIDO IN ROTAZIONE UNIFORME INTORNO A UN ASSE FISSO 27

mentre risulta invece

$$\frac{\Omega^2 R_0^2}{2} = 1.08 \cdot 10^5 (m/s)^2 \quad (1.7.39)$$

E' dunque chiaro che possiamo trattare il termine centrifugo come una perturbazione al termine gravitazionale. Introduciamo per questo la quantità

$$\delta R \equiv R - R_0 \quad (1.7.40)$$

e sviluppiamo al primo ordine in  $\frac{\delta R}{R_0}$  l'equazione della superficie equipotenziale. Essendo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 + \delta R} = \frac{1}{R_0 \left(1 + \frac{\delta R}{R_0}\right)} \approx \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{\delta R}{R_0}\right) = \frac{1}{R_0} - \frac{\delta R}{R_0^2} \quad (1.7.41)$$

e confondendo  $R$  con  $R_0$  nel termine  $\frac{1}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta$ , risulta

$$-\frac{GM}{R_0} + \delta R \frac{GM}{R_0^2} - \frac{1}{2}\Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta = -\frac{GM}{R_0} \quad (1.7.42)$$

da cui si ottiene

$$\delta R g - \frac{1}{2}\Omega^2 R_0^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (1.7.43)$$

ovvero

$$\frac{\delta R}{R_0} = \frac{1}{2g} \Omega^2 R_0 \sin^2 \theta = K \sin^2 \theta \quad (1.7.44)$$

dove abbiamo posto

$$K \equiv \frac{1}{2g} \Omega^2 R_0 \approx 1.725 \cdot 10^{-3} \quad (1.7.45)$$

Il fatto che  $K \ll 1$  conferma la liceità di fermarsi al primo ordine nello sviluppo di  $\frac{1}{R+\delta R}$ . Da quanto abbiamo detto, segue quindi che

$$R(\theta, \phi) = R_0 + \delta R = R_0(1 + K \sin^2 \theta) \quad (1.7.46)$$

Questa, a meno di termini in  $K^2$ , è l'equazione della superficie di un ellissoide di rotazione intorno all'asse  $z$ , avente semiasse minore pari a  $R_0$  (distanza dei poli dal centro) e semiasse maggiore pari a  $R_0(1 + K)$ , ovvero avente ellitticità  $K$ .

Ricordiamo infatti che l'equazione di un siffatto ellissoide è la seguente

$$\left(\frac{z}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_0(1+K)}\right)^2 + \left(\frac{x}{R_0(1+K)}\right)^2 = 1 \quad (1.7.47)$$

ovvero, in coordinate polari

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{R}{R_0(1+K)}\right)^2 \sin^2 \theta = 1 \quad (1.7.48)$$

da cui, al primo ordine in  $K$ , otteniamo appunto

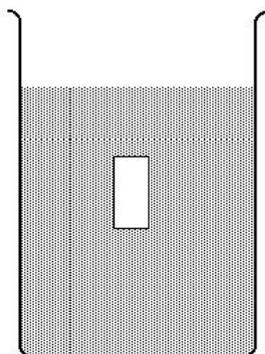
$$\begin{aligned} R^2 \cos^2 \theta + \frac{R^2}{(1+K)^2} \sin^2 \theta &= R_0^2 \\ \Rightarrow R_0^2 &\approx R^2 \cos^2 \theta + R^2(1-2K) \sin^2 \theta = R^2(1-2K \sin^2 \theta) \\ \Rightarrow R^2 &\approx R_0^2(1+2K \sin^2 \theta) \Rightarrow R \approx R_0(1+K \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.7.49)$$

L'ellitticità  $K$  così trovata risulta circa la metà di quella reale ( $\epsilon \approx \frac{1}{298.3} = 3.36 \times 10^{-3}$ ). Una prima ragione sta nel fatto che la forma ellissoidale della Terra modifica a sua volta il potenziale gravitazionale (questa correzione la farebbe crescere di un fattore  $5/2$ , ovvero otterremmo un valore 1.25 volte più alto del vero...). Un secondo motivo è che la distribuzione della massa nella Terra non è isotropa.

## 1.8 La legge di Archimede

Consideriamo un corpo immerso in un liquido.

La legge di Archimede dice che *un corpo immerso in un liquido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato*.



**Figura 1.15:**

Iniziamo considerando un corpo che abbia forma di parallelepipedo rettangolo (vedi figura). Le forze di pressione sulle superfici laterali, per pure ragioni di simmetria, si elidono a vicenda. Poiché, invece, la pressione sulla base e sulla superficie a essa corrispondente in alto (a distanza  $h$  dalla base), entrambe di area  $S$ , per la legge di Stevino non sono uguali, ma differiscono della quantità  $\Delta p = \rho g h$ , ne segue che la risultante delle forze di pressione esercitate dal liquido sul corpo è una forza diretta verso l'alto (la pressione è maggiore in basso...) che vale (legge di Archimede)

$$F = \Delta p S = \rho g h S = \rho g V = g M \quad (1.8.50)$$

dove  $V$  è il volume del parallelepipedo ed  $M$  è la massa di liquido in esso contenuto. Questo risultato, ottenuto nel caso di una simmetria particolarmente semplice, vale, come è noto, in generale.

La dimostrazione è semplicissima.

Consideriamo per questo un corpo solido  $C$  di forma qualsiasi, completamente immerso in un liquido (per esempio, acqua).

Chiamiamo  $\Sigma$  la sua superficie esterna. Immaginiamo ora che la superficie  $\Sigma$ , al posto del corpo  $C$ , racchiuda idealmente un corpo  $\tilde{C}$  fatto dallo stesso liquido in cui  $C$  è immerso.

Risulta ovvio che il corpo  $\tilde{C}$  sarebbe in equilibrio !

Questo significa che, in quel caso, il peso di  $\tilde{C}$  viene equilibrato perfettamente dalle forze di pressione del liquido, ovvero che le forze di pressione del liquido esercitano sulla superficie  $\Sigma$  una forza che è esattamente uguale al peso del liquido racchiuso entro  $\Sigma$  stessa. Ma, come è noto dalla Fisica I, per

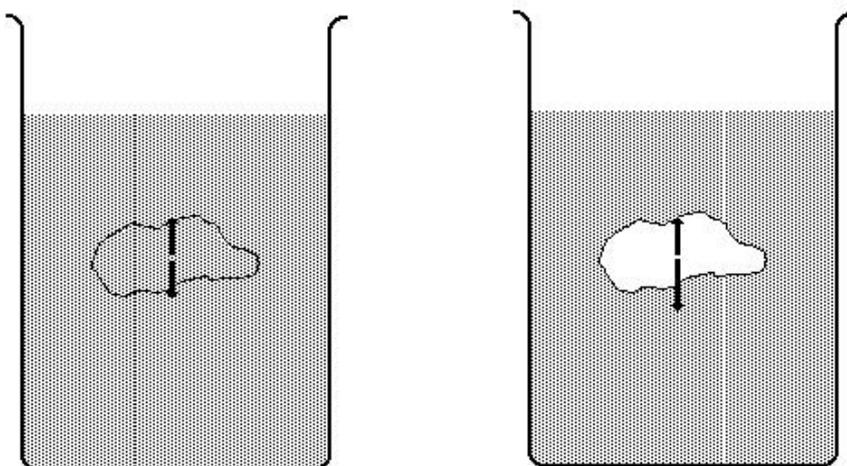


Figura 1.16: *Dimostrazione della legge di Archimede*

lo studio della statica di un corpo solido (corpo rigido), non basta conoscere le forze che vi agiscono sopra, ma anche il loro punto di applicazione.

Qual è il punto di applicazione della spinta di Archimede ?

Il ragionamento fatto sopra circa il valore della spinta può di nuovo aiutarci e condurci alla giusta conclusione. E infatti chiaro che il corpo  $\tilde{C}$ , essendo in equilibrio indifferente nel liquido, non solo riceve una spinta uguale al suo peso, ma anche il momento di questa spinta rispetto al suo baricentro deve essere nullo, così come è nullo quello della forza peso: in questo modo sul corpo  $\tilde{C}$  non solo la risultante totale delle forze sarà nulla, ma lo sarà anche il loro momento (altrimenti il corpo ruoterebbe su se stesso...).

Ne segue che la spinta di Archimede deve essere pensata applicata nel baricentro del volume di liquido spostato che è chiamato *centro di galleggiamento*.

Questo risultato è importante quando si consideri un corpo, per esempio una nave, che galleggi in un liquido. All'equilibrio il baricentro  $B$  della nave e il centro di galleggiamento  $C$  della stessa saranno allineati secondo la vertica-

le, in modo da non produrre nessun momento complessivo sulla nave perché, all'equilibrio, sia la risultante delle forze che quella dei momenti agenti sulla nave devono essere nulle. Se il baricentro si trova sotto il centro di galleggiamento, per piccole oscillazioni intorno al punto di equilibrio, il momento delle forze che viene a originarsi tende, normalmente, a ripristinare l'equilibrio e, dunque, l'equilibrio è stabile (vedi fig 1.17a).

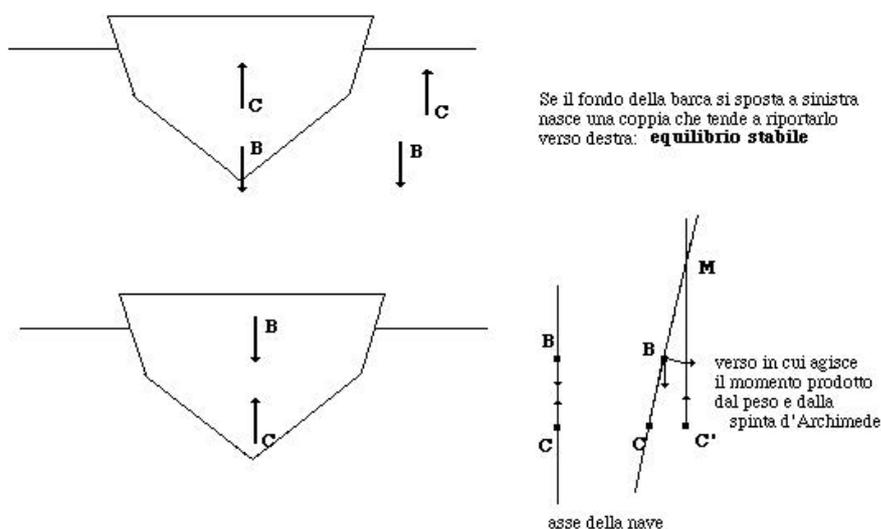


Figura 1.17: *Metacentro*

Ecco perché, in alcuni casi, si appesantisce la parte bassa della chiglia con materiali di alta densità, per abbassare il baricentro del natante.

Comunque il caso in cui  $B$  è sotto  $C$  non è l'unico caso possibile di equilibrio stabile per un oggetto galleggiante. Infatti il problema della stabilità non è così immediato come potrebbe sembrare perché mentre, se il corpo è rigido, il baricentro segue chiaramente lo spostamento del corpo, il centro di spinta, in genere non lo fa poiché, di solito cambia la forma della parte immersa (pur non cambiando il volume...!).

Supponiamo dunque che  $B$  si trovi sopra  $C$  (vedi fig 1.17b). Immaginiamo di spostarci di poco dalla posizione di equilibrio: mentre  $B$ , ovviamente, non cambia posizione rispetto al natante, il nuovo centro di spinta  $C'$ , a causa della diversa geometria del volume di liquido spostato, può non coincidere, rispetto al natante, con il precedente centro di spinta  $C$ . Se la verticale che passa per  $C'$  incontra la retta definita dal baricentro  $B$  e dal centro di spinta  $C$  all'equilibrio in un punto  $M$  che è sopra  $B$ , allora, di nuovo, abbiamo equilibrio stabile (ovvero il natante è soggetto a una coppia che tende a riportarlo in equilibrio), altrimenti la nave si rovescia !

Il punto  $M$  è detto *metacentro*. Per piccole oscillazioni intorno all'equilibrio, i centri di spinta si trovano su un arco di circonferenza di cui  $M$  è il centro.

## Capitolo 2

# Idrodinamica

### 2.1 Introduzione

Il compito dell'idrodinamica è quello di studiare il moto dei liquidi ed esistono due modi (diversi) per affrontare il problema che sono i seguenti.

- Punto di vista lagrangiano (Joseph Louis de Lagrange 1736 – 1813).  
Si considera un elemento infinitesimo di liquido: al tempo  $t_0$  esso si troverà nel punto  $\vec{P}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ . Al passare del tempo, questo elemento di liquido si sposterà e le sue coordinate saranno funzioni del tempo:

$$x = X(\vec{P}_0, t_0; t); \quad y = Y(\vec{P}_0, t_0; t); \quad z = Z(\vec{P}_0, t_0; t) \quad (2.1.1)$$

Conoscendo le funzioni  $X, Y, Z$  per ogni  $(\vec{P}_0, t_0)$ , conosceremo naturalmente il moto di ogni elemento di liquido.

- Punto di vista euleriano (Leonhard Euler 1707 – 1783).  
Si fissa un sistema di riferimento e sia  $\vec{P} \equiv (x, y, z)$  un generico punto all'interno del liquido. Il moto di questo sarà noto se conosceremo, a ogni tempo, la funzione vettoriale  $\vec{v}(x, y, z, t)$  la quale fornisce la velocità del volumetto infinitesimo  $\delta V$  che, al tempo  $t$ , si trova nel punto  $\vec{P}$ . In questo schema non si segue ciascuna particella di liquido durante il suo moto, bensì viene determinata, istante per istante e punto per punto, la legge di velocità del liquido.

Noi, nel seguito, adotteremo il punto di vista euleriano.

La funzione  $\vec{v}(x, y, z, t)$  è detta, in generale, **campo di velocità**, ed è un *campo vettoriale*.

Prima di procedere oltre, richiamiamo alcune definizioni di entità matematiche che dovrebbero essere già note ma che vale la pena, comunque, richiamare in modo esplicito.

- *Grandezza scalare*

Si dice che una grandezza fisica è "scalare" quando il suo valore non cambia per rotazioni del sistema di riferimento.

Sono scalari l'energia cinetica, l'energia potenziale, la temperatura, ...

- *Grandezza vettoriale*

Una grandezza fisica è detta "vettoriale" quando, per rotazioni del sistema di riferimento, si trasforma come la posizione di un punto materiale. Sono vettori la velocità, la forza, l'accelerazione, etc...

In generale, fissato un riferimento cartesiano ortogonale, un vettore  $\vec{v}$  è completamente individuato dalle sue componenti cartesiane  $v_x, v_y, v_z$ , essendo:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (2.1.2)$$

- *Prodotto scalare*

Si dice "prodotto scalare o interno" di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  la quantità (scalare) così definita (per convenzione, indici ripetuti si intendono sommati da 1 a 3 ...)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv a_i b_i \equiv a_i \delta_{ij} b_j \quad (2.1.3)$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker e coincide con la matrice identità  $3 \times 3$ . Chiaramente, dalla definizione segue che

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2.1.4)$$

e risulta

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \quad (2.1.5)$$

- *Prodotto vettoriale*

Si chiama "prodotto vettoriale o esterno" di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  il vettore così definito

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &\equiv (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \\ &\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})_i \equiv \epsilon_{ijk} a_j b_k \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

dove  $\epsilon_{ijk}$  è il tensore a tre indici completamente antisimmetrico, il quale

- vale 1 se la terna  $ijk$  è una permutazione pari (ciclica) di 123;
- vale -1 se si tratta di una permutazione dispari (permutazione ciclica+una inversione);
- vale 0 se almeno due indici sono uguali.

I soli suoi valori non nulli sono dunque i seguenti

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1; \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \quad (2.1.7)$$

Dalla definizione risulta immediatamente che il prodotto vettoriale è antisimmetrico, ovvero

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (2.1.8)$$

- *campo scalare*

Si chiama "campo scalare" una funzione di  $(\vec{r}, t)$  a valori scalari, come, per esempio il campo di temperature in un corpo assegnato.

Il campo è detto *costante* se non dipende dal tempo ed è detto *uniforme* se non dipende dalla posizione.

- *campo vettoriale*

Si chiama "campo vettoriale" una funzione di  $(\vec{r}, t)$  a valori vettoriali, come, per esempio il campo di velocità all'interno di un liquido in moto...

Di nuovo, si parla di campo *costante* quando è indipendente dal tempo e di campo *uniforme* quando è indipendente dalle coordinate spaziali.

- *gradiente*

Come abbiamo già visto, il *gradiente* è un operatore lineare che associa a un campo scalare  $F$  un campo vettoriale  $grad F$  nel modo seguente

$$grad F(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} F(\vec{r}) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \quad (2.1.9)$$

- *divergenza*

È un operatore differenziale che associa a un campo vettoriale  $\vec{V}(\vec{r})$  un campo scalare  $div \vec{V}(\vec{r})$  nel modo seguente

$$div \vec{V}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \equiv \frac{\partial V_j}{\partial r_j} \equiv \partial_j V_j \quad (2.1.10)$$

dove

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial r_j} \quad (2.1.11)$$

- *rotore*

È un operatore differenziale che associa a un campo vettoriale  $\vec{V}(\vec{r})$  un altro campo vettoriale  $rot \vec{V}(\vec{r})$  nel modo seguente

$$rot \vec{V}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (2.1.12)$$

Abbiamo che

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) \right)_j = \epsilon_{jmn} \partial_m V_n \quad (2.1.13)$$

- *Campo irrotazionale*

Un campo vettoriale  $\vec{V}$  è detto *irrotazionale* in un volume aperto  $\mathcal{V}$  se il suo rotore è identicamente nullo in quel volume

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (2.1.14)$$

Un campo che sia ottenuto come gradiente di un campo scalare è sempre irrotazionale. Questa condizione vale anche al contrario, nel senso che se  $\vec{V}$  è un campo vettoriale il quale, in un volume aperto e connesso  $\mathcal{V}$ , ha rotazione ovunque identicamente nulla, allora esiste una funzione scalare  $F$ , definita in quel volume  $\mathcal{V}$ , tale che il campo  $\vec{V}$  ne è il gradiente.

La funzione  $F$  viene detta *potenziale* del campo  $\vec{V}$ , per ragioni che appariranno più chiare in seguito. La funzione *potenziale* non è univocamente determinata, bensì lo è a meno di una qualunque funzione che dipenda unicamente dal tempo.

- *Superficie chiusa*

Una superficie si definisce *chiusa* se racchiude un volume, come per esempio quella di una sfera, di un cubo, ...

- *Superficie aperta*

È una superficie che *non* racchiude un volume. Essa, se è al finito, è necessariamente limitata da un bordo  $\Gamma$ .

- *Superficie orientata*

In ogni punto di una superficie descritta da un vincolo derivabile è definita la retta perpendicolare al piano tangente alla superficie nel punto dato. Se la superficie è chiusa, allora la normale alla superficie in un suo punto generico è il versore diretto secondo la retta perpendicolare alla superficie nel punto dato, orientato in modo che "esca" dal volume racchiuso dalla superficie stessa. Se la superficie è aperta, occorre preventivamente definire un verso (peraltro arbitrario) di circolazione sul suo bordo  $\Gamma$ : il verso della normale è poi definito in modo che un osservatore allineato secondo tale verso veda l'orientamento definito su  $\Gamma$  come antiorario.

- *Flusso*

Dato un campo vettoriale  $\vec{u}(\vec{x})$  e una superficie orientata  $\Sigma$ , si chiama "flusso"  $\Phi_{\Sigma}(\vec{u})$  del campo  $\vec{u}$  attraverso  $\Sigma$  il seguente integrale

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{u}) = \int_{\Sigma} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\sigma \equiv \int_{\Sigma} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{d}\sigma \quad (2.1.15)$$

dove  $\vec{d}\sigma$  è l'elemento infinitesimo di superficie orientata.

- *Teorema di Gauss (della divergenza)*

Il teorema asserisce che, dato un qualunque campo vettoriale  $\vec{u}(\vec{x})$  e una qualunque superficie chiusa  $\Sigma$ , se indichiamo con  $V$  il volume racchiuso entro tale superficie si ha

$$\int_{\Sigma} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \, d\sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, dv \equiv \int_V \operatorname{div} \vec{u} \, dv \quad (2.1.16)$$

ovvero garantisce che il flusso uscente attraverso una qualsiasi superficie chiusa di un campo vettoriale è uguale all'integrale della divergenza di quel campo, fatto nel volume racchiuso dalla superficie stessa.

- *Teorema di Stokes (del rotore)*

Il teorema di Stokes (del rotore o della rotazione) asserisce che, dato un campo vettoriale qualsiasi  $\vec{u}(\vec{x})$  e una qualsiasi superficie  $\Sigma$  aperta e orientata, allora, detto  $\Gamma$  il suo bordo orientato, risulta

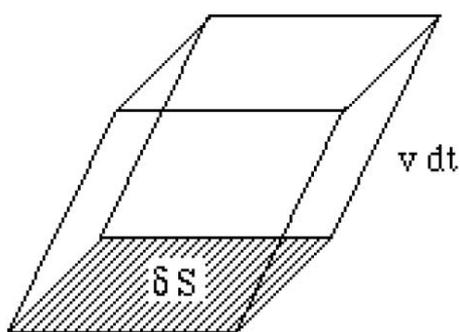
$$\int_{\Gamma} \vec{u}(\vec{x}) \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} \, d\sigma \equiv \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \quad (2.1.17)$$

dove  $d\vec{l}$  è l'elemento di linea orientata.

## 2.2 Divergenza del campo di velocità

Riprendiamo adesso l'argomento del moto di un liquido e poniamoci nello schema euleriano. Immaginiamo che sia dato il campo di velocità  $\vec{v}(x, y, z, t)$  che descrive il moto del liquido.

Una prima domanda a cui vogliamo rispondere è quella relativa alla portata  $Q$  che attraversa una data superficie  $S$  immersa nel liquido.



Assumiamo dunque che sia data una superficie  $S$  fissa all'interno di un liquido in moto e immaginiamo di suddividere la superficie in tante superfici sufficientemente piccole (infinitesime)  $\delta S_i$ : iniziamo occupandoci della portata di liquido che attraversa una generica superficie  $\delta S$ . Sia  $\vec{v}$  la velocità del liquido nel punto dove si trova  $\delta S$ .

**Figura 2.1:** portata infinitesima

Chiaramente, nel tempo  $dt$ , la quantità di liquido che avrà attraversato  $\delta S$  sarà quello contenuto nel prisma rappresentato nella figura.

E' immediato rendersi conto che l'altezza di questo prisma è proprio uguale

al prodotto scalare fra la normale alla superficie  $\delta S$  e il vettore  $\vec{v} dt$ , per cui, in base alla definizione di superficie orientata, segue che il volume del prisma infinitesimo vale proprio

$$\delta V = \delta \vec{S} \cdot \vec{v} dt \quad (2.2.18)$$

Il volume di liquido che nel tempo  $dt$  fluisce attraverso l'intera superficie  $S$  sarà quindi, semplicemente, l'integrale su  $S$  della quantità di cui sopra. Dunque la portata volumetrica  $Q$  attraverso  $S$ , definita come

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad (2.2.19)$$

sarà pari a

$$Q = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{v} \quad (2.2.20)$$

Si riconosce immediatamente in questa quantità il flusso  $\Phi_S(\vec{v})$  del campo vettoriale  $\vec{v}$  attraverso la superficie  $S$ . Risulta così evidente, tra l'altro, la ragione del nome *flusso* per l'operatore così denominato...

Accanto alla portata volumetrica, si definisce talvolta la *portata*  $P$  (senza altri aggettivi) come la quantità di *massa* che attraversa, nel tempo  $dt$ , la superficie assegnata. Evidentemente si ha

$$P = \int_S \rho d\vec{S} \cdot \vec{v} \equiv \Phi_S(\rho\vec{v}) \quad (2.2.21)$$

Ricordando che in un liquido ideale la densità è costante, risulta evidentemente che

$$P = \rho Q \quad (2.2.22)$$

Nel caso particolare in cui la superficie sia chiusa, ovvero che racchiuda un volume  $V$ , è evidente che se scegliamo l'orientamento della superficie secondo la normale uscente dal volume, il flusso  $\Phi_S(\rho\vec{v})$  del campo vettoriale  $\vec{j} \equiv \rho\vec{v}$  attraverso la superficie  $S$  fornirà semplicemente la massa di liquido che, nel tempo  $dt$ , lascia il volume  $V$  racchiuso da  $S$ . Il campo vettoriale  $\vec{j}$  è detto *densità di corrente di liquido* con ovvio significato: la legge di conservazione della massa ci consente allora di affermare che, detta  $m(t)$  la massa di liquido presente nel volume  $V$  sarà

$$\Phi_S(\rho\vec{v}) = -\frac{dm}{dt} \quad (2.2.23)$$

Questa equazione è molto importante, poiché essa costituisce il prototipo di ogni legge di conservazione.

Essa può essere messa in forma differenziale attraverso il teorema di Gauss che, lo ricordiamo, stabilisce che

$$\Phi_S(\rho\vec{v}) = \int_S \rho d\vec{S} \cdot \vec{v} = \int_V \operatorname{div}(\rho\vec{v}) dv \quad (2.2.24)$$

Ma essendo naturalmente

$$-\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (2.2.25)$$

ne segue che la legge di conservazione di sopra implica localmente (cioè punto per punto...) la seguente relazione

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = -\frac{d\rho}{dt} \quad (2.2.26)$$

Nel caso particolare di un liquido ideale, essendo la densità costante, risulta

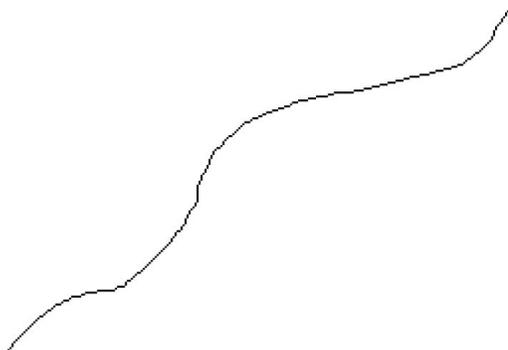
$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.2.27)$$

Dunque, *il campo di velocità di un liquido ideale ha divergenza nulla.*

Questa è la *prima* equazione della dinamica dei liquidi ed è una ovvia conseguenza della loro incompressibilità, unita alla conservazione della massa.

## 2.3 Teorema di Leonardo

Veniamo adesso al concetto di linea di flusso e di tubo di flusso.



**Figura 2.2:** Linea di flusso

Assumiamo di essere in condizioni stazionarie. Dato il campo vettoriale  $\vec{j}(x, y, z)$  (ma la definizione si applica a qualunque campo vettoriale...) definiamo *linea di flusso* di  $\vec{j}(x, y, z)$  passante per un punto  $\vec{P}$  quella linea che passa per  $\vec{P}$  e, in ogni suo punto  $\vec{p}$ , ha la tangente parallela al vettore  $\vec{j}$  in  $\vec{p}$ .

Diremo poi che un liquido si muove in un volume assegnato di *moto non vorticoso* se

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad (2.3.28)$$

Questo richiede, per esempio che, all'interno del liquido, nessuna linea di flusso sia chiusa<sup>1</sup> ad anello su se stessa (ammettiamo che il volume del liquido sia connesso, cioè senza buchi ...).

Procediamo infatti per assurdo, e ammettiamo che esista una linea di flusso  $\Gamma$  la quale sia chiusa. Allora, necessariamente, l'integrale di linea

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{l} \neq 0 \quad (2.3.31)$$

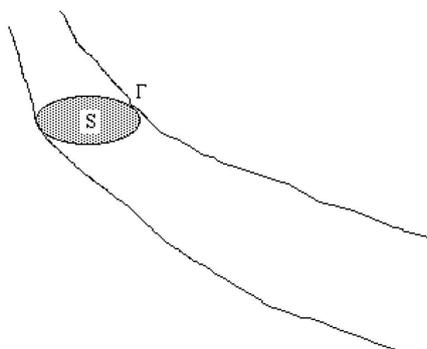
essendo in ogni punto  $\vec{v}$  parallelo all'elemento di linea  $d\vec{l}$ .

Ma siccome  $\Gamma$  è completamente interna al liquido, per definizione possiamo trovare una superficie  $\Sigma$ , anch'essa interna al liquido, che ha  $\Gamma$  come bordo. Per il teorema di Stokes, se  $\Sigma$  è una qualunque superficie che si appoggia sulla linea  $\Gamma$ , orientata in coerenza con l'orientamento stabilito su  $\Gamma$ , risulta

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad (2.3.32)$$

e dunque  $\text{rot } \vec{v}$  non può essere identicamente nullo.

Questo risultato chiarisce, fra l'altro, l'origine del nome *rotore* per l'operatore differenziale  $\vec{\nabla} \times \dots$ . Nel seguito, salvo diverso avviso, tratteremo solamente il caso di moto *non vorticoso* o *irrotazionale*.



**Figura 2.3:** Tubo di flusso

Data una superficie  $S$ , chiameremo *tubo di flusso* che si appoggia su  $S$  il volume definito dall'insieme delle linee di flusso che attraversano  $S$ .

Chiameremo poi *parete del tubo di flusso* la superficie definita dalle linee di flusso che si appoggiano sul bordo  $\Gamma$  della superficie  $S$  (vedi figura).

Osserviamo che, dato un tubo di flusso, il liquido in moto non può attraversare la parete stessa nè per entrare nè per uscire.

<sup>1</sup>La condizione che la linea non sia chiusa non garantisce che il moto sia irrotazionale, infatti si consideri il seguente campo di velocità

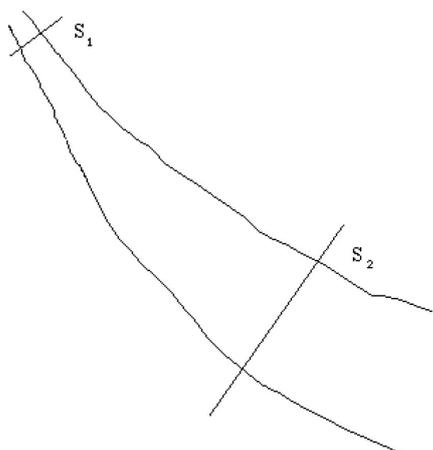
$$\vec{v}(x, y, z) = A(x^2 + y^2)\vec{k} \quad (2.3.29)$$

dove  $A$  è una costante qualsiasi e  $\vec{k}$  il versore dell'asse  $z$ . Questo campo di velocità non è irrotazionale, nonostante le linee di flusso siano tutte dirette nella direzione e verso dell'asse  $z$ , infatti

$$\text{rot } \vec{v} = (-2Ay, 2Ax, 0) \quad (2.3.30)$$

Si noti, invece, che il campo ha divergenza nulla !

Il motivo è che, su tale parete, la velocità del liquido non ha componente ortogonale alla stessa (proprio per definizione di linea di flusso...).



Consideriamo allora due superfici  $S_1$  ed  $S_2$  le quali si appoggiano entrambe allo stesso tubo di flusso (vedi figura a fianco).

Consideriamo il volume  $V$  definito dalla superficie  $S$  costituita da  $S_1$ ,  $S_2$  e dalla superficie laterale  $\Sigma$  del tubo di flusso che va da  $S_1$  a  $S_2$ .

Applichiamo a questo volume il teorema della divergenza del vettore  $\vec{j}$ .

**Figura 2.4:** Teorema di Leonardo

Risulta

$$0 = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \, dv = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{ds} + \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{ds} \quad (2.3.33)$$

Ma il terzo integrale chiaramente è nullo ( $\vec{j} \cdot \vec{ds} = 0$ , per definizione di superficie laterale di tubo di flusso), per cui, in definitiva, si ha

$$\int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (2.3.34)$$

Osserviamo che nei due integrali rimasti l'orientamento delle due superfici è quello definito dal teorema di Gauss, ovvero secondo la normale uscente dal volume  $V$ : orientando invece la normale alle due superfici in modo concorde al moto del liquido, risulta ovvio che il risultato ottenuto stabilisce la costanza della portata  $P$  lungo un qualunque tubo di flusso.

Se il tubo di flusso è abbastanza stretto da poter assumere che la velocità del liquido sia la stessa nei vari punti di una stessa superficie  $S_1$  o  $S_2$ , allora si ha

$$\vec{j}_1 \cdot \delta \vec{s}_1 = \vec{j}_2 \cdot \delta \vec{s}_2 \Rightarrow \rho \vec{v}_1 \cdot \delta \vec{s}_1 = \rho \vec{v}_2 \cdot \delta \vec{s}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \delta \vec{s}_1 = \vec{v}_2 \cdot \delta \vec{s}_2 \quad (2.3.35)$$

ovvero che, lungo un tubo di flusso (per esempio, lungo una condotta...) la velocità (media) del liquido è inversamente proporzionale alla sezione del tubo.

Questo risultato è noto come *teorema di Leonardo*<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Leonardo da Vinci (1452-1519) *genio universale*

## 2.4 Equazioni di Eulero

Abbiamo visto in idrostatica che, in un campo di forze di massa conservativo avente  $U$  come potenziale per unità di massa, risulta

$$p + \rho U = \text{cost} \quad (2.4.36)$$

da cui, prendendo il gradiente, si ricava ( $\rho$  è costante...)

$$\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla} U = 0 \quad \Rightarrow \quad -\rho \vec{\nabla} U = \vec{\nabla} p \quad (2.4.37)$$

Moltiplicando ambo i membri per l'elemento di volume  $dV$  e ricordando che  $\rho dV$  è la massa (infinitesima) del liquido contenuta nel volume  $dV$

$$dm = \rho dV \quad (2.4.38)$$

mentre  $-dm \vec{\nabla} U$  è la forza esterna (infinitesima) che agisce sulla massa  $dm$

$$d\vec{F} = -dm \vec{\nabla} U \quad (2.4.39)$$

segue che vale la seguente identità

$$d\vec{F} - dV \vec{\nabla} p = 0 \quad (2.4.40)$$

Questa equazione può essere vista anche come l'equazione che fornisce la risultante delle forze che agiscono sull'elemento infinitesimo di massa  $dm$  nel volume  $dV$ : infatti  $d\vec{F}$  è la forza esterna dovuta al campo di potenziale  $U$ , mentre  $dV \vec{\nabla} p$  è la reazione dovuta alla pressione del liquido.

Il fatto che la loro somma algebrica sia nulla esprime semplicemente la condizione di equilibrio idrostatico.

Se il liquido, però, *non* è in equilibrio, la somma in questione ammetterà una risultante che, per la seconda legge della dinamica, sarà proporzionale all'accelerazione della massa di liquido  $dm$  contenuta nel volume  $dV$ . Ovvero

$$\begin{aligned} d\vec{F} - dV \vec{\nabla} p = dm \vec{a} &\quad \Rightarrow \quad -dm \vec{\nabla} U - dV \vec{\nabla} p = dm \vec{a} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -dV(\rho \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} p) = dV \rho \vec{a} &\quad \Rightarrow \quad -(\rho \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} p) = \rho \vec{a} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{a} = -(\vec{\nabla} U + \rho^{-1} \vec{\nabla} p) &\quad (2.4.41) \end{aligned}$$

Occorre però intenderci adesso sul significato dell'accelerazione  $\vec{a}$  e sul suo legame con il campo di velocità  $\vec{v}(x, y, z, t)$  che descrive il moto del liquido. Per come siamo giunti all'espressione di  $\vec{a}$ , questa è l'accelerazione della massa  $dm$  che, al tempo  $t$  stava nel punto  $\vec{P}(x, y, z)$  dove era definito il potenziale per unità di massa  $U(x, y, z)$  ed era inoltre sottoposta alla forza dovuta alla pressione  $p(x, y, z)$ .

Qual è dunque il legame di  $\vec{a}$  con il campo di velocità  $\vec{v}(x, y, z, t)$  ?

Per definizione, la massa  $dm$  che al tempo  $t$  si trova in  $\vec{P}(x, y, z)$  ha velocità  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . Se aspettiamo un tempo  $dt$ , essa si porterà in una nuova posizione  $\vec{P}'$  legata a  $\vec{P}$  dalla relazione

$$\vec{P}' = \vec{P} + d\vec{P} \equiv (x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt) \quad (2.4.42)$$

e intanto, a causa dell'accelerazione  $\vec{a}$ , la massa  $dm$  si muoverà ora con velocità  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{a} dt$ . Ne segue allora che  $\vec{v}'$  sarà la velocità del liquido nel punto  $\vec{P}'$  al tempo  $t + dt$ , ovvero

$$\begin{aligned} \vec{P}'(t + dt) &= \vec{P}(t) + \vec{a} dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{a} dt = \vec{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt) - \vec{v}(x, y, z, t) = \\ &= v_x dt \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y dt \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z dt \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + dt \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{a} &= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = v_i \partial_i \vec{v} + \partial_t \vec{v} \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

e dunque

$$\vec{a} = -(\vec{\nabla}U + \rho^{-1}\vec{\nabla}p) = v_i \partial_i \vec{v} + \partial_t \vec{v} \quad (2.4.44)$$

L'equazione vettoriale

$$-(\vec{\nabla}U + \rho^{-1}\vec{\nabla}p) = v_i \partial_i \vec{v} + \partial_t \vec{v} \quad (2.4.45)$$

insieme all'equazione scalare che stabilisce l'incompressibilità del liquido

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (2.4.46)$$

costituiscono le *equazioni di Eulero*<sup>3</sup> (1755) per il moto di un liquido ideale. La prima di queste equazioni può essere messa in una forma un po' più espressiva, usando la seguente identità<sup>4</sup> vettoriale

$$v_i \partial_i \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } |\vec{v}|^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} \quad (2.4.48)$$

Sostituendo, si ha

$$-(\vec{\nabla}U + \rho^{-1}\vec{\nabla}p) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \partial_t \vec{v} \quad (2.4.49)$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1}p \right) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \partial_t \vec{v} \quad (2.4.50)$$

<sup>3</sup>Leonhard Euler (1707-1783) fisico matematico di Basilea, allievo di Johann Bernoulli.

<sup>4</sup>Dimostriamo l'identità (2.4.48). Si ha

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \text{grad } |\vec{v}|^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} \right]_k &= \frac{1}{2} \partial_k (v^2) - \epsilon_{klm} v_l \epsilon_{mij} \partial_i v_j = v_i \partial_k v_i - \epsilon_{klm} \epsilon_{mij} v_l \partial_i v_j = \\ &= v_i \partial_k v_i - (\delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li}) v_l \partial_i v_j = v_i \partial_k v_i - v_j \partial_k v_j + v_i \partial_i v_k = v_i \partial_i v_k \quad \text{c.v.d.} \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Consideriamo adesso alcuni casi particolari.

### Moto irrotazionale

Un liquido che si trovi in moto irrotazionale ( $rot \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ), diremo che è soggetto a un moto *da potenziale*.

La ragione è che, come abbiamo detto, se la velocità è tale che  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$  allora esiste una funzione scalare delle coordinate e del tempo, determinata a meno di una funzione qualsiasi del tempo stesso, (*funzione potenziale*) che indicheremo con il simbolo  $\phi$ , la quale è tale che  $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ .

Sostituendo nell'equazione di Eulero, ricaviamo

$$\vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1}p \right) = -\partial_t \vec{v} \Rightarrow \vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1}p + \partial_t \phi \right) = 0 \quad (2.4.51)$$

D'altronde sappiamo che affinché una funzione della posizione possa avere gradiente identicamente nullo in un volume aperto e connesso occorre e basta che essa sia costante rispetto alle coordinate  $x, y, z$  (ma, non necessariamente, rispetto al tempo ...). Dunque potremo scrivere che

$$\frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1}p + \partial_t \phi = Kost(t) \quad (2.4.52)$$

Ma, come abbiamo detto, il potenziale  $\phi$  non è univocamente determinato dalla condizione di avere il gradiente pari a  $\vec{v}$ : gli si può sommare una qualunque funzione del tempo, senza alterarne questa condizione.

Scegliendo allora questa funzione  $\phi$  in modo che coincida con l'integrale di  $Kost$  nel tempo, ecco che possiamo concludere che deve essere

$$\frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1}p + \partial_t \phi = 0 \quad (2.4.53)$$

Nel caso in cui il liquido sia, per esempio, l'acqua del mare, e si stia considerando la sua superficie, dove la pressione  $p_0$  è costante rispetto alle coordinate e pari alla pressione atmosferica, possiamo assorbire il termine costante di pressione nel potenziale, aggiungendogli il termine  $\rho^{-1}p_0 t$ .

In questo modo, trascurando il termine quadratico nella velocità, abbiamo ( $U = gz$ ) infine

$$gz + \partial_t \phi = 0 \quad (2.4.54)$$

e questa è l'equazione che descrive, per esempio, le onde del mare.

**Moto stazionario**

Assumiamo ora che il liquido sia in moto stazionario, ovvero tale che il campo di velocità  $\vec{v}$  non dipenda dal tempo ( $\Rightarrow \partial_t \vec{v} = 0$ ).

Indichiamo con  $\vec{n} \equiv \vec{n}(x, y, z)$  il versore tangente alla linea di flusso nel generico punto  $\vec{P}(x, y, z)$ . Evidentemente abbiamo che

$$\vec{n} dl = d\vec{l} = \vec{v} dt \quad (2.4.55)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione di Eulero per  $\vec{n}$ , si ha

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1} p \right) = \vec{n} \cdot (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) \quad (2.4.56)$$

ma  $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$  è ortogonale a  $\vec{v}$ , mentre  $\vec{n}$  è parallelo a  $\vec{v}$  per cui il secondo membro è nullo. Quanto al primo membro, esso è la derivata della funzione  $\frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1} p$  lungo la linea di flusso, e il fatto che questa sia nulla garantisce che tale quantità resti costante lungo ogni linea di flusso<sup>5</sup>.

**Moto stazionario e irrotazionale**

Nel caso in cui il moto sia contemporaneamente stazionario e irrotazionale, l'equazione di Eulero diventa

$$\vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1} p \right) = 0 \quad (2.4.57)$$

ovvero essa stabilisce che la quantità  $\frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1} p$  risulta essere indipendente dalla posizione dove viene valutata all'interno del liquido

$$\frac{v^2}{2} + U + \rho^{-1} p = \text{cost} \quad (2.4.58)$$

Siccome, in un liquido ideale, anche la densità è costante, da quanto sopra detto segue che in un liquido omogeneo risulta

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U + p = \text{cost} \quad (2.4.59)$$

che è nota come *equazione di Bernoulli*.

---

<sup>5</sup>Si noti, però, che, sulla base di quanto abbiamo ricavato fino ad ora, non possiamo escludere a priori che questa costante possa dipendere dalla linea di flusso considerata ...

## 2.5 Teorema di Bernoulli

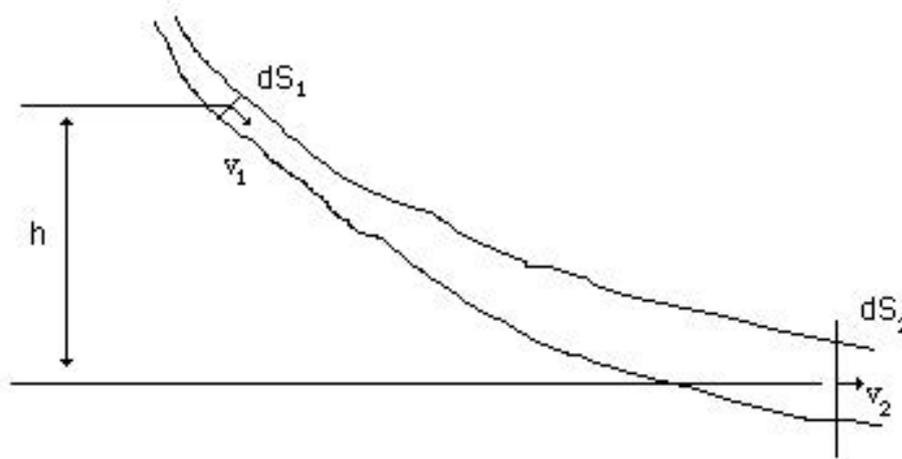


Figura 2.5: Teorema di Bernoulli

Per capire meglio il significato fisico del risultato ottenuto, ripercorriamo la strada storica che portò Bernoulli a formulare il suo teorema, prima che Eulero (allievo del padre) giungesse alle sue equazioni.

Ammettiamo dunque di essere in condizioni di moto stazionario, e consideriamo un generico tubo di flusso infinitesimo che si appoggia su due superfici  $dS_1$  e  $dS_2$ , disposte ortogonalmente al tubo stesso. Abbiamo già chiarito che il liquido si muove restando all'interno del tubo di flusso stesso.

Indichiamo con  $v_1$  la velocità del liquido quando attraversa  $dS_1$  (ortogonalmente a essa, dato che il tubo è infinitesimo e  $dS_1$  è perpendicolare alle pareti del tubo ...) e con  $v_2$  la velocità del liquido quando attraversa  $dS_2$ .

Supponiamo di poter considerare il sistema costituito dal liquido in moto fra il tempo  $t$  e il tempo  $t + dt$  come stazionario.

Dal punto di vista energetico, poichè, per ipotesi, nel liquido non ci sono forze dissipative (di attrito interno o viscosità) il lavoro meccanico fatto dalle forze esterne deve tradursi in una variazione di energia cinetica.

D'altronde, il sistema fra  $t$  e  $t + dt$  ha visto

- entrare da  $dS_1$  una massa d'acqua  $dm = \rho dS_1 v_1 dt$ ,
- uscire da  $dS_2$  la stessa massa d'acqua  $dm = \rho dS_2 v_2 dt$

mentre tutto il resto è rimasto invariato (ipotesi di stazionarietà).

Il lavoro delle forze esterne dovuto alla pressione nel liquido è stato

$$dL_p = p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt = \rho^{-1} dm(p_1 - p_2) \quad (2.5.60)$$

mentre quello dovuto alla forza peso<sup>6</sup> è stato

$$dL_G = dm g h \quad (2.5.61)$$

La somma di queste due quantità deve uguagliare la variazione di energia cinetica subita dalla massa  $dm$ , cioè deve essere

$$dE_c = dm \left( \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 \right) = dL_p + dL_G = dm[\rho^{-1}(p_1 - p_2) + g h] \quad (2.5.62)$$

Se, fissato un livello di riferimento arbitrario, scriviamo anche il dislivello come differenza delle due altezze

$$h = h_1 - h_2 \quad (2.5.63)$$

risulta

$$dm \left( \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 \right) = dm[\rho^{-1}(p_1 - p_2) + g(h_1 - h_2)] \quad (2.5.64)$$

ovvero

$$\rho^{-1}p_1 + g h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \rho^{-1}p_2 + g h_2 + \frac{1}{2}v_2^2 \quad (2.5.65)$$

$$\Rightarrow p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (2.5.66)$$

che esprimono, appunto, il teorema di Bernoulli<sup>7</sup>.

Esso è quindi niente altro che l'espressione della conservazione dell'energia meccanica nel moto di un liquido ideale.

Dividendo l'equazione (2.5.65) per l'accelerazione di gravità, otteniamo un'altra forma del teorema di Bernoulli, cioè

$$\frac{p_1}{\rho g} + h_1 + \frac{1}{2g}v_1^2 = \text{costante} \quad (2.5.67)$$

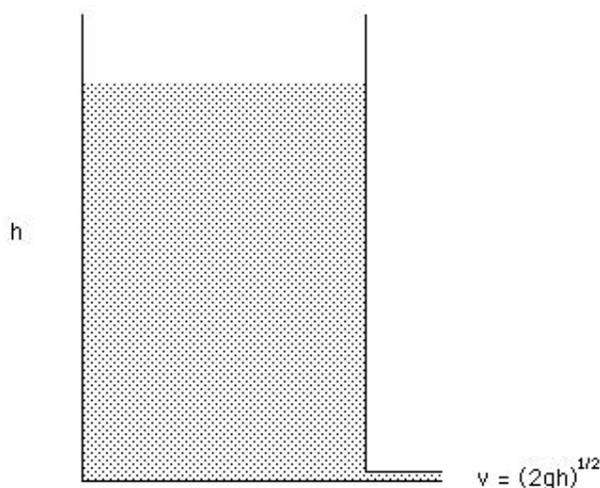
Ciascun addendo ha le dimensioni di una lunghezza: la prima viene chiamata *altezza piezometrica*, la seconda *altezza geometrica* e la terza *altezza cinetica*: il teorema di Bernoulli stabilisce che la somma algebrica di queste tre *altezze* è costante in un tubo di flusso.

Si noti che il teorema di Bernoulli stabilisce che la costante a cui è pari la somma delle tre altezze sopra citate è indipendente dalla posizione, a priori, solo entro il tubo di flusso considerato. Solamente nel caso in cui il moto sia anche irrotazionale oltreché stazionario, allora essa è indipendente dalla posizione nel liquido, come mostrato a partire dall'equazione di Eulero !

<sup>6</sup>Stiamo assumendo di spolarci nel campo gravitazionale terrestre di poco rispetto al raggio della Terra, per cui si può assumere che l'accelerazione di gravità  $g$  sia costante, altrimenti, per  $dL_G$ , dovremmo usare l'espressione  $dm \Delta U = dm(U_1 - U_2)$

<sup>7</sup>Daniel Bernoulli (1700 – 1785), fisico e matematico olandese, figlio del matematico Johann.

## 2.6 Teorema di Torricelli



Il teorema di Bernoulli implica un risultato che era già noto a Torricelli, relativo alla velocità di un liquido che fuoriesce da un orifizio praticato in un contenitore di sezione molto più grande (per esempio dal rubinetto di una botte ...).

Se l'altezza del liquido nel contenitore è  $h$  allora la velocità del liquido che fuoriesce vale

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2.6.68)$$

**Figura 2.6:** Teorema di Torricelli

ovvero è la stessa come se il liquido cadesse direttamente dalla superficie di separazione liquido/aria.

Questo risultato che va sotto il nome di *teorema di Torricelli*<sup>8</sup> è, come dicevamo, una conseguenza della conservazione dell'energia meccanica che, nei liquidi ideali, abbiamo visto essere descritta dal teorema di Bernoulli.

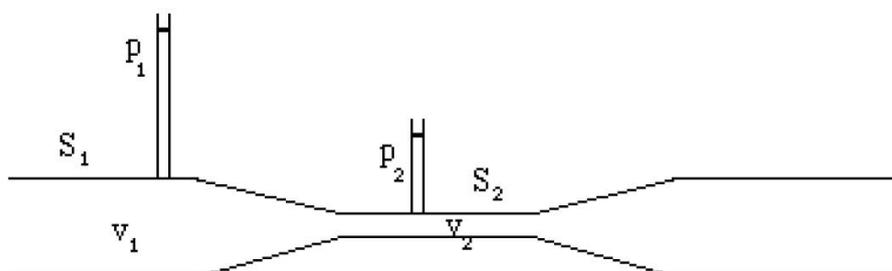
Come abbiamo visto, nel moto irrotazionale di un liquido ideale, in condizioni stazionarie, la somma delle altezze piezometriche, geometriche e cinetiche è costante. Osserviamo che al livello del pelo liquido e all'uscita dall'orifizio la pressione, e dunque anche l'altezza piezometrica, è la stessa (la pressione coincide in entrambi i casi con quella atmosferica, che, almeno se  $h$  non è troppo grande, è la stessa ...). L'altezza cinetica è praticamente nulla in alto (grande sezione della *botte* rispetto a quella del rubinetto), mentre quella geometrica è nulla in basso (prendendo quello del rubinetto come livello di riferimento): ne segue che, se  $h$  è il dislivello fra il pelo liquido e il rubinetto, e  $v$  la velocità di uscita, risulta

$$h = \frac{1}{2g}v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \quad (2.6.69)$$

che è lo stesso risultato che otterremmo nel moto di caduta del liquido nel campo di gravità della Terra, partendo da fermo, dall'altezza  $h$ .

<sup>8</sup>Evangelista Torricelli (1608 – 1647), allievo di Galileo.

## 2.7 Tubo di Venturi



**Figura 2.7:** Tubo di Venturi

Un'altra applicazione del teorema di Bernoulli è rappresentata dal cosiddetto *tubo di Venturi*<sup>9</sup>, usato, per esempio, per misurare la portata di una condotta. Si tratta di un tubo orizzontale, che presenta una strozzatura: la differenza di pressione del liquido nella sezione normale e in quella strozzata consente, note le due sezioni, di conoscere la portata della condotta.

Ricordiamo che la portata volumetrica  $Q$  nella condotta vale (teorema di Leonardo ...)

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (2.7.70)$$

D'altronde, dal teorema di Bernoulli abbiamo che (essendo l'altezza geometrica costante)

$$\frac{p_1}{g\rho} + \frac{1}{2g}v_1^2 = \frac{p_2}{g\rho} + \frac{1}{2g}v_2^2 \quad (2.7.71)$$

ovvero

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{Q}{S_2} \right)^2 - \left( \frac{Q}{S_1} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{2} Q^2 \frac{S_1^2 - S_2^2}{(S_1 S_2)^2} \quad (2.7.72)$$

da cui si ricava che la portata volumetrica è data da

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \quad (2.7.73)$$

Un'altra interessante applicazione del tubo di Venturi è quella di consentire l'estrazione dell'aria da recipienti fino a pressioni dell'ordine di qualche millesimo della pressione atmosferica, usando semplicemente un flusso d'acqua (per esempio, di rubinetto). E questo, in cucina, può risultare utile perché evita l'ossidazione di alcuni alimenti.

<sup>9</sup>Giovan Battista Venturi (1746 – 1822), fisico.

## 2.8 Moto di liquidi reali

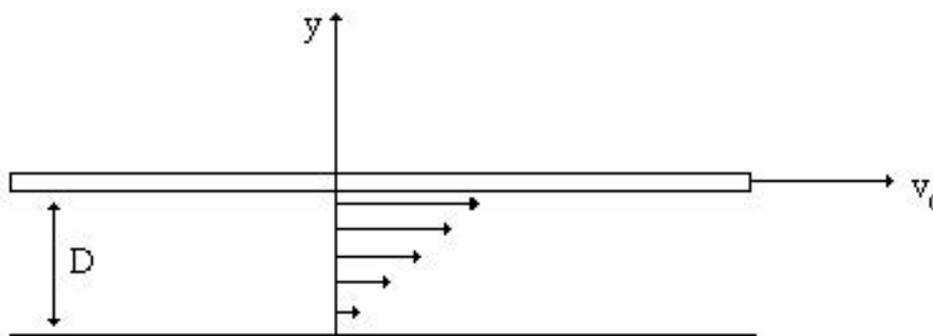
Un liquido reale può effettivamente considerarsi con ottima approssimazione come incomprimibile, ma presenta sempre una certa viscosità o attrito interno. Vediamo di definire, intanto, questa nuova grandezza, cioè la *viscosità*. Immaginiamo dunque di avere del liquido compreso fra due lamine piane e parallele e di traslare una lamina rispetto all'altra con una velocità costante. In assenza di viscosità non dovrebbe essere necessaria alcuna forza per mantenere la lamina in movimento, invece

- occorre applicare alla lamina una forza  $\vec{F}$  nella direzione del moto, proporzionale sia alla superficie  $S$  della lamina che alla sua velocità  $v_0$ , e inversamente proporzionale alla distanza  $D$  fra le lamine, ovvero di modulo<sup>10</sup>

$$F = \frac{\eta S v_0}{D} \quad (2.8.74)$$

- il liquido viene trascinato dalla lamina e la distribuzione di velocità decresce linearmente dal valore di  $v_0$  fino a zero, passando dalla lamina in moto a quella ferma:

$$v(y) = v_0 \frac{y}{D} \quad (2.8.75)$$



**Figura 2.8:** Viscosità

Nel caso in cui la geometria non sia così semplice, purché però il moto sia laminare, ovvero purché i vari strati di liquido scorrano uno sull'altro senza mescolarsi, risulta che su una lamina di liquido  $dS$  agisce una forza di attrito (forza di taglio) che dipende dalla derivata della velocità del liquido nella direzione ortogonale alla superficie stessa, diretta in verso opposto a quello della velocità

$$d\vec{F} = \eta (d\vec{S} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (2.8.76)$$

<sup>10</sup>La costante di proporzionalità  $\eta$  dipende dalla natura del liquido e si chiama *coefficiente di viscosità dinamica*: le sue dimensioni sono chiaramente  $Kg(m.s)^{-1}$ .

Cerchiamo adesso di vedere, partendo da queste premesse, come cambierà la legge di Eulero relativa al moto di un liquido viscoso. Per questo è necessario conoscere l'espressione della forza di origine viscosa su un generico elemento infinitesimo di volume  $dV$  di liquido. A questo scopo, consideriamo quindi un volumetto infinitesimo di lati  $dx, dy, dz$  orientati, per semplicità, secondo gli assi cartesiani, e cominciamo con il cercare di determinare, per esempio, la componente  $dF_x$  della forza di origine viscosa che agisce sull'elemento di liquido considerato. Consideriamo le due superfici parallele di area  $dy dx$  la cui normale è diretta secondo il versore  $\vec{k}$  dell'asse  $z$  (quella di sopra in verso positivo, quella di sotto in verso negativo). Abbiamo

$$\begin{aligned} dF_x^{(1)} &= -\eta dy dx (\vec{k} \cdot \text{grad})v_x(z) + \eta dy dx (\vec{k} \cdot \text{grad})v_x(z + dz) = \\ &= \eta dx dy dz \partial_z \partial_z v_x \end{aligned} \quad (2.8.77)$$

Analogamente dalle due superfici di area  $dy dz$ , la cui normale è diretta secondo il versore dell'asse  $x$ , ricaviamo un contributo pari a

$$dF_x^{(2)} = \eta dx dy dz \partial_x \partial_x v_x \quad (2.8.78)$$

mentre dalle restanti due superfici di area  $dx dz$ , la cui normale è diretta secondo il versore dell'asse  $y$ , ricaviamo un contributo pari a

$$dF_x^{(3)} = \eta dx dy dz \partial_y \partial_y v_x \quad (2.8.79)$$

Quindi, in definitiva, la componente  $dF_x$  della forza di origine viscosa che agisce sull'elemento di liquido considerato vale

$$dF_x = \eta dV \nabla^2 v_x \quad (2.8.80)$$

dove  $dV$  è il valore del volumetto considerato ( $dV = dx dy dz$ ) e  $\nabla^2$  è l'operatore scalare *laplaciano*, definito come

$$\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \partial_j \partial_j \quad (2.8.81)$$

Questo risultato, ottenuto per la componente  $dF_x$ , si generalizza in modo ovvio alle altre componenti, per cui, in definitiva, la forza di origine viscosa agente sul volumetto  $dV$  vale

$$d\vec{F} = \eta dV \nabla^2 \vec{v} \quad (2.8.82)$$

Questo risultato è indipendente dalla geometria del volumetto considerato e consente di arrivare immediatamente alla nuova forma dell'equazione di Eulero per i liquidi viscosi (incompressibili). Ricordiamo a questo proposito che eravamo arrivati all'equazione di Eulero partendo dalla relazione

$$d\vec{F} - dV \vec{\nabla} p = dm \vec{a} \quad (2.8.83)$$

che consente di esprimere l'accelerazione del volumetto di liquido  $dV$  in termini della forza esterna  $d\vec{F}$  agente su di esso e della reazione dovuta alle forze di pressione. Per i liquidi ideali sottoposti a un campo di forze di massa che ammettono potenziale, questa equazione diveniva

$$-dm \vec{\nabla}U - dV \vec{\nabla}p = dm \vec{a} \Rightarrow -dV(\rho \vec{\nabla}U + \vec{\nabla}p) = dV \rho \vec{a} \quad (2.8.84)$$

Nel caso attuale, in presenza di attrito interno, dovremo sommare al primo membro anche la forza di origine viscosa, ovvero avremo

$$\begin{aligned} -dV(\rho \vec{\nabla}U + \vec{\nabla}p - \eta \nabla^2 \vec{v}) &= dV \rho \vec{a} \Rightarrow -(\rho \vec{\nabla}U + \vec{\nabla}p - \eta \nabla^2 \vec{v}) = \rho \vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= -\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \end{aligned} \quad (2.8.85)$$

D'altronde abbiamo visto che

$$\vec{a} = v_i \partial_i \vec{v} + \partial_t \vec{v} \quad (2.8.86)$$

per cui abbiamo infine

$$v_i \partial_i \vec{v} + \partial_t \vec{v} = -\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \quad (2.8.87)$$

Questa equazione va sotto il nome di *equazione di Navier-Stokes*. La quantità

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu \quad (2.8.88)$$

è detta *coefficiente di viscosità cinematica* e si misura in  $m^2 s^{-1}$ .

L'equazione di Navier-Stokes può essere riscritta usando l'identità

$$v_i \partial_i \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \quad (2.8.89)$$

e si ottiene, in generale, (ricordiamo che la densità del liquido è costante per ipotesi)

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) = \nu \nabla^2 \vec{v} - \partial_t \vec{v} + \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) \quad (2.8.90)$$

per cui si ha

$$\text{moto irrotazionale} : \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) = \nu \nabla^2 \vec{v} - \partial_t \vec{v} \quad (2.8.91)$$

$$\text{moto stazionario} : \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) = \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \quad (2.8.92)$$

$$\text{moto stazionario e irrotazionale} : \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) = \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.8.93)$$

Si noti che nel caso di moto stazionario qualsiasi (rotazionale o meno), su una linea di flusso, moltiplicando scalarmente la (2.8.92) per  $dm \vec{dl} \equiv \rho dV \vec{dl}$ , risulta

$$\vec{\nabla} \left( U dm + p dV + \frac{1}{2} v^2 dm \right) \cdot \vec{dl} = dV \eta (\nabla^2 \vec{v}) \cdot \vec{dl} \quad (2.8.94)$$

(infatti l'elemento di linea  $\vec{dl}$  è comunque parallelo a  $\vec{v}$  ...).

Questa relazione esprime ancora la conservazione dell'energia, infatti il primo membro, per quanto visto precedentemente a proposito del teorema di Bernoulli, rappresenta la variazione di energia totale per unità di massa associata all'elemento di liquido, mentre il secondo membro è pari al lavoro fatto dalla forza viscosa.

Passiamo adesso a considerare il moto di un liquido reale in una condotta che supporremo orizzontale e di sezione costante. Se l'energia meccanica si conserva lungo la condotta, il teorema di Bernoulli ci dice che la pressione lungo la condotta resta costante. Sperimentalmente troviamo che essa diminuisce lungo il verso in cui viaggia il liquido, ovvero che la condotta presenta una *perdita di carico*. La perdita di carico è dovuta a una perdita di energia meccanica dovuta al lavoro fatto contro forze di attrito sia fra liquido e pareti che fra le varie parti del liquido che scorrono una sull'altra. Infatti, data la geometria della condotta che abbiamo scelto, una perdita di energia lungo la direzione del moto del liquido, evidentemente non può tradursi in una perdita di energia cinetica, visto che l'incompressibilità del liquido e la sezione costante richiedono che la velocità media (*media* poiché, come vedremo, essa non è la stessa nei vari punti della sezione, proprio a causa della viscosità) non cambi lungo la condotta; né può tradursi in una perdita di energia potenziale, poiché l'altezza della condotta, per ipotesi, è costante, per cui deve necessariamente tradursi in una diminuzione dell'altezza piezometrica ovvero della pressione, come, in realtà accade. Supponiamo che il moto del liquido sia *laminare*, ovvero che la velocità del liquido su una qualsiasi sezione del flusso sia, in ogni punto, parallela a una direzione fissa. Questa condizione garantisce che i vari strati di liquido scorrono uno sull'altro senza mescolarsi tra loro attraverso movimenti turbolenti. In queste condizioni si osserva che la perdita di carico, fissata la geometria della condotta, dipende linearmente dalla portata

$$\Delta p \propto Q \quad \text{a sezione } S \text{ e lunghezza della condotta fissate} \quad (2.8.95)$$

ovvero

$$\Delta p = R Q \quad (2.8.96)$$

dove  $R$  rappresenta la *resistenza* offerta dalla condotta al passaggio del fluido.

Valutiamo adesso la potenza meccanica dissipata in una condotta di sezione costante, a causa della viscosità. Consideriamo dunque il lavoro fatto nel tempo  $dt$  contro le forze di pressione per immettere una massa  $dm = \rho S v dt = \rho Q dt$  nella condotta. Esso vale

$$dL_{in} = p_{in} S v dt = p_{in} Q dt \quad (2.8.97)$$

mentre il lavoro che ne ricaviamo all'uscita dalla condotta, dove la pressione è minore, vale soltanto

$$dL_{out} = p_{out} Q dt \quad (2.8.98)$$

ovvero c'è una perdita di energia meccanica nel tempo  $dt$  pari a

$$\Delta dL = \Delta p Q dt = R Q^2 dt \quad (2.8.99)$$

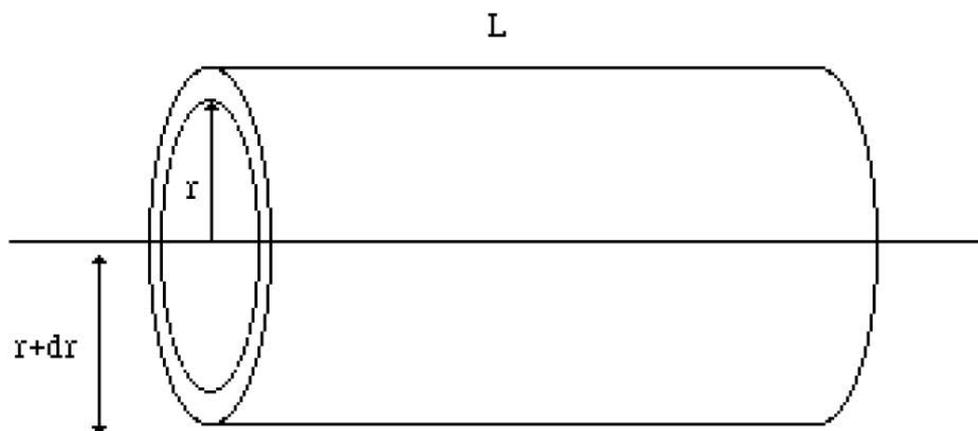
e quindi si ha una dissipazione di potenza meccanica pari a

$$W = R Q^2 \quad (2.8.100)$$

Vediamo adesso di legare la resistenza  $R$  al coefficiente di viscosità introdotto prima e ai parametri geometrici della condotta.

Immaginiamo, per semplicità, che si tratti di una condotta di sezione circolare. Sperimentalmente si osserva che, lungo la condotta, fissata la portata e la sezione, la perdita di carico è proporzionale alla lunghezza della condotta stessa

$$\Delta p \propto L \text{ a sezione } S \text{ e portata fissate} \quad (2.8.101)$$



**Figura 2.9:** Perdita di carico

Assumiamo che il moto sia laminare: chiaramente il problema ha simmetria cilindrica, per cui ci aspettiamo che la velocità sia una funzione di  $r$  che vale

zero sulla parete. Consideriamo dunque la lamina di liquido di lunghezza  $L$  compresa fra i raggi  $r$  e  $r + dr$ . La superficie esterna, per quanto abbiamo detto, a causa dell'attrito con il liquido *esterno*, subisce una forza diretta nel verso opposto al moto, la cui componente nel verso del moto è pari a (si tratta di una forza contro il moto poiché  $dv/dr$  è negativo in quanto la velocità decresce con  $r$  per cui  $F$  risulta negativa...)

$$F(r + dr) = \eta S(r + dr) \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} \quad (2.8.102)$$

La superficie interna, a sua volta, è spinta nella direzione del moto da una forza che ha componente in quella direzione pari a ( $dv/dr < 0...$ )

$$-F(r) = -\eta S(r) \left. \frac{dv}{dr} \right|_r \quad (2.8.103)$$

Oltre a queste due forze di attrito viscoso, occorre tenere presente che, nel verso del moto, è presente anche la forza che si origina dalla differenza di pressione fra i due estremi della lamina, cioè  $\Delta p \, 2\pi r \, dr$ . Siccome il liquido non accelera, la somma di queste forze deve essere nulla, ovvero

$$F(r + dr) - F(r) + \Delta p \, 2\pi r \, dr = 0 \quad (2.8.104)$$

da cui otteniamo

$$\frac{dF}{dr} = -\Delta p \, 2\pi r \quad (2.8.105)$$

D'altronde dalle (2.8.102) e (2.8.103) segue che

$$\frac{dF}{dr} = \eta \left[ \frac{dS}{dr} \frac{dv}{dr} + S \frac{d^2v}{dr^2} \right] \quad (2.8.106)$$

per cui otteniamo

$$\eta \left[ \frac{dS}{dr} \frac{dv}{dr} + S \frac{d^2v}{dr^2} \right] = -\Delta p \, 2\pi r \quad (2.8.107)$$

Ma

$$S(r) = 2\pi r L \quad (2.8.108)$$

per cui otteniamo

$$\eta \left[ 2\pi L \frac{dv}{dr} + 2\pi r L \frac{d^2v}{dr^2} \right] = -\Delta p \, 2\pi r \quad (2.8.109)$$

ovvero, dividendo per  $2\pi \eta r L$  e ponendo  $A = \frac{\Delta p}{L}$  (per quanto detto, questa grandezza è indipendente da  $L$  e rappresenta appunto la perdita di carico...), otteniamo infine

$$\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{A}{\eta} \quad (2.8.110)$$

la cui soluzione che soddisfa la condizione al contorno  $v(r_0) = 0$  è

$$v(r) = A \frac{r_0^2 - r^2}{4\eta} \quad (2.8.111)$$

Dunque il profilo della velocità nel tubo è parabolico, con valor massimo al centro della condotta, pari a

$$v(0) = A \frac{r_0^2}{4\eta} \quad (2.8.112)$$

Possiamo utilizzare adesso questo profilo di velocità per calcolare la portata della condotta. Occorre integrare da  $r = 0$  a  $r = r_0$  la funzione  $2\pi r dr v(r)$ . Si ha

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r dr v(r) = 2\pi \frac{A}{4\eta} \int_0^{r_0} r dr (r_0^2 - r^2) \quad (2.8.113)$$

D'altronde l'integrale vale

$$\int_0^{r_0} r dr (r_0^2 - r^2) = \frac{1}{4} r_0^4 \quad (2.8.114)$$

per cui abbiamo

$$Q = 2\pi \frac{A}{4\eta} \int_0^{r_0} r dr (r_0^2 - r^2) = 2\pi \frac{A}{4\eta} \frac{1}{4} r_0^4 = \pi \Delta p \frac{r_0^4}{8\eta L} \quad (2.8.115)$$

Questo risultato è noto come *legge di Poiseuille*.

Essa stabilisce che, in condizioni di moto laminare, la portata di un tubo è direttamente proporzionale alla pressione fra gli estremi del tubo, alla quarta potenza del raggio e inversamente proporzionale alla lunghezza del tubo e al coefficiente di viscosità del liquido.

$$Q = \pi r^4 \frac{\Delta p}{8\eta L} \quad (2.8.116)$$

da cui segue che la resistenza  $R$  opposta dalla condotta al moto del liquido vale

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \quad (2.8.117)$$

# Capitolo 3

## Il suono

### 3.1 L'equazione delle onde sonore

Il suono ha origine perché

- quando un fluido reale si muove, in esso può cambiare la densità;
- al cambiamento di densità nel fluido corrisponde un cambiamento di pressione;
- l'insorgere di differenze di pressione provocano movimenti nel fluido.

Per quanto riguarda il legame fra movimento e variazioni di densità, abbiamo visto che, in termini della velocità euleriana  $\vec{v}$ , l'equazione di conservazione della massa implica che

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.1.1)$$

D'altronde occorre tenere conto che, nel processo di propagazione del suono, le grandezze  $p$  e  $\rho$  variano di poco rispetto ai loro valori *statici*, cioè

$$p = p_0 + p_s(t), \quad p_s \ll p_0 \quad (3.1.2)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_s(t), \quad \rho_s \ll \rho_0 \quad (3.1.3)$$

quindi, l'equazione di conservazione della massa potrà essere scritta come

$$\rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad (3.1.4)$$

Per quanto riguarda il secondo punto, cioè il legame fra  $p$  e  $\rho$ , siccome il fluido avrà, in generale, una legge di stato che lega la pressione alla densità

$$p = p(\rho, T) \quad (3.1.5)$$

ne segue che, trattando il fenomeno del suono come un processo adiabatico, sarà

$$p_s = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{adiab} \rho_s \equiv \mathcal{V}^2 \rho_s \quad (3.1.6)$$

dove  $\mathcal{V}^2$  (che ha le dimensioni del quadrato di una velocità) è stata introdotta semplicemente come la derivata rispetto alla densità della funzione di stato che descrive la pressione in termini della densità e della temperatura, fatta per una trasformazione adiabatica e calcolata nel punto di lavoro statico del fluido

$$\mathcal{V}^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{adiab} \quad (3.1.7)$$

In questa definizione si è poi implicitamente assunto che  $\mathcal{V}^2 > 0$  ovvero che la densità cresca<sup>1</sup> all'aumentare della pressione.

Vediamo cosa accade nel caso di un gas perfetto. Dalla Termodinamica sappiamo che (Primo Principio)

$$dQ = dL + dU = p dV + dU = p dV + n C_v dT \quad (3.1.8)$$

dove  $n$  indica il numero di moli e  $C_v$  è il calore specifico molare a volume costante. In una trasformazione adiabatica  $dQ = 0$ , quindi

$$p dV + n C_v dT = 0 \quad (3.1.9)$$

D'altronde, dall'equazione di stato dei gas perfetti è

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad V dp + p dV = nR dT \quad (3.1.10)$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= p dV + n C_v dT = p dV + \frac{C_v}{R} n R dT = p dV + \frac{C_v}{R} [V dp + p dV] = \\ &= p dV \left[ 1 + \frac{C_v}{R} \right] + \frac{C_v}{R} V dp \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

e dunque, moltiplicando per  $\frac{R}{C_v}$ , otteniamo<sup>2</sup>

$$p dV \frac{R + C_v}{C_v} + V dp = 0 \equiv \gamma p dV + V dp \quad (3.1.12)$$

<sup>1</sup>Si noti che, per un fluido ideale  $\mathcal{V}^2$  sarebbe una quantità infinita.

<sup>2</sup>La quantità  $\frac{R+C_v}{C_v}$ , che non è altro che il rapporto  $\frac{C_p}{C_v}$  fra i calori specifici a pressione e volume costante, viene solitamente indicata con il simbolo  $\gamma$  e, per i gas perfetti monoatomici per i quali  $C_v = \frac{3}{2}R$ , risulta  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

da cui, dividendo per  $pV$ , otteniamo

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \quad (3.1.13)$$

che si integra facilmente, fornendo

$$\gamma \log V = -\log p + \text{cost} \Rightarrow pV^\gamma = K \text{ost} \Rightarrow p = K\rho^\gamma \quad (3.1.14)$$

da cui, indicando con  $m$  la massa di gas che stiamo considerando, si ha

$$\mathcal{V}^2 \equiv \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\text{adiab}} = K\rho^{\gamma-1} \gamma = \frac{p\gamma}{\rho} = \frac{\frac{\gamma nRT}{V}}{\frac{m}{V}} = \frac{\gamma nRT}{m} \quad (3.1.15)$$

D'altronde la costante  $R$  è pari al numero di Avogadro  $\mathcal{N}$  per la costante di Boltzmann  $k$  e analogamente  $m = n\mu\mathcal{N}$ , dove  $\mu$  è la massa della singola molecola: dunque

$$\mathcal{V}^2 = \frac{\gamma kT}{\mu} \quad (3.1.16)$$

Osserviamo adesso che, dal teorema di equipartizione dell'energia, per un gas monoatomico, risulta

$$\frac{1}{2}\mu \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{\mu} \quad (3.1.17)$$

dove  $\langle v^2 \rangle$  è la velocità quadratica media. Sostituendo risulta quindi

$$\mathcal{V}^2 = \frac{\gamma}{3} \langle v^2 \rangle \quad (3.1.18)$$

Come vedremo,  $\mathcal{V}$  è proprio la velocità del suono nel gas monoatomico che stiamo considerando: la relazione precedente mostra il suo legame con la velocità quadratica media della teoria cinetica dei gas ...

Veniamo adesso a considerare il terzo punto, cioè quello relativo alla dinamica del fluido. Abbiamo già visto che, per un volumetto infinitesimo, si ha (equazione di Navier-Stokes)

$$\vec{a} = \partial_t \vec{v} + v_i \partial_i \vec{v} = \vec{\nabla} U - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \quad (3.1.19)$$

Supponiamo adesso che il movimento originato dal suono sia tale per cui

- si possa trascurare la presenza di viscosità,
- il moto sia irrotazionale,
- si possa assumere  $\vec{v}$  piccola, ovvero si possa trascurare  $v_i \partial_i \vec{v}$  rispetto a  $\partial_t \vec{v}$ .

Ne segue allora che

$$-\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \Rightarrow -\vec{\nabla}\left(U + \frac{p}{\rho_0}\right) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \quad (3.1.20)$$

Ma il potenziale  $U$  è definito a meno di una costante: la scegliamo in modo che sia

$$\rho_0 U + p_0 = 0 \quad (3.1.21)$$

in modo che risulti quindi

$$-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_s = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \quad (3.1.22)$$

Vediamo adesso di mettere insieme le varie relazioni ottenute, tenendo conto di quanto abbiamo detto circa il fatto che sia la pressione che la densità variano poco rispetto al caso statico. Si ha

$$\text{conservazione della massa} : \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} = 0 \quad (3.1.23)$$

$$\text{relazione pressione densità}' : p_s = \mathcal{V}^2 \rho_s \quad (3.1.24)$$

$$\text{legge del moto} : -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_s = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \quad (3.1.25)$$

nelle incognite  $\rho_s$ ,  $p_s$  e  $\vec{v}$ .

Prima di procedere oltre, ricordiamo che il moto del fluido è, per ipotesi, irrotazionale. Questo significa che

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi \quad (3.1.26)$$

dove  $\Phi(x, y, z, t)$  è una opportuna funzione *potenziale* (indeterminata a meno di una qualsiasi funzione  $F(t)$  del tempo).

L'equazione di conservazione della materia diventa così

$$\rho_0 \operatorname{div}(\vec{\nabla}\Phi) + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho_0 \nabla^2\Phi + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} = 0 \quad (3.1.27)$$

D'altronde, dall'equazione di stato, sappiamo che

$$p_s = \mathcal{V}^2 \rho_s \Rightarrow \rho_s = \mathcal{V}^{-2} p_s \quad (3.1.28)$$

per cui, sostituendo nella equazione precedente, si ha

$$\rho_0 \nabla^2\Phi + \mathcal{V}^{-2} \frac{\partial p_s}{\partial t} = 0 \quad (3.1.29)$$

Consideriamo adesso l'equazione del moto: essa fornisce

$$-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_s = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_s = \frac{\partial\vec{\nabla}\Phi}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{p_s}{\rho_0} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = 0 \quad (3.1.30)$$

e dunque possiamo concludere che

$$\frac{p_s}{\rho_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t), \text{ costante rispetto a } x, y, z \quad (3.1.31)$$

Ma abbiamo già osservato che il potenziale  $\Phi$  è indeterminato a meno di una qualsiasi funzione del tempo: introduciamo allora il nuovo potenziale  $\phi$ , equivalente a  $\Phi$  nel senso che entrambi definiscono lo stesso campo di velocità  $\vec{v}$ , così definito

$$\phi(x, y, z, t) \equiv \Phi(x, y, z, t) - \int_0^t F(\tau) d\tau \quad (3.1.32)$$

Evidentemente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - F(t) \quad (3.1.33)$$

per cui, in termini di questo potenziale risulta adesso

$$\frac{p_s}{\rho_0} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow p_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.1.34)$$

che, sostituita nell'equazione (3.1.29), fornisce

$$\rho_0 \nabla^2 \phi + \mathcal{V}^{-2} \frac{\partial p_s}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho_0 \nabla^2 \phi - \mathcal{V}^{-2} \rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.35)$$

ovvero, finalmente

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.36)$$

che è appunto l'equazione delle onde con velocità di fase  $\mathcal{V}$ .

Verifichiamo adesso che non solo il potenziale  $\phi$  ma anche  $p_s$ ,  $\vec{v}$ ,  $\rho_s$  verificano l'equazione delle onde.

- Consideriamo la pressione  $p_s$ : abbiamo visto che

$$p_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.1.37)$$

Moltiplicando per  $-\rho_0$  ambo i membri dell'equazione per il potenziale (3.1.36) e derivando parzialmente rispetto al tempo, si ha

$$\nabla^2 \left( -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \left( -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 p_s - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} \quad (3.1.38)$$

- Passiamo alla densità  $\rho_s$ : abbiamo visto che risulta

$$\rho_s = \frac{p_s}{\mathcal{V}^2} \quad (3.1.39)$$

Poiché l'equazione delle onde è lineare e omogenea, se è soddisfatta da  $p_s$  allora essa deve valere anche per  $\rho_s$ .

- Veniamo infine alla velocità  $v_s$ . Dalla definizione si ha

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad (3.1.40)$$

prendendo il gradiente di entrambi i membri dell'equazione delle onde per il potenziale  $\phi$ , è immediato che anche la velocità  $\vec{v}$  la soddisfa; cioè si ha

$$\nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.41)$$

Come corollario di quanto abbiamo detto, possiamo concludere affermando che il problema è completamente risolto una volta che sia nota la soluzione dell'equazione per il potenziale, ovvero la funzione  $\phi(x, y, z, t)$ , infatti

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad (3.1.42)$$

$$p_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.1.43)$$

$$\rho_s = \frac{1}{\mathcal{V}^2} p_s \quad (3.1.44)$$

### 3.1.1 Onde sonore in una dimensione

Occupiamoci adesso di vedere come sono fatte le soluzioni dell'equazione delle onde per il potenziale, cioè le soluzioni dell'equazione

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.1.45)$$

Iniziamo, per semplicità dal caso unidimensionale, ovvero dal caso in cui  $\phi = \phi(x, t)$ . In questo caso l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.1.46)$$

Definiamo due nuove variabili

$$\eta = x - \mathcal{V}t \quad x = \frac{\eta + \xi}{2} \quad (3.1.47)$$

$$\xi = x + \mathcal{V}t \quad t = \frac{\xi - \eta}{2\mathcal{V}} \quad (3.1.48)$$

La funzione potenziale da cui siamo partiti,  $\phi(x, t)$ , consente di definire una nuova funzione  $\Gamma(\eta, \xi)$  nel modo seguente

$$\phi(x, t) = \phi\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\xi - \eta}{2\mathcal{V}}\right) \equiv \Gamma(\eta, \xi) \quad (3.1.49)$$

Evidentemente si ha

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi \quad (3.1.50)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi \quad (3.1.51)$$

da cui segue che

$$4 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta \partial \xi} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.52)$$

Ne segue allora che  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}$  non deve dipendere da  $\eta$  come pure  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}$  non deve dipendere da  $\xi$ , ovvero

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = f(\eta); \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = g(\xi) \quad (3.1.53)$$

che è come dire che

$$\Gamma = F(\eta) + G(\xi) = F(x - \mathcal{V}t) + G(x + \mathcal{V}t) \quad (3.1.54)$$

dove  $F$  e  $G$  sono funzioni a priori qualsiasi (purché derivabili) di una singola variabile reale.

Immaginiamo che  $F(s)$  sia una funzione che gode di questa proprietà: osserviamo che  $F(x - \mathcal{V}t)$  descrive un segnale che al tempo  $t = 0$  coincide con  $F(s)$  e a tempi successivi coincide con lo stesso segnale, ma traslato sull'asse delle ascisse appunto di  $\mathcal{V}t$ . Il segnale viaggia dunque parallelamente a se stesso, con velocità  $\mathcal{V}$ , nel verso positivo dell'asse delle ascisse.

La funzione  $G(x + \mathcal{V}t)$  descrive invece un altro segnale che trasla con velocità costante  $-\mathcal{V}$ , ovvero si sposta nel verso negativo dell'asse delle ascisse.

La forma dei due segnali non cambia nel tempo: semplicemente trasla.

Osserviamo adesso un'importante proprietà dell'equazione delle onde: essa è una equazione lineare e omogenea; ne segue che se  $F_1$  ed  $F_2$  sono soluzioni dell'equazione, anche una loro combinazione lineare lo è, ovvero le soluzioni dell'equazione costituiscono uno spazio vettoriale: vale il principio di sovrapposizione !

Questo semplice fatto rende possibile rappresentare la generica soluzione in termini di combinazioni lineari di soluzioni particolari: l'unica richiesta è che queste soluzioni siano sufficienti per poter rappresentare una qualunque soluzione. E' un po' la stessa cosa che accade con i vettori nello spazio tridimensionale dove ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare di soli tre vettori indipendenti ...

Funzioni particolarmente interessanti per questo scopo sono le funzioni trigonometriche. Consideriamo, per esempio, la funzione  $\cos(ks)$  dove  $k$  sta per un parametro reale positivo qualsiasi: per quanto detto sopra, le funzioni

$$F(x, t) = \cos[k(x - \mathcal{V}t)], \quad G(x, t) = \cos[k(x + \mathcal{V}t)] \quad (3.1.55)$$

sono soluzioni dell'equazione delle onde che si propagano, rispettivamente, nel verso positivo ( $F$ ) e negativo ( $G$ ) dell'asse  $x$ .

Queste soluzioni sono dette *monocromatiche* perché descrivono oscillazioni con un'unica frequenza<sup>3</sup>: si ha infatti

$$F(x, t) = \cos[kx - \omega t], \quad G(x, t) = \cos[kx + \omega t] \quad \text{dove } \omega \equiv k\mathcal{V} \quad (3.1.56)$$

Il parametro  $k$  viene chiamato *numero d'onde* e valgono le seguenti relazioni

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi f; \quad \mathcal{V} = \lambda f \quad (3.1.57)$$

dove  $f$  è la frequenza dell'onda e  $\lambda$  è la sua lunghezza d'onda.

Il teorema di Fourier<sup>4</sup> garantisce (vedi nota) che ogni funzione di variabile reale  $f(s)$  (purché integrabile) possa venire rappresentata come somma

<sup>3</sup>L'aggettivo *monocromatico* deriva dal fatto che anche la propagazione della luce è descritta dall'equazione delle onde e le soluzioni aventi una frequenza definita descrivono, nel visibile, luce di un solo colore.

<sup>4</sup>Premettiamo l'esposizione del teorema, ricordando brevemente che cosa sono i numeri complessi. In breve, possiamo dire che un numero complesso  $z = a + ib$  è definito attraverso una coppia di numeri reali, che costituiscono rispettivamente la sua parte reale ( $a$ ) e la sua parte immaginaria ( $b$ ).

Il coefficiente immaginario  $i$  gode della proprietà per cui  $i^2 = -1$ .

Fra i numeri complessi è definita sia un'operazione di somma, per la quale

$$z_1 + z_2 \equiv (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (3.1.58)$$

come un'operazione di prodotto, per la quale

$$z_1 \cdot z_2 \equiv (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (3.1.59)$$

A un numero complesso  $z = a + ib$  è associato in modo naturale il suo *complesso coniugato*  $z^* = a - ib$ .

Si definisce *modulo di*  $z$  la quantità

$$|z| \equiv \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.1.60)$$

e dunque risulta

$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (3.1.61)$$

dove, per definizione di  $\rho$  e  $\phi$

$$a \equiv \rho \cos \phi, \quad b \equiv \rho \sin \phi \quad (3.1.62)$$

Un teorema dovuto a Eulero garantisce che

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad \Rightarrow \quad z = \rho e^{i\phi} \quad (3.1.63)$$

La quantità  $\phi$  si chiama *fase del numero complesso*  $z$ . Evidentemente risulta poi

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}; \quad \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \quad (3.1.64)$$

(integrale) di seni e coseni, ovvero

$$f(s) = \int_0^{+\infty} dk [A(k) \cos(ks) + B(k) \sin(ks)] = \int_0^{+\infty} dk C(k) \cos[ks + \alpha(k)] \quad (3.1.70)$$

dove le funzioni  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$  e  $\alpha(k)$  sono legate alla funzione  $f$  dalle relazioni seguenti

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int ds f(s) \cos(ks); \quad B(k) = \frac{1}{\pi} \int ds f(s) \sin(ks) \quad (3.1.71)$$

$$C(k) = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}; \quad \cos[\alpha(k)] = \frac{A(k)}{C(k)}; \quad \sin[\alpha(k)] = \frac{B(k)}{C(k)} \quad (3.1.72)$$

Ne segue quindi, per quanto detto sopra, che la più generale soluzione dell'equazione delle onde che stiamo cercando di determinare in una dimensione, la quale si propaghi nel verso positivo dell'asse  $x$ , avrà la seguente struttura

$$\phi(x, t) = F(x - \mathcal{V}t) = \int_0^{+\infty} dk \{A(k) \cos[k(x - \mathcal{V}t)] + B(k) \sin[k(x - \mathcal{V}t)]\} = \quad (3.1.73)$$

$$= \int_0^{+\infty} dk C(k) \cos[k(x - \mathcal{V}t) - \alpha(k)] \quad (3.1.74)$$

Il teorema di Fourier asserisce che, se  $f(s)$  è una funzione di variabile reale (a valori reali o complessi non importa, purchè il suo modulo sia integrabile), allora

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{iks} \Leftrightarrow \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{-iks} \quad (3.1.65)$$

La funzione  $\tilde{f}$  è detta *trasformata di Fourier* della funzione  $f$ .

Se la funzione  $f$  ha valori reali, allora una proprietà ovvia della sua trasformata è che

$$f^*(k) = f(-k) \quad (3.1.66)$$

e in questo caso risulta

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{+\infty} dk [\tilde{f}(k)e^{iks} + \tilde{f}(-k)e^{-iks}] = \int_0^{+\infty} dk [\tilde{f}(k)e^{iks} + \tilde{f}^*(k)e^{-iks}] = \\ &= \int_0^{+\infty} dk [(\tilde{f}(k) + \tilde{f}^*(k)) \cos ks + i(\tilde{f}(k) - \tilde{f}^*(k)) \sin ks] \equiv \\ &\equiv \int_0^{+\infty} dk [A(k) \cos ks + B(k) \sin ks] \end{aligned} \quad (3.1.67)$$

dove

$$A(k) \equiv \tilde{f}(k) + \tilde{f}^*(k) = \frac{1}{\pi} \int ds f(s) \cos(ks) \quad (3.1.68)$$

$$B(k) \equiv i(\tilde{f}(k) - \tilde{f}^*(k)) = \frac{1}{\pi} \int ds f(s) \sin(ks) \quad (3.1.69)$$

mentre, in modo analogo, per una soluzione che si propaghi in verso opposto, avremo

$$\phi(x, t) = F(x - \mathcal{V}t) = \int_0^{+\infty} dk \{A(k) \cos[k(x + \mathcal{V}t)] + B(k) \sin[k(x + \mathcal{V}t)]\} = \quad (3.1.75)$$

$$= \int_0^{+\infty} dk C(k) \cos[k(x + \mathcal{V}t) - \alpha(k)] \quad (3.1.76)$$

dove le funzioni  $A(k)$  e  $B(k)$  sono, a priori, funzioni qualsiasi (purché integrabili...).

In una dimensione, quindi, qualunque soluzione dell'equazione delle onde studiata può essere vista come una sovrapposizione (somma) di onde descritte da funzioni sinusoidali o cosinusoidali, cioè *di onde monocromatiche*.

### 3.1.2 Onde piane in tre dimensioni

Consideriamo adesso la più generale soluzione per il potenziale  $\phi$  che descrive un'onda la quale si propaga nel verso positivo dell'asse  $x$

$$\phi(x, t) = \int_0^{+\infty} dk C(k) \cos[k(x - \mathcal{V}t) + \alpha(k)] \quad (3.1.77)$$

Osserviamo che ciascuna componente di Fourier  $C(k) \cos[k(x - \mathcal{V}t) + \alpha(k)]$  è soluzione della equazione delle onde *anche in tre dimensioni* e rappresenta un'onda piana. La fase dell'onda  $k(x - \mathcal{V}t) + \alpha(k)$  è costante sui piani ortogonali all'asse  $x$  (asse di propagazione) e viaggia con velocità  $\mathcal{V}$ .

Più in generale, in tre dimensioni, le soluzioni piane dell'equazione delle onde hanno la struttura

$$\Pi(\vec{x}, t) = C \cos[\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha] = C \cos[k \vec{n} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha] \quad (3.1.78)$$

dove  $\vec{k} \equiv k \vec{n}$  con  $\vec{n}$  versore, mentre  $\omega \equiv k\mathcal{V}$  è la pulsazione dell'onda.

Le superfici di fase costante sono le superfici ortogonali a  $\vec{n}$  e si muovono con velocità  $\mathcal{V}$  nel verso positivo di  $\vec{n}$  stesso che, per questo, viene chiamato *versore di propagazione* dell'onda.

Accade che ogni soluzione dell'equazione delle onde in tre dimensioni si può sempre rappresentare come somma (integrale) di onde piane.

Vediamo perché.

Il teorema di Fourier, che abbiamo già richiamato in una dimensione, in realtà è valido in ogni dimensione. Quello che afferma, sotto ipotesi molto generali di integrabilità, è che, per esempio, se  $F(\vec{x}, t)$  è una funzione della posizione e del tempo, allora esiste una (e una sola) funzione  $\tilde{F}(\vec{k}, \omega)$ , detta la *trasformata di Fourier* della funzione  $F$ , per cui

$$F(\vec{x}, t) = \int d^3k d\omega \tilde{F}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} \quad (3.1.79)$$

dove la funzione  $\tilde{F}(\vec{k}, \omega)$  è, a sua volta, legata alla  $F$  dalla relazione simmetrica (antitrasformata)

$$\tilde{F}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x dt F(\vec{x}, t) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t)} \quad (3.1.80)$$

La prima relazione mostra che, sotto ipotesi molto generali (integrabilità del modulo) **ogni funzione**  $F(\vec{x}, t)$  è rappresentabile come *somma* di onde piane. Il fatto poi che la funzione  $F(\vec{x}, t)$  sia soluzione dell'equazione delle onde impone un vincolo fra  $\omega$  e  $\vec{k}$ : si ha infatti

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 F - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \\ &= \nabla^2 \int d^3k d\omega \tilde{F}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t)} - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3k d\omega \tilde{F}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t)} = \\ &= i^2 \int d^3k d\omega \left( |\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{\mathcal{V}^2} \right) \tilde{F}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t)} \end{aligned} \quad (3.1.81)$$

Siccome la funzione identicamente nulla ha per trasformata di Fourier la funzione identicamente nulla, ne segue che deve essere

$$\left( |\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{\mathcal{V}^2} \right) \tilde{F}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (3.1.82)$$

ovvero che, laddove  $\tilde{F}$  non è nulla, debba essere

$$\omega^2 = \pm \mathcal{V} |\vec{k}| \quad (3.1.83)$$

Definendo allora

$$\Omega = \mathcal{V} |\vec{k}| \quad (3.1.84)$$

abbiamo che la più generale soluzione dell'equazione delle onde in tre dimensioni deve poter essere posta nella forma

$$F(\vec{x}, t) = \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \Omega t)} + \int d^3k B(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \Omega t)} \quad (3.1.85)$$

dove le funzioni  $A$  e  $B$  sono, a priori, qualsiasi (purché integrabili).

Ricordiamo ora che noi stiamo comunque cercando soluzioni reali, ovvero tali che

$$F(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, t)^* \quad (3.1.86)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, t)^* &= \int d^3k A(\vec{k})^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \Omega t)} + \int d^3k B(\vec{k})^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \Omega t)} = \\ &= \int d^3k A(-\vec{k})^* e^{-i(-\vec{k}\cdot\vec{x} - \Omega t)} + \int d^3k B(-\vec{k})^* e^{-i(-\vec{k}\cdot\vec{x} + \Omega t)} = \\ &= \int d^3k A(-\vec{k})^* e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \Omega t)} + \int d^3k B(-\vec{k})^* e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \Omega t)} \end{aligned} \quad (3.1.87)$$

e dunque la realtà della  $F$  impone che

$$A(\vec{k}) = B(-\vec{k})^*; \quad B(\vec{k}) = A(-\vec{k})^* \quad (3.1.88)$$

e dunque, sostituendo, abbiamo infine che

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, t) &= \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)} + \int d^3k B(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\Omega t)} = \\ &= \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)} + \int d^3k A(-\vec{k})^* e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\Omega t)} = \\ &= \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)} + \int d^3k A(\vec{k})^* e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{x}+\Omega t)} \end{aligned} \quad (3.1.89)$$

In conclusione, la più generale soluzione reale dell'equazione delle onde in tre dimensioni può sempre esprimersi come la somma delle parti reali di onde piane  $A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)}$ , dove  $A(\vec{k})$  è, in generale, una quantità complessa che contiene la fase iniziale dell'onda, cioè la fase per  $\vec{x} = 0$  e  $t = 0$ . Questo risultato consente, in tutti i casi di equazioni *lineari*, di affrontare il problema trattandolo in termini di onde piane e poi generalizzando al caso generico attraverso il principio di sovrapposizione.

Nel caso del suono, abbiamo già visto che la soluzione è univocamente determinata quando si conosca la funzione potenziale  $\phi(\vec{x}, t)$ .

Per una generica componente piana descritta dal potenziale<sup>5</sup>

$\phi(\vec{x}, t) = \phi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)}$  avremo dunque

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi = i\vec{k}\phi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)} = i\vec{k}\phi(\vec{x}, t) \quad (3.1.90)$$

$$p_s = -\rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = i\Omega\rho_0\phi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega t)} = i\Omega\rho_0\phi(\vec{x}, t) \quad (3.1.91)$$

$$\rho_s = \frac{1}{\gamma^2} p_s = i\Omega\rho_0 \frac{1}{\gamma^2} \phi(\vec{x}, t) \quad (3.1.92)$$

Osserviamo, in particolare che, per ogni componente piana, l'onda di velocità è longitudinale, ovvero il vettore  $\vec{v}$  oscilla parallelamente alla direzione  $\vec{k}$  di propagazione della stessa.

### 3.1.3 Le onde sferiche

Anche se ogni soluzione dell'equazione delle onde può sempre essere vista come combinazione lineare di onde piane, questa rappresentazione può, talvolta, essere poco adatta e complicare inutilmente il problema dal punto di vista formale.

Immaginiamo infatti di avere una sorgente sonora perfettamente isotropa.

<sup>5</sup>Si ricordi che la grandezza fisica è, in realtà, descritta dalla parte reale della funzione complessa indicata ...

Ci aspettiamo che, almeno quando siamo abbastanza distanti dalla sorgente in modo da poter trascurare le dimensioni della stessa, la pressione  $p_s$  e dunque il potenziale  $\phi$  siano funzioni che dipendono dalla posizione solo attraverso la distanza  $r$  fra la sorgente e il punto dove ci troviamo, ovvero, se abbiamo messo la sorgente nell'origine del sistema di riferimento, ci aspettiamo che

$$\phi = \phi(r, t) \quad (3.1.93)$$

ovvero che sia una funzione sfericamente simmetrica.

D'altronde, per una funzione radiale  $f(r)$ , risulta in generale che

$$\nabla^2 f(r) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) \quad (3.1.94)$$

per cui l'equazione delle onde in simmetria sferica diventa

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) - \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.95)$$

ovvero, moltiplicando per  $r$ , otteniamo che la funzione  $r\phi$  soddisfa l'equazione delle onde unidimensionale, e dunque abbiamo

$$r\phi = F(r - \mathcal{V}t) + G(r + \mathcal{V}t) \quad \Rightarrow \quad \phi(r, t) = \frac{1}{r} [F(r - \mathcal{V}t) + G(r + \mathcal{V}t)] \quad (3.1.96)$$

Per quanto abbiamo già visto, la funzione  $F$  descrive onde sonore che si allontanano dalla sorgente mentre la funzione  $G$  descrive onde sonore che convergono alla sorgente. Nel caso di una soluzione monocromatica divergente, abbiamo

$$\phi(r, t) = \frac{A}{R} e^{i(kr - \omega t)} \quad \text{con} \quad \omega \equiv k\mathcal{V} \quad (3.1.97)$$

Si osservi che, per questo tipo di onde,  $k$  non è un vettore, bensì una grandezza scalare (proviene dalla risoluzione dell'equazione delle onde unidimensionale): questo significa che le superfici di fase costante sono adesso superfici per cui  $r$  è costante, ovvero superfici sferiche concentriche con la sorgente (nel caso delle onde piane, le superfici di fase costante erano invece piani ortogonali al vettore d'onda ...). Inoltre, data la struttura della soluzione, evidentemente l'ampiezza decresce proporzionalmente a  $1/r$  e il campo di velocità è radiale. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \phi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(r, t) &= \vec{\nabla} \phi = \vec{n} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \\ &= A \frac{ikr - 1}{r^2} e^{i(kr - \omega t)} \vec{n} \end{aligned} \quad (3.1.98)$$

dove  $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$  è il versore che, dalla sorgente, punta alla posizione dove vogliamo conoscere le caratteristiche dell'onda sonora che, come abbiamo già osservato,

è longitudinale.

Supponiamo ora di essere a grande distanza dalla sorgente, e sia  $\vec{D}$  il vettore che individua la posizione  $\vec{P}$  in cui ci troviamo, relativamente alla sorgente. Supponiamo di voler studiare l'onda sonora in un intorno del punto  $\vec{P}$ , per distanze piccole rispetto a  $D \equiv |\vec{D}|$ .

Vogliamo dunque conoscere il campo  $\phi$  nei punti  $\vec{D} + \vec{x}$  con  $|\vec{x}| \ll D$ . Partiamo dall'espressione di cui sopra, cioè

$$\phi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (3.1.99)$$

Chiaramente, nella zona a cui siamo interessati,  $r \approx D$ , per cui possiamo supporre che l'ampiezza dell'onda resti sostanzialmente costante e pari ad  $A/D$ .

Vediamo cosa succede alla fase.

Indichiamo con  $\vec{n} = \frac{\vec{D}}{D}$  il versore che dalla sorgente punta alla posizione  $\vec{P}$ : si ha

$$r^2 = |\vec{D} + \vec{x}|^2 = D^2 \left| \vec{n} + \frac{\vec{x}}{D} \right|^2 = D^2 \left[ 1 + 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{D} + \frac{|\vec{x}|^2}{D^2} \right] \quad (3.1.100)$$

e dunque, ricordando che  $\frac{|\vec{x}|}{D} \ll 1$ , sviluppando al primo ordine<sup>6</sup> in questa quantità, si ha

$$r \approx D \left[ 1 + \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{D} \right] \Rightarrow kr \approx kD + k\vec{n} \cdot \vec{x} = \alpha + k\vec{n} \cdot \vec{x} \quad (3.1.101)$$

dove abbiamo posto  $\alpha \equiv kD$ . Nell'intorno del punto  $\vec{P}$  che abbiamo definito attraverso la condizione  $\frac{|\vec{x}|}{D} \ll 1$  risulta quindi che

$$\phi(\vec{x}, t) \approx \frac{A}{D} e^{i(\alpha + k\vec{n} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.1.102)$$

che è l'equazione di un'onda piana !

Nessuna meraviglia, però. Questo significa semplicemente che, molto lontano dalla sorgente, localmente, l'onda sferica si comporta come se fosse piana, con direzione di propagazione uguale a quella che va dalla sorgente al punto considerato.

---

<sup>6</sup>Si osservi che stiamo approssimando in modo diverso il valore della distanza  $r$ : al denominatore di  $A/r$ , abbiamo approssimato  $r$  direttamente con  $D$ , mentre nell'espressione della fase abbiamo tenuto anche il termine  $\vec{n} \cdot \vec{x}$ . La ragione è che, nel termine di fase, non ha alcun senso osservare che il termine  $kD$  è molto grande rispetto a  $k\vec{n} \cdot \vec{x}$ , perchè la fase è intrinsecamente definita modulo  $2\pi$ , per cui di  $kD$  importerà solo la parte eccedente il multiplo intero di  $2\pi$  più prossimo a  $kD$  stesso.

### 3.1.4 Riflessione e rifrazione di un'onda sonora

Supponiamo ora di avere due mezzi fluidi, disposti uno sopra l'altro.

Quello superiore abbia densità  $\rho$  mentre quello inferiore abbia densità  $\rho'$  e i due mezzi siano separati fra loro dal piano  $z = 0$ . Immaginiamo che nel mezzo superiore il suono si propaghi con velocità  $\mathcal{V}$  mentre in quello inferiore abbia velocità  $\mathcal{V}'$ . Supponiamo che nel mezzo superiore si propaghi un'onda piana e orientiamo gli assi in modo che sia  $\vec{k} \equiv (k_x, k_y, k_z) = k(0, \sin \theta, -\cos \theta)$  il suo vettore d'onda.

Visto che ogni grandezza relativa alla propagazione sonora è riconducibile al potenziale, assumeremo che questo abbia ampiezza  $A$ , ovvero che risulti

$$\phi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \Omega t)} \quad \text{dove} \quad \Omega \equiv k\mathcal{V} \quad (3.1.103)$$

Alla superficie di separazione fra i due mezzi

- la pressione dovrà essere una funzione continua;
- la componente della velocità ortogonale alla superficie del fluido sarà anch'essa una funzione continua.

Però nel mezzo inferiore la velocità è differente, quindi, un'onda piana che si propaghi in quel mezzo sarà caratterizzata, in generale, da un potenziale

$$\phi'(\vec{x}, t) = A' e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \Omega' t)} \quad \text{dove} \quad \Omega' \equiv k'\mathcal{V}' \quad (3.1.104)$$

Consideriamo, alla superficie di separazione, la pressione sonora: si ha

$$p_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.1.105)$$

e dunque avremo (ricordiamo che le grandezze fisiche sono le parti reali ...)

$$p_s(x, y, 0, t) = i\Omega \rho A e^{i(k_y y - \Omega t)} \quad (3.1.106)$$

$$p'_s(x, y, 0, t) = i\Omega' \rho' A' e^{i(k'_x x + k'_y y - \Omega' t)} \quad (3.1.107)$$

affinchè queste possano essere uguali a ogni tempo, per ogni  $x$  e  $y$ , deve essere intanto che (la discontinuità non dipende nè dal tempo, nè da  $x, y$  ma solo da  $z$ , per cui solo  $k_z$  sarà coinvolto)

$$\Omega = \Omega'; \quad k_x = k'_x; \quad k_y = k'_y \quad (3.1.108)$$

e quindi deve essere

$$\rho A = \rho' A' \quad (3.1.109)$$

$$k_y = k'_y \Rightarrow k \sin \theta = k' \sin \theta' \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{k'}{k} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} \quad (3.1.110)$$

Purtroppo questo risultato *non* garantisce, in generale, che la componente della velocità ortogonale al piano sia continua, infatti, poiché

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad (3.1.111)$$

abbiamo

$$v_{\perp} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (3.1.112)$$

ovvero

$$ik_z A e^{i(k_y y - \Omega t)} = ik'_z A' e^{i(k'_y y - \Omega' t)} \quad (3.1.113)$$

e, per quanto già concluso sopra, ovvero che  $\rho A = \rho' A'$  e  $\Omega = \Omega'$ , affinché  $v_{\perp}$  possa essere continua alla superficie di separazione occorre che

$$k_z \rho' = k'_z \rho \Rightarrow \rho' k \cos \theta = \rho k' \cos \theta' \Rightarrow \rho \tan \theta = \rho' \tan \theta' \quad (3.1.114)$$

e questa relazione può, eventualmente, realizzarsi solo per un particolare angolo di incidenza, ma certamente non per tutti ...

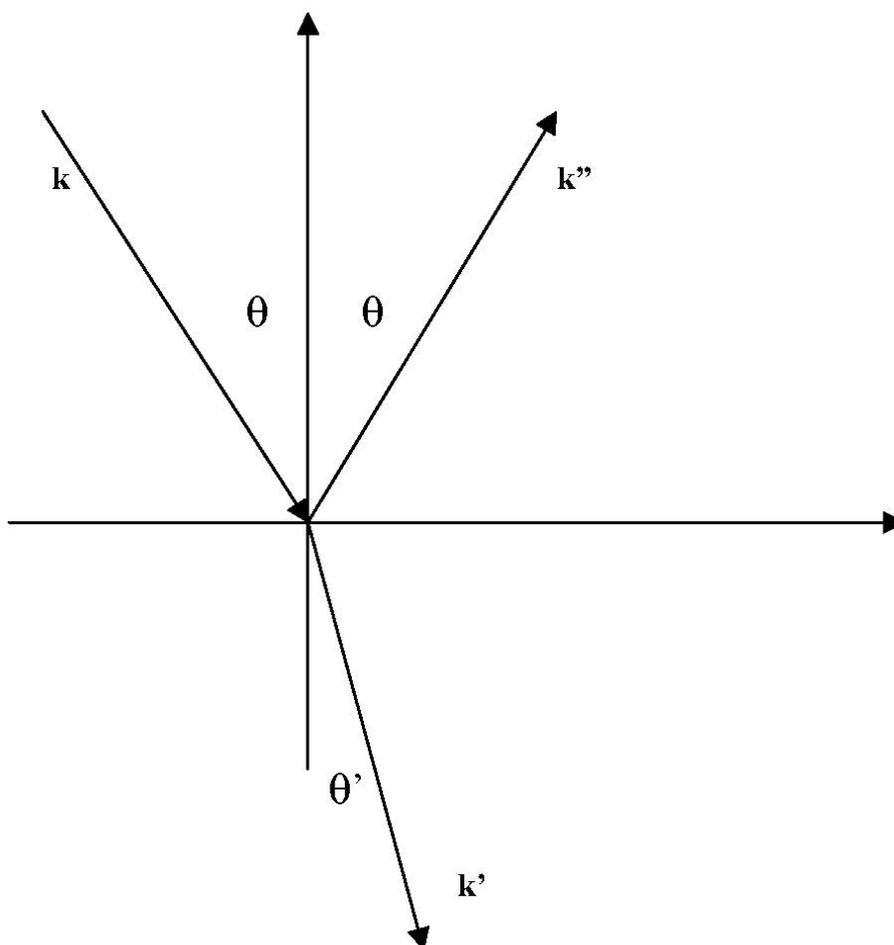


Figura 3.1: Riflessione e rifrazione

La ragione è che, a causa della discontinuità, in realtà il mezzo superiore, oltre all'onda incidente, è sede anche di un'onda *riflessa*, che assumeremo descritta dal potenziale seguente

$$\phi''(\vec{x}, t) = A'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \Omega'' t)} \quad (3.1.115)$$

La condizione di continuità della pressione per  $z = 0$  diventa allora

$$i\Omega\rho A e^{i(k_y y - \Omega t)} + i\Omega''\rho A'' e^{i(k'_x x + k'_y y - \Omega'' t)} = i\Omega'\rho' A' e^{i(k'_x x + k'_y y - \Omega' t)} \quad (3.1.116)$$

e questo implica che

$$\Omega = \Omega' = \Omega''; \quad k_x = k'_x = k''_x = 0; \quad k_y = k'_y = k''_y \quad (3.1.117)$$

ovvero che il fattore di fase sia continuo alla discontinuità.

Da questo si deduce che

- se l'onda incidente è monocromatica di pulsazione  $\Omega$ , anche l'onda riflessa e quella rifratta lo sono, e la frequenza è la stessa per tutte e tre le onde;
- se  $k_x = 0$ , ovvero se  $\vec{k}$  giace nel piano  $yz$  (come abbiamo assunto ...), allora anche  $\vec{k}'$  e  $\vec{k}''$  giacciono sullo stesso piano, ovvero i tre vettori d'onda sono coplanari;
- $k_y = k'_y$  per cui, siccome le velocità dell'onda incidente e riflessa sono uguali, come pure le frequenze e quindi i vettori d'onda  $k$  e  $k''$ , ne segue che l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione, e, necessariamente  $k''_z = -k_z$ , ovvero

$$\begin{aligned} \vec{k} &\equiv (k_x, k_y, k_z) = (0, k \sin \theta, -k \cos \theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{k}'' = (0, k \sin \theta, k \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.1.118)$$

- $k_y = k'_y$  esprime la legge della rifrazione (legge di Snell), che, come abbiamo visto sopra, implica che

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{k'}{k} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} \equiv n \quad (3.1.119)$$

dove  $n$  è detto *indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo*.

Tornando adesso alla condizione di continuità della pressione, dividendo per il fattore di fase (che abbiamo visto essere comune ai tre addendi alla superficie di separazione) risulta

$$\rho A + \rho A'' = \rho' A' \quad \Rightarrow \quad \rho(A + A'') = \rho' A' \quad (3.1.120)$$

Per quanto riguarda poi la componente della velocità del fluido ortogonale alla superficie di separazione fra i due mezzi, abbiamo che (essendo di nuovo uguali i tre fattori di fase alla superficie) deve essere

$$k_z A + k_z'' A'' = k_z' A' \quad (3.1.121)$$

Ma abbiamo già visto che, dovendo l'onda riflessa propagarsi con vettore d'onda diverso da quello dell'onda incidente (altrimenti sarebbero la stessa onda!), essendo  $k'' = k$  e coincidendo le componenti  $x$  e  $y$ , non può essere che

$$k_z' = -k_z \quad (3.1.122)$$

per cui, usando questa relazione, risulta

$$k_z A - k_z A'' = k_z' A' \quad (3.1.123)$$

Dunque le equazioni da soddisfare sono

$$k_z(A - A'') = k_z' A' \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\mathcal{V}} (A - A'') = \frac{\cos \theta'}{\mathcal{V}'} A' \quad (3.1.124)$$

$$\rho(A + A'') = \rho' A' \quad (3.1.125)$$

ovvero, sostituendo la seconda equazione nella prima e ricordando la legge della rifrazione, abbiamo

$$k_z(A - A'') = k_z'(A + A'') \frac{\rho}{\rho'} \Rightarrow (A - A'') \rho' \tan \theta' = (A + A'') \rho \tan \theta \quad (3.1.126)$$

e cioè

$$A'' = A \frac{\rho' \tan \theta' - \rho \tan \theta}{\rho' \tan \theta' + \rho \tan \theta} \quad (3.1.127)$$

$$A' = (A + A'') \frac{\rho}{\rho'} = 2A \frac{\rho \tan \theta'}{\rho' \tan \theta' + \rho \tan \theta} \quad (3.1.128)$$

Si noti che se  $A$  è reale, anche  $A'$  e  $A''$  lo sono: questo significa che lo sfasamento relativo fra le diverse onde o è nullo, come fra  $A$  e  $A'$  che hanno lo stesso segno, oppure può essere di  $\pi$ , come fra  $A$  e  $A''$  se  $A''$  ha segno opposto ad  $A$ .

Osserviamo ancora che non ci sarà onda riflessa se  $\rho' \tan \theta' = \rho \tan \theta$ , nel qual caso l'ampiezza rifratta vale  $A' = A \frac{\rho}{\rho'}$  e questo conferma quanto avevamo già trovato, prima di introdurre l'onda riflessa.

La condizione di *assenza* di onda riflessa può essere anche tradotta, con un po' di algebra, nella condizione seguente

$$\begin{aligned} \rho' \tan \theta' = \rho \tan \theta &\Rightarrow \rho' \frac{\sin \theta'}{\cos \theta'} = \rho \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \Rightarrow \rho' \sin \theta' \cos \theta &= \rho \sin \theta \cos \theta' \Rightarrow \rho' \cos \theta = \rho n \cos \theta' \end{aligned} \quad (3.1.129)$$

dove  $n = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}$  è l'indice di rifrazione relativo fra i due mezzi.

### 3.1.5 Onde evanescenti e riflessione totale

Abbiamo visto che un'onda piana

$$\Pi(\vec{x}, t) = C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.1.130)$$

è soluzione dell'equazione delle onde con velocità di fase  $\mathcal{V}$  tale che  $|\vec{k}|^2 \equiv k^2 = \frac{\omega^2}{\mathcal{V}^2}$  per cui, nel caso in cui, per esempio, il vettore d'onda giaccia nel piano  $yz$ , abbiamo potuto scrivere

$$\vec{k} = (0, k \cos \theta, k \sin \theta) \quad (3.1.131)$$

Esiste anche un'altra possibilità, ovvero che il vettore d'onda, pur soddisfacendo l'equazione  $|\vec{k}|^2 \equiv k^2 = \frac{\omega^2}{\mathcal{V}^2}$ , sia complesso!

Consideriamo, per esempio, il caso in cui<sup>7</sup>

$$\vec{k} = (0, k \cosh \tau, i k \sinh \tau) \quad (3.1.134)$$

Siccome vale l'identità  $\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1$ , chiaramente la condizione  $|\vec{k}|^2 = k^2$  è soddisfatta: vediamo che genere di soluzione dell'equazione delle onde è questa. Risulta

$$A(\vec{x}, t) = A_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = A_0 e^{-kz \sinh \tau} e^{i(ky \cosh \tau - \omega t)} \quad (3.1.135)$$

che mostra come l'andamento oscillante sia ormai solo nel tempo e sulla coordinata  $y$ , mentre nella coordinata  $z$  l'andamento è esponenziale.

Per ragioni fisiche, questo tipo di onde non possono esistere in tutto lo spazio, perché diventerebbero di ampiezza arbitrariamente grande per  $z \rightarrow -\infty$ . Possono però esistere nel semispazio  $z > 0$ , dove, invece, sono di ampiezza esponenzialmente decrescente....

Questo tipo di onde si realizza allorchè avviene il fenomeno della *riflessione totale*: vediamo in che cosa consiste.

Supponiamo di avere i soliti due mezzi, separati dalla superficie di discontinuità descritta dal piano di equazione  $z = 0$  e assumiamo che nel mezzo superiore sia presente un'onda con vettore d'onda  $\vec{k} = (0, k \sin \theta, -k \cos \theta)$  e frequenza angolare  $\Omega$ . Supponiamo che il mezzo inferiore sia caratterizzato da una velocità di propagazione del suono  $\mathcal{V}' > \mathcal{V}$ , dove  $\mathcal{V}$  è la velocità del suono nel mezzo superiore.

<sup>7</sup>Ricordiamo la definizione del seno e coseno iperbolici.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3.1.132)$$

Vale l'identità

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (3.1.133)$$

Abbiamo visto che la legge della rifrazione prevede che

$$k_y = k'_y \Rightarrow k \sin \theta \equiv \frac{\Omega}{\mathcal{V}} \sin \theta = k' \sin \theta' \equiv \frac{\Omega}{\mathcal{V}'} \sin \theta' \quad (3.1.136)$$

ma non è sempre possibile trovare un angolo di rifrazione  $\theta'$  per cui risulti  $k_y = (\Omega/\mathcal{V}') \sin \theta'$  perchè questo implica che

$$\sin \theta' = \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} \sin \theta \quad (3.1.137)$$

ed essendo  $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} > 1$  può accadere che la relazione di cui sopra implichi  $\sin \theta' > 1$ , che, ovviamente, non è possibile.

In questo caso il vettore d'onda *rifratto* è complesso e si ha

$$\vec{k}' = (0, k' \cosh \tau, i k' \sinh \tau) \quad (3.1.138)$$

con

$$k' = \frac{\Omega}{\mathcal{V}'} \quad e \quad k'_y = k' \cosh \tau = k_y = k \sin \theta \quad (3.1.139)$$

secondo quanto richiede la legge della rifrazione.

La condizione di continuità sulla pressione non cambia rispetto al caso normale e si ha

$$\rho(A + A'') = \rho' A' \Rightarrow A' = \frac{\rho}{\rho'}(A + A'') \quad (3.1.140)$$

mentre la condizione sulla componente ortogonale della velocità fornisce adesso

$$k_z(A - A'') = k'_z A' \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\mathcal{V}}(A - A'') = i \frac{\sinh \tau}{\mathcal{V}'} A' \quad (3.1.141)$$

La legge della rifrazione definisce  $\cosh \tau = \frac{k}{k'} \sin \theta = \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} \sin \theta$  e quindi permette di definire anche  $\sinh \tau = \sqrt{\cosh^2 \tau - 1}$ .

Se poniamo allora, per semplicità

$$a \equiv \frac{\cos \theta}{\mathcal{V}}; \quad b \equiv \frac{\sinh \tau}{\mathcal{V}'} \quad (3.1.142)$$

l'equazione sulla continuità della componente normale della velocità diventa

$$a(A - A'') = i b A' \quad (3.1.143)$$

che, insieme alla equazione  $A' = \frac{\rho}{\rho'}(A + A'')$ , consente di concludere che

$$A'' = A \frac{a \rho' - i b \rho}{a \rho' + i b \rho} \quad (3.1.144)$$

$$A' = A \frac{2a \rho}{a \rho' + i b \rho} \quad (3.1.145)$$

Si noti che  $A''$  e  $A$  hanno lo stesso modulo poiché  $\frac{a\rho' - ib\rho}{a\rho' + ib\rho}$  ha modulo 1: questo significa che l'onda incidente e quella riflessa hanno la stessa ampiezza, anche se presentano uno sfasamento relativo.

L'onda rifratta è *evanescente*: essa è sfasata rispetto all'onda incidente e la sua ampiezza decresce esponenzialmente nel secondo mezzo, con distanza caratteristica pari a  $\Lambda = \frac{\mathcal{V}'}{\Omega \sinh \tau}$ .

### 3.1.6 Energia associata all'onda sonora

Abbiamo visto che, per le onde sonore, vale l'equazione

$$p_s + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.1.146)$$

Prendendone il gradiente, abbiamo quindi che

$$\vec{\nabla} \left( p_s + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.1.147)$$

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione precedente per  $\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \phi$ : otteniamo

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( p_s + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (3.1.148)$$

ovvero, ricordando che abbiamo assunto che la quantità  $\rho_0$  sia indipendente sia dalle coordinate spaziali che da quella temporale e che  $\vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ , abbiamo

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p_s + \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p_s + \rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p_s + \frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} \quad (3.1.149)$$

ma

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p_s = \text{div}(p_s \vec{v}) - p_s \text{div}(\vec{v}) \quad (3.1.150)$$

d'altronde abbiamo visto che

$$\rho_0 \text{div}(\vec{v}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (3.1.151)$$

Sostituendo nella (3.1.149) abbiamo allora che

$$0 = \text{div}(p_s \vec{v}) + p_s \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} \quad (3.1.152)$$

ma

$$p_s = \mathcal{V}^2 \rho_s \Rightarrow p_s \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \mathcal{V}^2 \rho_s \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (p_s \rho_s)}{\partial t} \quad (3.1.153)$$

e dunque

$$0 = \text{div}(p_s \vec{v}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{2} \frac{\partial (p_s \rho_s)}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} \quad (3.1.154)$$

ovvero

$$\operatorname{div}(p_s \vec{v}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_s \rho_s}{\rho_0} + \rho_0 v^2 \right) = 0 \quad (3.1.155)$$

Se definiamo allora<sup>8</sup>

$$\vec{q} \equiv p_s \vec{v} \quad (3.1.156)$$

$$u \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{p_s \rho_s}{\rho_0} + \rho_0 v^2 \right) \quad (3.1.157)$$

ecco che la (3.1.155) appare come una tipica equazione di conservazione la quale afferma che il flusso uscente attraverso una superficie chiusa del campo vettoriale  $\vec{q}$  è uguale e opposto alla variazione nel tempo dell'integrale della densità  $u$ , fatto nel volume interno alla superficie scelta.

Non è difficile rendersi conto che si sta parlando proprio della conservazione dell'energia; infatti nel termine  $\frac{1}{2} \rho_0 v^2$  si riconosce immediatamente la densità di energia cinetica, mentre il termine  $\frac{p_s \rho_s}{2\rho_0}$  descrive la densità di energia di pressione. Quanto al vettore  $\vec{q} = p_s \vec{v}$ , esso fornisce la corrente di energia sonora, ovvero ne descrive il flusso. Usualmente  $\vec{q}$  viene chiamato *densità di flusso dell'energia sonora* e si misura in  $W/cm^2$ .

Siccome l'orecchio umano ha una risposta sostanzialmente logaritmica, un'altra unità di misura più fisiologica è il  $dB$  (decibel), definito a partire dall'intensità sonora  $I \equiv | \langle \vec{q} \rangle |$  nel modo che segue

$$10 \operatorname{Log}(I/I_0) \quad (3.1.158)$$

dove  $I_0$  è, per definizione, l'intensità sonora di  $10^{-12} W/cm^2$  e rappresenta, in aria e in condizioni normali di pressione e temperatura, il limite di udibilità dell'orecchio umano alla frequenza di  $1 kHz$  e a cui corrisponde una pressione sonora di  $2 \times 10^{-5}$  Pa.

Esprimiamo adesso la densità di energia  $u$  e la densità di flusso di energia sonora  $\vec{q}$  in termini del potenziale  $\phi$ . Si ha

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( \frac{p_s \rho_s}{\rho_0} + \rho_0 v^2 \right) = \frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{p_s^2}{\rho_0^2 \mathcal{V}^2} + v^2 \right] = \frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{1}{\mathcal{V}^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \right] = \\ &= \frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{1}{\mathcal{V}^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + |\vec{\nabla} \phi|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1.159)$$

$$\vec{q} = p_s \vec{v} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{\nabla} \phi \quad (3.1.160)$$

Nel caso di una generica onda piana, il potenziale<sup>9</sup> è dato da

$$\phi = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \Rightarrow \phi = |A| \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha) \text{ se } A = |A| e^{i\alpha} \quad (3.1.161)$$

<sup>8</sup>Cfr. anche L. Landau, E. Lifchitz: Mécanique des fluides, ed. Mir 1971, pag 314

<sup>9</sup>Ricordiamo che le quantità fisiche sono le parti reali delle espressioni complesse

per cui ne segue che, indicando con  $\vec{n} \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$  il versore di propagazione dell'onda, si ha

$$\begin{aligned}\vec{q} &= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \phi = \rho_0 |A|^2 \omega \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha) \vec{k} \\ \Rightarrow \langle \vec{q} \rangle &= \rho_0 \omega \vec{k} |A|^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}} |A|^2 \vec{n}\end{aligned}\quad (3.1.162)$$

Poichè

$$p_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \langle p_s^2 \rangle = \rho_0^2 |A|^2 \omega^2 \frac{1}{2} \quad (3.1.163)$$

possiamo riscrivere la (3.1.162) anche nel modo seguente

$$\langle \vec{q} \rangle = \frac{1}{\rho_0 \mathcal{V}} \langle p_s^2 \rangle \vec{n} \quad (3.1.164)$$

$$\Rightarrow I \equiv |\langle \vec{q} \rangle| = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}} |A|^2 = \frac{1}{\rho_0 \mathcal{V}} \langle p_s^2 \rangle \quad (3.1.165)$$

Per quanto riguarda poi la densità d'energia, si ha

$$\begin{aligned}u &= \frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{1}{\mathcal{V}^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + |\vec{\nabla} \phi|^2 \right] = \\ &= \frac{\rho_0}{2} |A|^2 \left[ \frac{\omega^2}{\mathcal{V}^2} \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha) + |\vec{k}|^2 \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha) \right]\end{aligned}\quad (3.1.166)$$

D'altronde  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{\mathcal{V}}$  per cui, nel caso dell'onda piana accade che i due termini di densità d'energia cinetica e di pressione risultano uguali e dunque, essendo la media del  $\sin^2$  uguale a  $\frac{1}{2}$ , risulta infine

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}^2} |A|^2 \quad (3.1.167)$$

Il confronto fra la (3.1.167) e la (3.1.162) mostra poi che

$$\langle \vec{q} \rangle = \langle u \rangle \mathcal{V} \vec{n} \quad (3.1.168)$$

Applichiamo adesso quanto abbiamo ottenuto riguardo alla densità di flusso dell'energia sonora  $\langle \vec{q} \rangle$  al caso della rifrazione.

Usando la (3.1.162), possiamo scrivere che

- onda incidente

$$\langle \vec{q} \rangle = \frac{1}{2} |A|^2 \rho_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}} \vec{n} \quad (3.1.169)$$

- onda rifratta

$$\langle \vec{q}' \rangle = \frac{1}{2} |A'|^2 \rho'_0 \frac{\omega'^2}{\mathcal{V}'} \vec{n}' \quad (3.1.170)$$

- onda riflessa

$$\langle \vec{q}'' \rangle = \frac{1}{2} |A''|^2 \rho_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}} \vec{n}'' \quad (3.1.171)$$

La conservazione dell'energia richiede che, se prendiamo due superfici piane e parallele disposte una sopra e l'altra sotto il piano di discontinuità e le chiudiamo all'infinito, siccome l'energia nel volume racchiuso è comunque stazionaria, il flusso di energia attraverso le due superfici (orientate secondo la normale uscente dal volume da esse racchiuso...) deve essere mediamente nullo.

Questo significa che, se indichiamo con  $\vec{z}$  il versore dell'asse  $z$ , essendo

$$\vec{n} \cdot \vec{z} = -\cos \theta; \quad \vec{n}'' \cdot \vec{z} = \cos \theta; \quad \vec{n}' \cdot \vec{z} = -\cos \theta' \quad (3.1.172)$$

deve risultare

$$|\langle \vec{q} \rangle| \cos \theta - |\langle \vec{q}'' \rangle| \cos \theta = |\langle \vec{q}' \rangle| \cos \theta' \quad (3.1.173)$$

ovvero, in termini dell'intensità dell'onda incidente  $I \equiv |\langle \vec{q} \rangle|$ , dell'intensità dell'onda riflessa  $I'' \equiv |\langle \vec{q}'' \rangle|$  e dell'intensità dell'onda rifratta  $I' \equiv |\langle \vec{q}' \rangle|$ , possiamo scrivere che

$$I \cos \theta - I'' \cos \theta = I' \cos \theta' \quad (3.1.174)$$

e dunque

$$(I - I'') \cos \theta = I' \cos \theta' \quad (3.1.175)$$

ovvero

$$\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}} (|A|^2 - |A''|^2) \cos \theta = \frac{1}{2} \rho'_0 \frac{\omega^2}{\mathcal{V}'} |A'|^2 \cos \theta' \quad (3.1.176)$$

da cui

$$\frac{\rho_0}{\mathcal{V}} |A|^2 (1 - R) \cos \theta = \frac{\rho'_0}{\mathcal{V}'} |A'|^2 \cos \theta' \quad (3.1.177)$$

dove abbiamo introdotto il coefficiente di riflessione  $R$  nel modo consueto

$$R \equiv \left( \frac{|A''|}{|A|} \right)^2 \quad (3.1.178)$$

che, per la (3.1.127), è dato da

$$R = \left( \frac{\rho'_0 \tan \theta' - \rho_0 \tan \theta}{\rho'_0 \tan \theta' + \rho_0 \tan \theta} \right)^2 \quad (3.1.179)$$

Introducendo ora il coefficiente di trasmissione  $T$  come

$$T = \left( \frac{|A'|}{|A|} \right)^2 \quad (3.1.180)$$

che, per la (3.1.128) è dato da

$$T = \left( \frac{2\rho_0 \tan \theta'}{\rho'_0 \tan \theta' + \rho_0 \tan \theta} \right)^2 \quad (3.1.181)$$

possiamo così riscrivere la (3.1.177) come

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\mathcal{V}} |A|^2 (1 - R) \cos \theta &= \frac{\rho'_0}{\mathcal{V}'} |A|^2 T \cos \theta' \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\rho_0}{\mathcal{V}} (1 - R) \cos \theta &= \frac{\rho'_0}{\mathcal{V}'} T \cos \theta' \end{aligned} \quad (3.1.182)$$

Osserviamo adesso che

$$\begin{aligned} 1 - R &= \frac{(\rho'_0 \tan \theta' + \rho_0 \tan \theta)^2 - (\rho'_0 \tan \theta' - \rho_0 \tan \theta)^2}{(\rho'_0 \tan \theta' + \rho_0 \tan \theta)^2} = \\ &= \frac{4\rho_0 \rho'_0 \tan \theta \tan \theta'}{(\rho'_0 \tan \theta' + \rho_0 \tan \theta)^2} \end{aligned} \quad (3.1.183)$$

da cui, confrontando con la (3.1.181), abbiamo che

$$T = (1 - R) \frac{\rho_0 \tan \theta'}{\rho'_0 \tan \theta} \quad (3.1.184)$$

Sostituendo nella (3.1.182) possiamo dunque affermare che la conservazione dell'energia sonora richiede che

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\mathcal{V}} (1 - R) \cos \theta &= \frac{\rho'_0}{\mathcal{V}'} (1 - R) \frac{\rho_0 \tan \theta'}{\rho'_0 \tan \theta} \cos \theta' \\ \Rightarrow \frac{\rho_0}{\mathcal{V}} \cos \theta \tan \theta &= \frac{\rho_0}{\mathcal{V}'} \tan \theta' \cos \theta' \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\mathcal{V}} = \frac{\sin \theta'}{\mathcal{V}'} \end{aligned} \quad (3.1.185)$$

che è proprio quanto prevede anche la legge di Snell.

Lasciamo come esercizio al lettore di determinare

- cosa accade nel caso della riflessione totale;
- che, nel caso di onda sferica, l'intensità sonora decresce con l'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente;
- che il flusso di energia attraverso superfici chiuse, le quali racchiudano la sorgente, è indipendente dalla loro posizione nello spazio.

### 3.1.7 Interferenza e battimenti

Poniamoci, per semplicità, in una dimensione e supponiamo di avere due onde sonore che si propagano nello stesso verso ma con diversa frequenza:

$$A \cos(kx - \omega t); \quad B \cos(k'x - \omega't + \phi) \quad (3.1.186)$$

Queste due onde<sup>10</sup> danno luogo a un segnale sonoro risultante  $S$  pari alla somma delle due onde, ovvero

$$S(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \cos(k'x - \omega't + \phi) \quad (3.1.187)$$

Assumiamo per concretezza che  $\omega > \omega'$  e poniamo

$$\omega + \omega' \equiv 2\Omega; \quad \omega - \omega' = 2\epsilon > 0 \quad (3.1.188)$$

Fissato comunque un punto di coordinata  $x$ , abbiamo che il segnale sonoro  $S$  in quel punto sarà allora solo funzione del tempo e avremo

$$S(t) = A \cos[(\Omega + \epsilon)t + \alpha] + B \cos[(\Omega - \epsilon)t + \beta] \quad (3.1.189)$$

dove le fasi  $\alpha$  e  $\beta$  tengono conto delle condizioni iniziali e della posizione dove stiamo considerando l'onda sonora risultante. Abbiamo

$$\begin{aligned} S(t) &= \Re \left( A e^{i[(\Omega+\epsilon)t+\alpha]} + B e^{i[(\Omega-\epsilon)t+\beta]} \right) = \\ &= \Re \left( e^{i\Omega t} \left[ A e^{i\epsilon t+i\alpha} + B e^{-i\epsilon t+i\beta} \right] \right) = \\ &= \Re \left( e^{i\Omega t+i\theta} \left[ A e^{i\epsilon t+i\delta} + B e^{-i\epsilon t-i\delta} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.1.190)$$

dove  $\theta$  e  $\delta$  sono definiti in modo che  $\alpha = \theta + \delta$  e  $\beta = \theta - \delta$ .

Occupiamoci del termine entro la parentesi quadra: abbiamo

$$\begin{aligned} &\left[ A e^{i\epsilon t+i\delta} + B e^{-i\epsilon t-i\delta} \right] = \\ &= A \cos(\epsilon t + \delta) + iA \sin(\epsilon t + \delta) + B \cos(\epsilon t + \delta) - iB \sin(\epsilon t + \delta) = \\ &= (A + B) \cos(\epsilon t + \delta) + i(A - B) \sin(\epsilon t + \delta) \end{aligned} \quad (3.1.191)$$

Ammettiamo adesso che le due frequenze  $\omega$  e  $\omega'$  non siano troppo diverse fra loro, ovvero che  $\epsilon/\Omega \ll 1$ . Ne segue che il termine entro parentesi quadra sarà lentamente variabile nel tempo a confronto con il fattore di fase  $e^{i\Omega t}$ .

Poniamo

$$(A + B) \cos(\epsilon t + \delta) + i(A - B) \sin(\epsilon t + \delta) \equiv C(t) e^{i\gamma(t)} \quad (3.1.192)$$

<sup>10</sup>Stiamo assumendo che le ampiezze  $A$  e  $B$  siano quantità reali positive.

dove

$$\begin{aligned} C(t) &= \sqrt{(A+B)^2 \cos^2(\epsilon t + \delta) + (A-B)^2 \sin^2(\epsilon t + \delta)} = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB[\cos^2(\epsilon t + \delta) - \sin^2(\epsilon t + \delta)]} = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\epsilon t + 2\delta)} \end{aligned} \quad (3.1.193)$$

mentre

$$\tan \gamma(t) \equiv \frac{A-B}{A+B} \tan(\epsilon t + \delta) \quad (3.1.194)$$

Risulta così che

$$S(t) = \Re \left( e^{i\Omega t + i\theta} C(t) e^{i\gamma(t)} \right) = C(t) \cos(\Omega t + \theta + \gamma(t)) \quad (3.1.195)$$

L'onda risultante ha quindi un'ampiezza  $C(t)$  che varia fra  $|A-B|$  e  $A+B$  con frequenza  $2\epsilon$ , pari cioè alla differenza delle frequenze angolari delle due onde originarie, e occupa un dominio di frequenze centrato intorno a  $\Omega$ , largo dell'ordine di  $\epsilon$ .

E' il fenomeno dei **battimenti**.

Nel caso particolare in cui  $A = B$ , dal risultato precedente, con un po' di semplice algebra<sup>11</sup> otteniamo

$$S(t) = 2A \cos(\epsilon t + \delta) \cos(\Omega t + \theta) \quad (3.1.196)$$

che mostra in modo evidente l'essenza del fenomeno dei battimenti.

Veniamo adesso al fenomeno dell'interferenza.

Assumiamo che siano date nello spazio tridimensionale due sorgenti sonore che emettono onde sferiche, monocromatiche con la stessa frequenza, una posta nel punto di coordinate  $\vec{S}_1$  e una nel punto di coordinate  $\vec{S}_2$  e che queste sorgenti si trovino a una distanza  $h$  fra loro e molto distanti dal punto di osservazione, di coordinate  $\vec{P}$ . Assumiamo anche che la coordinata  $y$  (vedi figura) sia molto minore della distanza del punto  $\vec{P}$  dalle sorgenti. L'onda sferica emessa dalla sorgente  $\vec{S}_1$  avrà, nel punto  $\vec{P}$ , un'ampiezza

$$\frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \quad (3.1.197)$$

mentre per quella emessa da  $\vec{S}_2$  avremo analogamente<sup>12</sup>

$$\frac{B}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \quad (3.1.198)$$

<sup>11</sup>Se  $A = B$  risulta immediato dalla (3.1.193) che  $C(t) = 2A \cos(\epsilon t + \delta)$ , mentre dalla (3.1.194) che  $\gamma(t) = 0$ .

<sup>12</sup>Stiamo qui assumendo che le due emissioni avvengano anche in fase...

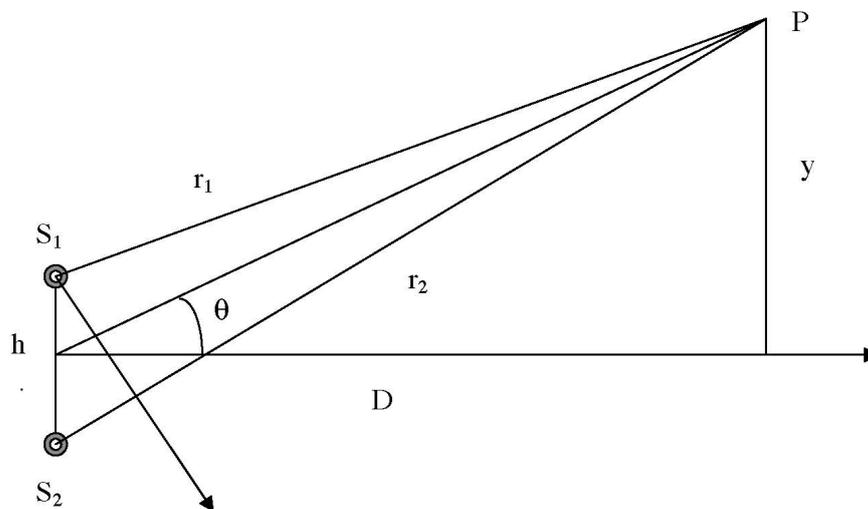


Figura 3.2: Fenomeno dell'interferenza

Conviene adesso introdurre la distanza  $R$  del punto medio fra le due sorgenti dal punto  $\vec{P}$ : abbiamo<sup>13</sup>

$$r_1 = R - \frac{h}{2} \sin \theta; \quad r_2 = R + \frac{h}{2} \sin \theta \quad (3.1.199)$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra la normale al segmento che unisce le due sorgenti e il raggio vettore che va dal punto medio del segmento in questione al punto  $\vec{P}$  che stiamo considerando, che definisce la direzione di propagazione (media) in  $\vec{P}$ . Avendo assunto che  $y \ll R$ , risulta evidentemente che  $\theta \ll 1$ .

Il segnale dovuto alla sovrapposizione delle due onde in  $\vec{P}$  vale

$$S(t) \approx \frac{A}{R} e^{i(kR - \frac{kh}{2} \sin \theta - \omega t)} + \frac{B}{R} e^{i(kR + \frac{kh}{2} \sin \theta - \omega t)} \quad (3.1.200)$$

Si tratta della somma di due vettori di ampiezze diverse che ruotano nel piano complesso alla stessa velocità angolare  $\omega$  e sono sfasati di  $kh \sin \theta$ . Il vettore risultante è un vettore che ruota alla stessa velocità angolare dei due, di ampiezza costante  $C$  tale che

$$C^2 = \left(\frac{A}{R}\right)^2 + \left(\frac{B}{R}\right)^2 + \frac{2AB}{R^2} \cos(kh \sin \theta) \quad (3.1.201)$$

<sup>13</sup>Si ricordi che abbiamo assunto che  $\vec{P}$  sia molto distante dalle sorgenti ( $R \gg h$ ) per cui possiamo trascurare il fatto che le due onde viaggiano in direzioni leggermente diverse e assumere che viaggino entrambe nella direzione individuata dal punto medio del segmento che unisce le due sorgenti e il punto  $\vec{P}$ .

Ma come abbiamo visto, l'intensità  $I$  di un'onda di ampiezza  $A$  è pari a

$$I = | \langle \vec{q} \rangle | = \frac{1}{2} \frac{\rho \omega^2}{\mathcal{V}} |A|^2 \quad (3.1.202)$$

ovvero essa è proporzionale proprio al quadrato dell'ampiezza. Nel nostro caso, questo ci dice che, in funzione di  $\theta$ , avremo massimi dell'intensità sonora quando

$$k h \sin \theta = 2n\pi \quad n \text{ intero qualsiasi} \Rightarrow C = \frac{A+B}{R} \quad (3.1.203)$$

e minimi dell'intensità quando

$$k h \sin \theta = (2n+1)\pi \quad n \text{ intero qualsiasi} \Rightarrow C = \frac{|A-B|}{R} \quad (3.1.204)$$

E' il fenomeno dell'**interferenza**.

Poichè la coordinata  $y$  del punto scelto è legata a  $D$  dalla relazione  $y = D \tan \theta$ , se, come abbiamo assunto,  $\theta \ll 1$  e dunque  $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$ , ricordando che  $k = 2\frac{\pi}{\lambda}$  dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda, si ha, per esempio che i minimi dell'onda si trovano in

$$y = D \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{h} \quad (3.1.205)$$

Le zone di massimo e minimo a una distanza fissata  $D$  hanno simmetria circolare con centro in  $y = 0$ .



## Capitolo 4

# Elettricità

### 4.1 L'elettrostatica

L'elettrostatica è quella parte della Fisica che studia le interazioni fra le *cariche elettriche* ferme.

#### 4.1.1 La carica elettrica

Che cosa sono le cariche elettriche? Certamente ognuno ne avrà già sentito parlare nei corsi di Fisica seguiti alla Scuola secondaria, per cui non staremo a dilungarci sulla descrizione dei fenomeni che hanno dimostrato l'esistenza della carica elettrica, né su quelli che hanno provato la costituzione elettrica della materia che ci circonda.

A tutti, probabilmente, sarà capitato di prendere la *scossa* toccando la portiera di una automobile con la chiave...in ogni caso tutti avranno senz'altro visto un fulmine! Cercheremo piuttosto di arrivare alle leggi dell'elettrostatica mostrandone le basi sperimentali e come da queste si sia giunti poi alla loro sistemazione teorica.

##### Prima osservazione sperimentale (qualitativa)

Esistono due tipi differenti di corpi carichi, infatti i corpi elettricamente carichi possono attrarsi fra di loro oppure respingersi. Si nota comunque che

- se  $A$  respinge  $B$  e  $A$  respinge  $C$ , allora anche  $B$  respinge  $C$  (una specie di proprietà transitiva...);
- se  $A$  respinge  $B$  ma attrae  $C$ , allora anche  $B$  attrae  $C$ ;
- se  $A$  attrae  $B$  e attrae anche  $C$ , allora  $B$  e  $C$  si respingono;
- se  $A$  è carico e lo spezziamo in due parti, queste solitamente si respingono.

Diremo che l'interazione fra corpi carichi è dovuta alla loro *carica elettrica* che è dunque, per definizione, la *sorgente* dei fenomeni elettrici.

I fatti sperimentali sopra descritti si interpretano assumendo che la carica elettrica sia di due tipi diversi e che le cariche dello stesso tipo si respingano, mentre quelle di tipo diverso si attraggano. Tradizionalmente (B. Franklin) si parla di "carica positiva" e "carica negativa" per distinguere fra i due tipi di carica, ma, fino a questo momento, questa deve essere presa solo come una distinzione qualitativa, puramente nominalistica.

Per poter passare dal qualitativo al quantitativo anche per la carica elettrica, come, del resto, per qualunque altra grandezza fisica, occorre stabilire un metodo operativo di misura.

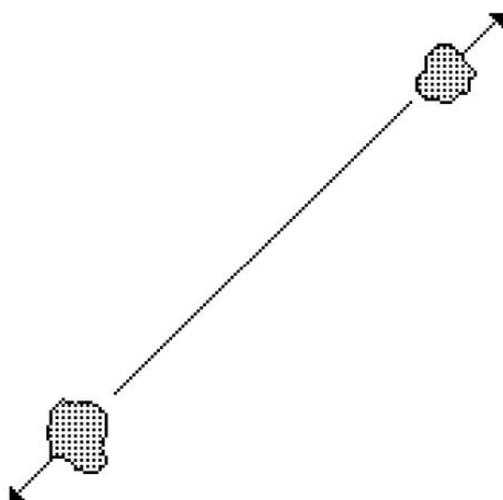
#### 4.1.2 La forza di Coulomb

Abbiamo già detto che fra corpi carichi si esercitano forze meccaniche. Siccome sappiamo come misurare le forze, possiamo cercare di definire operativamente il metodo di misura della carica elettrica attraverso, appunto, una misura di forza. A questo scopo consideriamo quest'altro fatto sperimentale:

##### Seconda osservazione sperimentale (quantitativa)

Se prendiamo due corpi carichi e li poniamo a una distanza molto grande rispetto alle loro dimensioni, la forza (attrattiva o repulsiva) che ciascun corpo esercita sull'altro ( $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$  per il principio di azione e reazione) è tale che

- è diretta secondo la congiungente i due corpi;
- decresce con l'inverso del quadrato della distanza fra i due corpi:  
 $|F| \propto r^{-2}$ .



Vediamo come questa osservazione può consentirci di definire un metodo di misura della carica elettrica. Supponiamo di avere un corpo carico  $X$ , che considereremo come *carica campione*. Se adesso abbiamo vari corpi carichi  $A_1, A_2, A_3, \dots$  possiamo definire la quantità di carica  $C_1, C_2, C_3, \dots$  che tali corpi possiedono in termini dell'intensità della forza con cui essi interagiscono con  $X$  quando sono

posti a una distanza  $D$  da  $X$  prefissata.

Convenzionalmente possiamo poi decidere di dare il segno positivo alla quantità sopra definita se la forza è repulsiva (scegliendo così il segno positivo per il gruppo a cui appartiene anche il campione...) e negativo altrimenti. Ovviamente, secondo questa definizione, il valore numerico delle cariche  $C_1, C_2, C_3...$  dei vari corpi dipende sia dal campione  $X$  che abbiamo scelto come dalla distanza  $D$  a cui, convenzionalmente, abbiamo deciso di operare. Cominciamo con l'osservare che cosa succede cambiando la distanza da  $D$  a  $D'$  (ma sempre in modo che anche  $D'$  sia molto maggiore delle dimensioni dei corpi carichi).

Per la seconda osservazione sperimentale di cui sopra, i nuovi valori delle cariche  $C'_1, C'_2, C'_3...$  saranno semplicemente proporzionali ai vecchi valori secondo la stessa costante di proporzionalità, cioè  $(D/D')^2$ . In particolare, i rapporti fra le cariche misurate secondo le due definizioni operative NON dipenderanno da  $D$  o da  $D'$ .

Questo è un fatto che ci conforta circa la ragionevolezza della definizione introdotta.

E' quanto accade per esempio, quando decidiamo di misurare le lunghezze in metri o in pollici: per due date lunghezze otterremo nei due modi dei valori diversi, però se una lunghezza è doppia dell'altra quando le misuriamo in metri, lo stesso accadrà se le misureremo in pollici !

Comunque, oltre che cambiare  $D$  con  $D'$  possiamo anche decidere di cambiare addirittura il campione, passando da  $X$  a un altro corpo carico  $Y$ . Evidentemente, così facendo, in generale cambieranno anche i valori numerici  $c_1, c_2, c_3...$  delle cariche associate ai corpi  $A_1, A_2, A_3, ...$ : i rapporti saranno preservati anche questa volta oppure no ?

A priori NON possiamo dirlo: è di nuovo l'esperienza che deve rispondere.

#### Terza osservazione sperimentale

L'intensità della forza elettrica con la quale un corpo carico  $A_i$  agisce su un altro corpo carico  $A_j$  è proporzionale alla loro carica elettrica, misurata secondo la definizione operativa data sopra.

Questo garantisce che, cambiando la carica campione, si ottengono valori delle cariche che differiscono dai precedenti semplicemente, di nuovo, solo per un fattore di scala.

Da quanto precede è poi immediato che, per simmetria nello scambio dei due corpi carichi ( $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ )..., la forza con cui due cariche  $Q_1$  e  $Q_2$  si attraggono fra loro a una distanza assegnata (purché molto maggiore delle loro dimensioni...), è proporzionale al prodotto delle due cariche. Combinando questi fatti sperimentali fra di loro, si conclude che, quando la distanza fra le cariche è molto grande rispetto alle loro dimensioni (cariche puntiformi...), la forza elettrica che agisce sulla carica  $Q_1$  a causa della carica  $Q_2$  vale

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{n} \quad \text{Forza di Coulomb} \quad (4.1.1)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore definito dal vettore congiungente le due cariche  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , mentre  $k$  è una costante che dipende dal sistema di unità di misura scelto.

Esiste una ovvia similitudine fra questa legge e quella stabilita da Isaac Newton circa l'attrazione fra le masse. Nel caso di due masse puntiformi  $M_1$  ed  $M_2$ , la legge di gravitazione universale stabilisce che fra di esse si esercita una forza attrattiva pari a

$$\vec{F} = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{n} \quad \text{Forza di Newton} \quad (4.1.2)$$

dove  $G = 6.67259(85) \times 10^{-11} m^3 K g^{-1} s^{-2}$ .

Una importante differenza fra le due leggi è comunque quella per cui la forza fra le masse è sempre attrattiva, mentre quella fra le cariche può anche essere repulsiva, ovvero mentre esistono cariche di due tipi (positive e negative), esistono masse di un solo tipo che si attraggono sempre e comunque.

L'espressione della forza di Coulomb fu verificata sperimentalmente su distanze centimetriche da Charles Augustin Coulomb stesso nel 1785, usando due sferette cariche e una bilancia di torsione. Ma già fin dal 1772, Henry Cavendish ne aveva verificato la dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza, dimostrando altresì che la carica si disponeva sulla superficie esterna dei conduttori: purtroppo il suo lavoro era rimasto praticamente sconosciuto ai suoi contemporanei...

Oggi la legge di Coulomb è stata verificata sperimentalmente da distanze dell'ordine di  $10^{-13} cm$  fino a svariati chilometri.

Torniamo adesso alla questione del sistema di unità di misura che, tra l'altro, mette in evidenza un'altra differenza fra l'espressione della forza di Newton e quella di Coulomb. La legge di gravitazione, avendo a che fare soltanto con grandezze *meccaniche*, come masse, forze, distanze... di cui si conosce, indipendentemente dalla legge di gravitazione, l'unità di misura, determina essa stessa, univocamente, (entro gli errori sperimentali) il valore della costante di gravitazione universale  $G$ .

Nel caso della legge di Coulomb, intervenendo una grandezza non meccanica come la carica elettrica, non possiamo definire la costante  $k$  finchè non si è definita l'unità di misura della carica stessa.

- Sistema cgs es

In questo sistema di unità di misura, detto anche *sistema di Gauss*, dove le grandezze meccaniche hanno come unità, rispettivamente il centimetro, il grammo e il secondo, la costante  $k$  è posta per definizione uguale a 1, per cui la forza di Coulomb si scrive semplicemente come

$$|\vec{F}| = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (4.1.3)$$

Come conseguenza le cariche si misurano in unità *meccaniche*:

$$[Q] = [M L^3 T^{-2}]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.4)$$

In questo sistema di unità di misura la carica dell'elettrone vale

$$e = 4.8032068(15) \times 10^{-10} \text{ esu (electrostatic units)} \quad (4.1.5)$$

- Sistema internazionale SI

In questo sistema di unità di misura, che deriva dal vecchio sistema *MKS*, dove le grandezze meccaniche avevano come unità il metro, il chilogrammo e il secondo, si è ridefinito il metro in modo che la velocità della luce nel vuoto ( $c$ ) valga esattamente

$$c = 299,792,458 \text{ m/s} \quad (4.1.6)$$

L'unità di carica elettrica è il Coulomb ( $C$ ) e, per ragioni pratiche, esso è definito attraverso le interazioni meccaniche delle cariche in moto e non di quelle ferme. Due fili conduttori di sezione trascurabile, paralleli e infinitamente lunghi, posti in vuoto alla distanza di un metro, quando sono percorsi da una corrente continua di 1 Ampère (pari a 1 Coulomb/sec), si attraggono con una forza di  $2.0 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ .

Nel *SI* la carica dell'elettrone vale

$$e = 1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{ C} \quad (4.1.7)$$

mentre la forza di Coulomb<sup>1</sup> si scrive come

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (4.1.9)$$

dove  $k^{-1} \equiv 4\pi\epsilon_0$  ed  $\epsilon_0$  è detta *costante dielettrica del vuoto* e vale

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \quad (4.1.10)$$

---

<sup>1</sup>Va osservato che a 1 Coulomb, unità di carica del *SI*, corrisponde una quantità di carica molto grande, infatti due cariche (puntiformi) da 1 Coulomb, poste a un metro di distanza, interagiscono, con una forza pari a

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 10^{10} \text{ N} \quad (4.1.8)$$

### 4.1.3 Il Principio di sovrapposizione

La proporzionalità fra carica e forza elettrica che appare dalla legge di Coulomb è un aspetto di una proprietà più generale dell'interazione fra le cariche, che va sotto il nome di *principio di sovrapposizione*.

Esso, di nuovo, trae la sua origine da un fatto sperimentale.

#### Quarta osservazione sperimentale

Se prendiamo tre corpi carichi  $A$ ,  $B$  e  $C$ , osserviamo che, entro gli errori di misura, la forza su  $C$  a causa dei corpi  $A$  e  $B$  è pari alla somma vettoriale delle forze esercitate su  $C$  separatamente da  $A$  e da  $B$ , in assenza uno dell'altro.

Si osservi che questa linearità non era, a priori, deducibile dai fatti sperimentali considerati in precedenza. Supponiamo infatti di avere le cariche  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $q$ . Poniamo  $Q_1$  e  $q$  a distanza  $r$  e misuriamo l'intensità della forza di Coulomb agente su  $q$ : avremo

$$|\vec{F}_1| = k \frac{Q_1 q}{4\pi r^2} \quad (4.1.11)$$

Poniamo adesso  $Q_2$  e  $q$  alla medesima distanza  $r$ : misureremo

$$|\vec{F}_2| = k \frac{Q_2 q}{4\pi r^2} \quad (4.1.12)$$

Poniamo  $Q_1$  e  $Q_2$  insieme a distanza  $r$  dalla carica  $q$  (stiamo sempre assumendo che  $r$  sia molto maggiore delle dimensioni delle cariche in esame...). Possiamo già sapere quanto misureremo di forza sulla carica  $q$ ?

No: le cariche potrebbero esaltare l'effetto una dell'altra oppure produrre effetti di saturazione...

E' un fatto sperimentale che

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \frac{(Q_1 + Q_2) q}{4\pi r^2} \vec{n} \quad (4.1.13)$$

ovvero che la carica elettrica definita attraverso la legge di Coulomb come grandezza algebrica risulti essere una grandezza additiva<sup>2</sup>.

Questo fatto sperimentale viene assunto come base del *principio di sovrapposizione* che assicura che, data una carica in un certo punto, la forza prodotta su di essa da altre cariche disposte nello spazio in posizioni arbitrarie qualsiasi risulta essere la somma vettoriale delle forze che agirebbero sulla carica considerata a causa delle altre cariche, prese singolarmente, nelle posizioni loro assegnate. Ma qual è la differenza fra l'osservazione sperimentale prima menzionata e il Principio di sovrapposizione? Sembrano tanto la stessa cosa...

Però c'è una differenza sostanziale !

<sup>2</sup>. Ecco un buon motivo per distinguere i due tipi di carica elettrica con il segno + e - dell'algebra !

L'osservazione sperimentale, in quanto tale, verifica la validità dell'equazione  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  entro i limiti degli errori sperimentali, ed è "vera" solo entro quei limiti. Il fatto che, migliorando la precisione della misura, non si sia arrivati mai a contraddirla, induce a fare il passo logico di assumere tale eguaglianza "sempre vera", cioè senza limiti. Ecco quindi la nascita del "Principio" !

Il Principio di sovrapposizione ci consente, a partire dalla forza di Coulomb, di scrivere l'espressione della forza elettrica agente fra due cariche comunque estese, poste a distanza qualsiasi l'una dall'altra. Per trattare problemi di cariche estese è opportuno premettere il concetto di *densità di carica*.

La densità di carica  $\rho(\vec{x})$  associata a un qualunque corpo carico è definita in modo che tale densità, moltiplicata per l'elemento di volume infinitesimo centrato intorno al punto  $\vec{x}$ , fornisca la quantità di carica infinitesima che si trova in tale volumetto:

$$dq = \rho(\vec{x}) d^3x \quad (4.1.14)$$

Supponiamo adesso di avere due corpi carichi  $A$  e  $B$  e indichiamo rispettivamente con  $\rho_A$  e  $\rho_B$  le densità di carica relative, rispettivamente, al corpo  $A$  e al corpo  $B$ . Per il principio di sovrapposizione, possiamo valutare la forza

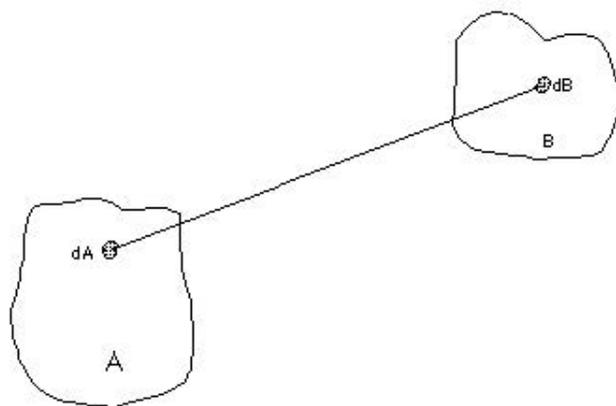


Figura 4.1: *Interazione fra cariche estese*

elettrica che agisce, per esempio, sul corpo  $A$  a causa del corpo  $B$ , immaginando di dividere sia  $A$  che  $B$  in volumetti infinitesimi  $d^3x$  e  $d^3y$  e calcolando quindi la forza come la somma (integrale) delle forze infinitesime che si manifestano fra le cariche infinitesime  $dq_A(\vec{x}) = \rho_A(\vec{x}) d^3x$  e  $dq_B(\vec{y}) = \rho_B(\vec{y}) d^3y$  presenti in tali volumetti infinitesimi, per le quali, avendo esse dimensioni trascurabili rispetto alla loro distanza, varrà certamente la legge di Coulomb.

Avremo dunque

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq_A(\vec{x}) dq_B(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3y \frac{\rho_A(\vec{x}) \rho_B(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} (\vec{x} - \vec{y})\end{aligned}\quad (4.1.15)$$

#### 4.1.4 Il campo elettrico

Un'altra conseguenza importante del principio di sovrapposizione per le forze elettrostatiche è la possibilità che questo ci fornisce di definire il *campo elettrico*. Abbiamo già visto come da tale principio e dall'espressione della forza di Coulomb si giunga a scrivere l'espressione della forza elettrostatica agente fra due cariche comunque estese a qualsivoglia distanza l'una dall'altra.

Supponiamo adesso di avere un corpo  $A$  su cui è distribuita la carica elettrica secondo una densità di carica  $\rho_A(\vec{x})$  e di voler determinare la forza che questo corpo carico esercita su una carica puntiforme  $q$  posta in una certa posizione  $\vec{X}$ .

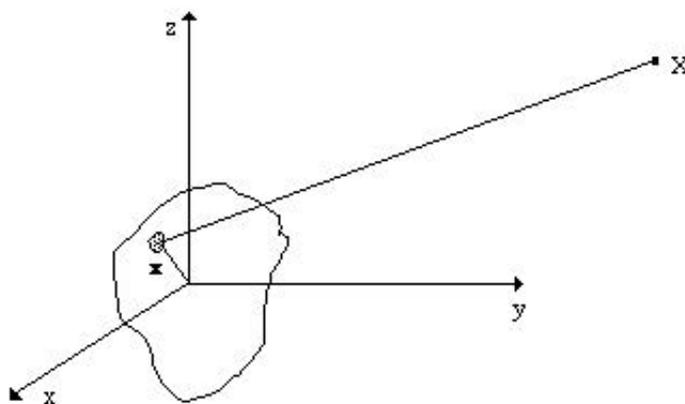


Figura 4.2: *Campo elettrico*

Chiaramente avremo

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \frac{q \rho_A(\vec{x})}{|\vec{X} - \vec{x}|^3} (\vec{X} - \vec{x}) = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \frac{\rho_A(\vec{x})}{|\vec{X} - \vec{x}|^3} (\vec{X} - \vec{x}) \quad (4.1.16)$$

Se cambiamo soltanto il valore della carica puntiforme  $q$  nel punto  $\vec{X}$ , la forza  $\vec{F}$  cambierà semplicemente in proporzione a  $q$ , comunque sia complessa la distribuzione di carica del corpo  $A$ .

Risulta quindi naturale definire la funzione vettoriale

$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \frac{\rho_A(\vec{x})}{|\vec{X} - \vec{x}|^3} (\vec{X} - \vec{x}) = \frac{\vec{F}}{q} \quad (4.1.17)$$

come la grandezza fisica che caratterizza la distribuzione di carica  $\rho_A$  per quanto concerne le azioni elettriche da essa prodotte sulle altre cariche nello spazio.

Questa funzione vettoriale viene indicata con il nome di **campo elettrico** prodotto dalla carica  $A$ : esso è definito in tutto lo spazio ed è univocamente determinato (e, come vedremo, determina...) dalla densità di carica del corpo considerato.

Il valore di questa funzione è tutto ciò che dobbiamo conoscere per poter valutare, senza necessità di sapere alcunché di altro, quale sarà la forza elettrostatica  $\vec{F}$ , determinata dal corpo  $A$  su una qualunque carica  $q$  posta in  $\vec{X}$  (sempre che la presenza di quest'ultima non alteri la distribuzione della carica su  $A$ ...).

Per il principio di sovrapposizione, la forza elettrostatica che la carica  $A$  determinerà su una carica  $B$ , comunque estesa, sarà data da

$$\vec{F}_B = \int d^3y \vec{E}_A(\vec{y}) \rho_B(\vec{y}) \quad (4.1.18)$$

Nel caso particolare di una carica puntiforme  $q$ , che, senza perdita di generalità, possiamo pensare posta nell'origine del sistema di coordinate, il campo elettrico che essa genera è dato semplicemente dalla relazione

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x}|^2} \vec{n}(\vec{x}) \quad (4.1.19)$$

dove il versore  $\vec{n}(\vec{x})$  è definito come

$$\vec{n}(\vec{x}) \equiv \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (4.1.20)$$

#### 4.1.5 La legge di Gauss

Immaginiamo di avere una carica puntiforme  $q$  posta nell'origine del sistema di riferimento e consideriamo una superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $r$ , centrata anch'essa nell'origine. Calcoliamo il flusso del campo elettrico  $\vec{E}(\vec{x})$  attraverso tale superficie.

Dalla definizione di flusso che abbiamo dato si ha

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\sigma(\vec{x}) \frac{\vec{n}(\vec{x})}{|\vec{x}|^2} \cdot \vec{n}(\vec{x}) \quad (4.1.21)$$

Ma in coordinate polari  $(r, \theta, \phi)$  risulta  $d\sigma = r \sin \theta d\phi r d\theta = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  e dunque

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.1.22)$$

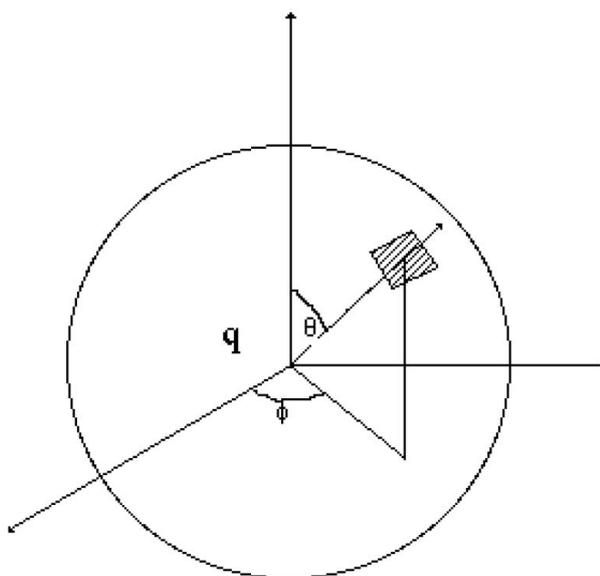


Figura 4.3: *Flusso del campo elettrico di una carica puntiforme attraverso una superficie sferica concentrica con la carica*

Come si vede, il flusso non dipende dal raggio della superficie sferica in quanto la dipendenza dalla distanza come  $r^{-2}$  della forza di Coulomb (proprietà fisica) viene esattamente compensata dal fatto che la superficie della sfera è proporzionale a  $r^2$  (proprietà geometrica). Consideriamo ora una superficie chiusa qualsiasi  $\Sigma$  che contenga la carica puntiforme  $q$  al suo interno. Possiamo sempre trovare una sfera di raggio opportuno, avente centro sulla carica e che sia tutta interna alla superficie data. Osserviamo che qualunque elemento di superficie  $d\Sigma$  sulla superficie assegnata individua univocamente un elemento  $d\sigma$  sulla superficie della sfera scelta, attraverso la proiezione di  $d\Sigma$  rispetto al polo costituito dal punto dove si trova la carica  $q$ .

Ogni "mappatura" della superficie data  $\Sigma$  individua biunivocamente una "mappatura" sulla superficie sferica centrata sulla carica  $q$  e viceversa.

Consideriamo dunque un elemento di superficie orientata  $d\Sigma$ .

Questo elemento di superficie è posto a una distanza  $R$  (variabile, in generale, al variare di  $d\Sigma$  dalla carica puntiforme  $q$ ), e il vettore  $d\vec{\Sigma}$  formerà un angolo  $\alpha$  con la direzione radiale  $\vec{n}$ , che è quella del campo elettrico in  $d\Sigma$ .

L'elemento di flusso  $d\Phi_{d\Sigma}(\vec{E})$ , per definizione vale

$$d\Phi_{d\Sigma}(\vec{E}) = \vec{E}(\vec{R}) \cdot d\vec{\Sigma} = E(R) d\Sigma \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} d\Sigma \cos \alpha \quad (4.1.23)$$

mentre l'elemento di flusso di  $\vec{E}$  attraverso  $d\vec{\sigma}$ , cioè attraverso l'elemento di superficie sferica associata "proiettivamente" a  $d\vec{\Sigma}$ , vale

$$d\Phi_{d\sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\sigma \quad (4.1.24)$$

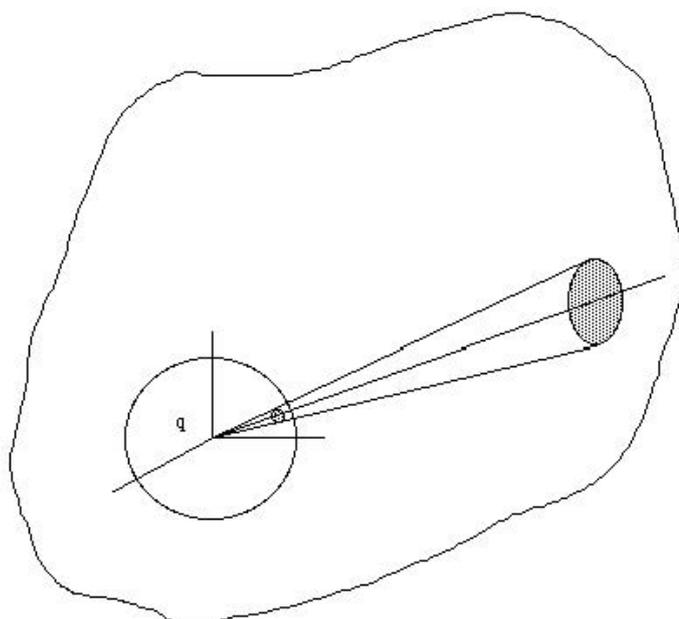


Figura 4.4: *Flusso del campo elettrico di una carica puntiforme attraverso una superficie generica*

D'altronde  $d\Sigma \cos \alpha$  è la proiezione della superficie  $d\Sigma$  sul piano ortogonale al vettore  $\vec{n}$ , e semplici considerazioni geometriche consentono di concludere che

$$d\Sigma \cos \alpha = d\sigma \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (4.1.25)$$

quindi, sostituendo, si ottiene che i due flussi infinitesimi sono uguali.

Integrando allora sulla intera superficie  $\Sigma$ , risulta che il flusso del campo elettrico attraverso di essa è uguale a quello attraverso la superficie sferica centrata sulla carica e dunque, per quanto abbiamo già visto, ne segue che il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme  $q$  attraverso una qualsiasi superficie chiusa  $\Sigma$  che abbia la carica al suo interno vale sempre

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.1.26)$$

Vediamo ora che cosa succede se la carica puntiforme  $q$ , invece, è esterna alla superficie chiusa  $\Sigma$ . Questo significa che  $q$  non si trova nel volume  $V$  individuato da  $\Sigma$ .

Aggiungiamo allora a  $V$  un opportuno volume finito  $V'$ , connesso al volume  $V$ , in modo che  $V + V'$  adesso contenga la carica  $q$ . Il volume  $V'$  sarà limitato dalla superficie  $\Sigma'$ , la quale, per il fatto che  $V$  e  $V'$  sono connessi,

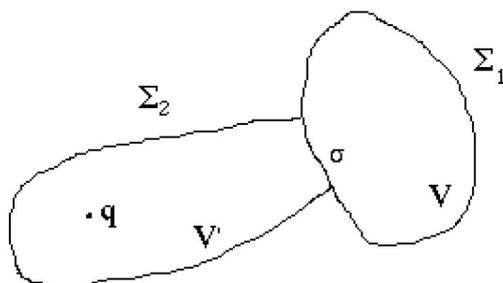


Figura 4.5: Flusso del campo elettrico di una carica puntiforme attraverso una superficie generica

dovrà avere una parte, che chiameremo  $\sigma$ , comune con  $\Sigma$ . Indichiamo con  $\Sigma''$  la superficie totale *esterna* che limita il volume  $V + V'$  e poniamo

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma'' \cap \Sigma; \quad \Sigma_2 = \Sigma'' \cap \Sigma' \quad (4.1.27)$$

Risulta che, se decidiamo per esempio che  $\sigma$  sia orientata secondo la normale uscente dal volume  $V$  (il risultato è indipendente dalla scelta...), è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) + \Phi_{\sigma}(\vec{E}) \quad (4.1.28)$$

$$\Phi_{\Sigma'}(\vec{E}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) - \Phi_{\sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.1.29)$$

ed è altresì

$$\Phi_{\Sigma''}(\vec{E}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) + \Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.1.30)$$

per cui, sottraendo quest'ultima equazione dalla (4.1.29), abbiamo

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) + \Phi_{\sigma}(\vec{E}) = 0 \quad (4.1.31)$$

Possiamo così concludere che il contributo al flusso del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso una superficie chiusa  $\Sigma$ , prodotto da una carica puntiforme  $q$  ad essa esterna, è *nulla*.

Consideriamo adesso il caso di una carica estesa, descritta dalla densità di carica  $\rho(\vec{x})$ . Per il principio di sovrapposizione lineare, il campo elettrico generato da quella carica è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici elementari prodotti dalle cariche infinitesime  $dq = \rho(\vec{x}) d^3x$  che costituiscono la carica stessa. Consideriamo allora una qualunque superficie chiusa  $\Sigma$  e sia  $V$  il volume che essa delimita: qualunque carica elementare che si trovi al suo interno contribuirà con  $\frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} d^3x$  al flusso di  $\vec{E}$  attraverso  $\Sigma$ , mentre qualunque carica che sia esterna a  $V$  non contribuirà a quel flusso.

Avremo dunque, in generale, che

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (4.1.32)$$

Questo risultato va sotto il nome di *Legge di Gauss* e vale, come abbiamo visto, per ogni distribuzione di carica e per ogni superficie chiusa: il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie chiusa  $\Sigma$  è pari alla carica contenuta in tale volume, divisa per la costante dielettrica del vuoto  $\epsilon_0$ .

A questa legge si può dare anche una forma *locale*, cioè non integrale, attraverso il teorema della divergenza (attenzione a non confondere la legge di Gauss, che è una legge fisica, con il teorema della divergenza o teorema di Gauss, che è un teorema di matematica...) il quale, come abbiamo visto nel capitolo dell'idrodinamica, afferma che, per ogni campo vettoriale (e quindi anche per il campo elettrico  $\vec{E}(\vec{x})$ ), risulta

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_V d^3x \operatorname{div} \vec{E} \quad (4.1.33)$$

Ne segue che, qualunque sia il volume  $V$ , risulta sempre

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) = \int_V d^3x \operatorname{div} \vec{E} \quad (4.1.34)$$

ovvero, in ogni punto  $\vec{x}$  dello spazio, deve aversi

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (4.1.35)$$

solitamente scritta in forma più raccolta come

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1.36)$$

Questa legge è nota come **prima legge di Maxwell** ed esprime, in forma differenziale, la legge di Gauss che, come abbiamo visto, nasce dal principio di sovrapposizione lineare e dalla legge di Coulomb.

Vediamo adesso alcune applicazioni di quanto sopra.

#### A: Sfera uniformemente carica

Vogliamo determinare il campo elettrico generato dallo spazio da una sfera di raggio  $R_0$  nella quale è distribuita uniformemente nel volume una carica complessiva  $Q$ .

Per ragioni di simmetria, il campo elettrico non può avere che direzione radiale e dipendere solo dalla distanza  $r$  dal centro della distribuzione di carica. Applicando la legge di Gauss a una sfera di raggio  $r > R_0$  otteniamo che

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) &= \int_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d\sigma = \int_{\Sigma} E(r) d\sigma = E(r) \int_{\Sigma} d\sigma = 4\pi r^2 E(r) = \\ &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

ovvero, quando  $r > R_0$ , il modulo del campo elettrico è tale che

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (4.1.38)$$

e, come si è detto sopra, è radiale.

Ne segue che il campo elettrico  $\vec{E}$  all'esterno della sfera è lo stesso di quello prodotto dall'intera carica  $Q$  concentrata nel centro della stessa.

All'interno della sfera, l'argomento di simmetria si applica ugualmente ma  $Q_{int}$  non coincide più con l'intera carica  $Q$ , bensì con quella contenuta entro la sfera di raggio  $r$ , che vale

$$Q_{int} = Q \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \quad (4.1.39)$$

per cui, quando  $r < R_0$ , risulta

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R_0^3} = \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \quad (4.1.40)$$

essendo la densità di carica  $\rho$  data da

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = \frac{3Q}{4\pi R_0^3} \quad (4.1.41)$$

Si osservi che il campo elettrico è una funzione continua del raggio e il suo modulo assume il suo valor massimo proprio per  $r = R_0$ , dove vale

$$E(R_0) = \frac{|Q|}{4\pi \epsilon_0 R_0^2} \quad (4.1.42)$$

Esiste un ovvio parallelo fra il calcolo di  $\vec{E}(r)$  nelle condizioni di simmetria sopra dette e il calcolo del campo di accelerazione  $\vec{g}(r)$  determinato, per esempio, dal campo gravitazionale terrestre. La Terra è infatti, con buona approssimazione, sferica (schiacciamento  $1/298.3 \approx 0.3\%$ ) e, anche se non è omogenea, è pur vero che la densità è, con buona approssimazione, solo funzione della distanza<sup>3</sup> dal centro della Terra.

Detta dunque  $M$  la massa dell'intera Terra, risulta<sup>4</sup>

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \quad (4.1.43)$$

---

<sup>3</sup>Perché questa condizione è sufficiente per poter concludere che il campo gravitazionale della Terra coincide con quello prodotto da un corpo puntiforme di massa  $M$  al centro della Terra?

<sup>4</sup>Due domande:

- Perché la formula (4.1.43) dice che  $g = g(r)$  mentre, usualmente, si dice che  $g$  è costante ( $= 9.81 \text{ m/s}^2$ ) ?
- Nota la costante di gravitazione universale  $G$  e il raggio medio della Terra, dalla misura di  $g$  sulla superficie terrestre si può determinarne la massa della Terra ?

**B: Sfera uniformemente carica solo sulla superficie**

Usando gli stessi argomenti di simmetria visti in precedenza e applicando la legge di Gauss si conclude che

- il campo elettrico prodotto esternamente alla sfera coincide, di nuovo, con quello che si avrebbe se la carica fosse tutta concentrata nel centro della sfera;
- il campo elettrico internamente alla sfera, per gli stessi argomenti di prima, è identicamente nullo.

Come si vede, questa volta, a differenza del caso della sfera uniformemente carica in tutto il suo volume, il campo elettrico ha una discontinuità per  $r = R_0$ , dove  $R_0$  indica il raggio della sfera.

**C: Piano infinito uniformemente carico**

Indichiamo con  $\sigma$  la densità superficiale di carica distribuita sul piano. Iniziamo osservando che il campo elettrico, per ragioni di simmetria, deve essere ortogonale al piano carico. Immaginiamo infatti che  $\vec{E}$  abbia una componente non ortogonale al piano, dunque nel piano parallelo al piano di carica passante per il punto considerato. Ruotando il piano di carica intorno all'asse passante per quel punto e ortogonale al piano stesso, la componente in questione dovrebbe ruotare anch'essa, mentre la distribuzione di carica, in definitiva, non muterebbe ...

Consideriamo adesso, per esempio, un cilindro che abbia l'asse ortogonale al piano e tagli il piano stesso. Sia  $S$  la superficie di base del cilindro, coincidente con l'area tagliata dal cilindro sul piano carico. Usando la legge di Gauss, poichè il campo elettrico, per quanto detto sopra, non darà luogo a flusso sulla superficie laterale ma solo dalle due basi del cilindro con due contributi uguali per ragioni di simmetria, poichè la carica interna al cilindro è  $\sigma S$ , si ricava così che il modulo del campo in tutto lo spazio è pari a

$$|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} \quad (4.1.44)$$

ed è diretto ortogonalmente al piano, nel verso che si allontana dal piano se la carica è positiva e verso il piano stesso se la carica è negativa.

Si osservi infine che, usando semplicemente il principio di sovrapposizione, nel caso di due piani paralleli uniformemente carichi, uno con densità superficiale  $\sigma > 0$  e l'altro  $-\sigma$ , posti a una distanza  $D$ , il campo elettrico è presente solo fra i due piani, dove è diretto ortogonalmente ai piani stessi, nel verso che va da quello positivo a quello negativo e con modulo

$$|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \quad (4.1.45)$$

**D: Filo di raggio  $r$  rettilineo e infinito, uniformemente carico sulla sua superficie**

Indichiamo con  $\lambda$  la densità lineare di carica distribuita sulla superficie del filo e supponiamo, per comodità di calcolo, che sia positiva.

Iniziamo osservando che il campo elettrico ha necessariamente simmetria cilindrica e sarà diretto radialmente. Infatti esso non può avere una componente lungo l'asse del filo perché, ruotando sopra/sotto il filo, questa dovrebbe seguire la rotazione e quindi invertirsi, mentre la situazione di carica resta, alla fine, la stessa. Analogamente non può avere una componente nel piano ortogonale all'asse del filo che sia diversa da quella radiale, perché, per parità (riflessione) nel piano che contiene il filo, la distribuzione di carica non cambia mentre la componente in questione dovrebbe cambiar di segno. Distinguiamo adesso il caso in cui il punto dove vogliamo conoscere il campo elettrico è esterno al filo da quello in cui è interno.

Nel caso di un punto esterno, posto a distanza  $R$  dall'asse del filo, possiamo procedere applicando la legge di Gauss a un cilindro coassiale con il filo, di altezza  $H$ , passante per il punto considerato, quindi di raggio  $R$ . La simmetria del campo ci assicura che il flusso dello stesso sulle due superfici di base del cilindro è nullo mentre sulla superficie laterale esso vale  $2\pi R H E$ . Dunque, poichè la carica nel cilindro vale  $\lambda H$ , si ha

$$2\pi R H E = \frac{\lambda H}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \quad (4.1.46)$$

Nel caso in cui il punto dove vogliamo conoscere il campo sia interno al filo, ovvero a una distanza  $R$  dall'asse del filo inferiore al raggio  $r$  del filo stesso, procedendo nello stesso modo di cui sopra, concludiamo che, non essendoci carica dentro il filo, il campo elettrico risulta nullo e dunque esso presenta una discontinuità nel passaggio dentro/fuori del filo.

### 4.1.6 Il campo elettrico è conservativo

Ripartiamo dal caso di due cariche puntiformi, che chiameremo rispettivamente  $Q$  e  $q$ , e immaginiamo che  $Q$  sia fissa nell'origine del sistema di riferimento mentre  $q$  possa invece essere spostata.

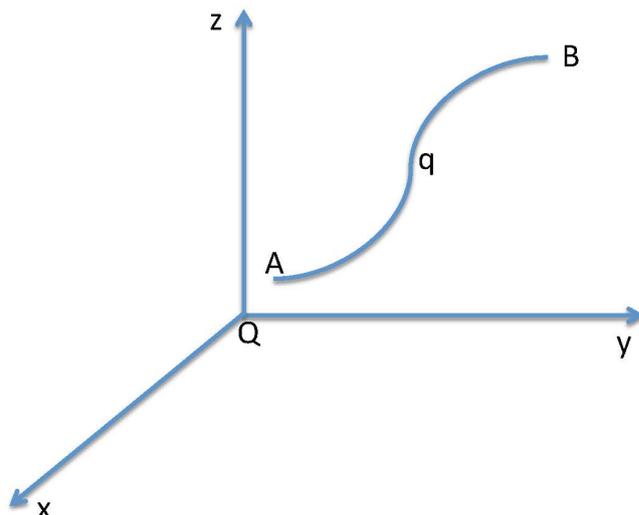


Figura 4.6: Cariche in interazione

Inizialmente sia  $q$  nel punto  $A$ , di coordinate  $\vec{A}$  e la si porti nel punto  $B$  di coordinate  $\vec{B}$ , procedendo lungo una curva generica che indicheremo con  $\Gamma$ , la quale ha per estremi i punti  $A$  e  $B$ . Immaginiamo anche di procedere per stati di equilibrio, cioè opponendo costantemente alla forza di Coulomb  $\vec{F}_c$  una forza meccanica  $\vec{F}_m$  uguale e opposta. Per definizione, il lavoro  $L$  che faremo sulla carica  $q$  con la forza  $\vec{F}_m$  sarà pari a

$$L = \int_{\Gamma} \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = - \int_{\Gamma} \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} \quad (4.1.47)$$

dove  $d\vec{l}$  è l'elemento di linea orientata da  $A$  a  $B$ . Geometricamente è ovvio che risulta comunque  $\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} = dr$  e dunque l'integrale di cui sopra vale

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{dr}{r^2} = - \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) = \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \quad (4.1.48)$$

per cui risulta infine che

$$L = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) \quad (4.1.49)$$

Osserviamo in particolare che se, per esempio,  $q$  e  $Q$  sono dello stesso segno e quindi le due cariche si respingono, allora il lavoro meccanico  $L$  è positivo

se  $R_B < R_A$  ovvero se avviciniamo  $q$  a  $Q$ . In in questo caso dobbiamo infatti spingere la carica nel verso del moto.

Comunque, il risultato importante è che il lavoro  $L$  è *indipendente*<sup>5</sup> dal cammino scelto per andare da  $A$  a  $B$ .

Una conseguenza immediata del fatto che il lavoro compiuto sulla carica non dipende dal cammino scelto ma solo dai punti iniziale e finale è che il lavoro complessivamente fatto sulla carica  $q$  per compiere un percorso *chiuso* nel campo elettrico prodotto da un'altra carica puntiforme è comunque nullo.

$$0 = \oint \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.1.51)$$

Osserviamo adesso che se la carica  $Q$ , invece che essere puntiforme è una carica estesa, definita dalla densità di carica  $\rho(\vec{r})$ , per il campo elettrico  $d\vec{E}$  generato da ogni carica elementare  $dQ = \rho(\vec{x}) d^3x$  vale la conclusione di cui sopra circa l'integrale ciclico, e quindi, per il principio di sovrapposizione lineare, qualunque sia la distribuzione di carica che lo ha generato, avremo sempre che, su un percorso chiuso

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.1.52)$$

Questa conclusione si esprime dicendo che il *campo elettrostatico* è un *campo conservativo*. Come abbiamo visto, questa proprietà discende

- dal fatto che la forza fra due cariche puntiformi sia proporzionale a una funzione della loro distanza e sia diretta secondo la loro congiungente;
- dalla validità del principio di sovrapposizione lineare per le forze elettrostatiche (per il campo gravitazionale, vale lo stesso risultato...).

Possiamo esprimere questa proprietà del campo elettrico anche in forma differenziale, usando il teorema di Stokes. Come abbiamo già detto, questo teorema afferma che l'integrale su una linea chiusa del prodotto scalare di un campo vettoriale per l'elemento di linea orientata è uguale all'integrale del rotore del campo fatto su una qualsivoglia superficie  $\Sigma$  che abbia come bordo la linea di cui sopra e sia orientata in conseguenza dell'orientazione stabilita sulla linea stessa.

$$\oint \vec{u}(\vec{x}) \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} d\vec{\sigma} \cdot \text{rot } \vec{u} \quad (4.1.53)$$

<sup>5</sup>Si osservi che questa conclusione non richiede che l'andamento della forza di Coulomb con la distanza sia proprio di tipo  $r^{-2}$ , ma solo che essa sia radiale, ovvero del tipo

$$\vec{F}_c = qQ f(r) \vec{r} \quad (4.1.50)$$

Essendo dunque che, data una qualunque linea chiusa, è

$$\oint \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.1.54)$$

ne segue che, in tutto lo spazio, deve essere

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (4.1.55)$$

Questa è la *seconda equazione di Maxwell* per il campo elettrostatico ed esprime, in forma differenziale, il fatto che il campo elettrostatico è conservativo.

### 4.1.7 Il potenziale elettrostatico

Possiamo adesso, sfruttando proprio la conservatività del campo elettrostatico  $\vec{E}$ , introdurre la nozione di *Potenziale elettrostatico* generato da una carica.

Riprendiamo il caso della carica puntiforme  $q$  nel campo della carica puntiforme  $Q$ , che, senza perdita di generalità, possiamo supporre sia posta nell'origine del sistema di riferimento. Abbiamo visto che per andare da  $A$  a  $B$  con la carica  $q$  occorre spendere un lavoro meccanico (contro la forza di Coulomb)

$$L = - \int_{\Gamma} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) \quad (4.1.56)$$

dove  $R_A$  e  $R_B$  sono le distanze di  $q$  da  $Q$  quando  $q$  è in  $A$  e quando  $q$  è in  $B$ , rispettivamente. Poiché il lavoro  $L$  dipende solo dalle coordinate del punto iniziale e finale e non dal percorso, per quanto già imparato in Meccanica, possiamo definire l'energia potenziale  $U(\vec{P})$  della carica  $q$  nel punto  $\vec{P}$ , dovuta alla presenza della carica  $Q$ , come l'integrale di linea

$$U(\vec{P}) = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} \Leftrightarrow \vec{\nabla} U(\vec{P}) = -\vec{F}_c(\vec{P}) \quad (4.1.57)$$

effettuato fra un punto fisso qualsiasi  $\vec{P}_0$  e il punto  $\vec{P}$  in esame, secondo una qualunque curva (differenziabile) che li unisca<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Si ha infatti

$$U(\vec{P} + \Delta\vec{x}) = U(\vec{P}) + \int_{\vec{P}}^{\vec{P} + \Delta\vec{x}} \vec{F}_m \cdot d\vec{s}$$

e dunque

$$U(\vec{P} + \Delta\vec{x}) - U(\vec{P}) = \vec{F}_m \cdot d\vec{x}$$

ovvero, per la definizione stessa di gradiente, abbiamo appunto che

$$\vec{\nabla} U(\vec{P}) = \vec{F}_m(\vec{P}) = -\vec{F}_c(\vec{P})$$

Nel nostro caso, per quanto visto sopra, sarà

$$U(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} + \text{cost} \quad (4.1.58)$$

dove  $r$  è la distanza fra il punto  $\vec{P}$  e la carica  $Q$  mentre la costante  $\text{cost}$  dipende solo dalla scelta del punto  $\vec{P}_0$  ed è comunque irrilevante poiché dell'energia potenziale usiamo, alla fine, sempre differenze...

Per questo motivo  $\text{cost}$  viene posta di solito uguale a zero, e questo corrisponde ad assumere  $\vec{P}_0$  molto lontano (all'infinito) dalla carica  $Q$ .

Se poi al posto della carica puntiforme  $Q$  ne abbiamo due,  $Q_1$  e  $Q_2$ , essendo il campo elettrico complessivo  $\vec{E}$  la somma vettoriale dei due campi elettrici  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  prodotti da  $Q_1$  e  $Q_2$  separatamente (il principio di sovrapposizione, di nuovo...), avremo

$$\begin{aligned} \vec{F}_c &= q\vec{E} = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \vec{F}_c \cdot d\vec{s} &= \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

ovvero l'energia potenziale di una carica puntiforme nel campo di altre cariche puntiformi risulta essere una funzione additiva

$$U(\vec{P}) = U_1(\vec{P}) + U_2(\vec{P}) \quad (4.1.60)$$

Come conseguenza, se la carica  $Q$  invece che puntiforme è estesa e descritta dalla densità  $\rho(\vec{x})$ , l'energia potenziale di una carica puntiforme  $q$  nel campo della carica estesa  $Q$  sarà data da

$$U(\vec{x}) = \int dU(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.61)$$

dove  $|\vec{x} - \vec{y}|$  è la distanza fra la carica  $dQ = \rho(\vec{y}) d^3y$  posta nel punto  $\vec{y}$  e la carica puntiforme  $q$  posta nel punto  $\vec{x}$ .

Osserviamo che anche per l'energia potenziale di una carica puntiforme accade l'analogo di quanto già visto per la forza elettrostatica:  $U$  è una funzione lineare nel valore della *carica di prova*  $q$ . Possiamo dunque scrivere  $U$  come il prodotto del valore della carica  $q$  per una funzione, che chiameremo  $V(\vec{x})$ , la quale dipende solo dalla distribuzione della carica  $Q$  e dal punto  $\vec{x}$  dove si trova la carica  $q$ , ma non dal suo valore. Così come avevamo introdotto la nozione di campo elettrico  $\vec{E}(\vec{x})$ , possiamo introdurre ora quella di *potenziale elettrostatico*  $V$  prodotto dalla distribuzione di carica  $\rho$ .

Per definizione si ha

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.62)$$

Ricordiamo che il potenziale, così come l'energia potenziale, è definito a meno di una costante.

Nella definizione (4.1.62) si assume che il potenziale all'infinito, prodotto dalla distribuzione di carica data (presunta diversa da zero solo al finito) si annulli.

L'unità di misura nel *SI* del potenziale elettrostatico è il Volt.

Dalla definizione risulta in particolare che l'energia potenziale di una carica puntiforme  $q$  posta nel punto  $\vec{x}$ , dovuta alla presenza di una carica estesa  $Q$  vale

$$U(\vec{x}) = qV(\vec{x}) \quad (4.1.63)$$

Dato il modo come siamo giunti al potenziale  $V(\vec{x})$ , non stupirà che ci sia un legame strettissimo con il campo elettrico  $\vec{E}(\vec{x})$ . Abbiamo già visto che

$$\vec{\nabla}U(\vec{x}) = -\vec{F}_c(\vec{x}) = -q\vec{E}(\vec{x}) \quad (4.1.64)$$

$$\vec{\nabla}U(\vec{x}) = q\vec{\nabla}V(\vec{x}) \quad (4.1.65)$$

e dunque

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \quad (4.1.66)$$

e si ha altresì che (con la solita condizione di annullamento all'infinito, valida per distribuzioni di carica diverse da zero solo al finito...)

$$V(\vec{x}) = -\int_{\infty}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.1.67)$$

Vediamo un esempio.

Una carica puntiforme  $Q$ , che assumeremo posta nell'origine del sistema di assi coordinati, produce, come sappiamo, un campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{n} \quad (4.1.68)$$

dove il versore  $\vec{n}$  è definito come  $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ . Sostituendo nell'espressione (4.1.67) del potenziale  $V$  e ricordando che  $\vec{n} \cdot d\vec{l} = dr$  risulta allora che

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= -\int_{\infty}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{x}} \frac{\vec{n} \cdot d\vec{l}}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{x}} dr \frac{1}{r^2} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{\vec{x}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} \end{aligned} \quad (4.1.69)$$

che è l'espressione del potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme.

Tornando al caso generale, abbiamo visto che si è potuto esprimere il campo  $\vec{E}$  come gradiente di una funzione scalare, il potenziale elettrostatico, perché il campo  $\vec{E}$  è conservativo. D'altronde avevamo già osservato che il fatto che

$\vec{E}$  fosse conservativo era sinonimo del fatto che il campo  $\vec{E}$  fosse irrotazionale (seconda equazione di Maxwell). Vediamo adesso come questo risultato matematico risulti evidente dal fatto che  $\vec{E}$  sia esprimibile come gradiente di un campo scalare. Risulta infatti, in generale che, data comunque una funzione scalare  $f(\vec{x})$ , è

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\nabla} f &= \text{rot}(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) = \\ &= (\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f, \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f, \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) \equiv \vec{0} \end{aligned} \quad (4.1.70)$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \vec{\nabla} V = 0 \quad (4.1.71)$$

Se adesso usiamo anche la prima equazione di Maxwell, ricaviamo

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1.72)$$

dove  $\nabla^2$  è l'operatore differenziale scalare *laplaciano* già incontrato in idrodinamica, definito come

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (4.1.73)$$

L'equazione differenziale del 2° ordine per il potenziale  $V$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1.74)$$

si chiama *equazione di Poisson* e ha come soluzione generale l'espressione (4.1.62) se si richiede anche la condizione che  $V$  si annulli all'infinito.

Vediamo di nuovo alcune applicazioni.

#### A: Sfera uniformemente carica

Vogliamo calcolare il potenziale elettrostatico prodotto da una sfera di raggio  $R_0$ , nella quale è distribuita uniformemente in tutto il volume una carica totale  $Q$ .

Abbiamo già visto che l'andamento del campo elettrico nel problema in questione è radiale e che varia nel modo seguente

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R_0^3} \quad \text{quando } r < R_0 \quad (4.1.75)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad \text{quando } r > R_0 \quad (4.1.76)$$

Per calcolare l'andamento del potenziale basta ricordare che

$$V(\vec{x}) = -\int_{\infty}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{x}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.1.77)$$

per cui, integrando sulla retta che passa per il punto  $\vec{x}$  e per il centro della sfera carica, dal punto  $\vec{x}$  all'infinito, essendo  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r)dr$ , risulta

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{quando } r > R_0 \quad (4.1.78)$$

$$V(r) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R_0} - \frac{Q r^2}{8\pi\epsilon_0 R_0^3} \quad \text{quando } r < R_0 \quad (4.1.79)$$

Si noti che

- la funzione potenziale di cui sopra si annulla all'infinito;
- il potenziale è monotono (che implica che l'andamento radiale del campo elettrico risulti sempre dello stesso segno...);
- il potenziale è continuo ovunque e, in particolare, in  $r = R_0$ .

Il grafico riportato sotto mostra l'andamento del potenziale diviso per  $Q/(4\pi\epsilon_0)$ , in funzione di  $r/R_0$ .

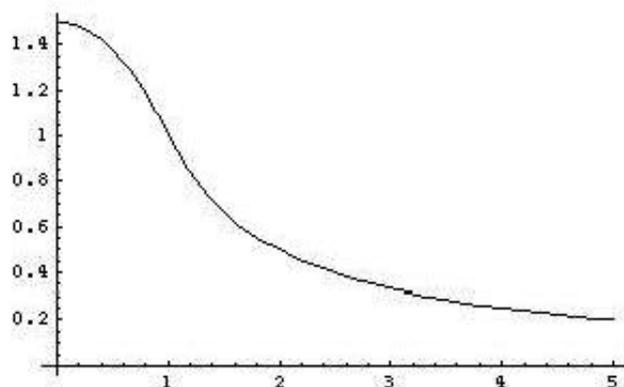


Figura 4.7: Potenziale di una distribuzione di carica uniforme in una sfera di raggio  $R_0$

### B: Sfera uniformemente carica solo sulla sua superficie

Occupiamoci adesso di vedere come è fatto il potenziale elettrostatico prodotto da una sfera di raggio  $R_0$ , sulla cui superficie sia distribuita uniformemente una carica totale  $Q$ .

Evidentemente per  $r > R_0$  non cambia niente rispetto al caso precedente, proprio perché il campo elettrico all'esterno della sfera è lo stesso; mentre per  $r < R_0$  il potenziale rimarrà costante essendo nullo il campo elettrico

all'interno della sfera. Abbiamo quindi

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{quando } r > R_0 \quad (4.1.80)$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \quad \text{quando } r < R_0 \quad (4.1.81)$$

Nella figura sottostante è rappresentato l'andamento (normalizzato a 1 per  $r = R_0$ ) dei potenziali prodotti sia dalla distribuzione di carica di volume che di superficie, in funzione della variabile  $r/R_0$ .

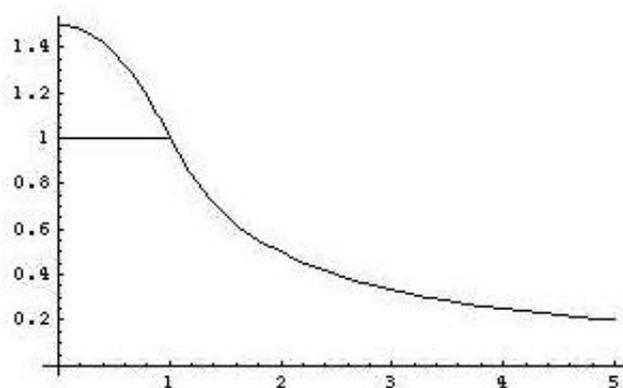


Figura 4.8: Confronto dei potenziali generati da una sfera uniformemente carica nel volume e solo sulla sua superficie

### C: Filo infinito uniformemente carico

Fino a ora abbiamo considerato cariche distribuite al finito.

Che succede per il potenziale elettrostatico nel caso di un filo infinito di raggio  $R_0$  su cui è distribuita uniformemente una carica superficiale  $\sigma > 0$ ? Iniziamo osservando che, come abbiamo visto, il campo elettrico è nullo all'interno del filo, mentre al suo esterno, dove è radiale e ortogonale all'asse del filo, vale

$$E(r) = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} \quad r > R_0 \quad (4.1.82)$$

Otteniamo dunque (rispetto al bordo del filo e quindi al suo interno) che

$$V(r) = -\frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) \quad r > R_0 \quad (4.1.83)$$

Si osservi che il potenziale risulta comunque decrescente quando ci si allontana dal filo che implica una forza repulsiva sulla carica di prova, essendo

$\sigma > 0$ . Si osservi altresì che il potenziale *non* si annulla all'infinito: questo è una conseguenza del fatto che la carica, in questo caso, non è distribuita solo al finito.

### Esercizio

A): Calcolare la velocità acquistata da un elettrone (  $e = 1.60217733 \times 10^{-19}C$ ;  $m = 9.109 \times 10^{-31}kg$  ) dopo che ha attraversato una differenza di potenziale elettrostatico (ddp) di  $2kV$ , partendo da fermo.

B): Se il campo elettrico è uniforme e si estende su una lunghezza  $L$  di  $20cm$ , quanto tempo ha impiegato l'elettrone per attraversare la differenza di potenziale data ?

*Soluzione*

Uguagliando l'energia cinetica dopo la fase di accelerazione con l'energia potenziale quando l'elettrone era fermo, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv^2 = q \Delta V \Rightarrow v_{out} = \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m}} = 2,652 \times 10^7 m/s \quad (4.1.84)$$

Poichè per ipotesi il campo elettrico è costante, risulta costante anche la forza elettrostatica sull'elettrone e quindi la sua accelerazione, che vale

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{e \frac{\Delta V}{L}}{m} = 1.759 \times 10^{15} m/s^2 \quad (4.1.85)$$

Essendo la partenza avvenuta da fermo, il tempo di transito dell'elettrone vale

$$t = \frac{v_{out}}{a} = 1.508 \times 10^{-8} s \quad (4.1.86)$$

### 4.1.8 Energia di un sistema di cariche

Abbiamo visto che una carica puntiforme  $q$  posta nel punto  $\vec{x}$  possiede, a causa della presenza di un'altra carica  $Q$  comunque estesa, una energia potenziale  $U$  pari a

$$U = qV(\vec{x}) \quad (4.1.87)$$

dove  $V(\vec{x})$  è il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica associata al corpo avente carica complessiva  $Q$ .

Immaginiamo ora di avere due cariche  $A$  e  $B$ , entrambe estese, descritte rispettivamente dalle distribuzioni di carica  $\rho_A$  e  $\rho_B$ . Ci poniamo il problema di valutare l'energia potenziale di una carica nel campo dell'altra. A ciascuna carica infinitesima  $dq_A(\vec{x}) = \rho_A(\vec{x}) d^3x$  costituente il corpo  $A$  potremo applicare il risultato ottenuto nel caso in cui una delle due cariche sia puntiforme, ottenendo così

$$U_{AB} = \int dq_A(\vec{x}) V_B(\vec{x}) = \int d^3x \rho_A(\vec{x}) V_B(\vec{x}) \quad (4.1.88)$$

dove  $V_B(\vec{x})$  è il potenziale elettrostatico nel punto  $\vec{x}$  prodotto dalla carica  $B$ , che, secondo quanto visto precedentemente, è dato dalla relazione

$$V_B(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho_B(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.89)$$

Dunque avremo

$$U_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho_A(\vec{x}) \rho_B(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.90)$$

Chiaramente l'espressione ottenuta dell'energia  $U_{AB}$  risulta simmetrica nello scambio  $A \leftrightarrow B$  e questo ci autorizza a parlare sia di energia potenziale della carica  $A$  nel campo della carica  $B$  come pure di energia potenziale della carica  $B$  nel campo della carica  $A$ .

Più concisamente e più correttamente, possiamo parlare di  $U$  come dell'energia di interazione fra le due cariche  $A$  e  $B$ . Il suo significato fisico, infatti, è quello di misurare il lavoro che occorre compiere contro le forze elettrostatiche (coulombiane) per portare le due cariche  $A$  e  $B$  in presenza una dell'altra, partendo dalla situazione in cui esse sono infinitamente lontane e quindi, non si influenzano reciprocamente, cioè sono *asintoticamente libere*.

Veniamo ora al caso in cui si voglia conoscere l'energia di interazione di tre cariche  $A$ ,  $B$ , e  $C$ . Immaginiamo dunque che  $A$  si trovi già nella posizione finale, mentre  $B$  e  $C$  siano lontanissime sia da  $A$  che l'una dall'altra. L'energia di interazione del sistema delle tre cariche poste in questa configurazione può considerarsi chiaramente nulla.

Cominciamo, per esempio, a portare  $B$  in presenza di  $A$ , nella posizione finale della configurazione che stiamo considerando. Per fare questo, occorrerà compiere un lavoro contro il campo generato da  $A$  e quindi l'energia potenziale del sistema sarà (come abbiamo già visto)

$$U_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3y \frac{\rho_A(\vec{x}) \rho_B(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.91)$$

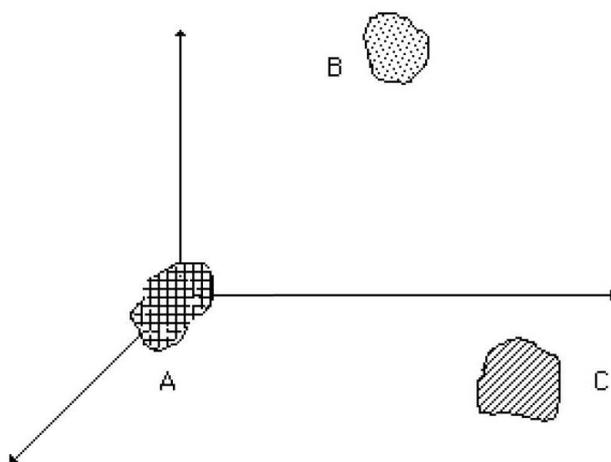


Figura 4.9: Cariche in interazione

Portiamo adesso anche  $C$  nella sua posizione finale, in presenza del sistema  $A$  e  $B$ : in completa analogia con quanto sopra, avremo

$$U_{C(AB)} = \int d^3z \rho_C(\vec{z}) V_{AB}(\vec{z}) \quad (4.1.92)$$

ma dalla definizione del potenziale segue immediatamente che

$$V_{AB}(\vec{z}) = V_A(\vec{z}) + V_B(\vec{z}) \quad (4.1.93)$$

per cui è immediato che

$$U_{C(AB)} = U_{CA} + U_{CB} \quad (4.1.94)$$

e dunque l'energia di interazione del sistema delle tre cariche risulta data da (si ricordi che  $U_{CA} = U_{AC} \dots$ )

$$\begin{aligned} U &= U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = \\ &= \frac{1}{2} (U_{AB} + U_{BA} + U_{AC} + U_{CA} + U_{BC} + U_{CB}) \end{aligned} \quad (4.1.95)$$

Si osservi che l'espressione così ottenuta è simmetrica nello scambio fra le cariche e quindi  $U$  risulta essere effettivamente indipendente dall'ordine secondo cui le cariche sono state riunite insieme. Si noti che, se non fosse stato così, non avremmo potuto parlare correttamente di energia di interazione del sistema, ma avremmo dovuto specificare anche l'ordine secondo il quale il sistema era stato messo insieme...

Chiaramente, se invece di tre cariche  $A, B, C$  ne abbiamo  $n$ , cioè abbiamo a che fare con il sistema di cariche  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , semplicemente iterando quanto fatto per il sistema delle tre cariche, concluderemo che l'energia di interazione del sistema vale

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (4.1.96)$$

dove  $U_{ij}$  è l'energia di interazione della carica  $A_i$  con la carica  $A_j$  nella posizione in cui si trovano nel sistema considerato, e cioè

$$U_{ij} \equiv \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_j(\vec{x}) \quad (4.1.97)$$

essendo  $\rho_i(\vec{x})$  la densità di carica del corpo  $i$ -esimo ed essendo  $V_j(\vec{x})$  il potenziale elettrostatico prodotto nello spazio dalla carica  $j$ -esima.

Fin'ora abbiamo sempre parlato di *energia di interazione* di un sistema di cariche; adesso vogliamo studiare invece l'energia potenziale complessiva associata al sistema di cariche.

Sono la stessa cosa?

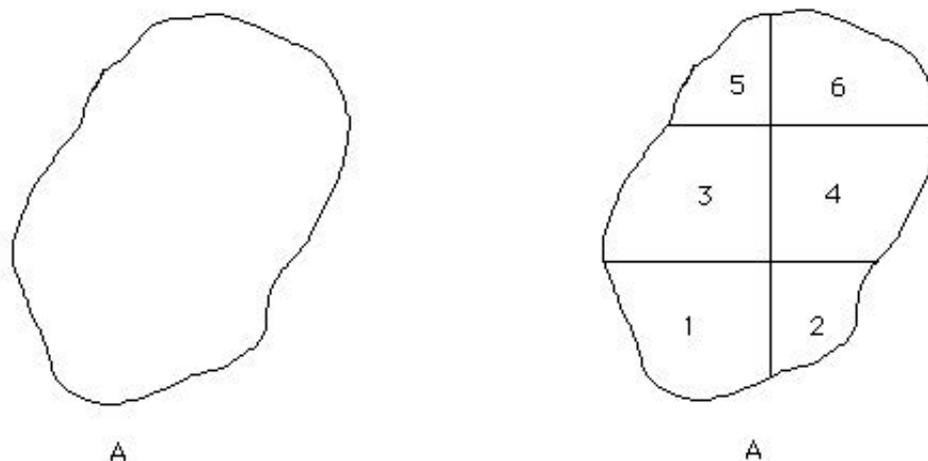
**No**, perchè l'energia di interazione prescinde dall'energia potenziale di ciascuna carica in assenza delle altre, mentre l'energia potenziale complessiva del sistema dovrà naturalmente tenerne conto! Siamo condotti dunque al problema di valutare l'energia potenziale associata a una carica  $A$  assegnata, definita da una certa distribuzione di carica  $\rho(\vec{x})$  qualsiasi che assumeremo comunque che sia diversa da zero solo al finito. Immaginiamo, idealmente, di dividere la carica  $A$  in varie parti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ : per quanto visto poch'anzi l'energia di interazione delle varie parti fra loro è data da

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (4.1.98)$$

dove

$$U_{ij} \equiv \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_j(\vec{x}) \quad (4.1.99)$$

essendo  $\rho_i(\vec{x})$  la densità di carica nella partizione  $i$ -esima del corpo (coincidendo quindi in tale parte con  $\rho$  ed essendo nulla altrove) ed essendo  $V_j(\vec{x})$

Figura 4.10: *Energia di una carica*

il potenziale elettrostatico prodotto dalla partizione  $j$ -esima. Risulta quindi

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_j(\vec{x}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_j(\vec{x}) - \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) \sum_j V_j(\vec{x}) - \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) \quad (4.1.100)
 \end{aligned}$$

ma

$$\sum_j V_j(\vec{x}) = V(\vec{x}) \quad (4.1.101)$$

dove  $V(\vec{x})$  è il potenziale elettrostatico prodotto nel punto  $\vec{x}$  da tutta la carica descritta dalla distribuzione  $\rho(\vec{x})$ , per cui è

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V(\vec{x}) - \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \sum_i \rho_i(\vec{x}) V(\vec{x}) - \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) - \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) \quad (4.1.102)
 \end{aligned}$$

Nel limite in cui la partizione del corpo tende all'infinito ( $n \rightarrow \infty$ ), la seconda sommatoria tende a zero poichè il numero degli addendi cresce linearmente

con  $n$ , ma il loro valore<sup>7</sup> decresce come  $n^{-5/3}$ .

Dunque, infittendo indefinitamente la partizione della carica assegnata, otteniamo infine che l'energia di interazione delle varie parti fra loro risulta espressa da

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.104)$$

la quale, a buon diritto, rappresenta quindi l'energia potenziale complessiva associata alla carica data, cioè l'energia che è servita per metterla insieme partendo da cariche infinitesime non interagenti fra loro.

Si osservi come risulti chiaro adesso chi rappresenta la quantità

$$\frac{1}{2} \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) \quad (4.1.105)$$

Si tratta semplicemente dell'energia potenziale della partizione  $i$ -esima, presa a se stante ...

Abbiamo visto come la (4.1.104) rappresenti l'energia elettrostatica associata a una generica distribuzione di carica  $\rho$ .

Ricordiamo adesso che esiste un legame fra il potenziale  $V(\vec{x})$  e la distribuzione di carica che lo produce, e precisamente che

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1.106)$$

Sostituendo, abbiamo quindi

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x V(\vec{x}) \nabla^2 V(\vec{x}) \quad (4.1.107)$$

ma (si ricordi che  $E_i(\vec{x}) = -\partial_i V(\vec{x})$ )

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) \nabla^2 V(\vec{x}) &= \partial_i (V(\vec{x}) \partial_i V(\vec{x})) - \partial_i V(\vec{x}) \partial_i V(\vec{x}) = \\ &= -\text{div}(V(\vec{x}) E_i(\vec{x})) - E_i(\vec{x}) E_i(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.1.108)$$

dunque

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x V(\vec{x}) \nabla^2 V(\vec{x}) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x [\text{div}(V(\vec{x}) E_i(\vec{x})) + E_i(\vec{x}) E_i(\vec{x})] \end{aligned} \quad (4.1.109)$$

<sup>7</sup>Abbiamo infatti che l'integrale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \rho_i(\vec{x}) \int d^3y \frac{\rho_i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3y \frac{\rho_i(\vec{x}) \rho_i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \end{aligned} \quad (4.1.103)$$

scala come  $(\delta q_i)^2/r$ , dove  $r$  è la dimensione caratteristica del volumetto dove si trova la carica  $\delta q_i$  distribuita secondo  $\rho_i$ . Chiaramente mentre  $(\delta q_i)^2$  scala come  $n^{-2}$ , la dimensione caratteristica  $r$  va come il volume alla  $1/3$ , ovvero come  $(1/n)^{1/3}$  per cui abbiamo appunto che l'integrale scala come  $n^{-5/3}$  ...

Ma il primo integrale, usando il teorema della divergenza, si trasforma in un integrale del flusso del vettore  $V(\vec{x})E_i(\vec{x})$  attraverso la superficie all'infinito, che è appunto quella che racchiude il volume dove tale integrale della divergenza doveva essere calcolato (cioè tutto lo spazio...). Ovvero, se  $\Sigma$  è una superficie sferica di raggio  $R$  centrata nell'origine del sistema di riferimento, risulta

$$\int d^3x \operatorname{div}(V(\vec{x})E_i(\vec{x})) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} V(\vec{x})E_i(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \quad (4.1.110)$$

D'altronde, se la distribuzione di carica è diversa da zero solo al finito (come abbiamo assunto ...), ed è distribuita intorno all'origine del nostro sistema di coordinate, allora, allontanandoci indefinitamente da essa, la carica si comporterà asintoticamente come se fosse puntiforme e concentrata nell'origine, ovvero il potenziale si annullerà come  $R^{-1}$ , mentre il campo elettrico come  $R^{-2}$  e siccome la superficie di integrazione va, naturalmente, come  $R^2$ , il contributo all'energia  $U$  di quell'integrale sarà nullo.

Possiamo dunque concludere che

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_i(\vec{x}) V_i(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2 \quad (4.1.111)$$

ovvero l'energia elettrostatica associata a una densità di carica qualsiasi  $\rho$  può anche essere scritta come l'integrale esteso a tutto lo spazio della quantità  $\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{x})|^2$  che, a buon diritto, deve essere quindi interpretata come *densità di energia elettrostatica*

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{x})|^2 \quad (4.1.112)$$

Si osservi che l'energia potenziale elettrostatica di una qualsiasi distribuzione di carica è sempre positiva, ovvero qualunque sia la distribuzione di carica, per metterla insieme partendo da cariche infinitesime asintoticamente libere, cioè non interagenti fra loro, occorre comunque spendere energia.

Si noti invece che l'energia di interazione fra due cariche può essere sia positiva che negativa e questo dipende se le due cariche sono di segno concorde o discorde: quando si considera però anche l'energia di ciascuna carica, allora la somma è comunque positiva.

Come esempio, proviamo a calcolare l'energia elettrostatica di una carica  $Q$  uniformemente distribuita nel volume di una sfera di raggio  $R_0$  e confrontiamola con quella associata a una distribuzione uniforme sulla superficie di una sfera dello stesso raggio.

Partiamo dalla definizione di  $U$  secondo cui si ha

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2 \quad (4.1.113)$$

Consideriamo ora la distribuzione uniforme nel volume e usiamo la seconda definizione di  $U$ . Data la simmetria sferica del campo, integriamo in coordinate polari: si ha

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{R_0} r^2 dr d\Omega \left[ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} \right]^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_0}^{+\infty} r^2 dr d\Omega \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]^2 \quad (4.1.114)$$

Integrando sull'angolo solido, risulta che

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} dr \frac{r^4}{R_0^6} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_0^6} \frac{R_0^5}{5} + \frac{1}{R_0} \right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R_0} = U_{vol}. \end{aligned} \quad (4.1.115)$$

Evidentemente, nel caso della distribuzione uniforme sulla superficie della sfera, poichè il campo elettrico all'esterno della sfera è uguale al caso della distribuzione di volume, il secondo termine della (4.1.115) è lo stesso, mentre il primo è nullo poichè si riferisce al campo interno alla sfera dove, come sappiamo, il potenziale è costante e il campo elettrico è assente. In questo caso abbiamo quindi

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_0} = U_{sup}. \quad (4.1.116)$$

Come si vede, l'energia elettrostatica associata a una distribuzione uniforme di carica  $Q$  all'interno del volume di una sfera di raggio  $R_0$  è *superiore* a quella della stessa carica distribuita uniformemente sulla superficie della sfera data. Fisicamente la cosa si può capire osservando che la carica  $Q$  cercherà di disporsi in modo che le cariche elementari  $\delta Q$  che la compongono siano il più lontano possibile una dall'altra, essendo dello stesso segno e quindi respingendosi l'un l'altra.

#### 4.1.9 Sviluppo in multipoli

Vogliamo verificare l'affermazione secondo la quale un corpo carico, visto a grande distanza, si comporta approssimativamente come una carica puntiforme. Abbiamo visto che, in simmetria sferica, questo è certamente vero fino a distanze dal centro della carica non inferiori al raggio della sfera su cui la carica stessa è distribuita.

Vediamo adesso cosa succede nel caso di una distribuzione di carica generica e quali sono i principali termini correttivi al potenziale coulombiano di cui possiamo aspettarci di dover tener conto se siamo "abbastanza" distanti dalla carica, ma non infinitamente lontani.

Immaginiamo dunque che sia data una distribuzione di carica  $\rho(\vec{x})$  al finito, e occupiamoci del potenziale  $V$  che essa produce a grande distanza (noto il potenziale è noto il campo elettrico!...). Come sappiamo, risulta

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.117)$$

dove l'integrazione, a priori, avviene su tutto lo spazio, ma, essendo la carica non nulla solo al finito, possiamo dire che avviene nel volume finito dove è distribuita la carica. Scegliamo il sistema di coordinate in modo che esso ab-

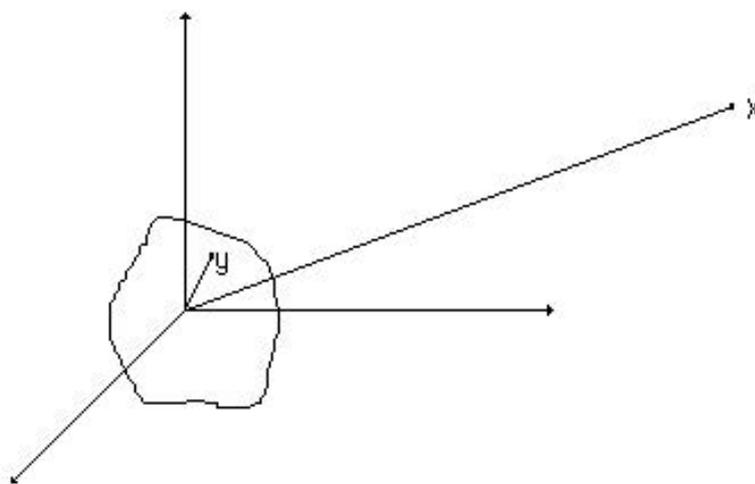


Figura 4.11: Potenziale lontano da una carica

bia l'origine nel corpo stesso e sostituiamo il fattore  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$  con il suo sviluppo in serie di Taylor, valutato intorno al punto  $|\vec{y}| = 0$ . Risulta

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + y_k \partial_k \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{\vec{y}=0} + \frac{1}{2} y_k y_j \partial_k \partial_j \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{\vec{y}=0} + \dots \quad (4.1.118)$$

D'altronde è

$$\partial_k \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{\vec{y}=0} = \frac{x_k}{|\vec{x}|^3} \quad (4.1.119)$$

$$\partial_k \partial_j \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{\vec{y}=0} = \frac{3x_k x_j - \delta_{kj} |\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5} \quad (4.1.120)$$

e siccome risulta

$$(3x_k x_j - \delta_{kj} |\vec{x}|^2) y_k y_j = (3y_k y_j - \delta_{kj} |\vec{y}|^2) x_k x_j \quad (4.1.121)$$

si ha

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \rho(\vec{y}) \left[ \frac{1}{|\vec{x}|} + y_k x_k \frac{1}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} (3y_k y_j - \delta_{kj} |\vec{y}|^2) x_k x_j \frac{1}{|\vec{x}|^5} + \dots \right] \quad (4.1.122)$$

Ponendo adesso  $|\vec{x}| = R$  e ricordando che sia  $R$  che  $x_k$  non dipendono dalle variabili di integrazione, risulta

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int d^3y \rho(\vec{y}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_k}{R^3} \int d^3y y_k \rho(\vec{y}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_k x_j}{2R^5} \int d^3y (3y_k y_j - \delta_{kj} |\vec{y}|^2) \rho(\vec{y}) + \dots \end{aligned} \quad (4.1.123)$$

Come si vede, gli integrali contengono funzioni che dipendono ormai solo dalla distribuzione di carica e non dal punto dove si vuole conoscere il potenziale.

Si riconosce immediatamente che il primo integrale vale niente altro che la carica totale  $Q$ . Esso è chiamato anche con il termine di *momento di monopolo elettrico* ed è, naturalmente, uno scalare

$$\int d^3y \rho(\vec{y}) \equiv Q \quad (4.1.124)$$

Il secondo integrale si trasforma invece come un vettore ed è chiamato *momento di dipolo elettrico*  $\vec{P}$  associato alla distribuzione  $\rho(\vec{y})$

$$\int d^3y y_k \rho(\vec{y}) \equiv P_k \quad (4.1.125)$$

Analogamente il terzo integrale è un tensore simmetrico a due indici, noto come *momento di quadrupolo elettrico*  $Q$

$$\int d^3y (3y_k y_j - \delta_{kj} |\vec{y}|^2) \rho(\vec{y}) \equiv Q_{kj} \quad (4.1.126)$$

e così di seguito ...

Il potenziale generato dalla distribuzione di carica  $\rho(\vec{y})$  nel punto  $\vec{x}$  ha dunque la forma seguente

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_k P_k}{R^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{x_k x_j Q_{kj}}{R^5} + \dots \quad (4.1.127)$$

Come si vede, il termine di monopolo (scalare per rotazioni del sistema di riferimento) contribuisce al potenziale nel punto  $\vec{x}$  con un termine puramente coulombiano, come se la carica fosse tutta concentrata nell'origine del sistema di riferimento scelto.

Consideriamo il secondo termine, quello associato al momento di dipolo.

Verifichiamo che questo potenziale coincide, a grandi distanze, con il potenziale prodotto da due cariche puntiformi  $+q$  e  $-q$ , uguali e opposte, disposte a una distanza orientata  $\vec{d}$  da  $-q$  a  $+q$  tale che

$$\vec{P} = q \vec{d} \quad (4.1.128)$$

Risulta infatti (vedi (4.12)) che, per  $|\vec{x}| \gg |\vec{d}|$ , il potenziale generato dalle

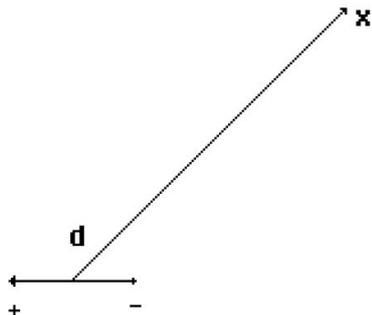


Figura 4.12: *Dipolo elettrico*

due cariche vale

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{-\frac{\vec{d}}{2} + \vec{x}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\frac{\vec{d}}{2} + \vec{x}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\vec{x}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q \vec{x} \cdot \vec{d}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\vec{x}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q \vec{x} \cdot \vec{d}}{|\vec{x}|^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{x} \cdot \vec{d}}{|\vec{x}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \end{aligned} \quad (4.1.129)$$

Si osservi che il momento di dipolo elettrico, per rotazioni del riferimento si trasforma come un vettore, mentre per traslazioni dell'origine degli assi esso è invariante solo se la carica totale  $Q$  è nulla.

Infatti trasladando l'origine degli assi del vettore  $\vec{a}$  di modo che il punto di coordinata  $\vec{y}$  diventi quello di coordinata  $\vec{y}' = \vec{y} - \vec{a}$ , la distribuzione di carica, nel nuovo riferimento, è tale che  $\rho'(\vec{y}') = \rho(\vec{y})$ , per cui risulta

$$\vec{P}' = \int d^3y' \vec{y}' \rho'(\vec{y}') = \int d^3y (\vec{y} - \vec{a}) \rho(\vec{y}) = \vec{P} - \vec{a}Q_t \quad (4.1.130)$$

Da questo risultato risulta altresì chiaro che, quando la carica totale è diversa da zero, si può sempre eliminare il contributo di dipolo al potenziale attraverso una opportuna scelta del sistema di riferimento.

Un caso tipico in cui questo accade è nel caso del campo gravitazionale che è descritto formalmente da un potenziale perfettamente analogo a quello coulombiano. Poiché le masse sono solo positive e dunque la massa totale  $M$  (analogo gravitazionale della carica totale  $Q$ ) non può essere nulla, è

sempre possibile scegliere il riferimento (mettendo l'origine nel baricentro della distribuzione di massa) in modo da annullare il contributo dipolare al potenziale ...

Ma tornando al caso elettrostatico, osserviamo che nel caso in cui  $Q = 0$ , il potenziale generato a grandi distanze dalla distribuzione di carica, non possedendo il termine di monopolo, sarà del tipo *di dipolo elettrico*, ovvero andrà come  $R^{-2}$  e dunque il campo elettrico come  $R^{-3}$ .

Analogamente accade che, se  $Q = 0$  e anche  $\vec{P} = 0$ , il potenziale a grande distanza è *di quadrupolo elettrico*, il quale va come  $R^{-3}$  mentre il campo decresce come  $R^{-4}$ . Si osservi infine che solo se  $Q = 0$  allora  $\vec{P}$  è invariante per traslazioni del sistema di riferimento e, analogamente, solo se  $Q = 0$  e  $\vec{P} = 0$  il momento di quadrupolo, a sua volta, è invariante per traslazioni del sistema di riferimento, etc ...

#### 4.1.10 Il dipolo elettrico

Abbiamo visto che un dipolo elettrico ideale è schematizzabile come l'insieme di due cariche puntiformi uguali e opposte posizionate a una distanza  $\vec{d}$  piccola rispetto alla scala delle dimensioni che interessano.

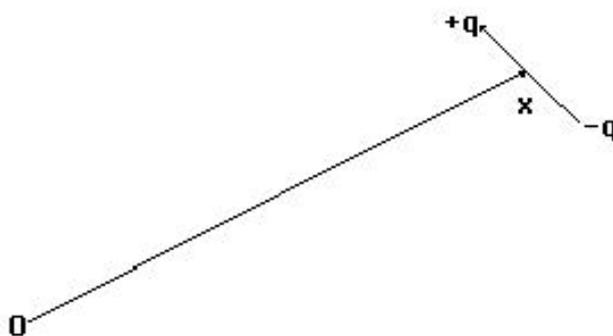


Figura 4.13: *Il dipolo*

Già sappiamo che, dal punto di vista meccanico, una carica elettrica puntiforme  $q$ , posta in un punto  $\vec{x}$  di un campo elettrico sente una forza

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{x}) \quad (4.1.131)$$

e possiede una energia potenziale

$$U = q V(\vec{x}) \quad (4.1.132)$$

Vediamo adesso che cosa accade a un dipolo elettrico di momento  $\vec{P}$ , posto nel punto  $\vec{x}$ .

Con questa frase intendiamo dire che stiamo considerando due cariche puntiformi  $+q$  e  $-q$  poste rispettivamente in  $\vec{x} + \vec{d}/2$  e  $\vec{x} - \vec{d}/2$  e vogliamo considerare il limite per  $|\vec{d}| \rightarrow 0$  in modo però che il momento  $\vec{P} = q\vec{d}$  resti costante<sup>8</sup>.

Cominciamo valutando la forza  $\vec{F}$  agente sul dipolo. Avremo

$$\vec{F} = \lim_{d \rightarrow 0} q[\vec{E}(\vec{x} + \vec{d}/2) - \vec{E}(\vec{x} - \vec{d}/2)] = q\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{x}) \quad (4.1.133)$$

ovvero, in termini di componenti, avremo (ricordiamo che il campo elettrico è irrotazionale ...)

$$F_k = P_j \partial_j E_k = P_j \partial_k E_j = \partial_k (P_j E_j) \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{P} \cdot \vec{E}) \quad (4.1.134)$$

Questa relazione mostra chiaramente, come d'altronde c'era da aspettarsi, che se il campo elettrico è uniforme, non c'è forza sul dipolo.

Può invece esserci momento  $\vec{T}$  delle forze. Si ha infatti, dalla definizione di momento delle forze esterne, che

$$\begin{aligned} \vec{T} &= (\vec{x} + \vec{d}/2) \wedge (q\vec{E}(\vec{x} + \vec{d}/2)) + (\vec{x} - \vec{d}/2) \wedge (-q\vec{E}(\vec{x} - \vec{d}/2)) = \\ &= \vec{x} \wedge \vec{F} + \frac{\vec{d}}{2} \wedge (q\vec{E}(\vec{x} + \vec{d}/2)) + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (-q\vec{E}(\vec{x} - \vec{d}/2)) \approx \\ &\approx \vec{x} \wedge \vec{F} + \vec{P} \wedge \vec{E} \end{aligned} \quad (4.1.135)$$

quindi, a meno che il momento di dipolo non sia parallelo o antiparallelo al campo elettrico, anche in campo uniforme esiste una coppia agente sul dipolo stesso, il cui modulo vale

$$|\vec{T}| = |\vec{P}| |\vec{E}(\vec{x})| \sin \theta \quad (4.1.136)$$

essendo  $\theta$  l'angolo fra il campo elettrico nel punto considerato e il momento di dipolo.

Veniamo adesso allo studio dell'energia potenziale di interazione di un dipolo quando si trova in un campo elettrostatico generico. Sia  $V(\vec{x})$  la funzione potenziale associata al campo in questione: da quanto detto precedentemente, l'energia potenziale del dipolo varrà

$$U = qV(\vec{x} + \vec{d}/2) - qV(\vec{x} - \vec{d}/2) = q\vec{d} \cdot \vec{\nabla} V = -\vec{P} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad (4.1.137)$$

da cui si conclude, in particolare, che essa è minima quando  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  sono paralleli e concordi.

---

<sup>8</sup>Questo corrisponde a considerare l'approssimazione di dipolo valida in tutto lo spazio.

#### 4.1.11 Elettrostatica di un conduttore

Quando si iniziò lo studio dei fenomeni elettrici, elettrizzando i corpi per strofinio, si scoprì rapidamente che alcuni corpi erano elettrizzabili e altri, almeno apparentemente, no... Se prendiamo in mano un pezzo di plastica e lo strofiniamo con della stoffa, possiamo poi usarla per attrarre dei piccoli pezzetti di carta; ma se proviamo con una bacchetta metallica, difficilmente si riuscirà a vedere qualche effetto.

La ragione sta nel fatto che alcuni corpi come la plastica, il vetro, etc... sono isolanti o dielettrici, mentre altri, come appunto i metalli, sono conduttori. La differenza sta nel fatto che nei corpi isolanti le cariche *non* sono libere di muoversi al suo interno, mentre nei conduttori *sì*. Questo è dovuto alla loro struttura microscopica: nei metalli, ogni atomo mette circa un elettrone a disposizione di tutto il reticolo cristallino, legandosi agli altri attraverso un legame ionico, mentre negli isolanti questo non accade. Tipicamente in un metallo esistono dell'ordine di  $10^{23}$  elettroni liberi per  $cm^3$  (nella cosiddetta banda di conduzione), mentre in buoni isolanti questo numero può anche essere dell'ordine di poche unità.

Fra i conduttori e gli isolanti esistono poi i semiconduttori (come il silicio, il germanio ...), nei quali si trovano mediamente, quando sono allo stato puro, dell'ordine di  $10^{11}$  elettroni liberi per  $cm^3$ : la loro principale caratteristica è che questo numero può essere modificato considerevolmente attraverso, per esempio l'aggiunta di impurezze (drogaggi), per riscaldamento, etc...

Tratteremo nel seguito l'elettrostatica di un conduttore perfetto.

Una importante osservazione sperimentale è che in un conduttore isolato comunque carico *non si osserva alcun moto ordinato, macroscopico, di cariche* al suo interno, almeno in condizioni stazionarie... Siccome sappiamo che al suo interno si trovano effettivamente delle cariche libere, il fatto che mediamente non si muovano significa che il campo elettrico medio al suo interno deve essere rigorosamente nullo.

D'altronde la legge di Gauss stabilisce che, fissata comunque una superficie chiusa  $\Sigma$ , risulta

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4.1.138)$$

dove  $Q$  è la carica contenuta nel volume delimitato dalla superficie in questione. Dunque se  $\Sigma$  è una qualsiasi superficie chiusa tutta interna al conduttore, essendo il campo elettrico identicamente nullo all'interno del conduttore, sarà

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0 \quad (4.1.139)$$

ovvero la carica racchiusa nella superficie  $\Sigma$  sarà nulla. Data l'arbitrarietà nella scelta di  $\Sigma$ , con l'unico vincolo che sia interna al conduttore (vedi fig.4.14a), ne segue che la densità di carica all'interno del conduttore *deve*

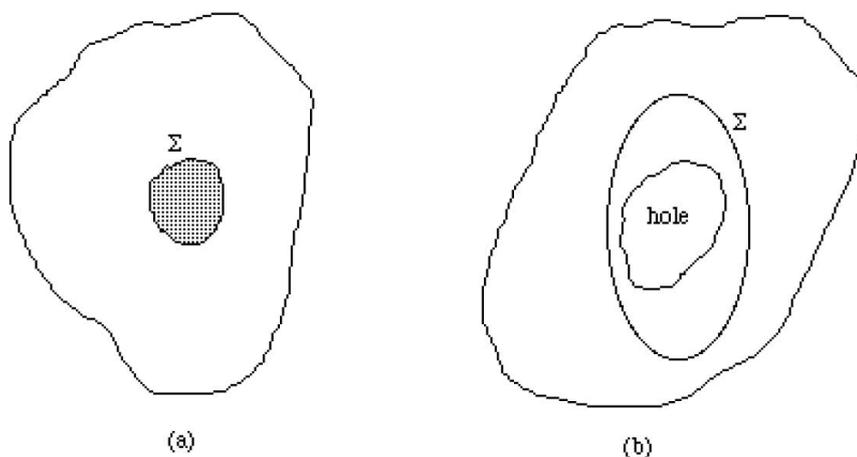


Figura 4.14: *Campo elettrico nei conduttori*

*essere identicamente nulla.* Questo risultato non sembra in contraddizione con il fatto che, come abbiamo detto, in un conduttore ci sono elettroni liberi di muoversi, perché la loro carica, normalmente, è perfettamente bilanciata dalla carica degli ioni legati al reticolo cristallino (un atomo è neutro, anche se è fatto di cariche elettriche ...!).

Dunque se il corpo conduttore è carico e la carica non può stare al suo interno, dovrà necessariamente stare sulla sua superficie!

Osserviamo subito che questa deve essere la superficie esterna. Immaginiamo infatti che il nostro conduttore abbia un buco (vedi fig.4.14b): usando una superficie  $\Sigma$  tutta interna al conduttore e tale da contornare il buco, si dimostra immediatamente che la carica totale sulla superficie interna del buco deve essere comunque nulla. Questo ancora non significa che essa sia localmente nulla ... Procediamo per assurdo. Immaginiamo che sulla superficie del buco ci siano cariche: debbono essercene di positive e di negative in ugual misura. Partiamo da un punto della superficie dove c'è carica positiva e dirigiamoci verso la zona della superficie del buco più vicina, dove si trova della carica negativa. Evidentemente su quel tratto di percorso orientato l'integrale di  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  è positivo e non nullo. Se chiudiamo ora il percorso all'interno del metallo, dove  $\vec{E}$  è nullo, siamo arrivati all'assurdo che il campo elettrico *non* sarebbe conservativo...

#### **Conclusione:**

All'interno di un corpo conduttore di qualunque forma esso sia, *la densità di carica è identicamente nulla* e questo discende dal fatto che *il campo elettrico è identicamente nullo.*

Un'altra conseguenza ovvia di questa proprietà è che *il potenziale elettrostatico  $V$  è lo stesso in tutto il conduttore.*

### 4.1.12 Induzione elettrostatica

Immaginiamo di avere un conduttore cavo, inizialmente perfettamente scarico e isolato, e di metterlo in presenza di una carica esterna  $Q$ . Le cariche libere nel conduttore si adatteranno, dando luogo a una densità superficiale di carica (sulla superficie esterna) in modo che il campo elettrico all'interno del corpo sia nullo (buco compreso). Si noti che il potenziale  $V$ , in generale, invece cambierà a seconda della posizione della carica esterna, rimanendo comunque costante all'interno del conduttore. In sostanza, il conduttore si comporta come un perfetto schermo elettrostatico (vedi 4.15a): le azioni elettriche provocate da corpi carichi al suo esterno non influenzano l'interno del conduttore. Osserviamo che, mentre questo vale dall'esterno verso l'interno, non vale il viceversa. Ripartiamo dal nostro conduttore bucato, perfettamente scarico e isolato. Immaginiamo di disporre una carica  $Q$  all'interno del buco (vedi fig.4.15b),

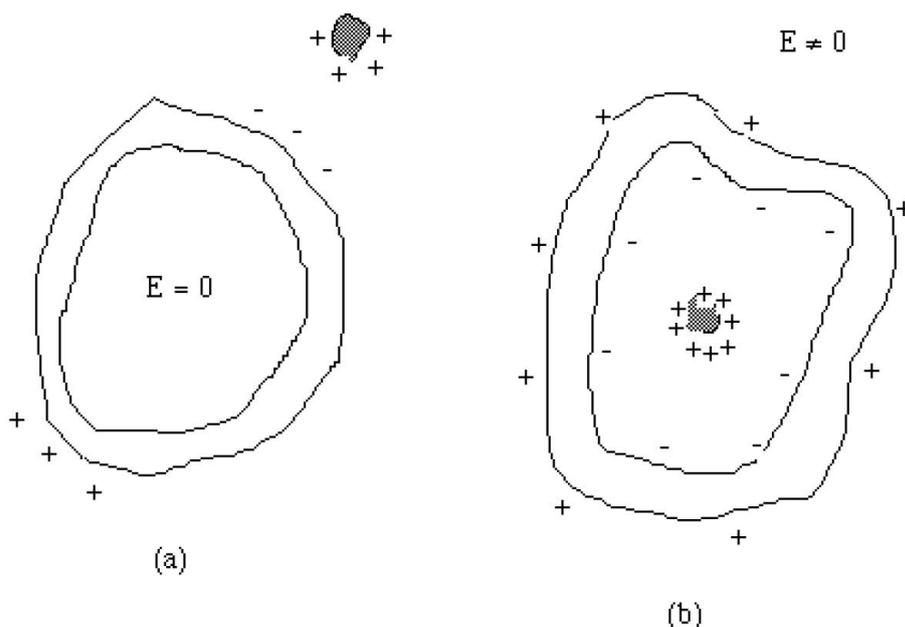


Figura 4.15: *Induzione elettrostatica*

Applicando di nuovo la legge di Gauss a una superficie  $\Sigma$  interna al conduttore, visto che sappiamo che il corpo nel buco ha una carica complessiva  $Q$ , se ne conclude che deve trovarsi una carica  $-Q$  disposta sulla superficie interna del conduttore, cioè sulla parete che delimita il buco stesso.

Poiché, per ipotesi, il conduttore era inizialmente scarico, sulla superficie esterna del conduttore dovrà trovarsi una carica  $+Q$  la quale produrrà quindi un campo elettrico nell'ambiente esterno al conduttore.

Si noti che, attraverso il fenomeno dello schermo elettrostatico, possiamo modificare la carica sulla superficie esterna del conduttore, per esempio, scaricandolo sommandogli la carica  $-Q$ ; ma non si può, dall'esterno, alterare né la distribuzione né la carica totale sulla superficie interna.

Possiamo adesso chiederci come è nata la carica  $-Q$  sulla superficie interna del conduttore.

Chiaramente il corpo che si trova nel conduttore produce un campo elettrico intorno a sé: nel momento in cui esso viene racchiuso dal conduttore, poiché nel conduttore non può sussistere campo elettrico, si manifesteranno degli spostamenti di cariche (correnti) al suo interno per garantire che il campo torni a essere nullo. I tempi caratteristici sono dell'ordine delle dimensioni lineari del corpo divise per la velocità della luce (30 cm per nanosecondo).

Questo processo è noto come *induzione elettrostatica* e, nel caso particolare della carica nel buco, essa è *completa*, nel senso che, per induzione, si manifesta una carica proprio uguale e opposta a quella inducente.

Il fenomeno dell'induzione totale nei conduttori ideali è una conseguenza della legge di Gauss, che trae la sua validità dalla legge di Coulomb, in particolare dall'andamento della forza con l'inverso del quadrato della distanza. La verifica dell'induzione completa è dunque una verifica dell'andamento come  $R^{-2}$  della legge di forza.

Attualmente si è verificato che l'esponente di  $R$  è  $-2$  entro 1 parte in  $10^{16}$ .

Anche il fenomeno dello schermo elettrostatico ha luogo a causa dell'induzione elettrostatica; però, in tal caso la carica affacciata a quella inducente non è, in generale, esattamente uguale e opposta: in altri termini, in questo caso, l'induzione, in generale, non è completa.

Osserviamo adesso che il fenomeno dell'induzione elettrostatica può, talvolta, complicare l'analisi di un problema per cui è necessario procedere con attenzione. Immaginiamo, per esempio, di avere due sfere conduttrici cariche rispettivamente con una carica  $Q_1$  e  $Q_2$ . Sappiamo che il campo che esse generano singolarmente nello spazio è quello di una carica puntiforme concentrata nel loro centro. Però, nel momento in cui mettiamo le due sfere in presenza una dell'altra, ci accorgiamo che la forza di attrazione non è proprio quella che darebbe la legge di Coulomb, ma è più intensa se  $Q_1$  e  $Q_2$  hanno segno discorde ed è meno intensa se  $Q_1$  e  $Q_2$  sono dello stesso segno. La spiegazione si trova nel fenomeno dell'induzione, che è responsabile dell'alterazione della distribuzione superficiale di carica su ciascuna sfera affinché entrambe restino equipotenziali. Su ciascuna sfera le cariche dello stesso segno tenderanno ad allontanarsi, mentre quelle di segno opposto ad avvicinarsi, per cui questo fenomeno produrrà comunque una forza attrattiva che esalterà quella coulombiana se le cariche erano discordi, mentre la attenuerà se erano concordi.

### 4.1.13 Campo elettrico in prossimità di un conduttore

Abbiamo visto che in un conduttore carico la carica si dispone solo sulla superficie esterna: di solito, per distinguere questa situazione da quella consueta della distribuzione di volume, invece del simbolo  $\rho(\vec{x})$  si usa il simbolo  $\sigma(\vec{x})$ , dove  $\vec{x}$  è un punto della superficie. Cerchiamo adesso di vedere come è fatto il campo elettrico nelle immediate vicinanze del conduttore.

Già sappiamo che esso è nullo al suo interno: vediamo dunque com'è nelle immediate vicinanze del corpo.

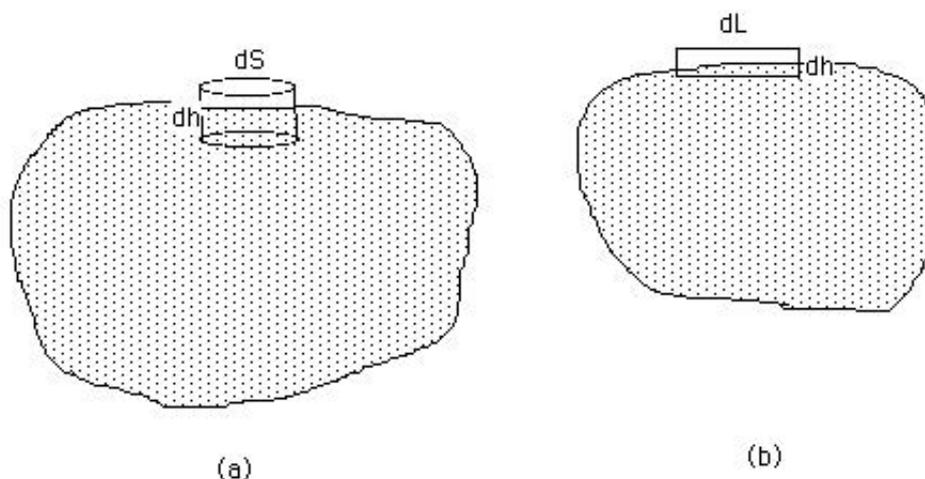


Figura 4.16: *Campo elettrico vicino a un conduttore*

Consideriamo la fig.4.16a. Ammettiamo che il corpo sia carico e che sia nota la distribuzione superficiale di carica  $\sigma(\vec{x})$ . Applichiamo la legge di Gauss al cilindretto retto infinitesimo disegnato in figura. Esso ha una base all'esterno e una base all'interno del corpo, dove il campo elettrico è certamente nullo. La legge di Gauss stabilisce che, se chiamiamo  $d\Sigma$  la superficie totale del cilindretto e  $dS$  la sua superficie di base, allora

$$\Phi_{d\Sigma}(\vec{E}) = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{x}) dS \quad (4.1.140)$$

dove  $\vec{x}$  è la posizione del centro del cilindro, sulla superficie del conduttore. Osserviamo che la superficie di base interna al conduttore non contribuisce comunque al flusso, mentre il contributo dalla superficie laterale può essere fatto divenire piccolo quanto vogliamo pur di mandare l'altezza del cilindretto  $dh$  a zero.

L'unico contributo che resta è quello dalla superficie di base esterna, e vale (sempre nel limite in cui  $dh$  tende a zero)

$$\Phi_{d\Sigma}(\vec{E}) = \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{S} = E_{\perp}(\vec{x}) dS \quad (4.1.141)$$

dove abbiamo indicato con  $E_{\perp}$  il valore della componente del campo proiettata nella direzione della normale uscente alla superficie nel punto dato.

Uguagliando le due espressioni e dividendo per  $dS$  si ottiene infine il seguente risultato, noto anche come *Teorema di Coulomb*

$$E_{\perp}(\vec{x}) = \frac{\sigma(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (4.1.142)$$

il quale stabilisce che la componente del campo elettrico normale alla superficie del conduttore, immediatamente al suo esterno, è proporzionale alla densità superficiale di carica nel punto considerato, e la costante di proporzionalità è proprio  $\epsilon_0^{-1}$ . Si noti che questa componente è necessariamente discontinua (mentre il potenziale, come abbiamo avuto modo di vedere in un esercizio, non lo è...). Vogliamo dimostrare adesso che la componente del campo elettrico tangente alla superficie è invece continua e quindi nelle immediate vicinanze del conduttore essa è nulla. Procediamo per assurdo e usiamo la seconda legge di Maxwell, relativa alla circuitazione del campo. Effettuiamo l'integrazione di Stokes su un percorso come quello di fig.4.16b. Di nuovo, mandando a zero l'altezza del rettangolo e ricordando che all'interno del conduttore il campo elettrico è comunque nullo, otteniamo

$$0 = \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{l} \quad (4.1.143)$$

essendo  $d\vec{l}$  un elemento di linea qualsiasi appartenente al piano tangente alla superficie nel punto dato. Ne concludiamo così che il campo elettrico non ha componente tangente, ma solo ortogonale al conduttore.

Il legame che abbiamo ottenuto fra il campo elettrico in prossimità del conduttore e la densità di carica presente sul corpo ci consente di spiegare anche il cosiddetto *effetto punta*.

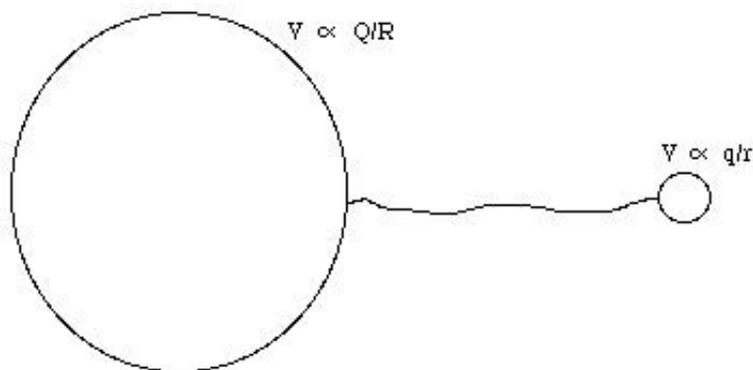


Figura 4.17: *Effetto punta*

Consideriamo per questo due sfere conduttrici, di raggi, rispettivamente  $R$  ed  $r$ , con  $R \gg r$ . Immaginiamo che esse siano abbastanza distanti fra loro da non influenzarsi troppo per induzione e che siano collegate elettricamente fra di loro attraverso un filo conduttore e quindi che si trovino allo stesso potenziale  $V$ . Da quanto abbiamo già visto, la carica sulle due sfere sarà rispettivamente pari a

$$q_1 = 4\pi \epsilon_0 V R \quad (4.1.144)$$

$$q_2 = 4\pi \epsilon_0 V r \quad (4.1.145)$$

e dunque le due densità di carica superficiali (abbiamo assunto che gli effetti di induzione siano trascurabili...) saranno rispettivamente pari a

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \frac{V}{R} \quad (4.1.146)$$

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \frac{V}{r} \quad (4.1.147)$$

ovvero i due campi elettrici superficiali avranno intensità, rispettivamente  $V/R$  e  $V/r$ . Come si vede, a parità di potenziale, il campo è molto più grande in prossimità della sfera piccola, e questo spiega il motivo per il quale vicino alle punte si realizzano, a parità delle altre condizioni, i campi elettrici più intensi.

#### 4.1.14 La capacità di un conduttore isolato

Immaginiamo adesso di disporre di un conduttore di dimensioni finite e sia  $Q$  la carica depositata su di esso. Come sappiamo esso si trova tutto allo stesso potenziale elettrostatico  $V_0$  (misurato rispetto all'infinito ...) ed è un fatto sperimentale che la densità superficiale di carica  $\sigma(\vec{y})$  sul conduttore, fissata la carica totale, è una funzione univocamente determinata. D'altronde, per quanto abbiamo già studiato, in ogni punto  $\vec{x}$  dello spazio, e quindi anche sul conduttore stesso, risulta

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\sigma(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.148)$$

Vogliamo adesso sapere quale sarà la distribuzione  $\sigma'(\vec{y})$  della carica sul conduttore quando la carica totale diventa

$$Q' = \lambda Q \quad (4.1.149)$$

Consideriamo per questo la funzione

$$\sigma'(\vec{y}) = \lambda \sigma(\vec{y}) \quad (4.1.150)$$

Questa ipotetica distribuzione è tale per cui

$$\int ds \sigma'(\vec{y}) = Q' \quad (4.1.151)$$

e inoltre determina un potenziale costante sul conduttore.

Ne segue che, se immaginiamo di poter "congelare" la proprietà di conduzione del conduttore e poi di cambiare la distribuzione di carica sullo stesso in modo tale che

$$\sigma(\vec{y}) \rightarrow \sigma'(\vec{y}) = \lambda \sigma(\vec{y}) \quad (4.1.152)$$

ecco che, se poi "scongeliamo" di nuovo la proprietà di conduzione del conduttore, *non* ci sarà campo elettrico nel conduttore ( $V' = \lambda V = \text{cost}$ ) e dunque la distribuzione  $\sigma'(\vec{y})$  non muterà a conduttore "scongelo".

Per l'unicità della distribuzione di carica a carica totale fissata, ne segue che

$$\sigma'(\vec{y}) = \lambda \sigma(\vec{y}) \quad (4.1.153)$$

è proprio la densità di carica corrispondente alla carica totale  $Q' = \lambda Q$ .

Ma allora, per la (4.1.148), ne segue che il potenziale sul conduttore dipende linearmente dalla carica presente su di esso, ovvero risulta

$$Q = C V \quad (4.1.154)$$

La costante di proporzionalità  $C$  è nota come *capacità del conduttore* e dipende unicamente dalla sua geometria, che determina univocamente la distribuzione normalizzata della carica sul conduttore<sup>9</sup>.

La sua unità di misura, nel Sistema Internazionale, è il Farad ( $F$ ) e i suoi sottomultipli (milli, micro, nano, pico ...). Si tratta infatti di una unità di misura molto grande. Per rendercene conto, proviamo a determinare la capacità di una sfera conduttrice isolata di raggio  $R$  pari al raggio della Terra. Abbiamo visto che il potenziale a cui si porta una sfera conduttrice di raggio  $R$  quando su di essa si trova una carica  $Q$  vale

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (4.1.156)$$

per cui, dalla definizione, si ha

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \times 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \times 6.378 \cdot 10^6 = 0.7097 \text{ mF} \quad (4.1.157)$$

<sup>9</sup>Abbiamo infatti dalla (4.1.154) che, se  $\vec{X}$  è un qualsiasi punto del conduttore

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int ds(\vec{y}) \frac{\sigma(\vec{y})}{Q} \frac{1}{|\vec{X} - \vec{y}|} \quad (4.1.155)$$

e abbiamo visto prima che la funzione  $\frac{\sigma(\vec{y})}{Q}$  è indipendente da  $Q$  stessa, dunque può dipendere solo dalla geometria ...

#### 4.1.15 Elettrostatica di un sistema di conduttori

Nel caso di un solo conduttore finito e isolato, abbiamo dimostrato che esiste un legame lineare fra la carica complessiva presente sul conduttore e il potenziale (rispetto all'infinito) a cui esso si trova.

Questo risultato è molto più generale, infatti si dimostra che, dato comunque un sistema  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , di  $n$  conduttori finiti e fissi l'uno rispetto all'altro, sui quali siano presenti le cariche (totali)  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , i potenziali  $V_1, V_2, \dots, V_n$  di questi conduttori (rispetto all'infinito) sono esprimibili attraverso una relazione lineare del tipo

$$V_i = \sum_k A_{ik} Q_k \equiv A_{ik} Q_k \quad (4.1.158)$$

dove la matrice  $A_{ik}$  è una matrice quadrata simmetrica e invertibile (ad autovalori strettamente positivi), detta *matrice delle ammettenze*, i cui elementi dipendono esclusivamente dalla geometria di tutti i conduttori presenti.

Immaginiamo infatti di considerare il sistema dei conduttori dati, ma caricati in modo che tutti i conduttori, a parte il conduttore  $i$ -esimo, abbiano una carica totale  $Q_j = 0$ , mentre il conduttore  $i$ -esimo abbia la carica  $Q_i$ . Chiaramente, a causa dell'induzione elettrostatica, le densità di carica sui vari conduttori *non* saranno nulle, mentre, ovviamente, lo sarà il loro integrale (a parte quello relativo al corpo  $i$ -esimo). Il potenziale sarà comunque costante sui vari conduttori e, per quanto visto quando abbiamo considerato il caso di un solo conduttore isolato, scalerà proporzionalmente alla carica totale presente sul corpo  $i$ -esimo, infatti se *tutte* le densità di carica vengono moltiplicate per  $\lambda$ , il potenziale sui vari conduttori cambia proporzionalmente al fattore di scala, mentre le cariche sui vari corpi restano nulle ( $\lambda Q_j = \lambda \cdot 0 = 0$ ), a parte quella sul corpo  $i$ -esimo che diviene  $\lambda Q_i$ . Dunque

$$V_j^{(i)} = A_{ji} Q_i \quad \text{non sommato su } i \quad (4.1.159)$$

Quando sono carichi tutti i corpi, per il principio di sovrapposizione lineare, il potenziale sul corpo  $j$ -esimo risulterà la somma dei potenziali determinati su quel corpo dalle varie configurazioni di carica in cui una sola è non nulla; ovvero abbiamo il risultato cercato, cioè che

$$V_i = A_{ik} Q_k \quad (4.1.160)$$

I coefficienti  $A_{jk}$  dipendono solo dalla geometria relativa dei vari corpi, quando sono tutti presenti ed essi tengono conto, implicitamente, dei fenomeni induttivi che si manifestano fra i vari conduttori.

Dal punto di vista energetico, al sistema di conduttori carichi sarà associata, naturalmente, una energia elettrostatica totale che, per quanto visto precedentemente, risulterà pari a

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) \quad (4.1.161)$$

Ma la carica è diversa da zero solo sulle superfici esterne dei conduttori che si trovano comunque a potenziale costante, per cui risulta infine

$$U = \frac{1}{2} Q_i V_i = \frac{1}{2} A_{ik} Q_i Q_k \quad (4.1.162)$$

Essendo l'energia potenziale elettrostatica una grandezza definita positiva, ne segue che la matrice delle ammettenze, come avevamo già preannunciato, è una matrice invertibile con autovalori tutti strettamente positivi, per cui la relazione lineare fra potenziali e cariche può essere anche riscritta come relazione fra cariche e potenziali, ovvero potremo anche scrivere che

$$Q_i = C_{ik} V_k \quad (4.1.163)$$

dove la matrice  $C_{ik}$ , inversa della  $A_{ik}$ , è detta *matrice delle capacità* e anch'essa, ovviamente, è simmetrica e definita positiva. Essa generalizza la relazione che abbiamo dimostrato per il conduttore isolato.

Per quanto riguarda l'energia potenziale, essa può essere altresì espressa come

$$U = \frac{1}{2} C_{ik} V_i V_k \quad (4.1.164)$$

Ma ritorniamo sul problema dei coefficienti di ammettenza e sulla loro dipendenza dalla presenza di tutti i conduttori facenti parte del sistema.

Per convincerci di questo punto, consideriamo il caso semplicissimo di due soli conduttori sferici e immaginiamo che il primo abbia carica  $Q > 0$  mentre il secondo sia globalmente scarico. Supponiamo dapprima di allontanare i due conduttori uno dall'altro fino a poter considerare trascurabili gli effetti di induzione reciproca. Il primo possederà allora una densità di carica uniforme sulla sua superficie, e il secondo avrà invece una densità di carica superficiale identicamente nulla. Dal punto di vista energetico, solo il primo contribuirà, per cui avremo

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} \quad (4.1.165)$$

la quale, dovendosi anche poter esprimere attraverso la relazione

$$U = \frac{1}{2} A_{ij} Q_i Q_j \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} A_{11} Q^2 \quad (4.1.166)$$

mostra che, nel caso particolare, risulta appunto

$$A_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (4.1.167)$$

ovvero che  $A_{11}$  dipende solo dalla geometria del primo conduttore.

Supponiamo adesso di avvicinare la seconda sfera alla prima, e immaginiamo di poterlo fare avendo "congelato" le caratteristiche conduttrici del corpo.

Chiaramente, a causa del primo corpo carico, all'interno del secondo esisterà un campo elettrico diverso da zero. Se immaginiamo di "scongellare" il conduttore, le cariche libere al suo interno si sposteranno sotto l'effetto del campo elettrico, fino a che il controcampo da esse prodotto non annullerà completamente il campo elettrico altrimenti presente nel conduttore. Naturalmente questo riassetamento produce un campo all'esterno il quale provoca un riassetamento della carica anche nel primo conduttore, etc...

I tempi caratteristici sono dell'ordine delle dimensioni del conduttore diviso per la velocità della luce, che è la velocità con la quale si propagano le perturbazioni elettromagnetiche. La cosa importante è che, a causa dell'induzione, le cariche sul corpo che era globalmente scarico affacciate verso quello carico, sono di segno opposto a quelle di quest'ultimo. E' vero che, dalla parte opposta, si trova una uguale carica di segno opposto, ma a causa della dipendenza dalla distanza, ne consegue una forza attrattiva fra i due conduttori, anche se il secondo è globalmente scarico.

Per via dell'induzione, un conduttore carico è dunque in grado di attrarre anche un conduttore scarico. Una conseguenza di questo fenomeno è che, venendo dall'infinito con il secondo conduttore globalmente scarico, per la presenza del primo, si guadagna lavoro meccanico per via dell'attrazione fra i due corpi. Questo lavoro va a spese dell'energia elettrostatica globale del sistema la quale, pur continuando a essere espressa dalla relazione

$$U = \frac{1}{2} A_{11} Q^2 \quad (4.1.168)$$

(solo il primo corpo è carico ...) diminuisce all'avvicinarsi dei due corpi. Questo implica, naturalmente, che il coefficiente  $A_{11}$  diminuisca all'avvicinarsi del secondo conduttore (scarico) a quello carico e quindi dipenda anche dalla posizione (e geometria) di quest'ultimo.

La forza che agisce fra i due conduttori è dovuta all'induzione ed è legata proprio alla dipendenza di  $A_{11}$  dalla distanza relativa dei due corpi dalla equazione

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{1}{2} Q^2 \vec{\nabla} A_{11} \quad (4.1.169)$$

Questo risultato mostra chiaramente che  $A_{11}$  in generale, pur descrivendo il coefficiente di proporzionalità fra la carica e il potenziale a cui lo stesso corpo si è portato, dipende necessariamente, in generale, anche dalla posizione dell'altro conduttore presente.

### 4.1.16 Il condensatore

Consideriamo adesso il caso di due soli conduttori interagenti fra loro.

La matrice delle ammettenze sarà dunque una matrice  $2 \times 2$  e risulta

$$V_1 = A_{11}Q_1 + A_{12}Q_2 \quad Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \quad (4.1.170)$$

$$V_2 = A_{21}Q_1 + A_{22}Q_2 \quad Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \quad (4.1.171)$$

La differenza di potenziale fra il primo e il secondo conduttore vale

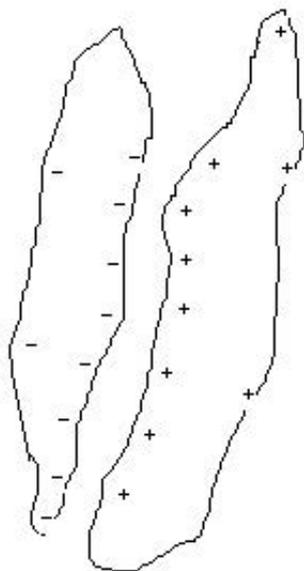


Figura 4.18: *Il condensatore*

$$\begin{aligned} \Delta V &\equiv V_1 - V_2 = A_{11}Q_1 + A_{12}Q_2 - (A_{21}Q_1 + A_{22}Q_2) = \\ &= Q_1(A_{11} - A_{21}) + Q_2(A_{12} - A_{22}) \end{aligned} \quad (4.1.172)$$

e, nel caso particolare in cui le cariche sui due conduttori siano uguali e opposte, ovvero risulti  $Q_1 = Q$  e  $Q_2 = -Q$ , si ha

$$\Delta V = Q(A_{11} - A_{21} - A_{12} + A_{22}) = Q(A_{11} - 2A_{21} + A_{22}) \quad (4.1.173)$$

Se possiamo considerare il sistema dei due conduttori come isolato, ovvero se possiamo trascurare gli effetti di induzione fra i due conduttori in questione e gli altri eventualmente presenti, si dice che il sistema dei due conduttori forma un *condensatore elettrostatico*, di cui i due conduttori costituiscono le *armature*.

Immaginiamo ora di caricare i due conduttori con cariche uguali e opposte: se possono comunque essere trascurati gli effetti di induzione con altri conduttori eventualmente presenti, è evidente che il campo elettrico dovrà essere

confinato solo fra i due conduttori. In ogni buon condensatore, infatti, l'energia elettrostatica (la cui densità, come abbiamo visto, è proporzionale al quadrato del campo elettrico...) è racchiusa nel volume compreso fra le due armature e quella dispersa nello spazio circostante è tanto più trascurabile quanto più il condensatore è realizzato propriamente. Questo significa che se il condensatore è ben realizzato, tutte le azioni elettriche si manifesteranno solo fra i due conduttori (si ricordi che la carica totale del sistema è per ipotesi nulla ...). Quanto alla differenza di potenziale fra le due armature del condensatore, come si è visto, essa è data dalla relazione

$$\Delta V = Q(A_{11} - A_{21}) - Q(A_{12} - A_{22}) = Q(A_{11} - 2A_{21} + A_{22}) \quad (4.1.174)$$

Analogamente al caso del conduttore isolato, la quantità  $(A_{11} - 2A_{21} + A_{22})^{-1}$  viene chiamata *capacità* del condensatore

$$C = \frac{1}{A_{11} - 2A_{21} + A_{22}} \quad (4.1.175)$$

Essa dipende solo dalla geometria del sistema formato dai due conduttori, ed è tale che il suo prodotto per il modulo della differenza di potenziale (d.d.p.) fra le armature fornisce la carica  $Q$  sull'armatura positiva (sull'altra, ovviamente, la carica è opposta...)

$$Q = C \Delta V \quad (4.1.176)$$

Dal punto di vista energetico, l'energia elettrostatica associata al condensatore carico è esprimibile attraverso la relazione generale, valida per conduttori comunque carichi

$$U = \frac{1}{2} C_{ik} V_k V_i = \frac{1}{2} Q_i A_{ik} Q_k \quad (4.1.177)$$

Nel caso particolare del condensatore (per ipotesi, sulla prima armatura è presente la carica  $+Q$ , mentre sulla seconda la carica  $-Q$ ) essa diventa

$$U = \frac{1}{2} Q^2 (A_{11} - 2A_{21} + A_{22}) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \quad (4.1.178)$$

Veniamo adesso a considerare qualche esempio di condensatore.

Come primo esempio, iniziamo dal caso **condensatore sferico**, ovvero dal caso in cui il primo conduttore sia una sfera di raggio  $r$ , mentre il secondo sia un'altra sfera cava, concentrica con la prima, avente raggio interno  $R_1 > r$  e raggio esterno  $R_2 > R_1$ . Chiaramente il sistema dei due conduttori presenta una perfetta simmetria sferica.

Iniziamo calcolando la matrice delle ammettenze.

Procederemo seguendo la definizione.

Supponiamo dunque che la carica totale sulla sfera interna sia  $Q$ , mentre che

quella presente sul guscio esterno sia nulla. Per il meccanismo dell'induzione, sulla superficie interna del guscio sarà presente una carica  $-Q$ , mentre la carica  $+Q$  si troverà sulla superficie esterna dello stesso. Determiniamo, in queste condizioni, il potenziale elettrostatico a cui si trovano i due conduttori.

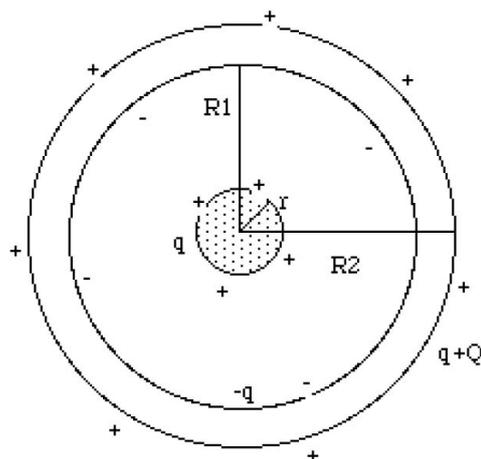


Figura 4.19: *Condensatore sferico*

E' opportuno, a questo punto, ricordare un risultato ottenuto quando abbiamo studiato il potenziale generato da una carica  $Q$  distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio  $R$ : avevamo visto che

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{quando } r > R \quad (4.1.179)$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{quando } r < R \quad (4.1.180)$$

Ne segue che, applicando il principio di sovrapposizione lineare per i potenziali prodotti dalle tre distribuzioni di carica a simmetria sferica, avremo

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad \text{quando } x \leq r \quad (4.1.181)$$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad \text{quando } r \leq x \leq R_1 \quad (4.1.182)$$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad \text{quando } R_1 \leq x \leq R_2 \quad (4.1.183)$$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} \quad \text{quando } x \geq R_2 \quad (4.1.184)$$

Si vede allora chiaramente che il potenziale è costante nella sfera interna, dove vale

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (4.1.185)$$

e analogamente lo è nel guscio, dove vale

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (4.1.186)$$

da cui, in base alla definizione dell'ammettenza, ricaviamo

$$A_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (4.1.187)$$

$$A_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad (4.1.188)$$

Per conoscere gli altri due coefficienti di ammettenza, occorre procedere caricando il conduttore esterno con una carica  $Q$  e mantenendo scarico quello interno. In questo caso la carica si disporrà solo sulla superficie esterna del guscio, e, per quanto già sappiamo, avremo

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad \text{per } x \leq R_2 \quad (4.1.189)$$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} \quad \text{per } x \geq R_2 \quad (4.1.190)$$

per cui, in questo caso, risulta

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (4.1.191)$$

ovvero, dalla definizione degli elementi della matrice  $A_{ij}$ , risulterà

$$A_{12} = A_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (4.1.192)$$

La capacità del condensatore sferico vale dunque

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{A_{11} - 2A_{21} + A_{22}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_2}} = \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R_1}{R_1 - r} \end{aligned} \quad (4.1.193)$$

Come si vede, nel caso in cui  $R_1$  ed  $r$  siano molto vicini fra loro per cui il denominatore della frazione divenga prossimo a zero, essa può divenire molto

maggiore della capacità della sfera conduttrice isolata, che vale semplicemente  $4\pi\epsilon_0 r$ . In questo caso, ponendo  $R_1 = r + \delta$  e sviluppando l'espressione della capacità al primo ordine in  $\delta$ , otteniamo

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r^2}{\delta} = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} \quad (4.1.194)$$

dove  $S$  è la superficie delle due armature affacciate, che, essendo molto vicine, possiamo considerare uguali. L'espressione così ottenuta è quella della capacità di un **condensatore piano**, fatto da due superfici conduttrici piane e parallele, poste a una distanza  $\delta$ , aventi la prima una distribuzione uniforme di carica  $\sigma$  e la seconda  $-\sigma$ .

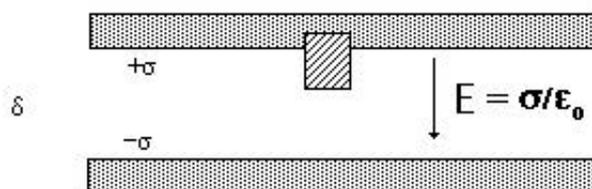


Figura 4.20: *Condensatore piano*

Trascurando gli effetti di bordo<sup>10</sup>, per sole ragioni di simmetria il campo elettrico deve essere ortogonale ai due piani e, per la legge di Gauss, è immediato mostrare che il suo modulo deve valere

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.1.195)$$

Ne segue, dalla definizione, che la d.d.p. fra le due armature varrà

$$\Delta V = E \delta = \frac{\sigma \delta}{\epsilon_0} \quad (4.1.196)$$

Ma, per definizione  $Q = S\sigma$  per cui si ha infine che

$$\Delta V = \frac{Q \delta}{S \epsilon_0} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} \quad (4.1.197)$$

<sup>10</sup>Questo corrisponde ad assumere che non ci sia, sostanzialmente, campo elettrico disperso e questo è tanto più vero quanto più le dimensioni lineari dei conduttori sono grandi rispetto alla loro distanza.

Passiamo adesso a calcolare la capacità di un **condensatore cilindrico**. Per definizione esso è costituito da due conduttori cilindrici coassiali di raggio  $R_i$  ed  $R_e$ , infiniti.

In questo caso, il campo elettrico è radiale ed è diverso da zero solo fra i due conduttori se la densità lineare di carica  $\lambda$  su di essi è uguale e opposta. Risulta

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (4.1.198)$$

ovvero, integrando l'espressione di sopra, la ddp fra le due armature risulta data da

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) \quad (4.1.199)$$

da cui segue che la capacità vale

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = L 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \quad (4.1.200)$$

dove  $L$  è la lunghezza complessiva del sistema, ovvero  $C/L$  è la capacità per unità di lunghezza, se il condensatore, come noi lo abbiamo concepito fin'ora, è, appunto, infinito.

Osserviamo, di nuovo, che, nel caso in cui i due raggi siano molto prossimi, ovvero se accade che

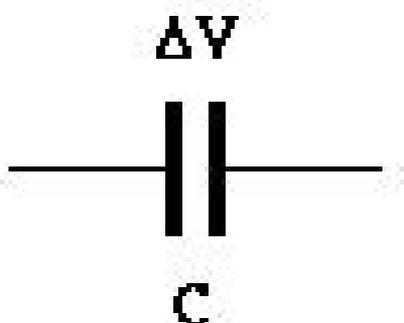
$$R_e = R_i + \delta \quad \text{con } \delta \ll R_i \quad (4.1.201)$$

risulta

$$C = L 2\pi\epsilon_0 \frac{R_i}{\delta} = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} \quad (4.1.202)$$

di nuovo come nel condensatore piano ...

## 4.1.17 Collegamenti fra condensatori

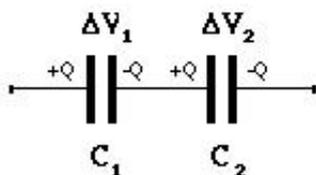


I condensatori vengono rappresentati simbolicamente nel modo riportato a fianco

Figura 4.21: Simbolo del condensatore

Disponendo di due condensatori, questi possono essere collegati fra di loro in due modi: in *serie* oppure in *parallelo*.

a) in serie



b) in parallelo

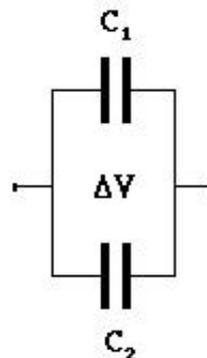


Figura 4.22: Condensatore piano

Nel primo caso (serie) la conservazione della carica implica che entrambi i condensatori siano necessariamente caricati con la stessa carica  $Q$ .

Osserviamo infatti che la carica totale sulle armature interne collegate fra loro è naturalmente nulla quando i condensatori sono scarichi e deve restare tale in ogni caso, poiché questi conduttori sono isolati ...

Come conseguenza, essendo la ddp  $\Delta V$  ai capi del sistema dei due condensatori uguale, per definizione, alla somma delle due ddp  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  ai capi di ciascuno di essi, risulta

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (4.1.203)$$

e questa relazione mostra come l'insieme delle due capacità disposte in serie si comporta come una singola capacità  $C_{eq}$  tale che

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.1.204)$$

Questa equivalenza la ritroviamo anche dal punto di vista energetico, infatti l'energia immagazzinata nell'insieme dei due condensatori vale

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} + \frac{Q^2}{C_2} = \frac{Q^2}{C_{eq}} \quad (4.1.205)$$

Nel secondo caso (parallelo) è la ddp a essere la stessa su entrambi i condensatori, per cui la carica totale accumulata su entrambi i condensatori vale

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = \Delta V (C_1 + C_2) \quad (4.1.206)$$

ovvero il parallelo dei due condensatori si comporta come un singolo condensatore avente capacità  $C_{eq}$  tale che

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (4.1.207)$$

Di nuovo, questa *equivalenza* rispecchia anche l'aspetto energetico, infatti l'energia totale immagazzinata dall'insieme dei due condensatori vale

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} \Delta V^2 C_1 + \frac{1}{2} \Delta V^2 C_2 = \frac{1}{2} \Delta V^2 C_{eq} \quad (4.1.208)$$

### 4.1.18 I dielettrici

Se in un condensatore piano, di capacità  $C_0$ , caricato con una carica  $Q_0$ , si riempie la zona fra le due armature con una sostanza isolante (dielettrica), in generale si osserva che la ddp ai capi del condensatore diminuisce in proporzione fissa

$$\frac{Q_0}{C_0} = \Delta V_0 \Rightarrow \Delta V' = (1 - \kappa)\Delta V_0 \quad (4.1.209)$$

dove  $\kappa$  è una costante non negativa e minore di 1, caratteristica solo del mezzo dielettrico utilizzato. In altre parole, la capacità del condensatore riempito di dielettrico aumenta proporzionalmente alla quantità  $(1 - \kappa)^{-1}$  rispetto al valore  $C_0$  che il condensatore avrebbe in vuoto. Si ha infatti

$$C_{diel} = \frac{Q_0}{\Delta V'} = \frac{1}{1 - \kappa} \frac{Q_0}{\Delta V_0} = \frac{C_0}{1 - \kappa} \quad (4.1.210)$$



Figura 4.23: Condensatore senza e con dielettrico

L'inverso del fattore di riduzione del campo elettrico  $(1 - \kappa)^{-1}$  viene chiamata *costante dielettrica relativa* del mezzo in questione

$$\epsilon_r = (1 - \kappa)^{-1} \Rightarrow \kappa = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \quad (4.1.211)$$

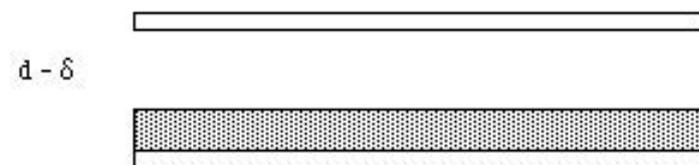
Esso è un numero puro, maggiore o uguale all'unità (dato che  $\kappa$  è compreso fra zero e uno...) : valori tipici di  $\epsilon_r$  sono i seguenti

$\epsilon_r = 80$	per l'acqua
$\epsilon_r = 1.00054$	per l'aria
$\epsilon_r = 3.7$	per la carta
$\epsilon_r = 4$	per il vetro
$\epsilon_r = 6$	per il neoprene(gomma)
.....	

Se invece di riempire tutta la zona fra le due armature del condensatore si riempie di dielettrico solo un certo tratto  $\delta$  ( $\delta < d =$  distanza fra le armature),

sperimentalmente si osserva che la ddp fra le armature (sempre a carica  $Q_0$  costante...) diviene

$$\Delta V' = \left[ 1 - \frac{\delta}{d} \kappa \right] \Delta V_0 \quad (4.1.212)$$



**Figura 4.24:** Condensatore riempito in parte di dielettrico

D'altronde, per la legge di Gauss, se trascuriamo gli effetti di bordo, cioè se ammettiamo che le dimensioni lineari delle plac-

che siano comunque molto più grandi della loro distanza (condensatore piano infinito...), non essendo cambiata la densità di carica sulle armature del condensatore poiché non è cambiata la carica  $Q_0$ , non può essere cambiato nemmeno il campo nella zona dove non è presente il dielettrico.

Questa zona, dunque, contribuirà la potenziale  $\Delta V'$  per la quantità

$$\Delta V'' = \Delta V \frac{d - \delta}{d} \quad (4.1.213)$$

dunque, il dielettrico, che ha spessore  $\delta$ , contribuirà a sua volta alla ddp fra le armature per la quantità

$$\Delta V_d = \Delta V' - \Delta V'' = \Delta V (1 - \kappa) \frac{\delta}{d} \quad (4.1.214)$$

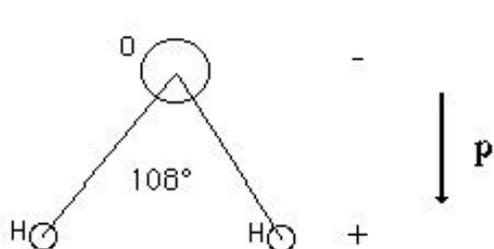
Per poter spiegare i fatti sperimentali sopra esposti, dobbiamo dunque ammettere che, nella zona piena di dielettrico, l'intensità del campo elettrico  $E$  sia diminuita di un fattore  $(1 - \kappa)$  rispetto al valore  $E_0$  ivi presente in vuoto

$$E = (1 - \kappa) E_0 \quad (4.1.215)$$

Ma noi sappiamo che la sorgente del campo elettrico sono le cariche elettriche, quindi questo significa che nel condensatore carico, in presenza del dielettrico, deve essersi originata una distribuzione di carica tale da ridurre il campo elettrico  $E_0$  che sarebbe altrimenti presente.

Come può accadere che sia nata una distribuzione di carica nel dielettrico se questo non ha, al suo interno, cariche libere (come dimostrato anche dal fatto che, al momento della sua inserzione, il condensatore non si è scaricato così come sarebbe accaduto se avessimo inserito del materiale conduttore...)? Per poter rispondere occorre considerare più in dettaglio la struttura microscopica delle sostanze. Le molecole che costituiscono il materiale isolante sono globalmente neutre, però sono formate da cariche positive (nuclei atomici) e cariche negative (elettroni) e in molti casi esse possiedono addirittura

un momento di dipolo elettrico intrinseco.  
Consideriamo, per esempio, la molecola dell'acqua.



I due atomi di idrogeno non sono disposti l'uno rispetto all'altro simmetricamente rispetto all'ossigeno, bensì le congiungenti tali atomi con l'ossigeno formano fra di loro un angolo di circa  $108^\circ$ .

**Figura 4.25:** Condensatore riempito in parte di dielettrico

Poiché l'ossigeno è più elettronegativo dell'idrogeno, la carica elettronica è più spostata verso l'ossigeno, per cui la molecola presenta un momento di dipolo elettrico permanente  $\vec{p}$  ( $|\vec{p}| \approx 10^{-30} \text{ Coulomb} \times \text{metro}$ ). In assenza di campi esterni, i dipoli saranno orientati casualmente, per via dell'agitazione termica per cui il momento di dipolo medio  $\langle \vec{p} \rangle$  sarà nullo.

Però, in un campo elettrico  $\vec{E}$  le molecole tenderanno a orientarsi nella direzione del campo, in modo da rendere minima l'energia potenziale del dipolo: la conseguenza è che il valor medio del momento di dipolo  $\langle \vec{p} \rangle$  non resterà nullo. Se definiamo dunque il vettore di polarizzazione  $\vec{P}(\vec{x})$  come la densità di momento di dipolo nella sostanza, ovvero, detto  $N$  il numero di molecole per unità di volume

$$\vec{P} = N \langle \vec{p} \rangle \quad (4.1.216)$$

esso sarà una funzione che, in generale, non risulterà più nulla come accade in assenza di campo elettrico.

Questo risultato non vale solo per le sostanze che presentano un momento di dipolo intrinseco, perché, anche nel caso in cui il dielettrico sia costituito da molecole non polari, come è illustrato nella sezione che segue, in presenza di campo esterno, finisce per nascere, comunque, una polarizzazione  $\vec{P}$  nel mezzo che è diversa da zero...

Osserviamo adesso che il fatto che nel corpo del dielettrico omogeneo e isotropo ci sia polarizzazione conduce alla nascita di una distribuzione di carica di polarizzazione, sulla superficie dello stesso, secondo il meccanismo illustrato per un condensatore a facce piane e parallele nella figura che segue.

Questa densità di carica risulta proporzionale all'intensità della polarizzazione stessa.

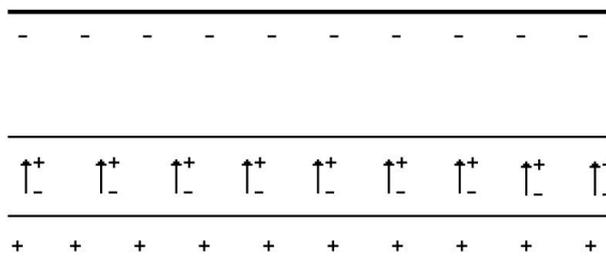
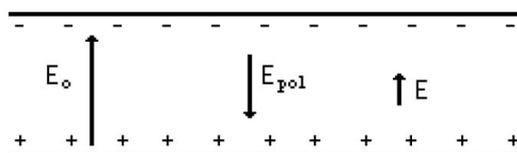


Figura 4.26: Come avviene la polarizzazione del dielettrico



**Figura 4.27:** Campo  $\vec{E}_0$  e  $\vec{E}_{pol}$   
 polarizzazione, per cui il campo risultante  $\vec{E}$  risulta attenuato.

La conseguenza, per la legge di Gauss, è che nel dielettrico, oltre al campo  $E_0$  prodotto dalle cariche di conduzione presenti sulle armature del condensatore, si manifesta un contro-campo elettrico  $E_{pol}$  dovuto alle cariche di

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} \quad (4.1.217)$$

Il fatto che l'attenuazione sia proprio tale che

$$\vec{E} = (1 - \kappa)\vec{E}_0 \quad (4.1.218)$$

significa, per la legge di Gauss, che sulle superfici del dielettrico si deve essere formata una densità di carica superficiale pari a

$$\sigma_{pol} = -\kappa\sigma_0 \quad (4.1.219)$$

dove  $\sigma_0$  è la densità di carica di conduzione presente sulla armatura prospiciente la superficie del dielettrico considerata.

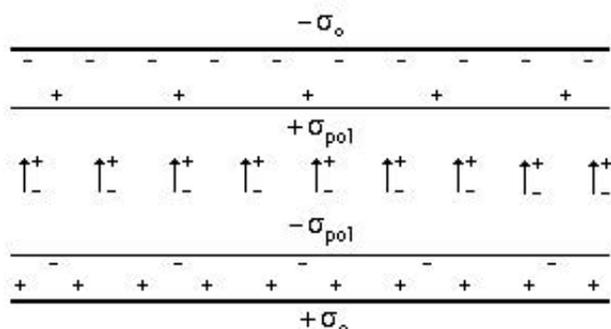
Si ha infatti

$$E = \frac{\sigma + \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = (1 - \kappa)E_0 = (1 - \kappa)\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad (4.1.220)$$

da cui segue

$$\sigma_0 + \sigma_{pol} = (1 - \kappa)\sigma_0 \Rightarrow \sigma_{pol} = -\kappa\sigma_0 \quad (4.1.221)$$

Fino a ora, comunque, abbiamo ragionato considerando quello che accade in condensatori a facce piane e parallele: vediamo adesso come possiamo

Figura 4.28: *La polarizzazione del dielettrico*

generalizzare quanto abbiamo ottenuto per questa configurazione al caso in cui la geometria non sia necessariamente piana e il dielettrico non sia necessariamente omogeneo.

Abbiamo capito che la riduzione del campo elettrico nel dielettrico è dovuta alla nascita della carica di polarizzazione, legata, a sua volta, al fenomeno della polarizzazione dielettrica, ovvero alla nascita, all'interno del materiale, di una densità di momento di dipolo elettrico  $\vec{P}$ .

Assumiamo dunque di avere a che fare con un mezzo in cui sia presente una densità di polarizzazione  $\vec{P}(\vec{y})$ : cerchiamo di valutare quali sono le conseguenze elettrostatiche di questa densità di momento di dipolo.

Come sappiamo, ciò che serve è determinare, per esempio, il potenziale prodotto da questa distribuzione e ricordiamo a questo proposito che il potenziale prodotto nel punto  $\vec{x}$  da un dipolo di momento  $\vec{p}$  presente nel punto  $\vec{y}$ , vale

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (4.1.222)$$

Ne segue che il potenziale prodotto da una distribuzione di momenti di dipolo descritta dalla densità  $\vec{P}(\vec{y})$ , sarà dato da

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\vec{P} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (4.1.223)$$

D'altronde ricordiamo che

$$\frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \vec{\nabla}_y (|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}) \quad (4.1.224)$$

per cui possiamo scrivere la funzione integranda nel modo seguente

$$\frac{\vec{P} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \vec{P}(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla}_y (|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}) \quad (4.1.225)$$

In generale, però, se  $\vec{v}$  è un campo vettoriale e  $F$  una funzione scalare qualsiasi, vale la seguente identità

$$\operatorname{div}(F\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}F + F \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (4.1.226)$$

per cui, nel nostro caso, abbiamo

$$\vec{P}(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla}_y(|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}) = \vec{\nabla}_y \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) - \frac{\vec{\nabla}_y \cdot \vec{P}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.227)$$

Ma l'integrale del primo addendo, per il teorema della divergenza, è nullo se la distribuzione  $\vec{P}(\vec{y})$  è diversa da zero solo al finito, per cui risulta infine

$$V(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.1.228)$$

che, si riconosce immediatamente, è il potenziale elettrostatico prodotto da una distribuzione di carica di polarizzazione  $\rho_p(\vec{y})$  legata a  $\vec{P}(\vec{y})$  dalla relazione

$$\rho_p(\vec{y}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{y}) \quad (4.1.229)$$

Dunque, la presenza di una densità di polarizzazione  $\vec{P}(\vec{y})$  determina la nascita di una densità di carica di polarizzazione  $\rho_p(\vec{y})$ , la quale, quindi, provoca le consuete manifestazioni elettrostatiche che sappiamo.

Vediamo allora come possiamo riscrivere la prima equazione di Maxwell in un mezzo dielettrico, tenendo conto anche delle cariche di polarizzazione. Avremo

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_c + \rho_p) \quad (4.1.230)$$

dove abbiamo distinto fra le cariche consuete, cioè *di conduzione*, descritte dalla densità  $\rho_c$ , e quelle generate dal meccanismo della polarizzazione dielettrica, descritte dalla densità  $\rho_p$ .

Per quanto già detto, risulterà allora che

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_c - \operatorname{div} \vec{P}) \quad (4.1.231)$$

ovvero

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_c \quad (4.1.232)$$

Se definiamo allora il campo *spostamento elettrico*  $\vec{D}$  nel modo seguente

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.1.233)$$

per quanto visto sopra, ne segue che  $\vec{D}$  ha come sorgenti le sole cariche di conduzione e non quelle di polarizzazione !

Il legame fra  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  può essere precisato meglio ricordando che, in un mezzo omogeneo e isotropo, la densità di polarizzazione  $\vec{P}$  risulta proporzionale al campo elettrico  $\vec{E}$  (confronta il paragrafo che segue ...), ovvero

$$\vec{P}(\vec{y}) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{y}) \quad (4.1.234)$$

dove la costante  $\chi$  è la *suscettività elettrica* del mezzo. Risulta dunque

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \quad (4.1.235)$$

Nel caso del condensatore piano riempito di dielettrico omogeneo e isotropo, per ragioni di simmetria anche il vettore  $\vec{D}$  sarà uniforme e costante all'interno del condensatore: poichè esso ha origine nelle cariche di conduzione, per il teorema della divergenza avremo che, a parità di carica sulle armature, esso sarà lo stesso sia che ci sia o che non ci sia il dielettrico; ovvero, detto  $\vec{E}_0$  il campo elettrico in assenza di dielettrico, sarà comunque

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (4.1.236)$$

Per quanto abbiamo già visto, poi, la quantità  $(1 + \chi)$  altri non è che la grandezza che abbiamo già chiamato  $\epsilon_r$ , cioè la costante dielettrica relativa del mezzo: possiamo così concludere affermando che in un dielettrico omogeneo e isotropo, il legame fra  $\vec{D}$  ed  $\vec{E}$  è il seguente

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (4.1.237)$$

Osserviamo, in particolare, che alla superficie di separazione fra due dielettrici (o fra un dielettrico e il vuoto ...)

- la componente di  $\vec{D}$  ortogonale alla superficie è continua (mentre la stessa componente del campo elettrico  $\vec{E}$  non lo è, a causa della presenza delle cariche di polarizzazione ...);
- la componente di  $\vec{E}$  parallela alla superficie è continua, poichè il campo  $\vec{E}$  è conservativo (mentre  $\vec{D}$ , in generale, non lo è ...).

In particolare, in un mezzo dielettrico omogeneo e isotropo, la prima legge di Maxwell può essere riscritta nel modo seguente

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (4.1.238)$$

dove  $\rho_c$  è la carica di *conduzione* presente, cioè depurata da quella originata dal meccanismo della polarizzazione.

Poiché la seconda equazione di Maxwell, anche in presenza di dielettrico, non

cambia, ecco che, se ci troviamo in un mezzo isolante omogeneo e isotropo, dal punto di vista elettrostatico tutto va come se  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$  !

Consideriamo allora due cariche (puntiformi) a una distanza fissata e confrontiamo la forza elettrostatica esistente fra di loro quando sono in vuoto e quando si trovano immerse in un mezzo dielettrico: per quanto detto sopra, la sostituzione  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$  comporta una riduzione della forza elettrostatica per un fattore  $\epsilon_r$ , quando le due cariche sono in un mezzo dielettrico. Questa è la ragione per la quale l'acqua, che ha  $\epsilon_r \approx 80$ , è in grado di sciogliere così bene i sali minerali, riducendo appunto di un fattore  $\epsilon_r$  la forza elettrostatica fra gli ioni...

Per quanto riguarda l'energia potenziale elettrostatica, cioè l'energia che serve per realizzare la particolare disposizione di cariche di conduzione voluta, essa vale naturalmente

$$U = \frac{1}{2} \int d^3y \rho_c(\vec{y}) V(\vec{y}) \quad (4.1.239)$$

Usando la relazione  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0 \epsilon_r}$  e la consueta relazione fra il potenziale e il campo elettrico, ne segue che, nel caso di un mezzo dielettrico omogeneo e isotropo in cui sia presente un campo elettrico  $\vec{E}$ , la densità di energia risulta aumentata in proporzione a  $\epsilon_r$ :

$$\text{in vuoto :} \quad u = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (4.1.240)$$

$$\text{in un dielettrico :} \quad u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2 \quad (4.1.241)$$

in accordo con la conclusione di cui sopra circa la sostituzione  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ .

Si noti infine che questo risultato rispecchia il fatto che, come abbiamo visto, la capacità del condensatore riempito di dielettrico risulta aumentata del fattore  $\epsilon_r$  rispetto al caso in cui è vuoto, per cui, fissato il campo elettrico (ovvero la ddp ai suoi capi) l'energia immagazzinata nel condensatore  $U = \frac{1}{2} C \Delta V^2$  aumenta in proporzione a quanto aumenta la sua capacità, ovvero a  $\epsilon_r$ .

#### 4.1.19 La polarizzazione

Iniziamo considerando il caso di una sostanza, costituita da un numero  $N \gg 1$  di molecole per unità di volume, aventi ciascuna un momento di dipolo elettrico permanente  $\vec{p}$  (in modulo uguale per tutte e pari a  $p_0$ ), in equilibrio termico alla temperatura  $T$ . Chiaramente, se indichiamo con  $\vec{P}$  la densità di momento di dipolo elettrico risultante (momento di dipolo per unità di volume), esso sarà normalmente nullo

$$\vec{P} = N \langle \vec{p} \rangle = 0 \quad (4.1.242)$$

essendo nulla la media del momento di dipolo  $\langle \vec{p} \rangle$ . Questo accade perché, non essendo definita nella sostanza (che assumiamo omogenea e isotropa) alcuna direzione privilegiata, in ogni volume di sostanza si troveranno tanti dipoli con orientamento in un verso quanti dipoli con orientamento in verso opposto ...

Supponiamo ora che la sostanza si trovi immersa in un campo elettrico  $\vec{E}$  uniforme e costante (che, senza perdita di generalità, assumeremo diretto lungo l'asse  $z$ ). L'energia potenziale  $U$  di ciascun dipolo dipende adesso dal suo orientamento relativo al campo elettrico e risulta

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p_0 E \cos \theta \quad (4.1.243)$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra il campo elettrico  $\vec{E}$  e il momento di dipolo  $\vec{p}$ , che, per comodità, rappresenteremo in seguito in coordinate polari, ovvero nel modo seguente

$$\vec{p} = p_0 (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (4.1.244)$$

essendo  $\phi$  l'angolo azimutale che la proiezione di  $\vec{p}$  nel piano  $xy$  forma con l'asse  $x$ .

L'orientamento spaziale dei dipoli viene alterato dalla presenza del campo elettrico, a causa della dipendenza dell'energia potenziale da  $\theta$ : all'equilibrio termico la distribuzione dei dipoli è fornita dalla distribuzione di Boltzmann, secondo cui la probabilità di avere un dipolo orientato nella direzione definita dagli angoli  $\theta$  e  $\phi$  vale

$$\mathcal{P}(\theta, \phi) = \frac{e^{-U/kT}}{M} = \frac{1}{M} e^{\frac{\vec{p} \cdot \vec{E}}{kT}} = \frac{1}{M} e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \quad (4.1.245)$$

dove  $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$  è la costante di Boltzmann, mentre  $M$  è la costante di normalizzazione (in modo che l'integrale della probabilità faccia 1), definita da

$$M = \int d\Omega e^{-U/kT} = \int \sin \theta d\theta d\phi e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \quad (4.1.246)$$

essendo  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  l'elemento di angolo solido.

Vediamo quali sono le conseguenze sulla densità di momento di dipolo: evidentemente si ha

$$\vec{P} = N \langle \vec{p} \rangle = \frac{N}{M} \int d\Omega \vec{p} e^{\frac{\vec{p} \cdot \vec{E}}{kT}} \quad (4.1.247)$$

dove  $\langle \vec{p} \rangle$  è il valor medio del momento di dipolo della singola molecola. E abbastanza evidente che, essendo la densità di probabilità  $\mathcal{P}$  indipendente

da  $\phi$ , le componenti  $x$  e  $y$  del valor medio  $\langle \vec{p} \rangle$  saranno entrambe nulle: occupiamoci dunque della componente  $z$ . Si ha

$$\begin{aligned} P_z &= N \langle p_z \rangle = \frac{N}{M} \int d\Omega p_z e^{\frac{\vec{p} \cdot \vec{E}}{kT}} = \\ &= \frac{N}{M} \int \sin \theta d\theta d\phi p_0 \cos \theta e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \end{aligned} \quad (4.1.248)$$

Introduciamo adesso, per comodità, la seguente variabile adimensionale

$$\xi \equiv \frac{p_0 E}{kT} \quad (4.1.249)$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{N}{M} p_0 \int \sin \theta d\theta d\phi \cos \theta e^{\xi \cos \theta} \\ M &= \int \sin \theta d\theta d\phi e^{\xi \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.1.250)$$

e risulta allora immediato che

$$P_z = N p_0 \frac{d}{d\xi} \log M \quad (4.1.251)$$

Calcoliamo dunque, esplicitamente la costante di normalizzazione  $M$  come funzione di  $\xi$ : si ha

$$M = \int \sin \theta d\theta d\phi e^{\xi \cos \theta} = 2\pi \int \sin \theta d\theta e^{\xi \cos \theta} \quad (4.1.252)$$

Ma ricordando che

$$\sin \theta d\theta = -d(\cos \theta) \quad (4.1.253)$$

e che l'integrale su  $\theta$  va fatto da 0 a  $\pi$ , ovvero che l'integrale su  $d(\cos \theta)$  va fatto fra 1 e -1, abbiamo

$$M = 2\pi \int_{-1}^1 dx e^{\xi x} \quad (4.1.254)$$

dove abbiamo riassorbito il segno negativo dal cambiamento di variabile, scambiando gli estremi di integrazione e integrando, appunto, fra -1 ed 1. Risulta

$$M = 2\pi \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{\xi} = 4\pi \frac{\sinh \xi}{\xi} \quad (4.1.255)$$

dove abbiamo usato la definizione del seno iperbolico, secondo cui

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (4.1.256)$$

Per quanto riguarda la componente  $z$  della densità di dipolo elettrico, si ha dunque

$$\begin{aligned}
 P_z &= N p_0 \frac{d}{d\xi} \log M = N p_0 \frac{d}{d\xi} \log \left( 4\pi \frac{\sinh \xi}{\xi} \right) = \\
 &= N p_0 \frac{\xi}{4\pi \sinh \xi} 4\pi \frac{\xi \cosh \xi - \sinh \xi}{\xi^2} = \\
 &= N p_0 \left( \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} - \frac{1}{\xi} \right) \equiv N p_0 \left( \coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (4.1.257)
 \end{aligned}$$

E' interessante adesso studiare il limite in cui

$$\xi = \frac{p_0 E}{kT} \ll 1 \quad (4.1.258)$$

In questo caso abbiamo infatti che

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (4.1.259)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots \quad (4.1.260)$$

per cui risulta che, in questo limite, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} - \frac{1}{\xi} &= \frac{\xi \cosh \xi - \sinh \xi}{\xi \sinh \xi} \approx \frac{\xi + \frac{1}{2}\xi^3 + \dots - \xi - \frac{1}{6}\xi^3 - \dots}{\xi^2 + \dots} = \\
 &= \frac{1}{3}\xi \quad (4.1.261)
 \end{aligned}$$

e dunque, quanto alla componente  $z$  della polarizzazione, abbiamo

$$P_z = N p_0 \left( \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} - \frac{1}{\xi} \right) \approx \frac{1}{3}\xi N p_0 = N \frac{p_0^2 E}{3kT} \quad (4.1.262)$$

In forma vettoriale, poiché le componenti ortogonali al campo elettrico sono nulle, possiamo scrivere che

$$\vec{P} = N p_0 \left( \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\vec{E}}{E} \quad (4.1.263)$$

e, nel caso in cui  $\xi \ll 1$ , questa diventa

$$\vec{P} \approx N \frac{p_0^2}{3kT} \vec{E} \quad (4.1.264)$$

la quale mostra come la densità di momento di dipolo indotta risulti proporzionale al campo elettrico  $\vec{E}$  (se la condizione  $\xi \ll 1$  non è soddisfatta, pur restando  $\vec{P}$  allineato con  $\vec{E}$ , in generale non c'è più proporzionalità fra le due grandezze). Quanto alla condizione  $\xi \ll 1$ , essa è praticamente sempre soddisfatta, almeno a temperatura ambiente, infatti, anche assumendo

che il dipolo elementare sia fatto da due distribuzioni di carica pari a quella dell'elettrone ( $1.6 \times 10^{-19}C$ ), poste a distanza interatomica ( $10^{-10}m$ ), si ha

$$T = 300^0K \quad \Rightarrow \quad kT = 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \approx 5. \times 10^{-21}J \quad (4.1.265)$$

$$E = 2 \times 10^6 V/m \quad \Rightarrow \quad p_0 E \approx (1.6 \times 10^{-19}) \times 2 \times 10^6 \approx 3. \times 10^{-23}J \quad (4.1.266)$$

per cui l'approssimazione  $\xi \equiv \frac{p_0 E}{kT} \ll 1$  è ampiamente giustificata.

In conclusione, se la molecola è polare, la presenza di un campo esterno conduce alla nascita di una densità di momento di dipolo elettrico  $\vec{P}$  proporzionale a  $\vec{E}$ , che scriveremo come

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.1.267)$$

dove il coefficiente adimensionale  $\chi$ , detto *coefficiente di suscettività elettrica*, è legato al modulo del momento di dipolo intrinseco  $p_0$  della molecola, al numero di molecole per unità di volume  $N$  e alla temperatura  $T$ , dalla relazione

$$\chi = \frac{N p_0^2}{3 \epsilon_0 kT} \quad (4.1.268)$$

Questo coefficiente, a temperatura ambiente, è dell'ordine di 80 per l'acqua, e vale alcune unità in altre sostanze come carta, gomme, etc . . . .

Esistono tuttavia anche isolanti costituiti da molecole che non sono *polari*, che sono, cioè, sprovviste di momento di dipolo elettrico intrinseco.

Anche in tal caso si osserva, comunque che, se sono inseriti fra le armature di un condensatore, questo aumenta di capacità, anche se, in genere, questo aumento è meno vistoso che nel caso in cui il dielettrico sia costituito da molecole polari. La ragione è ancora sostanzialmente la stessa, con la differenza che, nel caso di molecole non polari, il momento di dipolo viene indotto dal campo stesso. Esso è infatti provocato dallo spostamento relativo dei due baricentri di carica (negativa e positiva) prodotto dal campo esterno, nella sua stessa direzione, rispetto alla posizione di equilibrio preesistente, nella quale i due baricentri di carica erano coincidenti. Dunque, anche nel caso non polare, avremo che, in presenza di un campo elettrico esterno, il vettore di polarizzazione  $\vec{P}$  non resterà nullo e risulterà ancora proporzionale a  $\vec{E}$ , ovvero

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.1.269)$$

con la differenza che per questi materiali il coefficiente  $\chi$  sarà sensibilmente più piccolo di prima.

## 4.2 La corrente continua

Abbiamo visto che un conduttore, in condizioni elettrostatiche, può avere cariche solo sulla sua superficie esterna, come conseguenza del fatto che il campo elettrico deve essere nullo al suo interno, altrimenti questo darebbe luogo a un moto di cariche.

Supponiamo ora di disporre di un dispositivo che possieda una *forza elettro-motrice (f.e.m.)* in grado di mantenere comunque una certa differenza di potenziale  $\Delta V$  diversa da zero fra due conduttori (detti *poli*): da quanto precede possiamo solo escludere che questo dispositivo possa essere basato solo su forze di natura elettrostatica...

Questi dispositivi esistono, si chiamano *generatori* e un esempio di questi sono le comuni pile e accumulatori, che coinvolgono forze di natura elettrochimica. Se colleghiamo i poli di un generatore in grado di mantenere una ddp  $\Delta V$  ai capi di un filo conduttore di raggio costante  $R$  e lunghezza  $L \gg R$ , avremo che il campo elettrico all'interno del filo non potrà più essere nullo (dovendosi avere ai suoi estremi una ddp  $\Delta V \neq 0...$ ).

Il campo elettrico, per ragioni di simmetria, dovrà avere la direzione dell'asse del filo e, se il filo è omogeneo, sempre per ragioni di simmetria, dovrà essere lo stesso in tutti i punti, per cui il suo modulo varrà

$$E = \frac{\Delta V}{L} \quad (4.2.270)$$

In queste condizioni, quello che si osserva è un flusso di cariche, in moto nel conduttore. Per misurare questo flusso, definiamo la grandezza fisica *intensità di corrente elettrica*  $I$  come il rapporto fra la carica  $dQ$  che attraversa nel tempo  $dt$  una sezione fissa (qualsiasi) del conduttore.

L'unità di misura della corrente nel sistema  $SI$  è il Coulomb/secondo, che è detto *Ampère* (A). Si noti che, poiché in condizioni stazionarie non ci possono essere accumuli di carica in nessuna parte del conduttore, il valore di  $dQ$  non può dipendere dalla particolare sezione scelta ...

Per conduttori metallici valgono le seguenti due leggi sperimentali (di Ohm).

- La corrente è proporzionale alla ddp applicata al conduttore

$$\Delta V = R I \quad (4.2.271)$$

La costante di proporzionalità  $R$  è chiamata *Resistenza elettrica del conduttore* e si misura in Volt/Ampere = Ohm ( $\Omega$ ).

- La resistenza di un filo conduttore di sezione costante dipende dalla sua geometria nel modo seguente

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (4.2.272)$$

dove  $\rho$  è la resistività specifica del materiale, funzione solo del particolare materiale di cui il conduttore è costituito e della temperatura,  $L$  è la lunghezza del filo conduttore e  $S$  la sua sezione.

Valori tipici di  $\rho$  sono

$$\text{Alluminio} \quad \rho = 2.82 \times 10^{-8} \Omega m \quad (4.2.273)$$

$$\text{Rame} \quad \rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega m \quad (4.2.274)$$

$$\text{Ferro} \quad \rho = 10.0 \times 10^{-8} \Omega m \quad (4.2.275)$$

Un modello classico molto semplice, in grado di spiegare il fenomeno della resistenza elettrica nei metalli, è il modello di Drude.

Noi sappiamo che, nel conduttore, ci sono elettroni liberi di muoversi.

In assenza di campi elettrici esterni, questi elettroni sono animati da un moto caotico dovuto all'agitazione termica. Ne risulta una velocità quadratica media tale che

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (4.2.276)$$

per cui, per esempio, alla temperatura di  $20^{\circ}C$  abbiamo

$$v = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 293}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx 1.2 \times 10^5 \text{ m/s} \quad (4.2.277)$$

Questi elettroni interagiscono l'uno con l'altro e con gli ioni del reticolo cristallino del metallo. Indichiamo con  $\tau$  il tempo medio fra due urti ( $\tau \approx 10^{-14} s$ !). Mediando nel tempo su molti urti, essendo quello degli elettroni un moto caotico, risulterà

$$\langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (4.2.278)$$

Supponiamo ora che gli elettroni si trovino immersi in un campo elettrico  $\vec{E}$ . Fra un urto e il successivo, essi acquistano, in media, un impulso

$$\vec{p} = e\vec{E}\tau \quad (4.2.279)$$

che si somma a quello che già hanno a causa dell'agitazione termica, il quale, però, ha media nulla. Siccome  $\vec{p}$  è diretto come  $\vec{E}$ , ne segue che l'impulso medio dell'elettrone non è più nullo ma vale

$$\langle \vec{p} \rangle = e\vec{E}\tau \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{v} \rangle = e\vec{E}\frac{\tau}{m} \quad (4.2.280)$$

Se ci sono  $N$  elettroni liberi per unità di volume, la carica  $dq$  che nel tempo  $dt$  attraversa la sezione  $S$  del filo sarà

$$dq = Ne |\langle \vec{v} \rangle| S dt \quad (4.2.281)$$

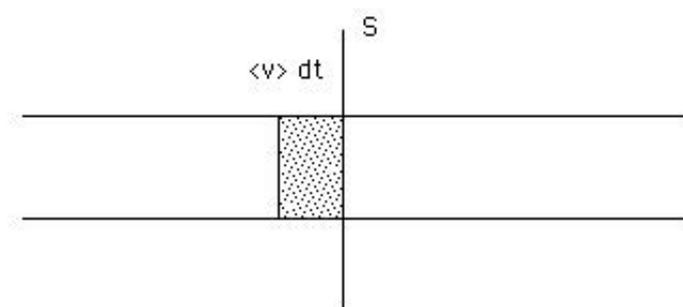


Figura 4.29: Modello di Drude

ovvero il filo risulterà percorso da una intensità di corrente elettrica data da

$$I = \frac{dq}{dt} = Ne |\langle \vec{v} \rangle| S = NeS e |\vec{E}| \frac{\tau}{m} = Ne^2 \frac{\tau}{m} S \frac{\Delta V}{L} \quad (4.2.282)$$

La relazione ottenuta con il modello di Drude mostra che c'è linearità fra  $\Delta V$  e l'intensità di corrente  $I$  (prima legge di Ohm), e che la resistenza  $R$  del filo

$$R = \frac{m}{Ne^2 \tau} \frac{L}{S} \quad (4.2.283)$$

dipende dalla geometria del filo come stabilito dalla seconda legge di Ohm ( $\propto L/S...$ ). Il modello è anche in grado di legare la resistività specifica ai parametri microscopici del materiale in studio, poiché stabilisce che

$$\rho = \frac{m}{Ne^2 \tau} \quad (4.2.284)$$

Fornisce anche un modo per capire come mai, nei metalli,  $\rho$  è una funzione crescente della temperatura, infatti, al suo aumentare, diminuendo  $\tau$ ,  $\rho$  dovrà crescere ...

Il modello consente anche di valutare la velocità  $|\langle \vec{v} \rangle|$  di deriva degli elettroni in un metallo. Assumiamo per questo una condizione realistica di corrente, ovvero

$$I = 1A, \quad S = 1mm^2, \quad N = 10^{23} \text{elettroni}/cm^3$$

Otteniamo

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{I}{NeS} = \frac{1}{10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-2}} \approx 6. \times 10^{-3} cm/s \quad (4.2.285)$$

Domanda: come mai le lampadine si accendono immediatamente nonostante la velocità di deriva degli elettroni nei conduttori sia così esigua ?

### 4.2.1 La densità di corrente

Introduciamo adesso il concetto di *densità di corrente*. Indichiamo con  $N(\vec{x})$  la densità di elettroni liberi, presente nel punto di coordinate  $\vec{x}$ : abbiamo visto che, in presenza di un campo elettrico gli elettroni liberi *derivano* con una certa velocità media  $\vec{v}$ .

Definiamo la densità di corrente nel punto  $\vec{x}$  nel modo seguente

$$\vec{J}(\vec{x}) = N(\vec{x}) e \vec{v} \quad (4.2.286)$$

dove, al solito, abbiamo indicato con  $e$  la carica elettrica dell'elettrone.

Per definizione, la corrente che attraversa una certa superficie  $S$  è pari al flusso di  $\vec{J}$  attraverso quella superficie

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (4.2.287)$$

Vediamo adesso una proprietà molto importante del vettore densità di corrente  $\vec{J}$ .

Prendendo una qualunque superficie chiusa  $S$  e indicando con  $Q$  la carica totale che si trova racchiusa nel volume  $V$  delimitato dalla superficie  $S$ , si osserva sperimentalmente che ogni volta che la carica  $Q$  varia nel volume considerato c'è stato un flusso di carica verso l'esterno o verso l'interno.

E' una legge sperimentale che la carica elettrica si conserva.

Siccome il moto delle cariche è descritto localmente dal vettore densità di corrente, la legge di conservazione della carica elettrica è espressa matematicamente attraverso la relazione integrale

$$\Phi_S(\vec{J}) = -\frac{dQ}{dt} \quad (4.2.288)$$

ovvero

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv \quad (4.2.289)$$

D'altronde, dal teorema di Gauss sappiamo che

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V dv \, \text{div } \vec{J} \quad (4.2.290)$$

per cui ricaviamo infine che la conservazione della carica elettrica è espressa, in generale, dalla relazione differenziale (equazione di continuità)

$$\text{div } \vec{J}(\vec{x}) + \frac{d\rho(\vec{x})}{dt} = 0 \quad (4.2.291)$$

Nel caso particolare delle correnti continue, trovandoci in una situazione stazionaria (cioè indipendente dal tempo), l'equazione di continuità diviene

$$\text{div } \vec{J} = 0 \quad (4.2.292)$$

Nel caso particolare di conduzione metallica (ohmica), la dipendenza lineare fra la ddp  $\Delta V$  applicata ai capi del filo conduttore e la corrente totale che fluisce in esso (prima legge di Ohm),

$$\Delta V = RI \quad (4.2.293)$$

unita alla seconda legge di Ohm

$$R = \rho \frac{L}{S} \Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R} = \rho^{-1} \frac{\Delta V}{L} S = \frac{S}{\rho} E \quad (4.2.294)$$

implica (ed è implicata da...) una relazione lineare fra  $\vec{J}(\vec{x})$  e il campo elettrico  $\vec{E}(\vec{x})$  nel punto considerato.

Se riprendiamo, per convincercene, il modello di Drude, verifichiamo che

$$\vec{J} = Ne\vec{v} = Ne \frac{e\vec{E}\tau}{m} = \rho^{-1} \vec{E} \quad (4.2.295)$$

Questo risultato in realtà è indipendente dal modello e ha validità generale in tutti i casi di conduzione metallica (ohmica), dove accade che

$$\vec{J}(\vec{x}) = \rho^{-1} \vec{E}(\vec{x}) \quad (4.2.296)$$

Infatti, se vale la relazione di cui sopra, per un filo di sezione costante che sia realizzato con un conduttore omogeneo e isotropo, l'intensità del campo elettrico sarà costante al suo interno e il campo sarà allineato con l'asse del filo da cui  $E = \frac{\Delta V}{L}$ , essendo  $L \gg r$  la sua lunghezza. Dunque, poiché la corrente attraverso il filo è data dal flusso di  $\vec{J}$  attraverso una sua qualunque sezione, scegliendo questa ortogonale all'asse del filo, risulta appunto

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S} = \rho^{-1} \vec{E} \cdot \vec{S} = \rho^{-1} E S = \rho^{-1} S \frac{\Delta V}{L} \quad (4.2.297)$$

ovvero

$$\Delta V = I \rho \frac{L}{S} \quad (4.2.298)$$

che riassume le due leggi di Ohm...

### 4.2.2 Considerazioni su alcuni circuiti elettrici in cc

Un circuito elettrico in corrente continua è fatto, in generale, da generatori di fem e resistenze, collegati fra loro insieme attraverso conduttori le cui resistenze o sono trascurabili rispetto a quelle esplicite nel circuito, oppure sono indicate in modo *concentrato*, pur essendo distribuite lungo il conduttore. In simboli, questi elementi circuitali sono rappresentati nel modo seguente:



Figura 4.30: *Elementi circuitali semplici*

Cominciamo dal circuito più semplice, costituito da un solo generatore di fem e da una resistenza  $R$ . Assumeremo per il momento che il generatore sia capace di mantenere la stessa ddp  $\Delta V$  ai suoi capi, qualunque sia la corrente erogata (generatore ideale di tensione).

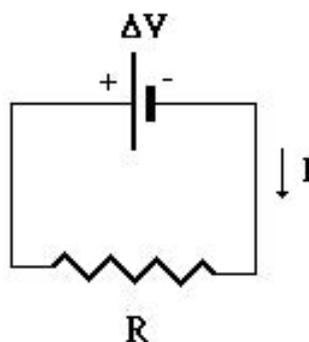


Figura 4.31: *Il più semplice circuito in cc*

In questo circuito, rappresentato in fig.4.31, fluisce una corrente  $I = \frac{\Delta V}{R}$  dal polo positivo (a potenziale più alto) verso il polo negativo (a potenziale più basso) del generatore: questo verso è "convenzionale" poiché è quello che seguirebbero davvero le cariche in movimento se esse fossero positive.

In realtà, come sappiamo, sono gli elettroni a spostarsi nel conduttore, e questi vanno nel verso opposto (essi hanno carica negativa, quindi vanno dal

polo negativo a quello positivo ...). Essendo il flusso di corrente costante sia nel tempo che lungo il circuito (conservazione della carica), ecco che nel tempo  $dt$  una carica  $dQ = I dt$  passa dall'estremo della resistenza a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, tutto il resto restando invariato.

Ne segue che tale carica "perde" l'energia potenziale

$$dU = \Delta V dQ \quad (4.2.299)$$

la quale dovrà, per il principio di conservazione dell'energia, ritrovarsi sotto qualche altra forma. Dal modello microscopico che abbiamo discusso precedentemente, possiamo capire che, se attraverso gli urti con gli ioni del reticolo del metallo, gli elettroni erano in equilibrio termico fra loro in assenza del campo elettrico prodotto dal generatore, nel momento in cui questo è presente, gli elettroni, poiché acquistano energia cinetica fra un urto e l'altro, non sono più in equilibrio termico con il reticolo, che quindi si riscalda sotto l'effetto del passaggio di corrente. Si noti che, in assenza di perdite di calore da parte del metallo, il sistema non potrebbe mai raggiungere l'equilibrio termico in quanto gli elettroni continuano costantemente ad essere *riforniti* di energia dal generatore. La potenza dissipata nella resistenza vale dunque

$$W = \frac{dU}{dt} = \Delta V \frac{dQ}{dt} = \Delta V I = \frac{\Delta V^2}{R} = R I^2 \quad (4.2.300)$$

che provoca, in generale, un riscaldamento della stessa, effetto noto come *effetto Joule*.

Supponiamo adesso di disporre di due resistenze,  $R_1$  e  $R_2$ . Analogamente al caso dei condensatori, potremo disporle in due modi: in parallelo o in serie.

Nel primo caso (parallelo) la stessa ddp  $\Delta V$  si trova applicata ai capi di entrambe le resistenze  $R_1$  e  $R_2$ . Ne segue che in ognuna delle resistenze circolano, rispettivamente, le correnti

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \quad (4.2.301)$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} \quad (4.2.302)$$

e il generatore dovrà fornire la corrente totale (conservazione della carica applicata alla diramazione ...)  $I$  pari alla somma delle due correnti, cioè

$$I = I_1 + I_2 = \Delta V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.2.303)$$

Dal punto di vista del generatore, le due resistenze in parallelo si comportano come una resistenza equivalente  $R_{eq}$  tale che

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.2.304)$$

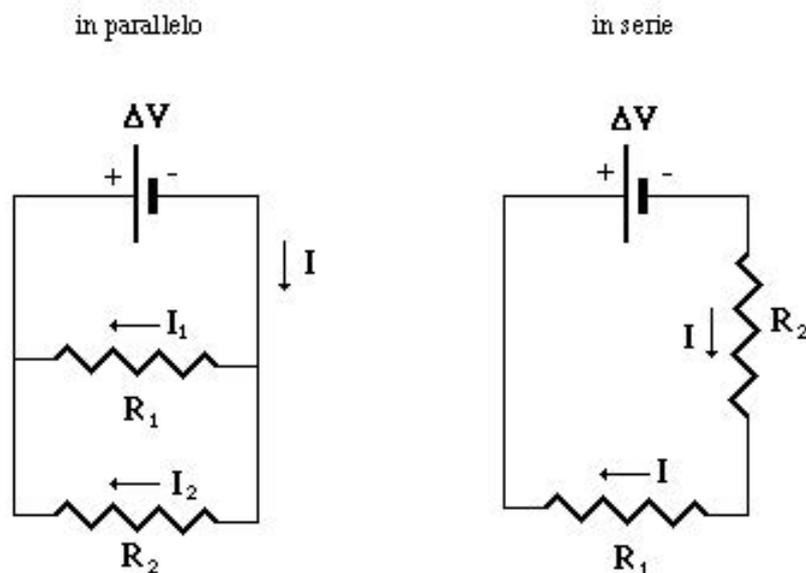


Figura 4.32: Parallelo/serie di due resistenze elettriche

e chiaramente risulta sempre  $R_{eq} < \min(R_1, R_2)$ .

Nel secondo caso (serie) è la corrente  $I$  a essere la stessa in entrambe le resistenze, poiché la corrente, come abbiamo visto, non può cambiare lungo uno stesso conduttore che non abbia diramazioni, a causa della legge di conservazione della carica elettrica. Dunque, poiché su ciascuna resistenza la ddp ai suoi capi è legata alla corrente che la attraversa (e al suo verso: dal punto a potenziale maggiore verso quello a potenziale minore...) dalla prima legge di Ohm, avremo

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I \quad (4.2.305)$$

ovvero, stavolta, dal punto di vista del generatore, l'insieme delle due resistenze disposte in serie si comporta come una resistenza equivalente  $R_{eq}$  tale che

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (4.2.306)$$

e chiaramente, per la serie, risulta sempre  $R_{eq} > \max(R_1, R_2)$ .

Se le resistenze sono più di due, in molti casi (anche se non in tutti...) il circuito può essere *ridotto* sostituendo a gruppi di resistenze il loro valore equivalente. Generalizzando quanto abbiamo visto, risulta

$$\text{parallelo :} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (4.2.307)$$

$$\text{serie :} \quad R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (4.2.308)$$

Dal punto di vista della potenza, è il generatore che deve fornire comunque la potenza che viene dissipata sotto forma di calore nelle resistenze. Risulta

- parallelo

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \Delta V I_1; \quad U_2 = \Delta V I_2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow U &= U_1 + U_2 = \Delta V (I_1 + I_2) = \frac{\Delta V^2}{R_{eq}} = R_{eq} I^2 \quad (4.2.309)
 \end{aligned}$$

- serie

$$\begin{aligned}
 U_1 &= R_1 I^2; \quad U_2 = R_2 I^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow U &= U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) I^2 = I^2 R_{eq} = \frac{\Delta V^2}{R_{eq}} \quad (4.2.310)
 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Il generatore

Abbiamo parlato già varie volte di *generatori*, ma non abbiamo ancora chiarito il loro principio di funzionamento: senza addentrarci nei dettagli, ci limiteremo ad alcune considerazioni generali.

Partiamo da un generatore isolato (circuito aperto...) che produce una ddp  $\Delta V$  fra i suoi morsetti (poli)  $A$  e  $B$ .

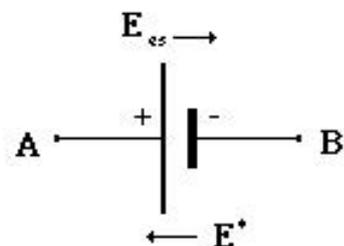


Figura 4.33: *Generatore isolato*

Al suo interno sarà dunque presente un campo elettrico  $E_{es}$  tale che

$$\Delta V \equiv V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.2.311)$$

Questa ddp è originata dal fatto che all'interno del generatore esiste un campo  $\vec{E}^*$ , che chiameremo *campo elettromotore*, il quale cerca di spostare le cariche positive dal polo negativo al polo positivo.

Si parla per questo di *generatore di forza elettromotrice (fem)*.

Questo campo elettromotore può avere origini diverse, risulta, per esempio, di natura elettrochimica nelle pile e negli accumulatori (dove dell'energia chimica viene trasformata in energia elettrica), mentre è di natura elettromeccanica nelle dinamo/alternatori (dove, appunto, è l'energia meccanica che viene trasformata in elettrica), etc... Il campo elettromotore, quando il circuito è aperto, sposta cariche finché il campo elettrostatico  $E_{es}$  che esse

producono non lo equilibra esattamente. Ne segue che, a circuito aperto, avendo definito la fem  $\mathcal{E}$  del generatore nel modo seguente

$$\mathcal{E} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{s} \quad (4.2.312)$$

risulta che la ddp  $\Delta V$  ai capi del generatore è proprio uguale alla fem  $\mathcal{E}$ , infatti

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = \mathcal{E} \quad (4.2.313)$$

Immaginiamo ora di chiudere il circuito su una resistenza esterna  $R$ .

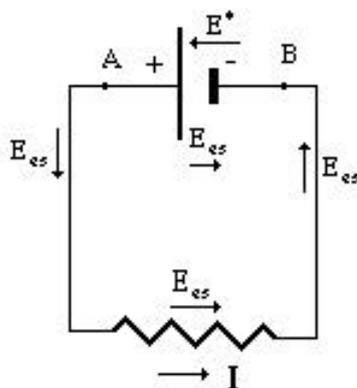


Figura 4.34: *Generatore chiuso su una resistenza esterna*

Le cariche potranno adesso tornare dal polo positivo  $A$  al polo negativo  $B$  passando dall'esterno del generatore, attraverso la resistenza  $R$ : è il fenomeno del passaggio di corrente.

Sperimentalmente si osserva, in generale, che nei generatori reali la ddp  $\Delta V$  presente ai capi del generatore diminuisce rispetto a  $\mathcal{E}$  quando c'è erogazione di corrente. Come mai?

La ragione è che anche il generatore reale di tensione ha una sua *resistenza interna*  $r$ , che esso oppone al passaggio della corrente che lo attraversa, per cui la ddp  $\Delta V$  ai suoi capi a circuito chiuso è pari alla fem  $\mathcal{E}$  del generatore, sottratta però della caduta ohmica al suo interno

$$\Delta V = \mathcal{E} - r I \quad (4.2.314)$$

Ne segue che un generatore reale di tensione può essere schematizzato come un generatore di fem avente in serie una resistenza interna  $r$ . Risulta dunque

$$\Delta V = \mathcal{E} - r I = R I \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = (R + r) I = I R_T \quad (4.2.315)$$

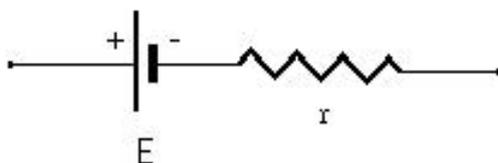


Figura 4.35: Schema di un generatore reale di tensione

dove  $R_T$  è la resistenza totale presente nel circuito (esterna + interna...). Questo risultato può essere espresso anche nella forma seguente, nota come *legge di Ohm generalizzata*

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T I \quad (4.2.316)$$

dove l'integrazione è fatta sul circuito chiuso, orientato concordemente al verso di circolazione della corrente. Si ha infatti

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E}_{es} \cdot d\vec{s} + \int \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = \int \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = \mathcal{E} \quad (4.2.317)$$

dove si è tenuto conto del fatto che il campo elettrostatico è conservativo e della definizione della fem in base al campo  $E^*$  (non conservativo!).

Dal punto di vista energetico, quando il circuito è chiuso ed è percorso da una corrente  $I$ , il campo elettromotore nel tempo  $dt$  fornisce alla carica  $dQ = I dt$  una energia

$$dU = \mathcal{E} dQ = \mathcal{E} I dt \quad (4.2.318)$$

Questo avviene a spese dell'energia chimica in una pila, oppure dell'energia meccanica in un alternatore, etc... .

La potenza elettrica prodotta dal generatore è dunque

$$W_0 = \mathcal{E} I \quad (4.2.319)$$

D'altronde, la potenza che viene dissipata nella resistenza di carico  $R$  vale

$$W = \Delta V I = R I^2 \quad (4.2.320)$$

La differenza fra la potenza generata e quella dissipata nella resistenza esterna  $R$  vale

$$W_0 - W = (\mathcal{E} - \Delta V) I = r I^2 \quad (4.2.321)$$

ovvero è pari alla potenza che viene dissipata nel generatore stesso, per effetto Joule: la pila, infatti, si scalda<sup>11</sup> quando eroga corrente !

<sup>11</sup>Si osservi che, dato un generatore con una certa fem  $\mathcal{E}$  assegnata e una resistenza interna  $r$ , il *massimo rendimento* ovvero il massimo del rapporto fra la potenza trasferita

#### 4.2.4 Le leggi di Kirchhoff

Fino a ora abbiamo considerato circuiti semplici, riconducibili a quello di un generatore di fem chiuso su una resistenza, eventualmente pari al valore equivalente di un insieme di resistenze connesse fra di loro in serie oppure in parallelo. Abbiamo però detto anche che non tutti i circuiti sono riconducibili a questa situazione.

Vediamo come si affronta dunque il problema generale di una rete lineare, ovvero di una rete elettrica composta da generatori di fem e resistenze comunque complessa. Premettiamo un po' di nomenclatura.

- nodo  
Un nodo è un punto della rete dove convergono almeno tre conduttori.
- ramo  
Un ramo è un tratto di circuito fra due nodi contigui, composto, in generale da resistenze e/o generatori di fem in serie fra loro (dovendo unire un nodo a un altro nodo contiguo...).
- maglia  
E' un insieme di rami tale da formare un unico cammino chiuso (non suddivisibile ulteriormente in modo che resti chiuso).  
Questo cammino deve essere tale che, fissato un senso di circolazione nella maglia, ogni ramo deve essere percorso una e una sola volta prima di tornare al punto di partenza.

Vediamo adesso alcune conseguenze della legge  $\text{div } J = 0$ .

- In un ramo, non essendoci per definizione diramazioni, la corrente deve restare costante. In particolare se un ramo è connesso solo da un lato, esso non è percorso da corrente.
- Nel caso di un nodo, la somma delle correnti che convergono al nodo **deve** essere uguale alla somma delle correnti che si allontanano dallo stesso.

---

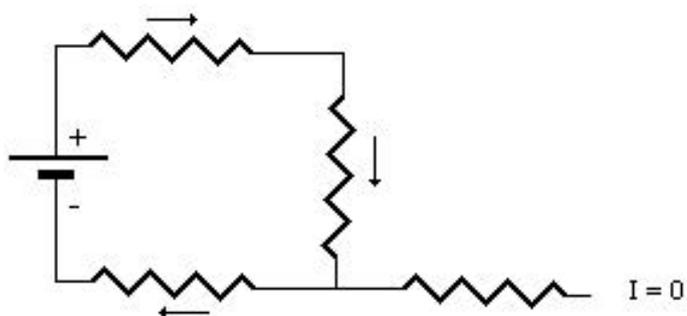
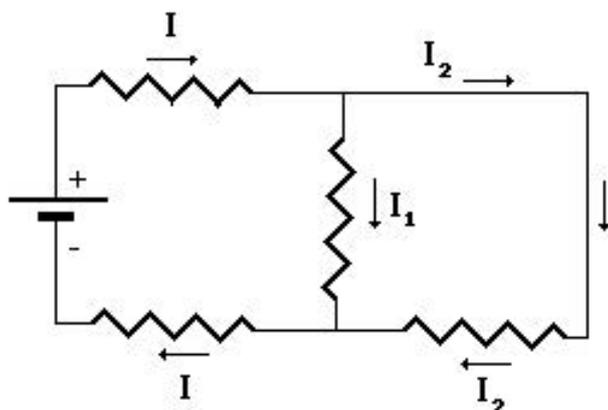
al carico e quella generata si ottiene quando la resistenza di carico  $R$  è  $\gg r$ , mentre il *massimo valore* della potenza trasferita al carico si ha quando  $R$  è uguale alla resistenza interna del generatore. Per il rendimento abbiamo infatti

$$\eta = \frac{W}{W_0} = \frac{\Delta V I}{(\Delta V + rI)I} = \frac{\Delta V}{\Delta V + rI} = \frac{R}{R + r} \quad (4.2.322)$$

che mostra come il massimo si ottenga, appunto, per  $R \rightarrow \infty$ .  
Quanto alla potenza trasferita al carico, essa vale

$$W = RI^2 = R \left( \frac{\mathcal{E}}{R + r} \right)^2 = \mathcal{E}^2 \frac{R}{(R + r)^2} \quad (4.2.323)$$

e questa quantità, fissate  $\mathcal{E}$  ed  $r$ , è massima rispetto a  $R$  quando  $R = r$ .

Figura 4.36: *Corrente in un ramo*Figura 4.37: *Correnti da/verso un nodo*

Stabilendo allora che, fissato un nodo, una corrente è negativa se confluisce verso il nodo ed è positiva se invece si allontana da esso, possiamo enunciare la seguente *Legge dei nodi*

$$\text{Prima legge di Kirchhoff : } \quad \Sigma_k I_k = 0 \quad (4.2.324)$$

dove la somma è estesa a tutti i rami confluenti verso il nodo assegnato.

Passiamo adesso a considerare la generica maglia  $m$ -esima, e applichiamo a essa la legge di Ohm generalizzata.

Occorre per questo stabilire un verso di circolazione nella maglia. Quando il circuito era fatto semplicemente da un solo generatore e da resistenze, questo verso di circolazione veniva scelto concorde con il verso della corrente: questa, però, non era una necessità, bensì solo una convenienza.

Adesso questo criterio non sarebbe più nemmeno perseguibile perché la corrente può cambiare anche di verso da ramo a ramo della stessa maglia...

Il verso in questione è quello relativamente al quale si calcola la circuitazione del campo elettrico totale, ed è, a priori, arbitrario. Si scegli quindi un verso

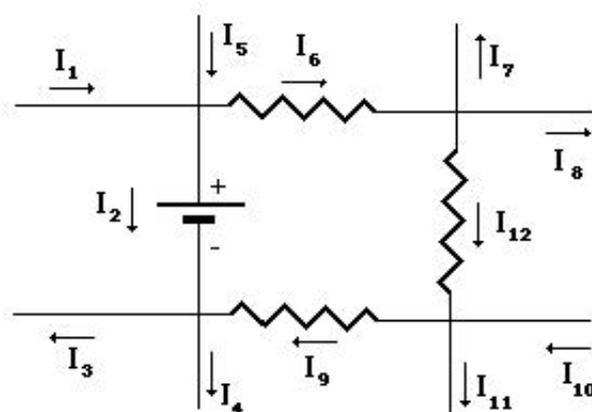


Figura 4.38: Correnti di maglia

di circolazione nella maglia qualsiasi e si considera positiva una caduta ohmica su una resistenza in cui la corrente che la attraversa sia concorde con il verso di circolazione scelto e negativa se invece è discorde. Risulta

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_j R_{mj} I_j \quad (4.2.325)$$

dove  $R_{mj}$  è la resistenza appartenente alla maglia  $m$ -esima, percorsa dalla corrente  $j$ -esima  $I_j$  e il segno della caduta ohmica è scelto in base al criterio esposto sopra. D'altra parte, abbiamo visto anche che la circuitazione su un percorso chiuso del campo elettrico coincide con la somma delle forze elettromotrici dei generatori presenti sul circuito, con segno positivo se il generatore è "attraversato" dal polo negativo a quello positivo (cioè nel verso del campo elettromotore, opposto a quello elettrostatico che, invece va dal + al - ...), e con segno negativo nel caso opposto.

In formule, abbiamo così la *legge delle maglie*, ovvero

$$\text{Seconda legge di Kirchhoff : } \sum_k \mathcal{E}_k = \sum_j R_{mj} I_j \quad (4.2.326)$$

dove la somma sull'indice  $k$  è estesa a tutti i generatori presenti nella maglia, mentre la somma sull'indice  $j$  è estesa a tutte le resistenze incontrate nella maglia, percorse dalle correnti  $I_j$ .

Vediamo adesso come possiamo risolvere una rete lineare qualsiasi usando le due leggi di Kirchhoff esposte sopra.

Sia data dunque una rete lineare e ammettiamo di conoscere le fem e le resistenze presenti nel circuito: vogliamo conoscere le correnti che percorrono ogni suo ramo.

Scomponiamo allora idealmente la rete in tante maglie quante ne servono affinché ogni ramo appartenga ad almeno una maglia e ogni maglia abbia almeno un ramo che non appartiene a nessuna altra maglia.

Stabiliamo un verso di circolazione arbitrario in ogni maglia e indichiamo con  $I_m$  la corrente che fluisce nel ramo della maglia  $m$ -esima non in comune con altre maglie. Applicando la prima legge di Kirchhoff possiamo scrivere le correnti in ogni ramo del circuito come somma algebrica delle correnti di maglia; infatti se il ramo considerato appartiene solo alla maglia  $m$ -esima allora, per definizione, sarà percorso dalla corrente  $I_m$  altrimenti, se il ramo è comune a varie maglie, la corrente che lo percorre sarà la somma algebrica di quelle correnti di maglia che confluiscono ai nodi caratteristici del ramo stesso.

Usando adesso la seconda legge di Kirchhoff applicata a ogni maglia della nostra decomposizione, possiamo scrivere  $M$  equazioni lineari, quante sono le maglie, nelle  $M$  incognite  $I_m$ .

Risolviendo il sistema si ha la soluzione al problema.

Come applicazione, determiniamo le correnti nelle tre resistenze della rete lineare riportata sotto

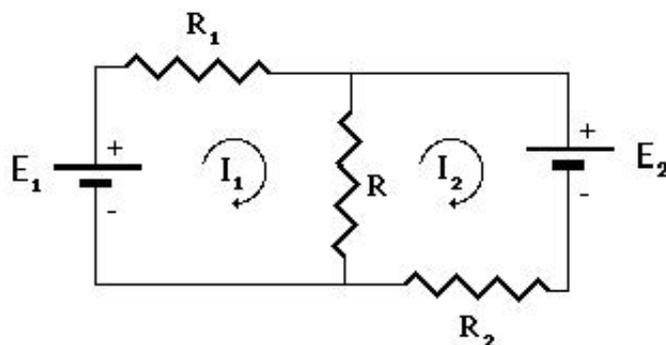


Figura 4.39: Rete lineare

Definite le due correnti di maglia  $I_1$  e  $I_2$  come in figura, la prima legge di Kirchhoff stabilisce che la corrente nella resistenza  $R$  è la differenza delle due correnti di maglia di cui sopra. Applicando la seconda legge di Kirchhoff alle due maglie scelte, otteniamo le due equazioni

$$\mathcal{E}_1 = R_1 I_1 + R(I_1 - I_2) \quad (4.2.327)$$

$$-\mathcal{E}_2 = R_2 I_2 + R(I_2 - I_1) \quad (4.2.328)$$

ovvero dobbiamo risolvere il sistema lineare non omogeneo seguente

$$\begin{cases} I_1(R + R_1) - I_2 R = \mathcal{E}_1 \\ I_1 R - I_2(R + R_2) = \mathcal{E}_2 \end{cases} \quad (4.2.329)$$

Il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} R + R_1 & -R \\ R & -(R + R_2) \end{pmatrix} \quad (4.2.330)$$

vale

$$\det(A) = R(R_1 + R_2) + R_1 R_2 \quad (4.2.331)$$

e risulta così che

$$I_1 = \frac{R(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + R_2 \mathcal{E}_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \quad (4.2.332)$$

$$I_2 = \frac{R(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + R_1 \mathcal{E}_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \quad (4.2.333)$$

Osserviamo che, se  $R \gg \max(R_1, R_2)$  ci si riduce, in pratica, a una sola maglia e si ha

$$I_1 \approx \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} \approx I_2 \quad (4.2.334)$$

#### 4.2.5 Carica e scarica del condensatore

Fin'ora abbiamo trattato il caso di circuiti in cui fluivano correnti continue. Vediamo adesso un caso in cui, invece, la corrente dipende dal tempo.

##### Carica del condensatore

Consideriamo il circuito costituito da un generatore di fem  $\mathcal{E}$ , una resistenza  $R$  e un condensatore di capacità  $C$ . Immaginiamo che per  $t < 0$  il tasto T

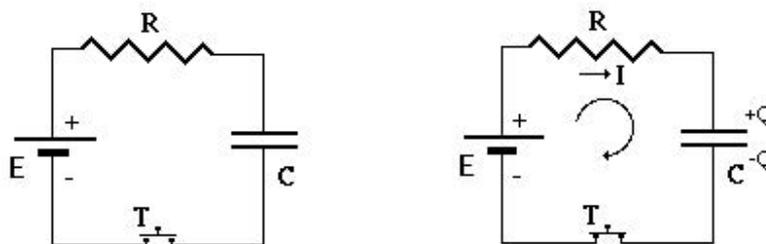


Figura 4.40: Carica del condensatore

sia aperto e che il condensatore  $C$  sia scarico. Indichiamo con  $I$  la corrente nel circuito e con  $V_c$  la ddp ai capi del condensatore. Chiaramente si ha che

$$t < 0 : I = 0; \quad V_c = 0 \quad (4.2.335)$$

Supponiamo ora che al tempo  $t = 0$  il tasto T venga chiuso. La legge di Ohm generalizzata prevede che la fem  $\mathcal{E}$  del generatore sia uguale alla somma della ddp ai capi della resistenza e di quella ai capi della capacità, ovvero

$$\mathcal{E} = RI + V_c \quad (4.2.336)$$

Ricordando che  $V_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$  e che, essendo il condensatore in serie alla resistenza,  $I = \frac{dQ(t)}{dt}$ , si conclude che la carica  $Q = Q(t)$  sull'armatura *positiva* soddisfa l'equazione differenziale

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad (4.2.337)$$

ovvero

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (4.2.338)$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti, non omogenea. La soluzione generale è la somma di una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione non omogenea con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Come soluzione particolare non omogenea, possiamo prendere la soluzione indipendente dal tempo, cioè

$$Q(t) \equiv Q_0 = \mathcal{E}C \quad (4.2.339)$$

Quanto alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata, essa è la seguente

$$Q(t) = qe^{-t/RC} \quad (4.2.340)$$

dove  $q$  è una costante di integrazione a priori arbitraria.

In conclusione, la soluzione cercata è del tipo

$$Q(t) = \mathcal{E}C + qe^{-t/RC} \quad (4.2.341)$$

La costante di integrazione  $q$  deve essere determinata attraverso le condizioni iniziali le quali stabiliscono che

$$Q(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -\mathcal{E}C \quad (4.2.342)$$

ovvero

$$Q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (4.2.343)$$

La quantità

$$\tau \equiv RC \quad (4.2.344)$$

che ha le dimensioni di un tempo, si chiama *costante di tempo caratteristica* del circuito.

Per esempio:  $R = 1000\Omega$ ;  $C = 1\mu F$  implica  $\tau = 1ms$ .

Essa fornisce la *scala* temporale con la quale avviene il processo esponenziale di carica del condensatore.

Per esempio, dopo un tempo  $\Delta t = \tau$  la carica sull'armatura positiva del condensatore è diventata  $Q(t) = Q_0(1 - e^{-1})$ , mentre dopo un tempo  $\Delta t = 2\tau$  essa è diventata  $Q(t) = Q_0(1 - e^{-2})$ , etc . . . .

Il risultato ottenuto mostra che la carica del condensatore è raggiunta asintoticamente, partendo dal valore  $Q = 0$  (condensatore scarico) per raggiungere il valore limite  $Q_0 = \mathcal{E}C$  (condensatore carico). Circa la corrente nel circuito, abbiamo

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\mathcal{E}C(-\tau) e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad (4.2.345)$$

ovvero è massima per  $t = 0$ , quando ha il valore istantaneo

$$I(t = 0) = \mathcal{E}R^{-1} \quad (4.2.346)$$

che avrebbe se il condensatore non ci fosse, mentre, asintoticamente, la corrente si annulla.

Chiaramente, per la conservazione della carica elettrica, risulta

$$\int_0^{+\infty} dt I(t) = Q_0 = \frac{\mathcal{E}}{C} \quad (4.2.347)$$

Vediamo ora che cosa succede all'energia.

La potenza istantanea prodotta dal generatore di fem vale

$$W_0(t) = \mathcal{E}I(t) \quad (4.2.348)$$

mentre quella dissipata dalla resistenza per effetto Joule vale

$$W_R(t) = RI^2(t) \quad (4.2.349)$$

La differenza vale

$$\begin{aligned} W(t) &= (\mathcal{E} - RI(t)) I(t) = V_c(t) I(t) = \frac{Q(t)}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2C} \frac{dQ^2}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2(t)}{2C} \right) \end{aligned} \quad (4.2.350)$$

cioè rappresenta la variazione di energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel condensatore. Dunque, istante per istante, il generatore *paga* la dissipazione che avviene nella resistenza e l'aumento di energia elettrostatica

nella capacità.

Integrando nel tempo, si ottiene che l'energia generata  $U$  vale

$$U = \int_0^{+\infty} dt W_0(t) = \mathcal{E}Q_0 = \mathcal{E}^2 C \quad (4.2.351)$$

L'energia dissipata nella resistenza durante tutto il processo di carica, a sua volta, vale

$$\begin{aligned} U_d &= \int_0^{+\infty} W_R(t) dt = \int_0^{+\infty} R I^2(t) dt = \int_0^{+\infty} R \left( \frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 e^{-2t/\tau} dt = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C \end{aligned} \quad (4.2.352)$$

Essa è la metà dell'energia generata, ed è indipendente dal valore della resistenza  $R$ .

Questo è comprensibile dato che abbiamo visto che, istante per istante, l'energia prodotta è uguale alla somma di quella dissipata più quella immagazzinata come energia potenziale nel condensatore. D'altronde l'energia totale generata vale  $\mathcal{E}Q_0 = \mathcal{E}^2 C$  mentre quella immagazzinata è pari, a condensatore carico (asintoticamente) a  $1/2 C \mathcal{E}^2$  ...

### Scarica del condensatore

Consideriamo ora il circuito rappresentato in figura dove il condensatore di

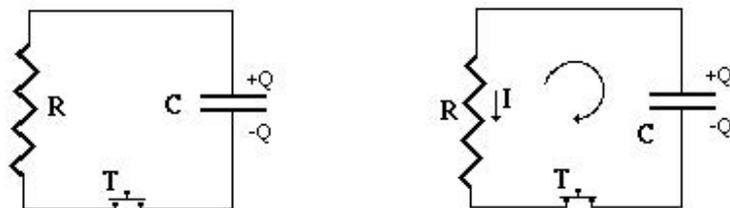


Figura 4.41: Scarica del condensatore

capacità  $C$  è, per  $t < 0$ , carico a una ddp  $\Delta V_0 = Q_0/C$ . Al tempo  $t = 0$  il tasto  $T$  viene chiuso. La legge di Ohm generalizzata stabilisce che (non essendo presenti generatori di fem ...) risulta

$$0 = -RI + V_c \quad (4.2.353)$$

ma

$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.2.354)$$

Questa equazione differenziale omogenea è la stessa di quella incontrata per il processo di carica: la sua soluzione generale, come abbiamo visto, è

$$Q(t) = q e^{-t/RC} \quad (4.2.355)$$

La costante di integrazione  $q$  viene fissata dalle condizioni iniziali e poiché  $Q(t=0) = Q_0$ , risulta

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad (4.2.356)$$

La carica è massima per  $t = 0$  e, asintoticamente, tende a zero.

La costante di tempo del circuito è la stessa che nel processo di carica e vale  $\tau = RC$ .

La corrente nel circuito, durante la scarica, vale

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{\Delta V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (4.2.357)$$

Essa è esattamente la stessa funzione che abbiamo visto per il processo di carica: ne segue che l'energia dissipata vale di nuovo quanto valeva prima, ossia  $1/2C\mathcal{E}^2$ , cioè l'energia accumulata sotto forma di energia potenziale nel condensatore.

Si noti, infine che, rispetto all'armatura positiva del condensatore, come potevamo attenderci la corrente procede ora in verso opposto a prima ...

## Capitolo 5

# Magnetismo

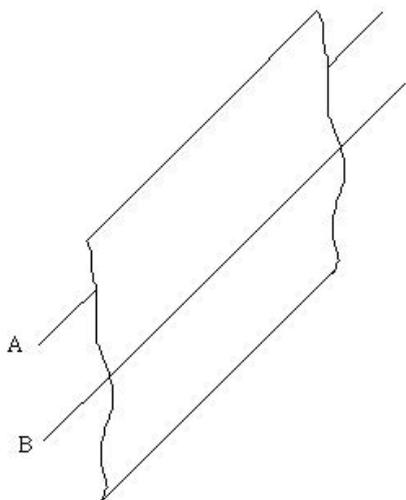
### 5.1 La magnetostatica

La magnetostatica studia le manifestazioni statiche del *campo magnetico*, dalla sua generazione ai suoi effetti sulle cariche elettriche.

#### 5.1.1 Il campo magnetico

Sperimentalmente si osserva che fra due conduttori paralleli, percorsi da corrente, si manifesta una forza, la quale

- è attrattiva per correnti concordi,
- è repulsiva per correnti discordi.



Questa forza **non** può essere dovuta alla sola presenza delle cariche elettriche, poiché entrambi i conduttori sono complessivamente scarichi, come si può verificare attraverso una carica di prova mantenuta ferma in prossimità di ciascuno dei due conduttori. Questa forza è dovuta al fatto che vi sono cariche elettriche che si muovono. Una prova di questo è nel fatto che la forza dipende dal segno relativo delle correnti.

Questa forza, che diremo di origine *magnetica*, ha proprietà diverse dalla forza elettrica che conosciamo.

Per esempio, questa forza **non** è schermata da un conduttore.

La forza magnetica è presente fra i fili *A* e *B* della figura di sopra quando

essi sono percorsi da una corrente elettrica anche se, fra di essi, è disposto lo schermo conduttore indicato, messo a potenziale fisso.

Per definire correttamente le proprietà della forza magnetica, ripetiamo idealmente gli esperimenti di Ampère, che illustriamo nel seguito.

**Primo esperimento:** due fili percorsi da correnti concordi si attraggono, mentre essi si respingono quando sono percorsi da correnti discordi.

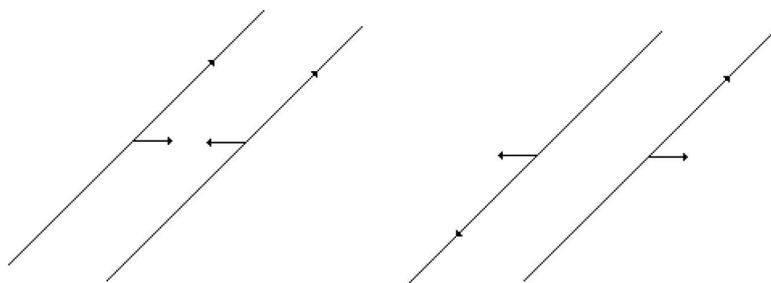


Figura 5.1: *Primo esperimento*

**Secondo esperimento:** due fili molto vicini, percorsi da correnti uguali e discordi **non** producono nessuna forza magnetica su un terzo filo, qualunque sia la corrente che lo percorre.

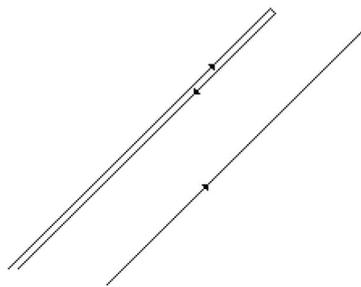


Figura 5.2: *Secondo esperimento*

Questo significa che le forze che i primi due fili producono sul terzo filo si cancellano esattamente. Inoltre, se i primi due fili sono percorsi da correnti uguali e concordi, la forza sul terzo filo è doppia rispetto a quella esercitata su tale filo solo dal primo o solo dal secondo dei due fili prossimi l'uno all'altro. Da questo segue che l'intensità della forza magnetica fra due conduttori paralleli percorsi dalle correnti  $I_1$  e  $I_2$  deve essere una funzione lineare nel prodotto delle due correnti  $F \propto I_1 \cdot I_2$ .

**Terzo esperimento:** prendendo due fili paralleli, percorsi da correnti, la forza agente sul tratto  $\Delta L$  di ciascun filo cresce proporzionalmente a  $\Delta L$  e al valore dell'intensità<sup>1</sup> di corrente  $I$  che lo attraversa, ovvero  $\Delta F \propto \Delta L \cdot I$ .

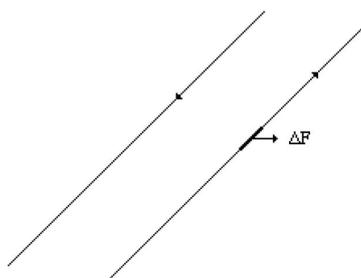


Figura 5.3: *Terzo esperimento*

**Quarto esperimento:** consideriamo adesso un filo conduttore curvato secondo un arco di circonferenza e mantenuto nel piano orizzontale attraverso bracci radiali orizzontali lunghi quanto il raggio dell'arco e liberi di ruotare attorno all'asse verticale. Attraverso due contatti striscianti sull'ar-

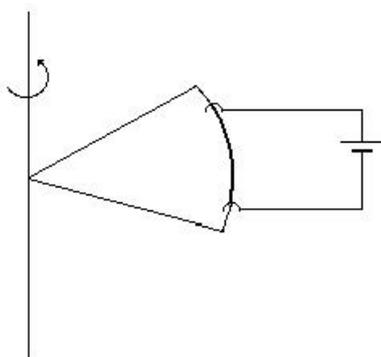


Figura 5.4: *Quarto esperimento*

co senza attrito, realizzati, per esempio, attraverso due vaschette di mercurio (menisco convesso...), si fa passare corrente **solo** nell'arco.

Comunque si disponga un secondo filo percorso da corrente nelle sue vicinanze, **non** si nota mai una tendenza dell'arco a muoversi, a ruotare, qualunque sia la corrente nell'arco e qualunque sia la sua lunghezza e il suo raggio.

<sup>1</sup>Ricordiamo a questo proposito la definizione operativa dell'Ampère nel *SI*: due fili paralleli, di sezione trascurabile, posti nel vuoto a una distanza di 1 metro e percorsi entrambi nello stesso verso da una corrente di 1 A, si attirano con una forza pari a  $2 \times 10^{-7} N/m$ .

Ne concludiamo che la forza magnetica deve essere ortogonale al filo, infatti il sistema realizzato è libero di ruotare nel piano orizzontale, per cui qualunque componente della forza magnetica che fosse parallela al filo farebbe muovere l'arco.

Per quanto abbiamo visto fin'ora, concludiamo che l'elemento di forza  $d\vec{F}$  che agisce sul filo nel punto  $\vec{P}$  del filo stesso sarà proporzionale alla corrente  $I$  nel filo e al tratto  $d\vec{l}$  di filo considerato, e inoltre risulterà ortogonale a  $d\vec{l}$  per cui sarà esprimibile da una relazione del tipo

$$d\vec{F}(\vec{P}) = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(\vec{P}) \quad (5.1.1)$$

dove  $\vec{B}(\vec{P})$  è un opportuno campo pseudo-vettoriale<sup>2</sup> detto *campo di induzione magnetica* il quale, per quanto visto prima

- deve dipendere dalla intensità di corrente che circola nel secondo filo;
- potrà dipendere dalla geometria relativa del secondo filo, come vista dal punto  $\vec{P}$ .

**Quinto esperimento:** nel caso che siano presenti più circuiti elettrici percorsi da corrente, si verifica che la forza  $d\vec{F}$  su un qualunque elemento di corrente fissato  $I d\vec{l}$  risulta essere la somma vettoriale delle forze che i vari circuiti esercitano su tale elemento di corrente quando tali circuiti sono presenti separatamente. Ovvero, anche per il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$ , come già per il campo elettrico  $\vec{E}$ , vale il principio di sovrapposizione lineare. Dovrà dunque risultare

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int d\vec{B}(\vec{r}_{12}, I_2 d\vec{l}_2) = I_2 \int (d\vec{l}_2 \wedge \vec{n}_{12}) F(r_{12}) \quad (5.1.4)$$

Questa relazione è l'analogo della relazione che fornisce il campo elettrico in un punto come somma dei campi elettrici elementari ivi prodotti dalle cariche

<sup>2</sup>Per definizione, una grandezza vettoriale si trasforma, per rotazioni del sistema di riferimento, come il vettore posizione  $\vec{x}$ . Grandezze vettoriali sono la velocità  $\vec{v}$ , l'accelerazione  $\vec{a}$ , la forza  $\vec{F}$ , il campo elettrico  $\vec{E}$ , etc ...

Se alle rotazioni aggiungiamo la parità, ovvero l'inversione degli assi, allora, evidentemente, per definizione, si ha

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (5.1.2)$$

Di nuovo, chiameremo vettore (o vettore polare...) qualunque grandezza che, anche per parità, si trasformi come la posizione, ovvero inverte il segno delle sue componenti.

Si osservi che se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono due vettori polari, il risultato del prodotto vettore fra i due vettori  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  non si trasforma per parità come i vettori dati  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ; infatti

$$\vec{a} \rightarrow -\vec{a}; \quad \vec{b} \rightarrow -\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \wedge \vec{b} \rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (5.1.3)$$

Per definizione, la grandezza  $\vec{w} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  si trasforma come uno pseudovettore (o vettore assiale...). Tipici vettori assiali sono il momento angolare  $\vec{J}$ , il momento di una forza  $\vec{T}$ , la velocità angolare  $\vec{\omega}$ , ...

infinitesime che costituiscono il corpo carico considerato. La differenza è che, nel caso del campo elettrico, essendo la carica una grandezza scalare, ed essendo la forza diretta come il vettore congiungente, non può che essere

$$d\vec{E}_1 = dq_2 \vec{n}_{12} G(r_{12}) \quad (5.1.5)$$

dove la forma analitica della funzione  $G(r)$  viene poi esplicitata attraverso la legge di Coulomb.

Nel caso della forza magnetica, di nuovo, per esplicitare la forma analitica della funzione  $F$  è necessario un esperimento che, in un certo senso, sia l'analogo dell'esperimento di Coulomb. In elettrostatica eravamo però facilitati dal fatto che avevamo la possibilità di usare cariche "puntiformi", mentre adesso l'analogo del circuito "puntiforme" non esiste in quanto un circuito percorso da corrente ha, intrinsecamente, una struttura che non è possibile mai riportare a quella di un punto (esiste, per esempio, la direzione privilegiata rappresentata dalla normale al circuito...).

**Sesto esperimento:** consideriamo tre spire, di raggi  $R_1$ ,  $R_2$  ed  $R_3$ , coassiali, a distanza  $d$  e  $D$  rispettivamente e supponiamo che le tre spire siano percorse dalle correnti  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

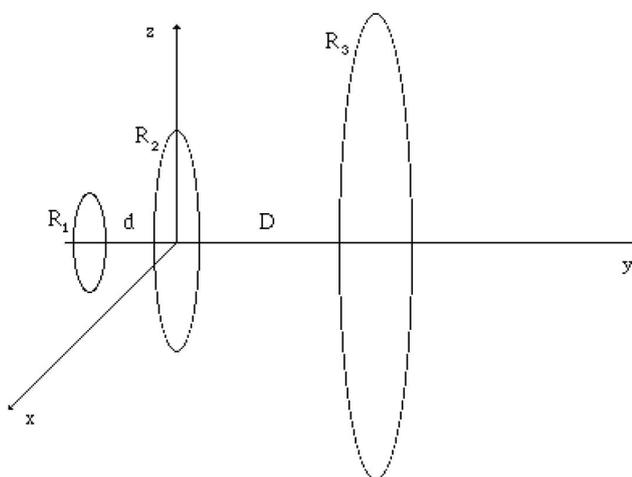


Figura 5.5: *Sesto esperimento*

Da quanto abbiamo appreso circa la forza magnetica, ci attendiamo che quella che si manifesta sulla spira centrale (spira "2"), percorsa dalla corrente  $I_2$ , a causa della corrente nella spira "1" sia, per ragioni di simmetria, diretta

secondo l'asse  $y$ . Risulta

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_{\text{"2"}} d\vec{F}_1(\vec{x}) = \int_{\text{"2"}} I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(\vec{x}) = \int_{\text{"2"}} I_2 d\vec{l}_2 \wedge \int_{\text{"1"}} d\vec{B}_1 = \\
 &= \int_2 I_2 d\vec{l}_2 \wedge \int_{\text{"1"}} I_1 (d\vec{l}_1 \wedge \vec{n}_{12}) F(r_{12}) = \\
 &= I_2 I_1 \int_{\text{"2"}} \int_{\text{"1"}} d\vec{l}_2 \wedge (d\vec{l}_1 \wedge \vec{n}_{12}) F(r_{12}) \quad (5.1.6)
 \end{aligned}$$

Analogamente, a causa della corrente nella spira "3", sulla spira "2" agirà una forza magnetica (di nuovo diretta secondo l'asse  $y$ ) pari a

$$\begin{aligned}
 F_3 &= \int_{\text{"2"}} d\vec{F}_3(\vec{x}) = \int_{\text{"2"}} I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_3(\vec{x}) = \int_{\text{"2"}} I_2 d\vec{l}_2 \wedge \int_{\text{"3"}} d\vec{B}_3 = \\
 &= \int_2 I_2 d\vec{l}_2 \wedge \int_{\text{"3"}} I_3 (d\vec{l}_3 \wedge \vec{n}_{32}) F(r_{32}) = \\
 &= I_2 I_3 \int_{\text{"2"}} \int_{\text{"3"}} d\vec{l}_2 \wedge (d\vec{l}_3 \wedge \vec{n}_{32}) F(r_{32}) \quad (5.1.7)
 \end{aligned}$$

Indichiamo adesso con  $S$  il rapporto fra i raggi delle spire "1" e "2"

$$S = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_2 = S R_1 \quad (5.1.8)$$

e supponiamo adesso che la spira "3" abbia raggio

$$R_3 = S R_2 \quad (5.1.9)$$

e che si trovi ad una distanza  $D$  dalla spira "2" tale che

$$D = S d \quad (5.1.10)$$

dove  $d$  è la distanza della spira "1" dalla spira "2".

Risulta evidente che il sistema delle due spire "2" e "3" è semplicemente il trasformato di scala del sistema delle due spire "1" e "2", appunto per il fattore di scala  $S$ . D'altronde il versore  $\vec{n}$  non viene alterato dalla trasformazione di scala, mentre risulta

$$dl_3 = S^2 dl_1 \quad (5.1.11)$$

Siccome, sperimentalmente si osserva equilibrio fra le due forze magnetiche quando

$$I_1 = I_3 \quad (5.1.12)$$

ecco che questo risultato sperimentale implica che

$$S^2 F(r_{32}) = F(r_{12}) \Rightarrow F(r_{32}) = S^{-2} F(r_{12}) \quad (5.1.13)$$

ovvero, essendo appunto per la trasformazione di scala

$$r_{32} = S r_{12} \quad (5.1.14)$$

ne risulta che la dipendenza analitica della funzione  $F$  da  $r$  non può che essere del tipo

$$F(Sr) = S^{-2} F(r) \quad \Rightarrow \quad F(r) = \alpha r^{-2} \quad (5.1.15)$$

dove  $\alpha$  è una costante opportuna.

Questo risultato ci consente finalmente di esplicitare l'espressione analitica del campo di induzione magnetica  $\vec{B}(\vec{x})$  prodotto da una o più spire percorse da corrente (diamo il risultato per una sola spira, per più spire basterà usare il principio di sovrapposizione lineare...): risulta

$$\vec{B}(\vec{x}) = I \int (d\vec{l} \wedge \vec{n}) F(r) = \alpha I \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{n}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \quad (5.1.16)$$

dove  $\vec{y}$  è il vettore posizione relativo all'elemento di circuito  $d\vec{l}$  mentre  $\vec{x}$  è il vettore posizione del punto dove siamo interessati a conoscere il campo di induzione magnetica. Il valore della costante  $\alpha$  si ricava dal fatto che, per definizione di Ampère, la forza magnetica fra due fili paralleli, infiniti, percorsi entrambi dalla corrente di  $1A$  vale  $2.0 \times 10^{-7} N/m$  e, da quanto precede, possiamo scrivere che dovrà essere

$$\begin{aligned} F &= \alpha I_a I_b \int_{"a"} \int_{"b"} d\vec{l}_a \wedge (d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}) r_{ab}^{-2} = \\ &= \alpha I_a I_b \int_{"a"} d\vec{l}_a \wedge \int_{"b"} \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}}{r_{ab}^{-2}} \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Ammettiamo adesso che i fili giacciono nel piano  $zy$ , siano paralleli all'asse  $z$  e si trovino a una distanza  $D$  uno dall'altro. Assumiamo anche che la corrente sia in entrambi i conduttori diretta come il versore  $\vec{k}$  dell'asse  $z$ . Interessiamoci alla forza magnetica elementare che la corrente nel filo "b" esercita sul tratto  $d\vec{l}_a$  del filo "a" che, senza perdere di generalità, potremo assumere che si trovi nel punto di coordinate  $x = y = z = 0$ .

Per come è messo il filo "b", chiaramente si avrà

$$d\vec{l}_b = \vec{k} dz \quad (5.1.18)$$

Il versore  $\vec{n}_{ba}$  dal generico punto  $(0, D, z)$  del filo "b" diretto verso il punto  $(0, 0, 0)$  del filo "a" è dato dalla relazione

$$\vec{n}_{ba} = \frac{-\vec{j}D - \vec{k}z}{\sqrt{D^2 + z^2}} = \frac{-\vec{j}D - \vec{k}z}{r_{ab}} \quad (5.1.19)$$

dove abbiamo indicato con  $\vec{j}$  il versore dell'asse  $y$ .

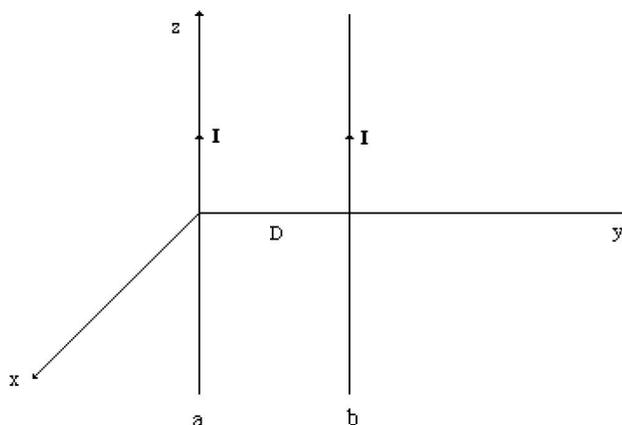


Figura 5.6: Definizione dell'Ampère

Risulta così che la forza elementare  $d\vec{F}$  sul tratto di circuito  $d\vec{l}_a$  vale

$$d\vec{F} = \alpha I_a I_b d\vec{l}_a \wedge \int_{b'} \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}}{r_{ab}^2} \quad (5.1.20)$$

Ma

$$\frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}}{r_{ab}^2} = \frac{\vec{k} \wedge (-\vec{j}D - \vec{k}z)}{\sqrt{(D^2 + z^2)^3}} dz \quad (5.1.21)$$

ed essendo

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \quad (5.1.22)$$

ne segue che l'integrale in questione vale

$$\int_{b'} \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}}{r_{ab}^2} = \vec{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D}{\sqrt{(D^2 + z^2)^3}} dz \quad (5.1.23)$$

Effettuando la sostituzione di variabile

$$\xi = \frac{z}{D} \quad \Rightarrow \quad z = \xi D \quad (5.1.24)$$

ricaviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D}{\sqrt{(D^2 + z^2)^3}} dz = D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{D^3 \sqrt{(1 + \xi^2)^3}} \quad (5.1.25)$$

e dunque

$$\int_{b'} \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}}{r_{ab}^2} = \frac{\vec{i}}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 + \xi^2)^3}} \quad (5.1.26)$$

L'integrale<sup>3</sup> in questione è uguale a 2, per cui, in definitiva, risulta

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \alpha I_a I_b d\vec{l}_a \wedge \int_{"2"} \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{n}_{ba}}{r_{ab}^2} = 2\alpha I_a I_b \frac{d\vec{l}_a \wedge \vec{i}}{D} = 2\alpha I_a I_b dl_a \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{D} = \\ &= 2\alpha I_a I_b dl_a \frac{\vec{j}}{D} \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Questo risultato mostra che, in questa configurazione di correnti concordi, la forza che agisce sul filo "a" è rivolta verso il filo "b" (cioè è attrattiva) e inoltre, per la definizione dell'Ampère nel Sistema Internazionale, ci permette anche di esplicitare il valore della costante a introdotta precedentemente: risulta

$$\alpha = 10^{-7} \quad (5.1.30)$$

Solitamente, in magnetostatica, si usa definire attraverso la costante  $\alpha$  la *permeabilità magnetica del vuoto*  $\mu_0$  nel modo seguente:

$$\mu_0 = 4\pi \alpha = 4\pi \times 10^{-7} \quad (5.1.31)$$

Ne segue quindi, finalmente, che il campo di induzione magnetica  $\vec{B}(\vec{x})$  prodotto da un circuito percorso da corrente  $I$  vale

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{n}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \quad (5.1.32)$$

dove l'integrale è fatto sul circuito stesso.

L'unità di misura del campo magnetico nel sistema *SI* è il Tesla. Dal punto di vista dimensionale, osserviamo che le dimensioni del campo magnetico sono le seguenti

$$[F] = [B][I][L] \quad \Rightarrow \quad [B] = \frac{Newton}{Ampere \times metro} \equiv Tesla \quad (5.1.33)$$

---

<sup>3</sup>Infatti, se poniamo

$$\xi = \tan \phi \quad (5.1.27)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} d\xi &= d(\tan \phi) = \frac{1}{\cos^2 \phi} d\phi \\ 1 + \xi^2 &= \frac{1}{\cos^2 \phi} \Rightarrow \sqrt{(1 + \xi^2)^3} = \frac{1}{\cos^3 \phi} \end{aligned}$$

e dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 + \xi^2)^3}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} \frac{1}{\frac{1}{\cos^3 \phi}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\phi \cos \phi = \sin \phi \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2 \quad (5.1.28)$$

D'altronde sappiamo che

$$\text{Ampere} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{secondo}} \quad (5.1.34)$$

$$\Rightarrow [B] \equiv \text{Tesla} = \frac{\text{Newton} \times \text{secondo}}{\text{Coulomb} \times \text{metro}} \quad (5.1.35)$$

Ma sappiamo altresì che

$$[E] = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Volt}}{\text{metro}} \quad \Rightarrow \quad [B] = \frac{\text{Volt} \times \text{secondo}}{\text{metro}^2} \quad (5.1.36)$$

La grandezza  $\text{Volt} \times \text{secondo}$  viene definita *Weber* (vedremo che essa misura il flusso del campo magnetico...): ne segue che

$$[B] \equiv \text{Tesla} = \frac{\text{Weber}}{\text{metro}^2} \quad (5.1.37)$$

Infine, quanto alle dimensioni della permeabilità magnetica del vuoto, esse sono tali che

$$[B] = [\mu_0][A][L][L]^{-2} \quad \Rightarrow \quad [\mu_0] = \frac{\text{Newton}}{\text{Ampere}^2} \quad (5.1.38)$$

$$\Rightarrow [\mu_0] = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere} \times \text{metro}} = \frac{\text{Tesla} \times \text{metro}}{\text{Ampere}} \quad (5.1.39)$$

### 5.1.2 La forza magnetica di un circuito su se stesso

Siamo giunti all'espressione del campo di induzione magnetica  $\vec{B}(\vec{x})$  considerando sostanzialmente le forze che si manifestano fra circuiti elettrici percorsi da corrente e abbiamo schematizzato i circuiti elettrici come "unidimensionali". Abbiamo infatti parlato di "elemento infinitesimo di corrente"  $I d\vec{l}$  per significare un vettore che ha come intensità il valore della corrente  $I$  per il tratto  $|dl|$  di filo considerato, direzione quella della tangente al filo nel punto considerato e verso quello della corrente in quel punto.

Volendo trattare i circuiti percorsi da corrente come entità tridimensionali, l'elemento di corrente infinitesimo di cui sopra è niente altro che  $\vec{J}(\vec{x}) dv$ , cioè la densità di corrente per l'elemento di volume. Il passaggio da tre a una dimensione, corrisponde a integrare sulla sezione del filo. Risulta quindi più corretto scrivere l'espressione del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  nel modo seguente:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y}) \wedge (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y}) \wedge \vec{n}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \quad (5.1.40)$$

dove l'integrazione adesso è estesa a tutto lo spazio.

La definizione del campo magnetico  $\vec{B}(\vec{x})$  ci consente di scrivere la forza totale magnetica  $\vec{F}$  agente su un circuito assegnato come

$$\vec{F} = \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x}) \quad (5.1.41)$$

Si riconoscerà in questo una profonda similitudine con quanto accadeva in elettrostatica, dove il campo era dato da

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})\vec{n}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \quad (5.1.42)$$

e la forza su una distribuzione di carica si calcolava come

$$\vec{F} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) \quad (5.1.43)$$

In elettrostatica la forza di Coulomb (e quindi, per il principio di sovrapposizione, la forza elettrostatica in genere) soddisfa il principio di azione e reazione. Questo è equivalente a dire che la risultante della forza elettrostatica che un corpo esercita su se stesso è sempre comunque nulla.

Consideriamo infatti un corpo di densità di carica  $\rho(\vec{x})$ : esso produce un campo elettrico  $\vec{E}$  il quale interagisce con la carica del corpo stesso e la forza elettrostatica totale sul corpo vale

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \rho(\vec{x}) \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int d^3x d^3y \rho(\vec{x}) \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \end{aligned} \quad (5.1.44)$$

e questa forza  $\vec{F}$  è sempre nulla perché è il risultato dell'integrazione di una funzione dispari nello scambio delle variabili di integrazione  $\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}$ .

Ma veniamo adesso al campo magnetico e supponiamo di avere un solo circuito percorso da corrente: esso produce nello spazio un campo magnetico, per cui sui suoi elementi infinitesimi di corrente ci saranno delle forze magnetiche: vogliamo mostrare che la risultante di queste forze, di nuovo, è nulla con che avremo dimostrato che il Principio di azione e reazione vale anche per le forze magnetiche ! Risulta

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x}) = \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \wedge \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int d^3x d^3y \vec{J}(\vec{x}) \wedge \left[ \vec{J}(\vec{y}) \wedge \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right] \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

Consideriamo ora la funzione integranda.

Poiché, in generale, il triplo prodotto vettore è tale che

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (5.1.46)$$

ne segue che

$$\vec{J}(\vec{x}) \wedge \left[ \vec{J}(\vec{y}) \wedge \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right] = \vec{J}(\vec{y}) \left[ \vec{J}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right] - \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \left[ \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{y}) \right] \quad (5.1.47)$$

Il secondo termine è evidentemente antisimmetrico nello scambio  $\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}$  per cui esso non contribuirà al valore della forza  $F$ ; ma che dire del primo termine? Esso non è palesemente antisimmetrico . . . . Al fine di valutarlo direttamente, iniziamo osservando che il vettore  $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$  può essere ottenuto come gradiente (rispetto alla variabile  $\vec{x}$ ) della funzione scalare  $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ . Si ha infatti

$$\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} = -\nabla_x \left( \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) \quad (5.1.48)$$

per cui il termine in questione diventa

$$\vec{J}(\vec{y}) \left[ \vec{J}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \right] = -\vec{J}(\vec{y}) \left[ \vec{J}(\vec{x}) \cdot \nabla_x \left( \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) \right] \quad (5.1.49)$$

Ricordiamo adesso che, in generale, vale la seguente identità

$$\operatorname{div}(f\vec{v}) = f\operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(f) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \quad (5.1.50)$$

per cui risulta

$$\vec{J}(\vec{x}) \cdot \nabla_x \left( \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) = \vec{\nabla}_x \cdot \left( \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}(\vec{x}) \quad (5.1.51)$$

Il secondo termine dell'espressione così ottenuta è nullo poiché, per la conservazione della carica elettrica, essendo le correnti continue, risulta ovunque

$$\operatorname{div} \vec{J} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.1.52)$$

mentre il primo termine, pur non essendo nullo, per il teorema di Gauss ha integrale nullo quando viene calcolato su tutto lo spazio (di nuovo assumiamo che le correnti siano diverse da zero solo al finito: basta allora trasformarlo in un integrale di flusso e siccome non ci sono correnti all'infinito, il flusso è nullo nel limite in cui il volume su cui si integra la divergenza tende all'infinito...). Resta così dimostrato che la risultante della forza magnetica che un circuito percorso da corrente esercita su se stesso è nulla.

### 5.1.3 Proprietà locali del campo di induzione magnetica

Abbiamo visto che il campo di induzione magnetica  $\vec{B}(\vec{x})$  prodotto da una distribuzione di correnti diversa da zero solo al finito, descritta dalla densità di corrente  $\vec{J}(\vec{y})$ , è dato dalla relazione

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \wedge \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (5.1.53)$$

D'altronde, essendo, come abbiamo già visto, che

$$\nabla_x \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = -\frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (5.1.54)$$

possiamo anche riscrivere l'espressione (5.1.53) come

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \wedge \vec{\nabla}_x \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \quad (5.1.55)$$

Ricordiamo adesso che, in generale risulta

$$\text{rot}(f\vec{v}) = -\vec{v} \wedge \text{grad}(f) + f \text{rot}(\vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge (f\vec{v}) = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla}f + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \quad (5.1.56)$$

per cui si ha

$$\vec{\nabla}_x \wedge \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{J}(\vec{y}) \right) = -\vec{J}(\vec{y}) \wedge \vec{\nabla}_x \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{\nabla}_x \wedge \vec{J}(\vec{y}) \quad (5.1.57)$$

ma, chiaramente, il secondo termine è nullo poiché la rotazione è fatta rispetto alla variabile  $x$  mentre la densità di corrente  $\vec{J}$  è funzione di  $y$ .

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \wedge \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \wedge \vec{\nabla}_x \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \\ &= \vec{\nabla}_x \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \end{aligned} \quad (5.1.58)$$

Se adesso definiamo la seguente funzione vettoriale

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.59)$$

abbiamo evidentemente che

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{x}) \equiv \text{rot} \vec{A}(\vec{x}) \quad (5.1.60)$$

Il campo vettoriale  $\vec{A}(\vec{x})$  viene chiamato *potenziale vettore* per l'analogia esistente con il potenziale scalare (elettrostatico)

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.61)$$

dal quale si ricava il campo elettrico attraverso l'operatore di gradiente

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad} V(\vec{x}) \equiv -\vec{\nabla} V(\vec{x}) \quad (5.1.62)$$

La conseguenza immediata della possibilità di ottenere il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  come rotore di un campo vettoriale è che la divergenza del campo deve essere nulla, infatti

$$\text{div rot } \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = 0 \quad (5.1.63)$$

L'equazione relativa alla divergenza di  $\vec{B}$  è la *terza equazione di Maxwell* e il suo significato fisico è che il campo magnetico, a differenze, per esempio, di quello elettrostatico, non ha "sorgenti".

Verifichiamo adesso che anche il potenziale vettore definito dalla (5.1.59) è un campo vettoriale avente lui stesso divergenza nulla. Abbiamo

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}(\vec{x}) &= \vec{\nabla}_x \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{\nabla}_x \cdot \left( \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla}_y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{\nabla}_y \cdot \left( \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{\nabla}_y \cdot \vec{J}(\vec{y}) \quad (5.1.64) \end{aligned}$$

Circa il primo termine, poiché è l'integrale di una divergenza esteso a tutto lo spazio, esso può essere trasformato, attraverso il teorema di Gauss, in un integrale di flusso fatto su una superficie sferica di raggio che tende all'infinito, e siccome la densità di corrente, per ipotesi, è diversa da zero solo al finito, tale integrale risulterà nullo.

Quanto al secondo termine, esso è nullo perché, come abbiamo già osservato

$$\vec{\nabla}_y \cdot \vec{J}(\vec{y}) \equiv \text{div } \vec{J}(\vec{y}) = 0 \quad (5.1.65)$$

e quindi, in definitiva, possiamo concludere appunto che

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (5.1.66)$$

Questo risultato ci consente di arrivare a scrivere anche la *quarta equazione di Maxwell*. A questo riguardo, ricordiamo che per il potenziale elettrostatico  $V(\vec{x})$  vale l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (5.1.67)$$

Se confrontiamo allora le espressioni dei due potenziali scalare e vettoriale  $V$  e  $\vec{A}$  in termini della densità di carica e della densità di corrente

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.68)$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.69)$$

ne concludiamo immediatamente che anche per il potenziale vettore deve valere l'analogo dell'equazione di Poisson, nella forma

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \quad (5.1.70)$$

Siccome vale comunque l'identità

$$\text{rot rot}(\vec{v}) = -\nabla^2 \vec{v} + \text{grad div } \vec{v} \quad (5.1.71)$$

e abbiamo già visto che

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (5.1.72)$$

ne segue che

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B}(\vec{x}) &= \text{rot rot } \vec{A}(\vec{x}) = -\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) + \text{grad div } \vec{A}(\vec{x}) = -\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) = \\ &= \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (5.1.73)$$

Le due equazioni differenziali

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.1.74)$$

caratterizzano completamente, nel caso statico, il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$ , esattamente come le due equazioni differenziali

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad (5.1.75)$$

caratterizzano completamente il campo elettrostatico  $\vec{E}$ .

Questo fatto discende da un teorema generale di analisi matematica, il quale stabilisce che, assegnate in tutto lo spazio la funzione scalare  $f(\vec{x})$  e la funzione vettoriale  $\vec{w}(\vec{x})$ , la soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\text{div } \vec{v} = f(\vec{x}); \quad \text{rot } \vec{v} = \vec{w}(\vec{x}) \quad (5.1.76)$$

se esiste è unica<sup>4</sup>.

Per quanto concerne il potenziale vettore  $\vec{A}(\vec{x})$ , un altro teorema di analisi matematica ci dice che, se è dato un campo vettoriale  $\vec{b}$  avente divergenza

<sup>4</sup>Supponiamo infatti che esistano due campi  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  i quali soddisfano entrambi le due equazioni di cui alla (5.1.76).

nulla, allora esiste un campo vettoriale  $\vec{a}$  di cui esso è il rotore e viceversa, cioè

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \vec{a} : \vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a} \quad (5.1.81)$$

Questo è un po' l'analogo del teorema che stabilisce che se un campo vettoriale  $\vec{e}$  è irrotazionale, allora esso ammette un potenziale, ovvero

$$\operatorname{rot} \vec{e} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists F : \vec{e} = \operatorname{grad} F \quad (5.1.82)$$

Il campo  $\vec{a}(\vec{x})$ , comunque, (così come la funzione  $f$  ...) non è univocamente determinato dalla condizione di avere il campo  $\vec{b}(\vec{x})$  come rotore. Possiamo dunque chiederci in che senso il campo  $\vec{A}(\vec{x})$  che abbiamo ottenuto sopra è il potenziale vettore che individua il campo di induzione magnetica  $\vec{B}(\vec{x})$ . Ritorniamo per questo al caso generale e osserviamo che se i rotori di  $\vec{a}(\vec{x})$  e  $\vec{a}'(\vec{x})$  forniscono lo stesso campo  $\vec{b}(\vec{x})$  allora il rotore della loro differenza sarà nullo, ovvero il campo differenza  $\vec{a}(\vec{x}) - \vec{a}'(\vec{x})$  sarà conservativo, cioè potrà ottenersi come il gradiente di una opportuna funzione scalare  $f$  e dunque

$$\vec{a}(\vec{x}) = \vec{a}'(\vec{x}) + \vec{\nabla} f \quad (5.1.83)$$

Questa arbitrarietà nella scelta del *potenziale vettore* è detta "arbitrarietà di gauge". Essa può essere usata per imporre che il potenziale abbia divergenza assegnata  $d(\vec{x})$  (per esempio nulla ...). Immaginiamo infatti che il campo  $\vec{a}(\vec{x})$  fornisca il campo  $\vec{b}(\vec{x})$  come rotore ma risulti in generale

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad (5.1.84)$$

Definiamo la funzione

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{g(\vec{y}) - d(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.85)$$

Essendo tali equazioni due equazioni lineari, il campo *differenza*

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (5.1.77)$$

soddisferà le due equazioni omogenee

$$\operatorname{div} \vec{d} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{d} = 0 \quad (5.1.78)$$

Poiché  $\vec{d}$  è irrotazionale in tutto lo spazio, esso è conservativo e dunque ammette potenziale, ovvero esiste una funzione scalare  $F$  tale che

$$\vec{d} = \operatorname{grad} F \equiv \vec{\nabla} F \quad (5.1.79)$$

Sostituendo nell'equazione della divergenza, si ricava che la funzione  $F$  soddisfa in tutto lo spazio l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 F = 0 \quad (5.1.80)$$

e questo implica che la funzione  $F$  sia costante, ovvero che  $\vec{d}$  sia identicamente nullo.

e poniamo

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{\nabla} f \quad (5.1.86)$$

Il campo  $\vec{a}'(\vec{x})$  ha ancora  $\vec{b}(\vec{x})$  come rotore, poiché il rotore di un gradiente è comunque nullo, ma ha divergenza pari a  $d(\vec{x})$ , infatti

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = g(\vec{x}) + \nabla^2 f = g(\vec{x}) - [g(\vec{x}) - d(\vec{x})] = d(\vec{x}) \quad (5.1.87)$$

in quanto, come già abbiamo visto nel caso del potenziale elettrostatico, risulta

$$\nabla^2 \left[ \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{g(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] = -g(\vec{y}) \quad (5.1.88)$$

Possiamo allora concludere che il potenziale vettore  $\vec{A}(\vec{x})$  il quale ha

- il campo  $\vec{B}$  come rotore;
- divergenza nulla

è unico a meno della somma con un vettore costante.

#### 5.1.4 Proprietà integrali del campo $\vec{B}$

Abbiamo visto che il campo di induzione magnetica  $\vec{B}(x)$  soddisfa le due equazioni differenziali

$$\text{div } \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (5.1.89)$$

$$\text{rot } \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \quad (5.1.90)$$

La prima equazione, come abbiamo già detto, significa che non ci sono le cariche magnetiche, ovvero che il campo  $\vec{B}$  non ha *sorgenti*.

Usando il teorema di Gauss, possiamo anche dire che il flusso  $\Phi(\vec{B})$  del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è identicamente nullo

$$\Phi_{\text{superficie chiusa}}(\vec{B}) = 0 \quad (5.1.91)$$

Notiamo che, poiché  $B$  si misura in *Tesla*  $\equiv$  *Weber*/ $m^2$ , chiaramente l'unità di misura del flusso di induzione magnetica risulterà essere il Weber, ovvero il *Volt*  $\cdot$  *s*.

Dall'altra equazione di Maxwell, unitamente al teorema di Stokes, si ricava che la circuitazione di  $\vec{B}$  attraverso una linea chiusa  $\Gamma$  è pari a  $\mu_0$  volte la corrente  $I$  che attraversa una qualunque superficie che si appoggi su tale curva  $\Gamma$ , orientata in conseguenza dell'orientamento fissato su  $\Gamma$  stessa. Questa corrente viene chiamata *corrente concatenata alla linea chiusa*.

La quarta equazione di Maxwell in forma integrale

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c \quad (5.1.92)$$

è nota in letteratura come Legge (o teorema) di Ampère.

### 5.1.5 Legge di Biot-Savart

Consideriamo un filo rettilineo e infinitamente lungo, percorso da una corrente  $I$ .

Vogliamo determinare l'espressione del campo magnetico  $\vec{B}$  che questo filo genera nello spazio. Sappiamo che

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \wedge \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (5.1.93)$$

Immaginiamo che il filo sia allineato lungo l'asse  $z$  e che la corrente fluisca nel verso di tale asse.

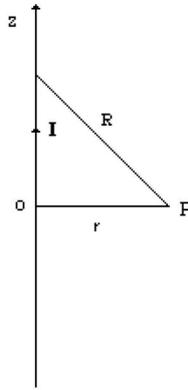


Figura 5.7: Filo rettilineo e infinito percorso da corrente

Risulta

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{k} z; \quad d\vec{l} = \vec{k} dz \quad (5.1.94)$$

dove  $\vec{k}$  è il versore dell'asse  $z$ .

Si ha quindi

$$d\vec{l} \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} = dz \vec{k} \wedge (\vec{r} - \vec{k} z) \frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} \quad (5.1.95)$$

e dunque risulta

$$\vec{B}(\vec{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{k} \wedge \vec{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} \quad (5.1.96)$$

Circa l'integrale, effettuando la sostituzione  $\xi \equiv \frac{z}{r} \Rightarrow dz = r d\xi$ , si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)^3}} \quad (5.1.97)$$

il quale si integra facilmente mediante la sostituzione

$$\xi = \tan \phi \quad \Rightarrow \quad d\xi = d \tan \phi = d\phi \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (5.1.98)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \xi^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (5.1.99)$$

per cui abbiamo infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)^3}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\phi \cos \phi = 2 \quad (5.1.100)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{P}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{k} \wedge \vec{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{k} \wedge \vec{r} \frac{2}{r^2} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \frac{\vec{k} \wedge \vec{n}}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{k} \wedge \vec{n} \end{aligned} \quad (5.1.101)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore normale al filo, passante per il punto  $\vec{P}$  dove vogliamo conoscere il campo ( $\Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{n}$  è un versore ortogonale sia a  $\vec{k}$  che a  $\vec{n}$ ).

L'espressione ottenuta del campo  $\vec{B}$  di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo e infinito percorso da una corrente  $I$  è nota come *Legge di Biot-Savart*.

Essa può essere ottenuta anche a partire da alcune considerazioni di simmetria, unitamente al teorema di Ampère.

Ricordiamo a questo proposito che, come abbiamo già avuto modo di notare, mentre le componenti dei vettori come il campo elettrico  $\vec{E}$ , la posizione  $\vec{x}$ , la velocità  $\vec{v}$ , l'accelerazione  $\vec{a}$ , la forza  $\vec{F}$ , l'impulso  $\vec{P}$ , etc., cambiano di segno per parità, ovvero per inversione dei tre assi spaziali, le componenti del campo magnetico  $\vec{B}$  **non** cambiano di segno (così come accade, per esempio, anche per il momento angolare  $\vec{M}$  ...) !

La ragione, come già vedemmo, è che  $\vec{B}$  risulta dal prodotto vettoriale di due vettori  $\vec{J}$  e  $(\vec{x} - \vec{y})$ , che, quindi, si invertono entrambi per riflessione spaziale (*vettori polari*): ne segue che il loro prodotto (vettoriale o scalare non ha qui importanza ...) non lo fa ! Il campo magnetico è un *vettore assiale* ovvero uno *pseudovettore*, come il momento angolare, la coppia di una forza, etc...

Vediamo adesso come le proprietà di trasformazione del campo  $\vec{B}$ , possono aiutarci a garantire che il campo prodotto da un filo rettilineo e infinito, percorso da corrente deve essere ortogonale al piano  $\Pi$  che contiene il filo stesso e il punto dove vogliamo conoscere il campo.

In generale, a priori, potrebbe essere presente anche una componente nel piano  $\Pi$  definito sopra; però questa componente dovrebbe cambiare di segno in relazione a una parità rispetto al piano stesso. Tale operazione, infatti, per un vettore polare non cambia il segno della sua componente nel piano  $\Pi$

mentre cambia il segno di quella ortogonale al piano, mentre per uno pseudovettore accade il contrario.

Per ragioni fisiche, però, siccome la distribuzione di corrente (che è descritta da un vettore polare che non ha componente ortogonale al piano  $\Pi$ ) **non** cambia per parità, nemmeno  $\vec{B}$  può farlo, visto che è determinato univocamente da essa. Ne segue che  $\vec{B}$  non può avere componenti nel piano  $\Pi$ , ma solo ortogonale a esso. Usando questa conclusione, unitamente ad argomenti di simmetria (invarianza per rotazioni intorno al filo ...) se ne conclude che se effettuiamo la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo una circonferenza di raggio  $r$ , concentrica con il filo e giacente in un piano ortogonale al filo, risulta

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = B(r) r d\phi \quad (5.1.102)$$

e dunque, per la legge di Ampère, si ha che

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.1.103)$$

che è la legge di Biot-Savart.

Come applicazione, determiniamo adesso il campo magnetico prodotto da un filo omogeneo, rettilineo e infinitamente lungo, avente però un raggio non nullo  $R$ , percorso da una corrente  $I$ .

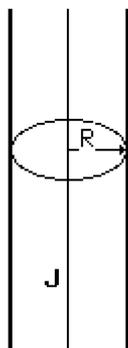


Figura 5.8: *Filo rettilineo e infinito di raggio  $R$ , percorso da corrente*

Essendo per ipotesi il filo omogeneo, la densità di corrente che circola in esso vale evidentemente

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{k} \quad (5.1.104)$$

dove  $\vec{k}$  è il versore diretto secondo il filo, nel verso in cui fluisce la corrente. Per il fatto che  $\vec{B}$  è un pseudovettore e per la simmetria che il problema possiede,  $\vec{B}$  non può avere componente nel piano definito dall'asse del filo e dal punto dove si vuole conoscere il campo. Può solo essere diretto ortogonalmente a tale piano e, per ragioni di simmetria, dipendere solo dalla

distanza  $r$  del punto considerato dall'asse del filo. Usando allora il teorema di Ampère, si ha

$$r < R : B(r) 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 J r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (5.1.105)$$

$$r > R : B(r) 2\pi r = \mu_0 J \pi R^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.1.106)$$

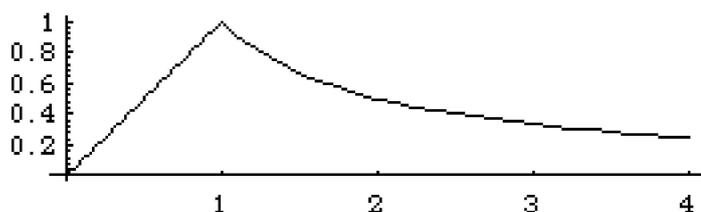


Figura 5.9: Intensità del campo prodotto dalla corrente  $I$  in un filo rettilineo e infinito, avente raggio  $R$

Il campo è nullo sull'asse del filo, cresce linearmente con  $r$  fino a che la sua intensità raggiunge il valor massimo  $B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$  alla superficie del filo, quindi tende a zero come  $1/r$  quando  $r > R$ .

Che succede se il filo infinito di raggio  $R$ , percorso dalla corrente  $I$ , ha un buco al centro di raggio  $r$  ?

In questo caso la densità di corrente ha modulo pari a

$$J = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)} \quad (5.1.107)$$

e, sempre per i soliti argomenti di simmetria, unitamente al teorema di Ampère, risulta

$$x < r : B(x) 2\pi x = 0 \Rightarrow B(x) = 0 \quad (5.1.108)$$

$$r < x < R : B(x) 2\pi x = \mu_0 J \pi (x^2 - r^2) \Rightarrow B(x) = \mu_0 J \frac{x^2 - r^2}{2x} \quad (5.1.109)$$

$$x > R : B(x) 2\pi x = \mu_0 I \Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 J (R^2 - r^2)}{2x} \quad (5.1.110)$$

il cui grafico è riportato nella figura (5.10) che segue.

Si osservi adesso che anche il calcolo in questa configurazione "con il buco" ha potuto essere eseguito utilizzando anche argomenti di simmetria, visto che il buco era concentrico con l'asse del filo.

Ma che succede se non è così ?

Immaginiamo adesso che il filo rettilineo, omogeneo e infinito di raggio  $R$



Figura 5.10: Intensità del campo prodotto dalla corrente  $I$  in un filo di raggio  $R$  con un buco di raggio  $r$ .

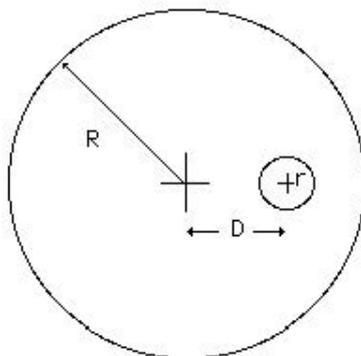


Figura 5.11: Filo di raggio  $R$  con un foro di raggio  $r$ , posto fuori asse a distanza  $D$

percorso dalla corrente  $I$ , possiede internamente un buco di raggio  $r$ , a distanza  $D$  dall'asse del filo stesso.

Procediamo descrivendo la distribuzione di corrente nel filo con le caratteristiche di cui sopra come quella che si ottiene dalla sovrapposizione della distribuzione di corrente relativa a un filo pieno di raggio  $R$ , percorso dalla densità di corrente  $J$  (distribuzione  $\alpha$ ), con quella relativa a un filo di raggio  $r$ , posto laddove si trova il foro e percorso dalla densità di corrente  $-J$  (distribuzione  $\beta$ ). Il campo magnetico prodotto dalla distribuzione assegnata, data la linearità delle equazioni di Maxwell, risulterà semplicemente dalla somma vettoriale dei due campi magnetici generati dalla distribuzione  $\alpha$  e  $\beta$ , rispettivamente.

Per quanto già visto in precedenza, un filo infinito di raggio  $R$ , percorso dalla densità di corrente  $J$ , genera nello spazio un campo magnetico pari a

$$x < R \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge \vec{x} \quad (5.1.111)$$

$$x > R \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{R}{x} \right)^2 \vec{J} \wedge \vec{x} \quad (5.1.112)$$

Nel caso della distribuzione  $-J$  nel filo di raggio  $r$ , disposta fuori asse per la quantità  $\vec{D}$ , avremo invece

$$|\vec{x} - \vec{D}| < r \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge (\vec{x} - \vec{D}) \quad (5.1.113)$$

$$|\vec{x} - \vec{D}| > r \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{r}{|\vec{x} - \vec{D}|} \right)^2 \vec{J} \wedge (\vec{x} - \vec{D}) \quad (5.1.114)$$

Ne segue così che il campo magnetico generato dalla distribuzione di cui alla fig.(5.11), nel filo ma fuori dal buco, nel buco e fuori dal filo, risulta dato rispettivamente da

$$x < R \text{ e } |\vec{x} - \vec{D}| > r \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge \left[ \vec{x} - (\vec{x} - \vec{D}) \frac{r^2}{|\vec{x} - \vec{D}|^2} \right] \quad (5.1.115)$$

$$|\vec{x} - \vec{D}| < r \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge [\vec{x} - (\vec{x} - \vec{D})] = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge \vec{D} \quad (5.1.116)$$

$$x > R \quad : \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge \left[ \vec{x} \frac{R^2}{|\vec{x}|^2} - (\vec{x} - \vec{D}) \frac{r^2}{|\vec{x} - \vec{D}|^2} \right] \quad (5.1.117)$$

Si osservi, in particolare, che nel buco il campo magnetico è costante e si annulla per  $\vec{D} \rightarrow 0$ , ovvero quando il buco ha lo stesso asse del filo.

### 5.1.6 Campo magnetico prodotto da una spira sul proprio asse

Consideriamo una spira circolare di raggio  $r$  posta nel piano  $x-y$ , percorsa da una corrente costante  $I$  in verso antiorario: vogliamo conoscere l'espressione del campo magnetico  $\vec{B}(z)$  che la spira genera sul proprio asse.

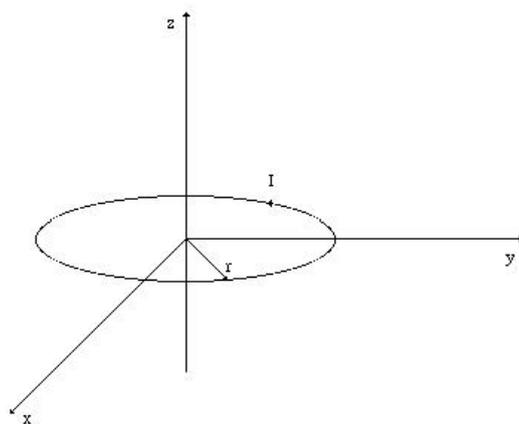


Figura 5.12: Spira circolare di raggio  $r$  percorsa da corrente

Partiamo dalla definizione che abbiamo dato di  $\vec{B}$  in termini della densità di corrente:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{l} \wedge (\vec{x} - \vec{y}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad (5.1.118)$$

dove abbiamo posto  $\vec{R} \equiv \vec{x} - \vec{y}$ .

Nel caso si voglia conoscere il campo in un punto dell'asse  $z$ , abbiamo

$$\vec{x} = (0, 0, z); \quad \vec{y} = r(\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = (-r \cos \phi, -r \sin \phi, z) \quad (5.1.119)$$

e si ha inoltre

$$d\vec{l} = r d\phi (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (5.1.120)$$

per cui si ha

$$d\vec{l} \wedge \vec{R} = r d\phi (z \cos \phi, z \sin \phi, r) \quad (5.1.121)$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \sqrt{(r^2 + z^2)^3} \quad (5.1.122)$$

L'integrazione angolare fornisce quindi il risultato cercato

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\phi \frac{r}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} (z \cos \phi, z \sin \phi, r) = \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} (0, 0, 2\pi r) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} (0, 0, 1) \equiv \\
 &\equiv \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} \vec{k}
 \end{aligned} \tag{5.1.123}$$

dove, al solito, abbiamo indicato con  $\vec{k}$  il versore dell'asse  $z$ .

La funzione  $B(z)$ , come mostra anche graficamente la fig.(5.13), è una funzione pari e, al massimo, raggiunto per  $z = 0$ , essa vale

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2r} \tag{5.1.124}$$

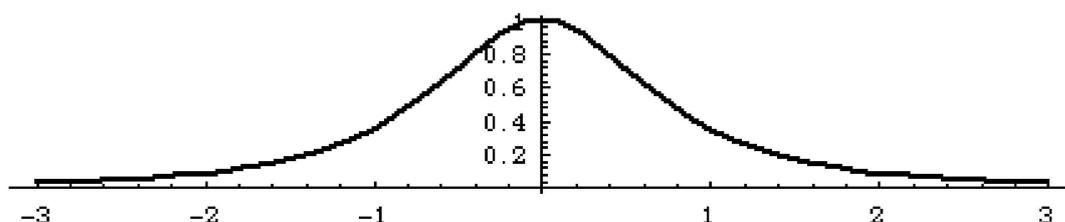


Figura 5.13: Campo magnetico generato da una spira sul proprio asse

Prima di concludere l'argomento, osserviamo che, per  $z \gg r$ , il campo  $B$  va come  $z^{-3}$ : questa è una tipica conseguenza del fatto che il campo di monopolo magnetico non c'è. . . . Un altro modo, che richiameremo in seguito, utile per rappresentare il campo  $B$  sull'asse della spira fa uso del concetto di *momento di dipolo magnetico*  $\vec{m}$  associato alla spira piana percorsa da corrente, il cui significato fisico verrà definito meglio in seguito e che, per ora, ci limitiamo a definire come un vettore di modulo

$$|\vec{m}| \equiv I \times \text{area della spira} = \pi r^2 I \tag{5.1.125}$$

diretto come la normale al piano della spira, nel verso tale che un osservatore allineato con esso veda la corrente girare in verso antiorario: nel nostro caso

$$\vec{m} = \pi r^2 I \vec{k} \tag{5.1.126}$$

Risulta allora

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} \vec{m} \tag{5.1.127}$$

Avremo modo, in seguito, di tornare su questa espressione.

### 5.1.7 Campo magnetico prodotto da un solenoide

Un solenoide è l'insieme costituito da spire circolari piane di uguale raggio  $R$ , sovrapposte l'una all'altra, con i centri disposti su un asse ortogonale al piano delle spire, tutte attraversate dalla stessa corrente  $I$ .

L'insieme ha dunque una simmetria cilindrica, di rotazione intorno all'asse del solenoide. Nella pratica, un solenoide viene realizzato avvolgendo un filo di raggio  $r \ll R$ , secondo una spirale circolare di raggio  $R$ , mantenendo le varie spire il più possibile vicine fra loro.

Poiché sappiamo calcolare il campo magnetico prodotto da una spira sul proprio asse, ecco che possiamo determinare il campo prodotto da un solenoide sul suo asse, facendo uso del principio di sovrapposizione.

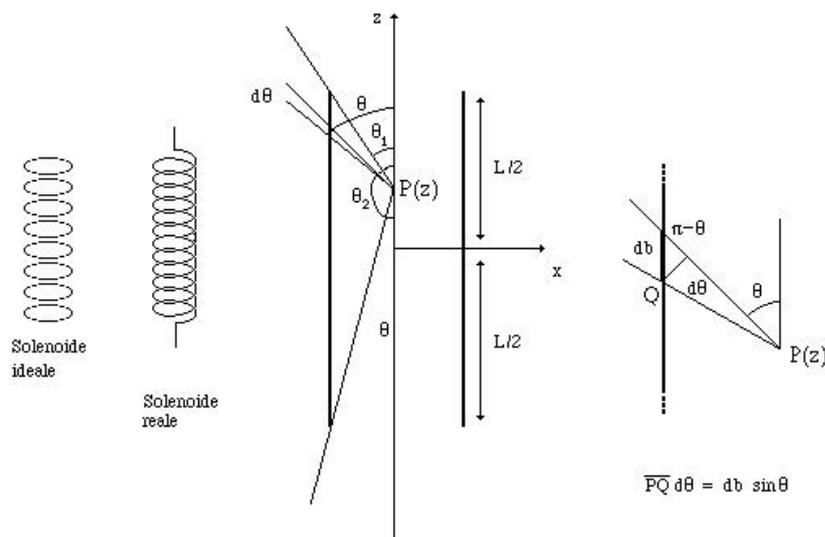


Figura 5.14: Campo magnetico sull'asse del solenoide

Per fare questo, possiamo procedere in due modi diversi.

#### Metodo A

Indichiamo con  $z$  la coordinata del punto  $\vec{P}$  dell'asse del solenoide dove vogliamo conoscere il campo  $\vec{B}$ . Già sappiamo che esso sarà diretto lungo l'asse  $z$ , in quanto somma vettoriale di campi tutti diretti come  $z$  (i campi delle singole spire ...). Una spira di raggio  $R$ , percorsa dalla corrente  $I$  in verso antiorario per un osservatore allineato secondo il versore  $\vec{k}$  dell'asse  $z$ , che abbia coordinata  $b$  lungo l'asse  $z$  ( $-L/2 < b < L/2$ ), per quanto abbiamo già visto, produrrà nel punto  $\vec{P}(z)$  un campo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\sqrt{[R^2 + (z - b)^2]^3}} \vec{k} \quad (5.1.128)$$

Se possiamo trattare le spire come fossero distribuite in modo continuo (solenoido *fitto*, ovvero con distanza fra le spire molto minore di  $R$  ...), le spire comprese fra  $b$  e  $b + db$  sono

$$dn = \frac{\mathcal{N}}{L} db \equiv N db \quad \text{dove } N \equiv \frac{\mathcal{N}}{L} \quad (5.1.129)$$

dove  $\mathcal{N}$  è il numero totale di spire del solenoide,  $L$  è la sua lunghezza e  $N$  rappresenta la densità lineare di spire. Dunque

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0}{2} I R^2 \vec{k} \int_{-L/2}^{+L/2} N db \frac{1}{\sqrt{[R^2 + (z-b)^2]^3}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} I R^2 \vec{k} \frac{N}{R^3} \int_{-L/2}^{+L/2} db \frac{1}{\sqrt{[1 + (\frac{z-b}{R})^2]^3}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{db}{R} \frac{1}{\sqrt{[1 + (\frac{z-b}{R})^2]^3}} \end{aligned} \quad (5.1.130)$$

Poniamo adesso

$$\beta \equiv \frac{b}{R}; \quad \zeta \equiv \frac{z}{R}; \quad \lambda \equiv \frac{L}{2R} \quad (5.1.131)$$

Risulta dunque

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\beta \frac{1}{\sqrt{[1 + (\zeta - \beta)^2]^3}} \quad (5.1.132)$$

Ricordiamo adesso che, quanto all'integrale che compare nella (5.1.132), quello indefinito risulta pari a

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv F(x) \quad (5.1.133)$$

per cui abbiamo<sup>5</sup> che

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} [F(\lambda - \zeta) - F(-\lambda - \zeta)] \quad (5.1.135)$$

ovvero, facendo uso della (5.1.134)

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (5.1.136)$$

<sup>5</sup>La funzione  $F(x)$  può essere posta in una forma più espressiva nel modo seguente. Iniziamo ponendo  $x = \cot \phi$ : risulta allora

$$x = \cot \phi \Rightarrow F(x) = \frac{\cot \phi}{\sqrt{1 + \cot^2 \phi}} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \phi}{\sin \phi}\right)^2}} = \cos \phi \quad (5.1.134)$$

dove

$$\cot \theta_1 \equiv \lambda - \zeta = \frac{L}{2R} - \frac{z}{R} = \frac{\frac{L}{2} - z}{R} \quad (5.1.137)$$

$$\cot \theta_2 \equiv -\lambda - \zeta = -\frac{L}{2R} - \frac{z}{R} = \frac{-\frac{L}{2} - z}{R} \quad (5.1.138)$$

Chiaramente, nel caso in cui la lunghezza  $L$  del solenoide sia molto grande rispetto al suo raggio e si sia interessati al campo  $\vec{B}$  nella zona centrale del solenoide, risulterà

$$\cot \theta_1 = \frac{+\frac{L}{2} - z}{R} \rightarrow \cot \theta_1 \gg 0 \Rightarrow \theta_1 \rightarrow 0 \quad (5.1.139)$$

$$\cot \theta_2 = \frac{-\frac{L}{2} - z}{R} \rightarrow \cot \theta_2 \ll 0 \Rightarrow \theta_2 \rightarrow \pi \quad (5.1.140)$$

ovvero, nell'ipotesi di solenoide infinitamente lungo, avremo che il campo magnetico sul suo asse è dato dall'espressione

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} [1 - (-1)] = \mu_0 I N \vec{k} \quad (5.1.141)$$

### Metodo B

Osserviamo che, come appare chiaro dalla figura (5.14), risulta

$$db \sin \theta = \sqrt{R^2 + (z - b)^2} d\theta \Rightarrow \frac{db}{\sqrt{R^2 + (z - b)^2}} = \frac{d\theta}{\sin \theta} \quad (5.1.142)$$

D'altronde è ovvio che

$$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (z - b)^2}} \quad (5.1.143)$$

per cui, riprendendo l'espressione iniziale che compare nella (5.1.130), risulta

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0}{2} I R^2 \vec{k} \int_{-L/2}^{+L/2} N db \frac{1}{\sqrt{[R^2 + (z - b)^2]^3}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} \int_{-L/2}^{+L/2} db \frac{R^2}{(\sqrt{[R^2 + (z - b)^2])^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} \sin^2 \theta = \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta \sin \theta = \\ &= \frac{\mu_0}{2} I N \vec{k} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (5.1.144)$$

Vogliamo adesso dimostrare che, in base a elementari considerazioni di simmetria, alla legge di Ampère e alla legge di Gauss, il campo magnetico all'interno del solenoide infinito è uniforme.

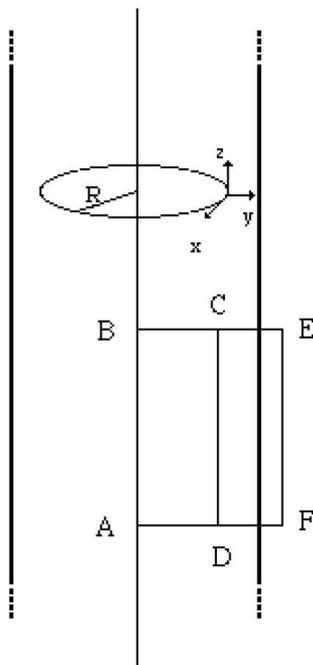


Figura 5.15: *Campo magnetico all'interno del solenoide infinito*

Fissiamo un punto qualsiasi, a distanza  $R$  dall'asse (interno o esterno al solenoide). Chiaramente il campo risulterà

- simmetrico per rotazioni intorno all'asse del solenoide;
- invariante per traslazioni lungo l'asse  $z$ .

Vogliamo dimostrare che il campo  $\vec{B}$  non può essere diretto che lungo l'asse  $z$ . Osserviamo infatti che

- se il campo avesse una componente radiale (lungo  $y$ , nella figura (5.15)), sarebbe violata l'equazione della divergenza di  $\vec{B}$ , poiché questa componente radiale produrrebbe un flusso non nullo sulla superficie laterale del cilindro di raggio  $R$ , coassiale con il solenoide: il flusso di  $\vec{B}$  sulle due superfici di base del cilindro in questione sarebbero uguali e opposte a causa dell'invarianza per traslazioni e dell'opposta inclinazione della normale su tali superfici; per cui, in definitiva, esisterebbe un flusso di  $\vec{B}$  diverso da zero attraverso una superficie chiusa !
- Il campo non può possedere nemmeno l'altra componente ortogonale all'asse (cioè quella diretta lungo  $x$ ), poiché essa produrrebbe una

circuitazione non nulla su una circonferenza di raggio  $R$ , nel piano ortogonale all'asse, concentrica con esso e per il teorema di Ampère, questa circuitazione deve essere proporzionale alla corrente concatenata alla linea chiusa, che però è nulla sia quando si è nel solenoide che quando si è fuori<sup>6</sup>.

Resta quindi provato che  $\vec{B}$  può avere solo componenti lungo  $z$ . Dimostriamo ora che il campo è uniforme nel solenoide e nullo fuori. Di nuovo si procede usando il teorema di Ampère. Iniziamo considerando un punto  $D$  all'interno del solenoide. Costruiamo il rettangolo  $ABCD$  di fig. (5.15) e facciamo la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo questa linea chiusa: siccome i tratti  $BC$  e  $AD$  non contribuiscono essendo  $\vec{B}$  diretto come  $z$ , e siccome  $\vec{B}$  è invariante per traslazioni lungo  $z$ , detta  $L$  la distanza  $AB = CD$ , si ha

$$\int_{ABCD} d\vec{l} \cdot \vec{B} = B_z(0)L - B_z(r)L = \mu_0 I_c \quad (5.1.145)$$

All'interno del solenoide risulta quindi

$$I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z(r) = B_z(0) = \mu_0 I N \quad (5.1.146)$$

All'esterno possiamo ripetere il procedimento al rettangolo  $ABEF$ : si ha

$$I_c = N L I \quad \Rightarrow \quad B_z(r) = 0 \quad (5.1.147)$$

Chiaramente l'ipotesi di solenoide infinito è solo un'approssimazione della realtà! Essa può essere usata, per esempio, nella zona centrale di un solenoide reale finito avente  $L \gg R$ : in queste condizioni il solenoide percorso da corrente continua produce, al suo interno, nella zona centrale, un campo magnetico sostanzialmente uniforme ...

---

<sup>6</sup>Nel caso di un solenoide reale, quando il punto considerato è fuori dal solenoide, la corrente concatenata alla circonferenza nel piano ortogonale all'asse, con il centro sull'asse stesso, in realtà coincide con la corrente  $I$  che circola nel solenoide stesso, per cui, nel caso di un solenoide reale, all'esterno di esso esiste una componente di  $B$  di Biot-Savart, che circola intorno al solenoide e vale  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , in genere trascurabile rispetto a  $\mu_0 I N$ , cioè al campo nel solenoide ...

### 5.1.8 Azioni meccaniche su una spira in campo magnetico

Supponiamo sia data una spira fissa, percorsa dalla corrente costante  $I$ , immersa in un campo magnetico esterno  $\vec{B}(\vec{x})$ .

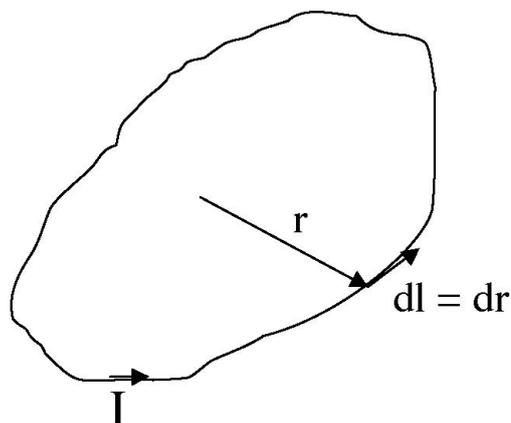


Figura 5.16: Spira in campo magnetico

La forza risultante di origine magnetica, che agisce sulla spira, vale

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (5.1.148)$$

Nella zona dove è presente la spira, supponiamo di poter rappresentare il campo magnetico attraverso il suo sviluppo in serie di Taylor

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{0}) + r_k \partial_k \vec{B}(\vec{0}) + \dots \quad (5.1.149)$$

e valutiamo l'espressione della forza magnetica assumendo di poter troncare lo sviluppo di Taylor al primo ordine. Risulta allora

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \oint I d\vec{l} \wedge (\vec{B}(\vec{0}) + r_k \partial_k \vec{B}(\vec{0})) = \\ &= -I \vec{B}_0 \wedge \oint d\vec{l} + I \oint d\vec{l} \wedge (r_k \partial_k \vec{B}) \end{aligned} \quad (5.1.150)$$

Il primo addendo è chiaramente nullo. Consideriamo quindi il secondo

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \wedge (r_k \partial_k \vec{B}) \quad (5.1.151)$$

dove è inteso che  $\partial_k \vec{B} \equiv (\partial_k \vec{B})_0$  va calcolato per  $\vec{r} = 0$  e dunque *non* dipende dalla variabile di integrazione per cui può essere fattorizzato rispetto all'integrale. Abbiamo dunque

$$\vec{F} = -I (\partial_k \vec{B})_0 \wedge \oint d\vec{l} r_k \quad (5.1.152)$$

da cui, in termini di componenti, otteniamo

$$F_i = -I \epsilon_{iab} (\partial_k B_a)_0 \oint dl_b r_k \quad (5.1.153)$$

Ma  $d\vec{l} = d\vec{r}$ , dunque

$$\oint dl_b r_k = \oint dr_b r_k = \oint d(r_b r_k) - \oint dr_k r_b \quad (5.1.154)$$

D'altronde la circuitazione di  $r_b r_k$  è chiaramente nulla e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \oint dl_b r_k &= \oint dr_b r_k = - \oint dr_k r_b \Rightarrow \\ \Rightarrow \oint dl_b r_k &= \frac{1}{2} \oint (r_k dl_b - r_b dl_k) \end{aligned} \quad (5.1.155)$$

per cui possiamo scrivere che

$$F_i = -I \epsilon_{iab} (\partial_k B_a)_0 \oint dl_b r_k = -\frac{I}{2} \epsilon_{iab} (\partial_k B_a)_0 \oint (r_k dl_b - r_b dl_k) \quad (5.1.156)$$

Definiamo adesso il seguente vettore assiale *momento di dipolo magnetico*<sup>7,8</sup>

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r} \wedge d\vec{l} \quad (5.1.158)$$

che, in termini di componenti, è espresso<sup>9</sup> da

$$m_i = \frac{I}{2} \epsilon_{ijk} \oint r_j dl_k \quad (5.1.162)$$

<sup>7</sup>Questa definizione coincide con quella che abbiamo già anticipato, infatti, nel caso di una spira piana, il momento di dipolo magnetico definito dalla (5.1.158) è effettivamente un vettore (pseudovettore) che ha modulo pari al prodotto dell'intensità di corrente  $I$  per l'area della spira, direzione ortogonale al piano su cui giace la spira, verso tale che un osservatore allineato con esso veda la corrente fluire nella spira in verso antiorario

<sup>8</sup>Nel caso di distribuzione di volume, la definizione del momento di dipolo magnetico (ancora rispetto all'origine degli assi) è

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3y \vec{y} \wedge \vec{J}(\vec{y}) \quad (5.1.157)$$

<sup>9</sup>Ricordiamo che le componenti del prodotto vettoriale possono essere espresse concisamente attraverso il tensore completamente antisimmetrico a tre indici  $\epsilon_{ijk}$ , le cui componenti valgono 1 quando i tre indici sono una permutazione pari di 123, valgono  $-1$  quando sono una permutazione dispari di 123 e valgono 0 negli altri casi. Si ha

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (5.1.159)$$

Ricordiamo altresì che

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} \quad (5.1.160)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (5.1.161)$$

Valutiamo adesso le componenti del seguente tensore antisimmetrico costruito tramite  $\vec{m}$

$$\begin{aligned}\epsilon_{abi} m_i &= \frac{I}{2} \epsilon_{abi} \epsilon_{ijk} \oint r_j dl_k = \frac{I}{2} (\delta_{aj} \delta_{bk} - \delta_{ak} \delta_{bj}) \oint r_j dl_k = \\ &= \frac{I}{2} \oint (r_a dl_b - r_b dl_a) = I \oint r_a dr_b\end{aligned}\quad (5.1.163)$$

Evidentemente, data la (5.1.156) abbiamo allora che

$$\begin{aligned}F_i &= -\epsilon_{iab} (\partial_k B_a)_0 \epsilon_{kbs} m_s = \epsilon_{iab} \epsilon_{ksb} (\partial_k B_a)_0 m_s = \\ &= (\delta_{ik} \delta_{as} - \delta_{is} \delta_{ak}) (\partial_k B_a)_0 m_s = \partial_i B_s m_s - \partial_a B_a m_i\end{aligned}\quad (5.1.164)$$

Ma il secondo termine contiene il fattore  $\partial_a B_a = \text{div } \vec{B} = 0$ , dunque in definitiva, poichè le componenti  $m_s$  non dipendono dalle coordinate, si ha

$$F_i = \partial_i B_s m_s = \partial_i (B_s m_s) = \partial_i (\vec{B} \cdot \vec{m}) \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (5.1.165)$$

dove il gradiente è calcolato nell'origine.

Si osservi che questa espressione è del tutto simile a quella già trovata per il dipolo elettrico  $\vec{p}$ , dove avevamo ottenuto

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (5.1.166)$$

Veniamo adesso al calcolo del momento della forza magnetica (coppia) agente sulla spira, calcolato rispetto all'origine degli assi.

Dalla definizione, abbiamo

$$\vec{T} = \oint \vec{r} \wedge d\vec{F} = I \oint \vec{r} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \quad (5.1.167)$$

dove, anche in questo caso, abbiamo che  $d\vec{l} = d\vec{r}$ .

Assumeremo per semplicità che il campo magnetico sia uniforme e valga  $\vec{B}_0$ : in questo caso, per la (5.1.165), la forza magnetica agente sulla spira è nulla e quindi il momento della stessa non dipende dal polo rispetto a cui lo valutiamo. Si ha

$$\vec{T} = I \oint \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B}_0) \quad (5.1.168)$$

Ma, in generale, vale l'identità vettoriale

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (5.1.169)$$

quindi

$$\vec{T} = I \oint d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) - I \oint \vec{B}_0 (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \quad (5.1.170)$$

D'altronde

$$\oint \vec{B}_0(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = \vec{B}_0 \oint (\vec{r} \cdot d\vec{r}) = \vec{B}_0 \oint \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0 \quad (5.1.171)$$

e dunque possiamo scrivere che

$$\vec{T} = I \oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}_0) \quad (5.1.172)$$

ovvero, in termini di componenti e facendo uso della (5.1.163), risulta infine

$$\begin{aligned} T_i &= I \oint dr_i r_j B_{0j} = B_{0j} I \oint r_j dr_i = B_{0j} \epsilon_{jik} m_k = \epsilon_{ikj} m_k B_{0j} = \\ &= (\vec{m} \wedge \vec{B}_0)_i \Rightarrow \vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (5.1.173)$$

che, di nuovo, è del tutto simile all'espressione già trovata nel caso del dipolo elettrico in campo elettrico uniforme, dove avevamo visto che  $\vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$ .

### 5.1.9 Sviluppo in multipoli del potenziale vettore

Avendo acquisito la nozione di momento magnetico associato a una distribuzione di corrente  $\vec{J}$

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r} \wedge d\vec{l} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \wedge \vec{J}(\vec{x}) \quad (5.1.174)$$

vediamo come questa possa essere utilmente utilizzata per studiare il campo magnetico prodotto *lontano* da una distribuzione di corrente assegnata. Ricordiamo a questo proposito che il potenziale vettore prodotto da una generica distribuzione di corrente  $\vec{J}$  vale

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.1.175)$$

D'altronde, se la distribuzione di corrente è diversa da zero solo al finito e il punto di coordinata  $\vec{x}$ , dove vogliamo conoscere il potenziale, è molto distante dalla zona dove sono le correnti (e dove abbiamo posto l'origine del sistema di coordinate ...), potremo rappresentare la funzione  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$  con il suo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine, cioè porre

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^3} \quad (5.1.176)$$

per cui risulterà

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \left[ \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^3} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_k}{|\vec{x}|^3} \int d^3y y_k \vec{J}(\vec{y}) \end{aligned} \quad (5.1.177)$$

Ma il primo addendo è nullo<sup>10</sup>

$$\int d^3y \vec{J}(\vec{y}) = 0 \quad (5.1.181)$$

Dunque la (5.1.177) diventa

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_k}{|\vec{x}|^3} \int d^3y y_k \vec{J}(\vec{y}) \quad (5.1.182)$$

Ma<sup>11</sup>

$$\int d^3y y_k J_i(\vec{y}) + \int d^3y y_i J_k(\vec{y}) = 0 \quad (5.1.186)$$

$$\Rightarrow \int d^3y y_k J_i(\vec{y}) = \frac{1}{2} \int d^3y [y_k J_i(\vec{y}) - y_i J_k(\vec{y})] \quad (5.1.187)$$

<sup>10</sup>Nel caso in cui il circuito elettrico possa essere pensato come fatto da diversi circuiti lineari, allora

$$\int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \equiv \sum_t I_t \oint_t d\vec{l} \quad (5.1.178)$$

dove la somma è fatta su tutti i circuiti lineari presenti nel sistema.

Ciascun integrale di linea, però, è nullo, e questo dimostra la validità della (5.1.181).

Per dimostrare la (5.1.181) in generale, iniziamo ricordando che, essendo  $\text{div} \vec{J} = 0$ , qualunque sia il vettore costante  $\vec{\alpha}$ , risulterà

$$\text{div}[(\vec{\alpha} \cdot \vec{y}) \vec{J}(\vec{y})] = \vec{J}(\vec{y}) \cdot \text{grad}[\vec{\alpha} \cdot \vec{y}] + (\vec{\alpha} \cdot \vec{y}) \text{div} \vec{J}(\vec{y}) = \vec{J}(\vec{y}) \cdot \vec{\alpha} \quad (5.1.179)$$

D'altronde l'integrale su tutto lo spazio del primo termine, in quanto integrale di una divergenza, può essere trasformato via teorema di Gauss in un integrale di flusso all'infinito della funzione integranda, il quale, se la densità di corrente è presente solo al finito, è nullo. Dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3y \text{div}[(\vec{\alpha} \cdot \vec{y}) \vec{J}(\vec{y})] = \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int d^3y \vec{J}(\vec{y}) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.180)$$

dove l'ultima implicazione nasce dall'arbitrarietà del vettore  $\vec{\alpha}$ .

<sup>11</sup>Per dimostrare la (5.1.186), partiamo sempre dal fatto che la densità di corrente  $\vec{J}(\vec{y})$  ha divergenza nulla ed è presente solo al finito. Siano allora  $f(\vec{y})$  e  $g(\vec{y})$  due funzioni qualsiasi, derivabili e finite in tutto lo spazio. Abbiamo che

$$\text{div} [f g \vec{J}] = \text{grad}(fg) \cdot \vec{J} + fg \text{div} \vec{J} = g \vec{\nabla} f \cdot \vec{J} + f \vec{\nabla} g \cdot \vec{J} \quad (5.1.183)$$

e dunque

$$0 = \int d^3y \text{div} [f g \vec{J}] = \int d^3y [g \vec{J} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{J} \cdot \vec{\nabla} g] \quad (5.1.184)$$

Ponendo adesso

$$f(\vec{y}) = y_i \Rightarrow (\vec{\nabla} f)_s = \delta_{is}; \quad g(\vec{y}) = y_k \Rightarrow (\vec{\nabla} g)_s = \delta_{ks} \quad (5.1.185)$$

abbiamo immediatamente la (5.1.186).

D'altronde, partendo dalla definizione del momento di dipolo magnetico

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2} \int d^3y \vec{y} \wedge \vec{J}(\vec{y}) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_k &= \frac{1}{2} \int d^3y [\vec{y} \wedge \vec{J}(\vec{y})]_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kab} \int d^3y y_a J_b(\vec{y})\end{aligned}\quad (5.1.188)$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} m_k &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kab} \int d^3y y_a J_b(\vec{y}) = \frac{1}{2} (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) \int d^3y y_a J_b(\vec{y}) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y [y_i J_j(\vec{y}) - y_j J_i(\vec{y})]\end{aligned}\quad (5.1.189)$$

e dunque, visto che

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} x_k \int d^3y y_k \vec{J}(\vec{y}) \Rightarrow A_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} x_k \int d^3y y_k J_i(\vec{x})\quad (5.1.190)$$

abbiamo infine che

$$\begin{aligned}A_i(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} x_k \int d^3y y_k J_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} x_k \frac{1}{2} \int d^3y [y_k J_i(\vec{x}) - y_i J_k(\vec{x})] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} x_k \epsilon_{kis} m_s = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} \epsilon_{isk} m_s x_k = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} (\vec{m} \wedge \vec{x})_i\end{aligned}\quad (5.1.191)$$

ovvero

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} \vec{m} \wedge \vec{x}\quad (5.1.192)$$

Questo risultato, di nuovo, è strettamente analogo a quanto avevamo già ottenuto ottenuto in elettrostatica per il potenziale di dipolo elettrico, per il quale avevamo trovato

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|^3} \vec{p} \cdot \vec{x}\quad (5.1.193)$$

Osserviamo comunque, che, a differenza di quanto accadeva in elettrostatica, nello sviluppo del potenziale vettore  $\vec{A}$  manca il termine di monopolo: la ragione è che **non** ci sono le cariche magnetiche !

Questa conclusione era già stata puntualizzata quando avevamo ricavato la terza legge di Maxwell, ovvero  $\text{div} \vec{B} = 0$ , che, appunto, conferma l'inesistenza di sorgenti (cariche magnetiche) per il campo magnetico.

Una conseguenza del fatto che non esiste il termine di monopolo magnetico è che, a grande distanza dal sistema di correnti, il potenziale vettore va come  $R^{-2}$  e l'intensità del campo magnetico, quindi, come  $R^{-3}$ . Infatti, prendendo la rotazione del potenziale di dipolo di cui sopra, si ha

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \wedge \left[ \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3} \vec{m} \wedge \vec{x} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\end{aligned}\quad (5.1.194)$$

dove il versore  $\vec{n}$  è definito, al solito, come  $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ .

Come applicazione, possiamo adesso considerare il risultato ottenuto nel caso della spira circolare, per la quale, come sappiamo,  $\vec{m} = I \pi r^2 \vec{k}$  (abbiamo assunto che la spira sia centrata nell'origine e abbia  $z$  come asse).

Sull'asse della spira la (5.1.194) fornisce

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{|z|^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi r^2}{|z|^3} \vec{k} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I r^2}{|z|^3} \vec{k} \quad (5.1.195)$$

Quando avevamo studiato la spira, comunque, avevamo trovato che l'espressione esatta del campo sull'asse era piuttosto

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I r^2}{\sqrt{(z^2 + r^2)^3}} \vec{k} \quad (5.1.196)$$

E' coerente questo risultato con quanto trovato adesso ?

Certamente sì, infatti corrisponde a trascurare, al denominatore, il raggio della spira  $r$  rispetto alla coordinata  $z$  del punto dove vogliamo conoscere il campo, che, per ipotesi, deve essere tale per cui  $z \gg r$  !

L'importanza del risultato ottenuto risiede nel fatto che, una volta noto il momento magnetico di un sistema di correnti, questo consente di determinare il campo magnetico a grande distanza da esse in termini puramente algebrici, unicamente conoscendo le coordinate del punto dove vogliamo determinare  $\vec{B}$ , non necessariamente sull'asse del momento magnetico stesso. In particolare, non è necessario conoscere il dettaglio di come il momento magnetico nasce, cioè della distribuzione di correnti che lo genera: unica condizione è che si sia ben lontani da esse !!!

Per esempio, nel caso della Terra, il suo campo magnetico è, sulla superficie, ben descritto da un momento  $\vec{m}$  posto al suo centro, orientato circa Nord-Sud (inclinato di  $17.2^\circ$  rispetto all'asse di rotazione), di intensità  $|\vec{m}| = 8.0 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ : la particolare distribuzione di correnti che lo genera e il meccanismo per cui esso nasce sono problemi ancora non del tutto chiariti ma, ciò nonostante, non c'è difficoltà nel prevedere  $\vec{B}$  nei vari punti della superficie terrestre attraverso la (5.1.195).

## 5.2 L'elettromagnetismo

Fino ad ora abbiamo studiato separatamente gli effetti del campo elettrico  $\vec{E}$  sulle cariche elettriche in quiete e del campo magnetico  $\vec{B}$  sulle cariche elettriche in moto (correnti). Vedremo nel seguito come queste azioni possano essere viste più correttamente nel loro insieme.

### 5.2.1 La forza di Lorentz

Le cariche elettriche, come abbiamo visto, subiscono sia l'azione del campo elettrico che del campo magnetico. Riprendiamo, a questo riguardo, l'espressione della forza agente su un elemento di corrente  $\vec{J}dv = I d\vec{l}$  in un campo magnetico esterno  $\vec{B}$ . Abbiamo imparato che essa vale

$$d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} d^3x = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (5.2.197)$$

D'altronde abbiamo anche visto che la densità di corrente è il prodotto della densità di carica libera di muoversi per la sua velocità media (velocità di deriva...)  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ , per cui

$$d\vec{F} = \vec{v} \wedge \vec{B} \rho d^3x = \vec{v} \wedge \vec{B} dq \quad (5.2.198)$$

dove  $dq$  è la carica libera nel volume  $dv$ , avente velocità media  $\vec{v}$ .

Nel caso, quindi, di una particella di carica  $q$ , che si muova con velocità  $\vec{v}$  nel nostro sistema di riferimento, avremo che la forza magnetica agente su di essa vale

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (5.2.199)$$

Nel caso sia presente anche un campo elettrico, è un fatto sperimentale che a questa forza magnetica si sommi quella di natura elettrica, che agirebbe sulla stessa carica se fosse ferma<sup>12</sup>; per cui risulta che la particella è soggetta a una forza elettromagnetica complessiva pari a

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (5.2.200)$$

Questa espressione della forza agente su una carica in moto è detta *forza di Lorentz*.

Si osservi che il termine dovuto al campo magnetico è comunque assente se la particella è ferma: questa è la ragione per cui è necessario precisare nella definizione operativa del campo elettrico (definito come rapporto fra la forza

<sup>12</sup>Questa affermazione, a rigore, non è vera se la velocità della particella è prossima a quella della luce nel vuoto  $c$ . Occorrerebbe trattare il problema nell'ambito della meccanica relativistica, ma questo va oltre gli scopi del Corso e finché le velocità sono molto minori di  $c$ , le correzioni sono trascurabili.

agente su una carica e il valore della carica stessa, nel limite in cui  $q \rightarrow 0$ ) che la carica sia ferma nel sistema di riferimento dove operiamo ...

Vediamo adesso come, in termini della forza di Lorentz, si possa studiare la traiettoria seguita da una carica  $q$  avente massa  $m$  e una velocità  $\vec{v}_0$  al tempo  $t = 0$ , che si muove in un campo magnetico uniforme e costante  $\vec{B}$ . Supponiamo, senza perdita alcuna di generalità, che il campo magnetico sia diretto secondo l'asse  $z$ , ovvero sia  $\vec{B} = (0, 0, B)$  con  $B > 0$ . Dall'espressione della forza di Lorentz (5.2.199) ricaviamo le seguenti equazioni di moto per la particella

$$m\ddot{x} \equiv m \frac{dv_x}{dt} = qB v_y \quad (5.2.201)$$

$$m\ddot{y} \equiv m \frac{dv_y}{dt} = -qB v_x \quad (5.2.202)$$

$$m\ddot{z} \equiv m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (5.2.203)$$

La terza equazione dice semplicemente che la componente della velocità diretta secondo l'asse  $z$  è costante nel tempo, cioè pari a  $v_{0z}$ .

Le altre due equazioni costituiscono un sistema accoppiato. Se dividiamo la prima equazione per la massa  $m$  e quindi deriviamo rispetto al tempo e poi sostituiamo in questa la seconda equazione si ha

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = - \left( \frac{qB}{m} \right)^2 v_x \equiv -\Omega^2 v_x \quad (5.2.204)$$

dove abbiamo posto

$$\Omega \equiv \frac{|q|B}{m} \quad (5.2.205)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti (5.2.204), come è noto, è la seguente

$$v_x = A \cos(\Omega t + \phi) \quad (5.2.206)$$

dove  $A$  e  $\phi$  sono costanti di integrazione da definire in base alle condizioni iniziali.

Usando ancora la prima equazione e assumendo che la carica  $q$  sia di segno negativo (per esempio, si tratti di un elettrone...) risulta

$$m \frac{dv_x}{dt} = qB v_y \quad \Rightarrow \quad v_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{dv_x}{dt} = A \sin(\Omega t + \phi) \quad (5.2.207)$$

Evidentemente si tratta di un moto circolare uniforme nel piano  $xy$ , con velocità angolare  $\Omega$ .

Le condizioni iniziali richiedono che  $v_{0x} = A \cos \phi$ ;  $v_{0y} = A \sin \phi$  e dunque la costante di integrazione  $A$  vale  $A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ .

Poiché nella direzione del campo magnetico (asse  $z$ ) il moto resta rettilineo uniforme, il moto complessivo avviene secondo una spirale a passo costante avente l'asse allineato con il campo magnetico e percorsa in senso antiorario (orario) per un osservatore allineato con  $\vec{B}$  se la carica, come nel caso studiato, è negativa (positiva), in modo che la forza di Lorentz risulti comunque diretta verso il centro ...

### 5.2.2 Leggi di trasformazione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Abbiamo visto che la forza agente su una carica elettrica in moto vale

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (5.2.208)$$

Ricordiamo adesso dalla Meccanica, che la forza agente su una particella di massa  $m$  appare la stessa in tutti i riferimenti inerziali, essendo legata dalla seconda legge della Dinamica alla accelerazione, che è appunto la stessa in tutti i riferimenti inerziali. Poiché la forza di Lorentz dipende dalla velocità della particella, che, invece, varia da riferimento a riferimento, affinché tale forza sia la stessa in tutti i riferimenti inerziali in moto relativo uniforme qualsiasi uno rispetto all'altro, è evidentemente necessario che i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  si trasformino in modo opportuno nel passare da un riferimento a un altro! Cerchiamo di determinare, partendo da casi semplici, quali sono queste leggi di trasformazione<sup>13</sup>. Cominciamo considerando il caso in cui, in un certo riferimento  $RS$ , sia presente solo un campo magnetico  $\vec{B}$ .

Sappiamo che una carica  $q$  ferma in  $RS$  non sentirà alcuna forza, mentre una carica che si muova di velocità uniforme e costante  $\vec{v}_0$  in  $RS$  sarà soggetta a una forza  $\vec{F} = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ . Sia ora  $RS'$  un riferimento inerziale in moto rispetto a  $RS$  proprio con la velocità  $\vec{v}_0$ . Guardando da  $RS'$  la carica in moto in  $RS$ , la vedremo ferma ma ancora soggetta alla stessa forza di cui sopra, per cui interpreteremo questa forza come di origine elettrica, ovvero concluderemo che essa è dovuta a un campo elettrico<sup>14</sup> uniforme e costante  $\vec{E} = \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ . Quanto al campo magnetico in  $RS'$ , vediamo intanto di stabilire come apparirà la densità di corrente in questo riferimento.

Iniziamo considerando la densità di corrente che produce il campo magnetico nel riferimento  $RS$ :  $\vec{J} = \rho \vec{v}$  dove  $\rho$  è la densità di carica libera di muoversi e  $\vec{v}$  la sua velocità media. Questa densità, vista la legge di composizione galileiana delle velocità, in  $RS'$  cambierà diventando  $\vec{J}' = \rho(\vec{v} - \vec{v}_0)$ ; però in  $RS'$ , la densità di carica che era in quiete in  $RS$  e quindi non contribuiva

<sup>13</sup>Ci limiteremo anche qui a studiare cosa accade ai campi elettrico e magnetico nel passare da un riferimento inerziale a un altro in moto relativo rispetto al primo con velocità *molto minore* di quella della luce, trascurando quindi ogni effetto di Relatività Ristretta, la cui trattazione, come già osservato, andrebbe oltre gli scopi del Corso.

<sup>14</sup>Si noti che in  $RS'$  la quantità  $\vec{v}_0$  non descrive il moto di alcunché, bensì gioca il ruolo di un parametro esterno, a differenza di  $\vec{B}$  che, invece, come vedremo, è anche il campo magnetico in  $RS'$ .

alla produzione del campo magnetico, adesso ha velocità  $-\vec{v}_0$  per cui, ora occorre tenerne conto ! Siccome abbiamo detto che in  $RS$  non c'è campo elettrico, la densità di carica ferma in  $RS$  deve essere proprio  $-\rho$ , per cui la densità di corrente in  $RS'$  vale

$$\vec{J}' = \rho(\vec{v} - \vec{v}_0) + (-\rho)(\vec{v}_0) = \rho\vec{v} = \vec{J} \quad (5.2.209)$$

ovvero la densità di corrente vista dai due riferimenti, in un punto assegnato qualsiasi, è la stessa e dunque anche il campo magnetico non cambierà<sup>15</sup> passando da  $RS$  a  $RS'$ .

Possiamo concludere quindi che se  $RS'$  si muove con velocità  $\vec{v}_0$  rispetto a  $RS$ , allora

$$RS : \begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{B} \end{cases} \Rightarrow RS' : \begin{cases} \vec{E}' = \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases} \quad (5.2.210)$$

Questa conclusione vale anche, simmetricamente, per il campo elettrico. Supponiamo infatti che in  $RS$  sia data, stavolta, una distribuzione di carica statica  $\rho$ . Per quanto abbiamo visto, in  $RS$  sarà quindi presente un campo elettrico statico dato da

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (5.2.211)$$

Nel riferimento  $RS'$ , in moto rispetto a  $RS$  con velocità  $\vec{v}_0$ , osserveremo ancora lo stesso campo elettrico che in  $RS$  poiché la densità di carica apparirà ancora la stessa<sup>16</sup>. Però, poiché la densità di carica in  $RS'$  si sta muovendo con velocità  $-\vec{v}_0$ , in questo riferimento ci sarà una densità di corrente  $\vec{J} = -\rho\vec{v}_0$  e quindi in  $RS'$  sarà presente anche un campo magnetico dato da

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}') &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y' \frac{-\vec{v}_0 \rho'(\vec{y}') \wedge (\vec{x}' - \vec{y}')}{|\vec{x}' - \vec{y}'|^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{-\vec{v}_0 \rho(\vec{y}) \wedge (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = -\mu_0 \epsilon_0 \vec{v}_0 \wedge \vec{E}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (5.2.212)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t$  come pure  $\vec{y}' = \vec{y} - \vec{v}_0 t$  e  $\rho'(\vec{y}') = \rho(\vec{y})$ . In questo caso abbiamo quindi che

$$RS : \begin{cases} \vec{E} \\ \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow RS' : \begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} \\ \vec{B}' = -\mu_0 \epsilon_0 \vec{v}_0 \wedge \vec{E} \end{cases} \quad (5.2.213)$$

In generale, nel limite di basse velocità, ovvero quando  $v_0 \ll c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ , al primo ordine in  $v_0/c$ , si dimostra che valgono le seguenti leggi di trasformazione:

$$RS : \begin{cases} \vec{E} \\ \vec{B} \end{cases} \Rightarrow RS' : \begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \wedge \vec{E} \end{cases} \quad (5.2.214)$$

<sup>15</sup>Questa conclusione, in realtà, è corretta solo a meno di termini in  $(v_0/c)^2$ , dovuti alla composizione relativistica delle velocità...

<sup>16</sup>Anche questa conclusione è vera solo a meno di termini dell'ordine di  $(v_0/c)^2$  ...).

### 5.2.3 Induzione elettromagnetica

Abbiamo visto che, in un dato sistema di riferimento inerziale  $RS$ , oltre al campo elettrostatico, che trae la sua origine nelle cariche elettriche, può esistere anche un campo elettrico *legato al campo magnetico*.

Vogliamo vedere meglio quali siano le caratteristiche di quest'ultimo, in particolare vogliamo dimostrare che questo campo, a differenza del primo, **non** è, in generale, **conservativo**.

Riprendiamo il caso in cui, in  $RS$ , sia presente solo il campo magnetico  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x})$ . Abbiamo visto che in  $RS'$  risulta presente lo stesso campo magnetico, avendosi

$$\vec{B}'(\vec{x}') = \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t) \quad (5.2.215)$$

e inoltre è presente anche un campo elettrico di origine magnetica, cioè non coulombiano, dato da

$$\vec{E}'(\vec{x}') = \vec{v}_0 \wedge \vec{B}'(\vec{x}') = \vec{v}_0 \wedge \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t) \quad (5.2.216)$$

Calcoliamo adesso in  $RS'$  la rotazione di questo campo elettrico.

Ricordiamo a questo proposito la seguente identità, valida per due qualsiasi campi vettoriali  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ :

$$\text{rot}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} \quad (5.2.217)$$

Essendo  $\vec{v}_0$  costante e avendo  $\vec{B}$  divergenza nulla, si ha dunque

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}'(\vec{x}') &= \left( \vec{B}'(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \right) \vec{v}_0 - \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}' \right) \vec{B}'(\vec{x}') + \vec{v}_0 \text{ div } \vec{B}' - \vec{B}' \text{ div } \vec{v}_0 = \\ &= - \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}' \right) \vec{B}'(\vec{x}') = - \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}' \right) \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t) \end{aligned} \quad (5.2.218)$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}'(\vec{x}')}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t)}{\partial t} = (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}') \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t) = \\ &= (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}') \vec{B}'(\vec{x}') \end{aligned} \quad (5.2.219)$$

e dunque

$$\text{rot } \vec{E}'(\vec{x}') = - \frac{\partial \vec{B}'(\vec{x}')}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \quad (5.2.220)$$

Questa relazione è esatta e del tutto generale: nel momento in cui, in un sistema di riferimento inerziale, è presente un campo magnetico dipendente dal tempo, in questo riferimento è presente anche un campo elettrico non conservativo, la cui rotazione è appunto la derivata parziale rispetto al tempo del campo magnetico.

Questa equazione generalizza la seconda legge di Maxwell, che già conoscevamo nel caso elettrostatico, al caso dipendente dal tempo (la prima legge di Maxwell, relativa alla divergenza del campo elettrico, rimane valida nella forma in cui la conosciamo anche nel caso in cui la densità di carica  $\rho$  dipenda dal tempo...). Vediamone adesso qual è la forma integrale. Se consideriamo una linea chiusa e orientata  $\Gamma$  qualsiasi, usando il teorema di Stokes, si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{\Sigma} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv \\ &\equiv - \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.2.221)$$

Questa è la *legge dell'induzione elettromagnetica* di Faraday: essa asserisce che, data comunque una linea chiusa e orientata, la *forza elettromotrice (fem)  $\mathcal{E}$*

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.2.222)$$

che insiste su quella linea chiusa risulta uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico concatenato<sup>17</sup> con la linea stessa.

Questa legge non distingue la ragione per cui varia il flusso del campo magnetico: ogni qual volta c'è una variazione di flusso allora si manifesta una fem !

Vediamone qualche esempio.

---

<sup>17</sup>Ricordiamo che il flusso del campo magnetico concatenato con una linea chiusa e orientata è definito come il flusso di  $\vec{B}$ , calcolato su una qualunque superficie chiusa che abbia la linea in questione come bordo e sia orientata concordemente.

*Esempio A*

Supponiamo di trovarci in un riferimento  $RS$  dove, di nuovo, sia presente soltanto un campo magnetico statico  $\vec{B}(\vec{x})$  che assumeremo, per semplicità, diretto secondo l'asse  $z$ . Consideriamo una spira chiusa  $\Gamma$ , che assumeremo rettangolare e giacente nel piano  $xy$ , con i lati paralleli agli assi coordinati.

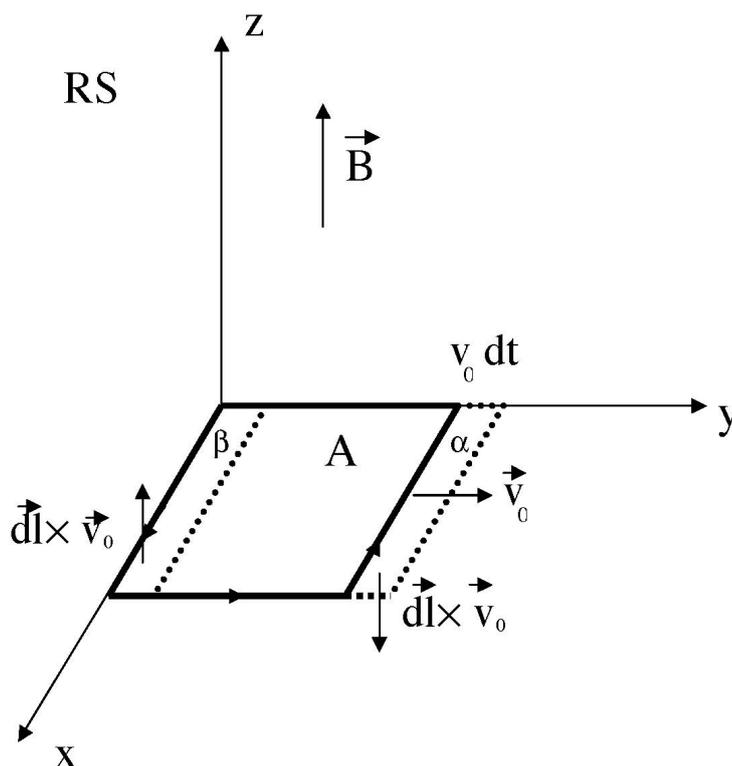


Figura 5.17: Induzione elettromagnetica: esempio A

Evidentemente, visto che per ipotesi in questo riferimento non c'è campo elettrico, sarà

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.2.223)$$

Supponiamo adesso di traslare la spira  $\Gamma$  di moto rettilineo uniforme con velocità  $\vec{v}_0$  lungo l'asse  $y$ . A causa della forza di Lorentz, nel riferimento  $RS'$  in cui la linea chiusa  $\Gamma$  è di nuovo in quiete, è presente un campo elettrico che vale  $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{v}_0 \wedge \vec{B}(\vec{x})$  per cui adesso abbiamo

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} [\vec{v}_0 \wedge \vec{B}(\vec{x})] \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} [d\vec{l} \wedge \vec{v}_0] \cdot \vec{B}(\vec{x}) \quad (5.2.224)$$

Vediamo come questa quantità è, appunto, legata direttamente alla variazione del flusso del campo magnetico concatenato con la spira  $\Gamma$ .

Per determinare questo flusso useremo come superficie<sup>18</sup> direttamente quella della spira. Si ha

$$\begin{aligned}\Phi(t + dt) - \Phi(t) &= \int_A \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_\alpha \vec{B} \cdot d\vec{s} - \left[ \int_\beta \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_A \vec{B} \cdot d\vec{s} \right] = \\ &= \int_\alpha \vec{B} \cdot d\vec{s} - \int_\beta \vec{B} \cdot d\vec{s}\end{aligned}\quad (5.2.225)$$

D'altronde, è immediato che  $d\vec{s} = -d\vec{l} \wedge \vec{v}_0 dt$  in  $\alpha$  mentre vale il suo opposto in  $\beta$  (poiché  $d\vec{l}$  cambia segno...) ed è identicamente nulla sui due lati paralleli alla velocità, per cui

$$\Phi(t + dt) - \Phi(t) = -dt \oint_\Gamma \left[ d\vec{l} \wedge \vec{v}_0 \right] \cdot \vec{B}(\vec{x}) \quad (5.2.226)$$

ovvero, appunto

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.2.227)$$

---

<sup>18</sup>Come si ricorderà, la scelta della superficie (con il solo vincolo di avere la linea chiusa data come bordo) non influisce sul valore del flusso poiché il campo  $\vec{B}$  ha divergenza nulla.

*Esempio B*

Supponiamo di avere una spira piana, rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , che ruota con velocità angolare costante  $\omega$  in un campo magnetico uniforme e costante. Immaginiamo che il campo sia diretto come l'asse  $y$ , ovvero risulti  $\vec{B} = (0, B, 0)$ , mentre la spira ruoti su se stessa, intorno a uno dei suoi lati lunghi  $b$ , orientati secondo l'asse  $z$ .

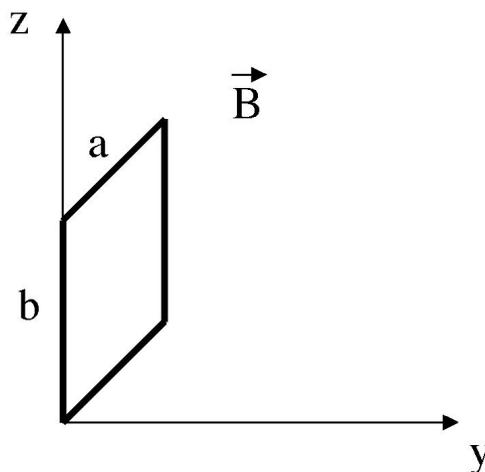


Figura 5.18: *Induzione elettromagnetica: esempio B*

Evidentemente il flusso concatenato con la spira nella posizione angolare  $\phi = \omega t$  (angolo misurato fra il lato  $a$  e l'asse  $y$ ) vale

$$\Phi(t) = B ab \sin \omega t \quad (5.2.228)$$

per cui nella spira, in accordo con la legge di Faraday, si deve manifestare una fem alternata cosinusoidale pari a

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B ab \cos \omega t \quad (5.2.229)$$

Anche in questo caso possiamo renderci conto della ragione di questa fem analizzando le forze di Lorentz che agiscono sulle cariche presenti nella spira in moto. Nei due tratti orizzontali si producono effetti che si compensano, mentre non c'è effetto nel tratto verticale che funge da perno (visto che le cariche su di esso sono ferme). Sull'altro tratto verticale, di lunghezza  $b$ , le cariche  $q$  hanno una velocità pari a

$$\vec{v} = \omega a (-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0) \quad (5.2.230)$$

e dunque, trovandosi in un campo magnetico di intensità  $B$  diretto come l'asse  $y$ , subiscono una forza di Lorentz pari a

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \vec{v} \wedge \vec{B} = q\omega a(-\cos\omega t, -\sin\omega t, 0) \wedge (0, 1, 0) = \\ &= -q\omega ab B \cos\omega t(0, 0, 1)\end{aligned}\quad (5.2.231)$$

Ne segue così che la fem integrata sulla spira vale appunto

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\omega B ab \cos\omega t \quad (5.2.232)$$

che è quanto volevamo dimostrare<sup>19</sup>.

### 5.2.4 Legge di Lenz

Osserviamo che, data una spira chiusa e orientata, allora una corrente che fluisca nel verso di orientamento della spira genera un campo magnetico tale che il suo flusso concatenato con la spira è positivo, mentre, nel caso fluisca in verso opposto, produce, naturalmente, un flusso di  $\vec{B}$  concatenato con la spira di segno negativo.

D'altronde abbiamo visto che la legge dell'induzione di Faraday prevede che

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{\partial t} \quad (5.2.233)$$

Immaginiamo per esempio che la variazione di flusso concatenato con la spira sia positiva, ovvero che, nel tempo, il flusso del campo magnetico concatenato con la spira tenda ad aumentare. La fem indotta sarà negativa, ovvero essa ha segno tale che, se la spira permette al suo interno il passaggio di

<sup>19</sup>In entrambi gli esempi considerati sopra, la variazione del flusso del campo magnetico concatenato è dovuta a un moto relativo.

Questa, però, non è una ragione necessaria.

Infatti, come abbiamo detto, in un riferimento inerziale, la irrotazionalità del campo elettrico  $\vec{E}$  è persa non appena il campo magnetico  $\vec{B}$  dipenda dal tempo, *qualsiasi sia la ragione per cui questo accade* (moto relativo, correnti dipendenti dal tempo, etc...).

In effetti, l'elettrodinamica si basa sul principio che le azioni sulle cariche ferme o in moto siano descrivibili localmente unicamente attraverso i valori dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Noi abbiamo visto che nel caso di moto relativo, un campo magnetico  $\vec{B}$  produce un campo  $\vec{E}$  avente rotazione pari a  $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ : se  $\vec{E}$  nascesse solo nel caso in cui la variazione temporale di  $\vec{B}$  fosse ascrivibile a un moto relativo in un campo magnetico altrimenti statico, significherebbe che in altre occasioni in cui  $\vec{B}$  variasse nel tempo nello stesso modo che nel caso precedente ma non a causa di un moto relativo, il campo elettrico  $\vec{E}$  non nascerebbe...

Questo, però, sarebbe in contrasto con il punto base dell'elettromagnetismo, secondo cui, per conoscere la forza su una carica (ferma o in moto) in un dato posto, tutto quello che occorre sapere sono solo i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , a prescindere da come questi si sono originati.

Naturalmente questo non significa che la Natura debba comportarsi in un certo modo perché così prevede una nostra teoria: significa solo che, se così non fosse, l'elettromagnetismo nella forma in cui lo abbiamo sviluppato sarebbe in contrasto con i fatti sperimentali e dunque sarebbe una teoria errata !

corrente (per esempio si tratta di una spira metallica chiusa ...), allora la corrente indotta circola in verso opposto a quello di orientamento della spira, producendo così un campo magnetico che tende a ridurre l'incremento del flusso concatenato.

La ragione sta nel segno negativo presente al secondo membro, segno che formalizza appunto la *legge di Lenz*, la quale stabilisce che la corrente indotta circola in verso tale da opporsi alla causa che la genera.

Onde evitare equivoci, deve essere però chiaro che il fenomeno dell'induzione elettromagnetica non tratta correnti indotte bensì fem indotte !

Poi, una fem indotta può essere causa di corrente indotta se il circuito su cui la fem si sviluppa è, per sempio, conduttore: in quel caso la corrente indotta circola in senso tale da opporsi alla causa che la genera.

La legge di Lenz stabilisce che l'induzione è un fenomeno a reazione negativa. Vediamo cosa succederebbe, per assurdo, in caso contrario...

Prendiamo una spira conduttrice e supponiamo che, per una qualunque ragione, il flusso con essa concatenato subisca un incremento: se il segno nella legge di Faraday fosse positivo, la fem indotta sarebbe positiva e dunque provocherebbe una corrente in verso tale da aumentare ulteriormente il flusso concatenato con la spira, provocandone così un ulteriore aumento, illimitatamente ...

Se questo accadesse violeremmo la conservazione dell'energia: per rendersene conto, riprendiamo l'esempio *A* trattato precedentemente, cioè quello della spira che trasla con velocità costante  $\vec{v}_0$  in un campo magnetico ortogonale a essa. Assumiamo, per semplicità, che  $\vec{B}$  dipenda solo dalla coordinata  $y$  lungo la quale avviene la traslazione, e sia una funzione decrescente.

Ne segue che il flusso concatenato con la spira diminuisce nel tempo e dunque la fem indotta in essa è positiva. La corrente indotta  $I$ , interagendo magneticamente con il campo esterno, determina una forza risultante  $\vec{F}$  sulla spira. Sui due tratti di spira  $\Delta y$  paralleli a  $\vec{v}_0$ , le forze sono uguali e opposte, per cui non contribuiscono a  $\vec{F}$  mentre sul tratto anteriore la forza è nel verso della velocità e vale  $I \Delta x B_{ant}$ , dove  $\Delta x$  è la lunghezza del lato della spira ortogonale alla velocità. Siccome sul tratto posteriore della spira, la forza magnetica ha verso opposto alla velocità e vale  $I \Delta x B_{post}$ , ne segue che la risultante vale  $\vec{F} = I \Delta x (B_{ant} - B_{post}) \vec{j}$  dove abbiamo indicato con  $\vec{j}$  il versore dell'asse  $y$ .

Siccome  $B$  decresce lungo  $y$ , si tratta di una forza frenante !

Affinchè la spira si muova di moto rettilineo e uniforme, questa forza deve essere dunque bilanciata dall'esterno e il lavoro compiuto sulla spira nel tempo  $dt$  vale allora

$$d\mathcal{L} = I \Delta x (-B_{ant} + B_{post}) v_0 dt = -I d\Phi = I \mathcal{E} dt \quad (5.2.234)$$

ovvero la forza esterna rende conto dell'energia dissipata nella spira per effetto Joule !

Se la legge di Lenz non valesse, la spira accelererebbe da sola, producendo così calore per effetto Joule, senza intervento esterno !

Si noti infine che se la corrente non fluisce, non c'è né necessità di una forza esterna sulla spira per mantenerla in moto né energia dissipata in essa per effetto Joule...

### 5.2.5 Equazioni di Maxwell dipendenti dal tempo

Da quanto abbiamo detto precedentemente, in condizioni dipendenti dal tempo, le due equazioni di Maxwell per il campo elettrico diventano

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2.235)$$

Rispetto al caso statico è stato necessario modificare la seconda legge, quella relativa alla rotazione, per tenere conto dell'induzione elettromagnetica e quindi della non conservatività del campo elettrico allorché ci troviamo in presenza di un campo magnetico dipendente dal tempo.

Invece la prima legge, quella relativa alle *sorgenti* del campo, non è stata modificata: le linee di forza del campo elettrico originano comunque nelle cariche, ferme o in moto che siano !

Quanto al campo magnetico, le equazioni statiche asseriscono che

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.2.236)$$

La prima equazione asserisce che il campo magnetico **non** ha sorgenti, mentre la seconda è la forma differenziale della legge di Ampère, valida per correnti stazionarie.

Nel caso dipendente dal tempo, l'equazione della divergenza continua a valere poiché le cariche magnetiche non ci sono.

Invece l'equazione della rotazione richiede di essere rivista perché, nel caso dipendente dal tempo, essa è matematicamente inconsistente in quanto, mentre il primo membro è comunque tale che

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (5.2.237)$$

per il secondo membro, data la legge di conservazione della carica, in generale, risulta

$$\operatorname{div}(\mu_0 \vec{J}) = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.2.238)$$

Affinché ci sia coerenza, occorre che il secondo membro dell'equazione abbia divergenza nulla anche nel caso dipendente dal tempo, senza modificarlo nel caso stazionario.

Uno dei contributi di James Clerck Maxwell alla teoria dell'Elettromagnetismo fu proprio quello di introdurre nelle equazioni del campo magnetico la cosiddetta *corrente di spostamento*, cioè porre

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (5.2.239)$$

eliminando così l'inconsistenza di cui sopra, poiché

$$\operatorname{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (5.2.240)$$

Le quattro equazioni di Maxwell, alla base dell'elettromagnetismo, sono dunque le seguenti

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.2.241)$$

Come si vede dalla quarta equazione, la corrente di spostamento produce gli stessi effetti magnetici di una corrente di cariche reali in movimento ! Consideriamo, per esempio, un condensatore piano che si stia caricando a corrente costante  $I$ : fra le sue armature (disposte in vuoto), a causa del fatto che risulta

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{I}{S} \quad (5.2.242)$$

si manifesta un campo magnetico esattamente uguale a quello che vi si manifesterebbe se si fosse in regime stazionario e fra le armature stesse fosse presente una sostanza omogenea e conduttrice tale da essere attraversata ancora dalla stessa corrente  $I$  di cui sopra.

In ogni caso, deve essere ben chiaro che la corrente di spostamento **non** ha a che fare con il moto delle cariche, anche se produce gli stessi effetti magnetici: essa è dovuta semplicemente al fatto che il campo elettrico varia nel tempo e dunque può esserci corrente di spostamento anche nel vuoto ! L'importanza della corrente di spostamento sta nel fatto che, oltre a rendere la quarta equazione di Maxwell consistente dal punto di vista analitico, è proprio la sua presenza che permette di dedurre dalle quattro equazioni in questione, l'equazione delle onde per i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , cioè di dedurre l'esistenza delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

Vediamo come.

Le equazioni di Maxwell in vuoto diventano (in vuoto non ci sono né cariche né correnti...)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.2.243)$$

da cui ricaviamo che

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.2.244)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{B}) = \operatorname{rot}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \quad (5.2.245)$$

D'altronde per qualunque campo vettoriale, risulta

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{V}) - \nabla^2\vec{V} \quad (5.2.246)$$

e quindi, essendo nulla sia la divergenza di  $\vec{E}$  che quella di  $\vec{B}$ , si ha infine

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.2.247)$$

$$\nabla^2\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.2.248)$$

in cui riconosciamo le equazioni delle onde per  $\vec{E}$  e per  $\vec{B}$ , con velocità di fase

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (5.2.249)$$

Come sappiamo da quanto appreso a proposito del suono, ogni soluzione sarà esprimibile come combinazione di onde piane. Per quanto riguarda il campo elettrico  $\vec{E}$ , la più generale onda piana ha espressione

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t} \quad \text{dove } k = \frac{\omega}{c} \quad (5.2.250)$$

Si vede poi immediatamente che, affinché questa soluzione possa verificare l'equazione della divergenza, deve essere  $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ , ovvero, a differenza di quanto accadeva nel caso del suono, l'onda deve essere *trasversale*.

Quanto al campo magnetico, anch'esso sarà descrivibile in termini di onde piane trasversali del tipo di

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t} \quad (5.2.251)$$

ma, per la legge dell'induzione, deve poi essere che

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0 \wedge \vec{k} = \omega\vec{B}_0 \quad (5.2.252)$$

che significa, in particolare, oltre a un legame fra i moduli dei campi e la frequenza, che i tre vettori  $\vec{E}$ ,  $\vec{k}$ ,  $\vec{B}$  formano una terna ortogonale destrorsa. Osserviamo infine che la trasversalità delle onde elettromagnetiche implica l'esistenza, per ogni direzione di propagazione, di due possibili modi di propagazione indipendenti, detti anche *stati di polarizzazione*.

Un'onda come quella descritta sopra è polarizzata piana nella direzione del vettore costante  $\vec{E}_0$ .

### 5.2.6 Mutua induzione

Consideriamo due circuiti  $\alpha$  e  $\beta$  e supponiamo che il circuito  $\alpha$  sia percorso dalla corrente stazionaria  $I_\alpha$ . Evidentemente, a causa di questa corrente, lo spazio sarà sede di campo magnetico e, in generale, vi sarà un certo flusso concatenato con il circuito  $\beta$ , flusso che indicheremo con  $\Phi_{\beta(\alpha)}$  per significare che il campo è prodotto dalla corrente  $I_\alpha$ . Evidentemente, fissata la geometria relativa dei due circuiti, che assumeremo fermi uno rispetto all'altro, il campo magnetico sarà linearmente dipendente dalla corrente  $I_\alpha$  e così sarà quindi anche per  $\Phi_{\beta(\alpha)}$  e dunque potremo porre

$$\Phi_{\beta(\alpha)} = M_{\beta(\alpha)} I_\alpha \quad (5.2.253)$$

Nel caso in cui una corrente  $I_\beta$  fluisce nel circuito  $\beta$ , avremmo analogamente che il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito  $\alpha$  sarebbe proporzionale a  $I_\beta$ , ovvero

$$\Phi_{\alpha(\beta)} = M_{\alpha(\beta)} I_\beta \quad (5.2.254)$$

Vogliamo dimostrare che i due coefficienti  $M_{\beta(\alpha)}$  e  $M_{\alpha(\beta)}$  sono uguali. Risulta infatti

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta(\alpha)} &= \int_{\Sigma_\beta} \text{rot } \vec{A}_\alpha \cdot d\vec{l}_\beta = \oint_\beta \vec{A}_\alpha \cdot d\vec{l}_\beta = \oint_\beta d\vec{l}_\beta \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\alpha \frac{I_\alpha d\vec{l}_\alpha}{|\vec{x}_\beta - \vec{x}_\alpha|} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_\alpha \oint_\beta \oint_\alpha \frac{d\vec{l}_\beta \cdot d\vec{l}_\alpha}{|\vec{x}_\beta - \vec{x}_\alpha|} \end{aligned} \quad (5.2.255)$$

ovvero si ha

$$M_{\beta(\alpha)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\beta \oint_\alpha \frac{d\vec{l}_\beta \cdot d\vec{l}_\alpha}{|\vec{x}_\beta - \vec{x}_\alpha|} \quad (5.2.256)$$

e chiaramente risulta

$$M_{\beta(\alpha)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\beta \oint_\alpha \frac{d\vec{l}_\beta \cdot d\vec{l}_\alpha}{|\vec{x}_\beta - \vec{x}_\alpha|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\alpha \oint_\beta \frac{d\vec{l}_\alpha \cdot d\vec{l}_\beta}{|\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta|} \equiv M_{\alpha(\beta)} \quad (5.2.257)$$

Questo coefficiente  $M_{\alpha\beta}$  viene, a buon diritto, chiamato *coefficiente di mutua induzione* e, come abbiamo detto, rappresenta la costante di proporzionalità fra il flusso concatenato con un circuito a causa della corrente che circola in un altro e il valore della corrente in quest'ultimo.

Si parla anche di coefficiente di auto-induzione, nel caso in cui si consideri il flusso di  $\vec{B}$  concatenato con un circuito dato, prodotto dalla corrente che attraversa il circuito stesso: il simbolo usualmente usato per indicare questa quantità, invece di  $M_{\alpha\alpha}$  è  $L_\alpha$ .

Ricordiamo che, nel Sistema Internazionale, l'unità di misura del flusso del

campo magnetico è il Weber ( $1Wb = 1Tesla \cdot m^2$ ), mentre quella del coefficiente di mutua induzione o del coefficiente di autoinduzione è l'Henry ( $H$ ). Evidentemente, se due circuiti in quiete relativa possiedono un coefficiente di mutua induzione  $M$ , allora se in uno di essi la corrente  $I$  dipende dal tempo, nell'altro si indurrà una fem pari a

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{\partial t} = -M \frac{dI}{dt} \quad (5.2.258)$$

### 5.2.7 Energia associata a un sistema di correnti stazionarie

Così come nel caso di un sistema di cariche, anche per un sistema di correnti si può definire una energia potenziale, in quanto, per poterlo stabilire dal nulla, è necessario spendere energia che può venir poi *recuperata* nel momento in cui le correnti vanno di nuovo a zero ... Supponiamo infatti che siano dati  $n$  circuiti percorsi dalle correnti  $I_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

A prescindere dall'effetto Joule, chiediamoci qual è l'energia che abbiamo dovuto spendere per costituire queste correnti. Immaginiamo dunque di essere in laboratorio e di aver disposto i circuiti, inizialmente non percorsi da corrente, in modo qualsiasi. Indichiamo con  $M_{jk}$  il coefficiente di mutua induzione fra il circuito  $j$ -esimo e quello  $k$ -esimo (per semplicità di notazione, indicheremo con  $M_{jj}$  il coefficiente di auto-induzione del circuito  $j$ -esimo). Decidiamo adesso di far passare le correnti dal valore nullo iniziale al valore finale  $I_k$  in un tempo arbitrario  $T$ , secondo una legge temporale qualsiasi  $I_k = I_k(t)$ . Questo significa che prima di  $t = 0$  le correnti sono identicamente nulle e per  $t > T$  esse hanno assunto tutte il loro valore (costante) di regime. Fra  $t = 0$  e  $t = T$  le correnti non sono stazionarie e quindi si manifestano nei circuiti delle fem indotte, per cui dovremo provvedere in essi opportuni generatori per bilanciarle.

Nel circuito  $j$ -esimo la fem indotta nel transiente vale

$$\mathcal{E}_j = -M_{jk} \frac{dI_k}{dt} \quad (5.2.259)$$

Ne segue quindi che, durante il transiente, i generatori dovranno fornire una potenza pari a

$$W = -\mathcal{E}_j I_j = M_{jk} \frac{dI_k}{dt} I_j = \frac{1}{2} \frac{M_{jk} I_j I_k}{dt} \quad (5.2.260)$$

ovvero una energia complessiva pari a (si ricordi che eravamo partiti da correnti nulle ...)

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} M_{jk} I_j I_k \quad (5.2.261)$$

Questa energia verrà poi restituita, attraverso il meccanismo dell'induzione, nel momento in cui le correnti vengano riportate a zero: è l'energia potenziale

del campo magnetico. Risulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \frac{1}{2} M_{jk} I_j I_k = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{jk} I_j I_k \oint_j \oint_k \frac{d\vec{l}_j \cdot d\vec{l}_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j \oint_j I_j d\vec{l}_j \cdot \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_k I_k \frac{d\vec{l}_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} = \frac{1}{2} \sum_j \oint_j I_j d\vec{l}_j \cdot \vec{A}(\vec{x}_j) = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) \quad (5.2.262)
 \end{aligned}$$

Ma, essendo le correnti  $I_k$  stazionarie e quindi essendo la densità  $\vec{J}(\vec{x})$  indipendente dal tempo, risulta

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.2.263)$$

e dunque l'argomento dell'integrale si può anche scrivere come

$$\frac{1}{2} \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{A} \quad (5.2.264)$$

Ricordiamo adesso che, se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono due qualunque campi vettoriali, vale l'identità

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b} \quad (5.2.265)$$

per cui risulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{A} = \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad (5.2.266)
 \end{aligned}$$

D'altronde  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ , quindi il primo integrando vale semplicemente  $|\vec{B}|^2$  mentre il secondo integrando, via il teorema di Gauss, può essere trasformato in un integrale di flusso e si ha

$$\int d^3x \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\sigma} \quad (5.2.267)$$

dove  $\Sigma_R$  indica la superficie della sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine. Poiché, per ipotesi, le correnti sono presenti solo al finito, nel limite in cui  $R \rightarrow \infty$ , il potenziale vettore si annulla come  $R^{-2}$  (dipolo) e l'intensità del campo  $\vec{B}$  come  $R^{-3}$ , per cui l'integrando va come  $R^{-5}$ , mentre la superficie di integrazione, naturalmente, cresce solo come  $R^2$  ...

In conclusione, quindi, per quanto riguarda l'energia potenziale magnetica, si ha

$$\mathcal{U}_{mag} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x |\vec{B}|^2 \quad (5.2.268)$$

in perfetta analogia con quanto avevamo già ottenuto per l'energia elettrostatica, ovvero

$$\mathcal{U}_{es} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x |\vec{E}|^2 \quad (5.2.269)$$

Anche nel caso magnetico, la quantità  $\frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$  viene indicata con il nome di *densità di energia magnetica*.

Di nuovo, il risultato mostra che l'energia magnetica, così come quella elettrostatica, è positiva: per instaurare un regime di correnti stazionarie, occorre comunque spendere energia !

## 5.3 Circuiti elettrici elementari

### 5.3.1 Circuito RL

Consideriamo un solenoide avente coefficiente di autoinduzione  $L$  e una resistenza  $R$  a esso in serie (che potrebbe essere, ma non necessariamente, la stessa resistenza dell'avvolgimento). Immaginiamo di collegare questo circuito a un generatore come in fig.5.19 e, al tempo  $t = 0$ , di chiudere il tasto T: vogliamo conoscere come dipenderà dal tempo la corrente  $I = I(t)$  erogata dal generatore.

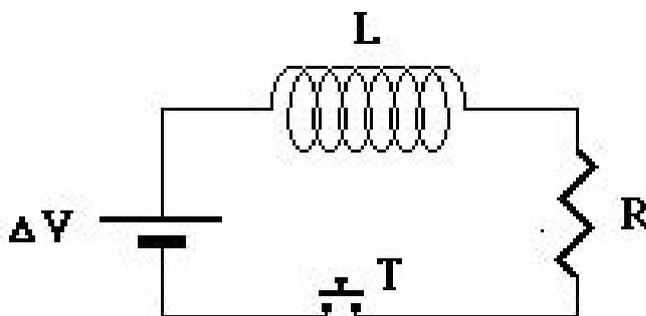


Figura 5.19: *Circuito RL*

Iniziamo osservando che la corrente in questione, fluendo nell'induttanza, per la legge dell'induzione di Faraday, determinerà una fem autoindotta ai suoi capi pari a

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.3.270)$$

La prima conseguenza di questo fatto è che la corrente  $I(t)$  sarà una funzione continua (anzi, derivabile) del tempo: essa non può dunque passare istantaneamente dal valore  $I = 0$ , antecedente la chiusura del tasto, al valore di

regime. Usando la legge delle maglie di Kirchhoff, abbiamo che, per  $t > 0$ , risulta

$$\Delta V - L \frac{dI}{dt} = RI \quad \Rightarrow \quad \Delta V = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (5.3.271)$$

Come si vede, la corrente obbedisce a una equazione differenziale lineare, del primo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea, dello stesso tipo di quella relativa alla carica/scarica del condensatore. Al solito, la soluzione generale è fatta dalla somma di una soluzione particolare dell'equazione, con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

E immediato che  $I = \frac{\Delta V}{R}$  è una soluzione dell'equazione (soluzione particolare). Occupiamoci dunque dell'integrale generale dell'equazione omogenea

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \quad (5.3.272)$$

il cui integrale generale è

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.3.273)$$

dove  $I_0$  è una costante reale a priori qualsiasi (costante di integrazione), mentre  $\tau \equiv \frac{L}{R}$  è la costante di tempo del processo, che fornisce la *scala* temporale su cui esso avviene. La soluzione cercata sarà dunque del tipo

$$I(t) = \frac{\Delta V}{R} + I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.3.274)$$

dove la costante  $I_0$  deve essere determinata in base alle condizioni iniziali, ovvero, per esempio, al valore della corrente per  $t = 0$  che, dovendo  $I(t)$  essere una funzione continua, non potrà che essere nullo.

Dunque, per  $t \geq 0$ , sarà

$$I(t) = \frac{\Delta V}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (5.3.275)$$

Al tempo  $t = 0+$ , tutta le fem del generatore si trova applicata ai capi dell'induttanza, essendo  $I = 0$  e quindi la caduta di tensione sulla resistenza  $R$  anch'essa nulla. Ne segue che la derivata della corrente per  $t = 0+$  vale

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{\Delta V}{L} \quad (5.3.276)$$

Asintoticamente, poi, la corrente tende al valore di regime  $I = \frac{\Delta V}{R}$  e quindi l'induttanza finisce per non avere più effetti, visto che essa reagisce solo alle variazioni di corrente, che tendono ad annullarsi per  $t \rightarrow +\infty$ .

Dal punto di vista energetico, la potenza erogata dal generatore vale, naturalmente

$$W_{gen}(t) = \Delta V I(t) \quad (5.3.277)$$

mentre quella dissipata nella resistenza (effetto Joule) vale

$$W_{diss}(t) = R I^2(t) \quad (5.3.278)$$

La loro differenza è

$$\begin{aligned} W(t) &= \Delta V I(t) - R I^2(t) = I(t) [\Delta V - R I(t)] = I(t) L \frac{dI}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right) \end{aligned} \quad (5.3.279)$$

che è appunto la potenza necessaria per determinare la variazione di energia magnetica dell'induttanza.

Questa energia viene restituita al momento in cui la corrente nel solenoide tornerà a essere nulla. Supponiamo infatti, avendo raggiunto le condizioni di regime, di mettere in corto circuito il generatore. L'equazione del circuito diventa allora (la fem del generatore non è più presente)

$$L \frac{dI}{dt} + R I = 0 \quad (5.3.280)$$

La corrente nel circuito, però, non si potrà annullare istantaneamente, dovendo, al solito, essere una funzione continua del tempo. Se scegliamo l'origine dei tempi in modo che il processo di spegnimento della corrente (corto circuito) inizi al tempo  $t = 0$ , abbiamo che per  $t < 0$  era  $I = \frac{\Delta V}{R}$  mentre per  $t \geq 0$  la corrente dovrà essere soluzione dell'equazione differenziale omogenea (5.3.280), ovvero, come abbiamo già detto, essere del tipo  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  dove la costante di integrazione  $I_0$  sarà determinata, al solito, dalle condizioni iniziali, per cui risulta

$$I(t) = \frac{\Delta V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.3.281)$$

La corrente continua a fluire nel verso in cui fluiva prima che il generatore fosse messo in corto circuito e si annulla esponenzialmente con la stessa costante con cui si è portata al valore di regime. Durante questo tempo, la potenza dissipata nella resistenza vale ancora

$$W_{diss}(t) = R I^2(t) \quad (5.3.282)$$

e risulta

$$W_{diss}(t) = R I^2(t) = -I(t) L \frac{dI}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right) \quad (5.3.283)$$

ovvero, integrando nel tempo, troviamo che l'energia dissipata per effetto Joule nella resistenza  $R$  durante il processo di diseccitazione di  $L$  è proprio pari all'energia magnetica prima immagazzinata nell'induttanza stessa.

### 5.3.2 Circuito RLC in serie

Passiamo adesso a studiare il comportamento di un circuito  $RLC$  in serie, come quello della figura riportata sotto.

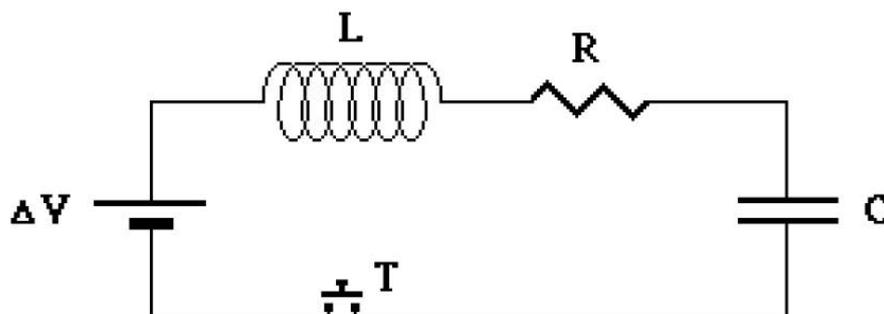


Figura 5.20: *Circuito RLC*

Supponiamo che il tasto  $T$  venga chiuso al tempo  $t = 0$ . La seconda legge di Kirchhoff, applicata alla maglia, fornisce

$$\Delta V - L \frac{dI}{dt} = RI + V_c \Rightarrow \Delta V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \quad (5.3.284)$$

D'altronde  $I = \frac{dQ}{dt}$  per cui l'equazione del circuito di cui sopra diventa

$$\Delta V = L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (5.3.285)$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico smorzato, equazione tipica di ogni processo lineare con reazione negativa e dissipazione.

Matematicamente, si tratta di una equazione differenziale lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea. Di nuovo, la soluzione generale è la somma di una soluzione particolare con l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. Come soluzione particolare possiamo cercare, al solito, una soluzione indipendente dal tempo: evidentemente, in questo caso, i termini proporzionali alle derivate saranno nulli e la soluzione cercata risulterà dunque

$$Q = C \Delta V \quad (5.3.286)$$

Passiamo adesso all'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (5.3.287)$$

Come sappiamo, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

- $(A+Bt)e^{t\lambda}$  nel caso in cui le radici del polinomio caratteristico  $\lambda_{1,2} = \lambda$  siano coincidenti;
- $Ae^{t\lambda_1} + Be^{t\lambda_2}$  nel caso in cui le radici del polinomio caratteristico siano distinte  $\lambda_{1,2}$ .

Le quantità  $A$  e  $B$  sono costanti di integrazioni a priori arbitrarie, da determinare in base, per esempio, alle condizioni iniziali, mentre il polinomio caratteristico associato all'equazione data è il polinomio di secondo grado

$$x^2 L + x R + \frac{1}{C} = 0 \quad (5.3.288)$$

il cui discriminante è

$$\Delta = R^2 - 4 \frac{L}{C} = R^2 \left( 1 - \frac{4L}{R^2 C} \right) \quad (5.3.289)$$

#### Caso a)

Consideriamo il caso in cui le due **radici** sono **coincidenti**, ovvero il caso in cui il discriminante  $\Delta$  della (5.3.288) è nullo. In questo caso l'unica radice del polinomio è

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \quad (5.3.290)$$

e l'integrale generale dell'equazione di partenza è

$$Q(t) = C \Delta V + (A + Bt)e^{t\lambda} \quad (5.3.291)$$

La particolare soluzione del problema considerato viene esplicitata determinando le costanti  $A$  e  $B$  attraverso le condizioni iniziali. Assumendo che il condensatore sia inizialmente scarico, poiché la carica sul condensatore è necessariamente una funzione continua del tempo avremo che  $Q(0+) = 0$ . Ma anche la corrente  $I(t)$ , così come nei circuiti  $RL$ , dovrà essere una funzione continua del tempo e dunque anche  $I(0+) = 0$ , per cui dalle condizioni iniziali si ha

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad C \Delta V + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -C \Delta V \quad (5.3.292)$$

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (\lambda A + B + \lambda Bt) e^{\lambda t} \Big|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad B = \lambda C \Delta V \quad (5.3.293)$$

e quindi abbiamo

$$Q(t) = C \Delta V [1 - e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}] \quad (5.3.294)$$

$$I(t) = C \Delta V \lambda^2 t e^{\lambda t} = C \Delta V \frac{R^2}{4L^2} t e^{-\frac{Rt}{2L}} \quad (5.3.295)$$

Usando il fatto che se il discriminante è nullo allora  $R^2 = \frac{4L}{C}$ , possiamo anche riscrivere l'espressione della corrente nel modo seguente

$$I(t) = C \Delta V \frac{4L}{4L^2} t e^{-\frac{Rt}{2L}} = \frac{\Delta V}{L} t e^{-\frac{Rt}{2L}} \equiv \frac{\Delta V}{R} \frac{t}{\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \quad (5.3.296)$$

dove, in analogia con quanto definito nel caso dei circuiti  $RL$ , abbiamo posto  $\tau_L \equiv \frac{L}{R}$ . Evidentemente si tratta di una funzione non negativa nulla per  $t = 0$  e nel limite in cui  $t \rightarrow \infty$ .

Dall'espressione (5.3.296) ricaviamo la derivata della corrente, che risulta

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\Delta V}{R} \frac{1}{\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} - \frac{\Delta V}{R} \frac{t}{\tau_L} \frac{1}{2\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} = \\ &= \frac{\Delta V}{R\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \left(1 - \frac{t}{2\tau_L}\right) \end{aligned} \quad (5.3.297)$$

Come si vede, essendo  $R\tau_L = L$ , la derivata della corrente, per  $t = 0$ , vale

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\Delta V}{L} \quad (5.3.298)$$

quindi la funzione  $\frac{dI}{dt}$  decresce fino ad annullarsi per  $t = 2\tau_L$ , dove  $I(t)$  assume il suo massimo, per poi divenire negativa annullandosi per  $t \rightarrow \infty$ .

Circa la carica sull'armatura positiva del condensatore, essendo la corrente sempre positiva, è una funzione crescente del tempo che parte da  $Q = 0$  per  $t = 0$  con derivata nulla visto che  $\frac{dQ}{dt} = I(t)$  e  $(I(0) = 0)$ .

Asintoticamente, la carica sull'armatura positiva del condensatore tende al valore  $Q(+\infty) = C \Delta V$ , passando per un flesso per  $t = 2\tau_L$ , dove la corrente raggiunge il massimo e poi inizia a decrescere.

### Caso b)

Consideriamo ora il caso in cui il discriminante  $\Delta = R^2 \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}$  sia strettamente positivo. In questo caso le due radici

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}{2L} \quad (5.3.299)$$

sono reali, distinte ed entrambe negative.

La soluzione generale, come detto sopra, è del tipo

$$Q(t) = C \Delta V + A e^{t\lambda_1} + B e^{t\lambda_2} \quad (5.3.300)$$

dove, dalle condizioni iniziali  $Q(0) = 0; I(0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , ricaviamo le seguenti equazioni per le costanti di integrazione  $A$  e  $B$

$$Q(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C \Delta V + A + B = 0 \quad (5.3.301)$$

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A \lambda_1 + B \lambda_2 = 0 \quad (5.3.302)$$

Le soluzioni del sistema delle due equazioni (5.3.301) e (5.3.302) sono

$$A = \frac{C \Delta V L \lambda_2}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}; \quad B = -\frac{C \Delta V L \lambda_1}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}; \quad (5.3.303)$$

per cui risulta così che

$$Q(t) = C \Delta V \left[ 1 + \frac{\lambda_2 L}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 L}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} e^{\lambda_2 t} \right] \quad (5.3.304)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= C \Delta V \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2 L}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2 \lambda_1 L}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} e^{\lambda_2 t} \right] = \\ &= \frac{\Delta V}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} \left[ e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right] \end{aligned} \quad (5.3.305)$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{LC} \quad (5.3.306)$$

L'andamento nel tempo della carica è qualitativamente simile a quello già visto nel caso a) precedente. Inizia con il valore  $Q(0) = 0$  e tende poi, asintoticamente, a  $Q(+\infty) = C \Delta V$  visto che entrambi gli esponenziali hanno esponente negativo, essendo  $\lambda_{1,2} < 0$ , e dunque tendono a zero per  $t \rightarrow +\infty$ . Circa la corrente, come nel caso a), essa risulta nulla per  $t = 0$  e la sua derivata

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta V}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} \left[ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \right] \quad (5.3.307)$$

per  $t = 0$ , è ancora uguale a

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\Delta V}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} [\lambda_1 - \lambda_2] = \frac{\Delta V}{R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} \frac{2R \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}{2L} = \frac{\Delta V}{L} \quad (5.3.308)$$

La corrente  $I(t)$  raggiunge il suo valor massimo per  $t \equiv \hat{t}$ , quando la sua derivata si annulla, ovvero quando

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 \hat{t}} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \hat{t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 e^{\lambda_1 \hat{t}} = \lambda_2 e^{\lambda_2 \hat{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \hat{t}} \quad (5.3.309)$$

Ma abbiamo già osservato che entrambe le radici sono negative, quindi

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} \quad (5.3.310)$$

e dunque la (5.3.309) può essere riscritta come

$$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \Rightarrow \hat{t} = \frac{\log |\lambda_2| - \log |\lambda_1|}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (5.3.311)$$

Per tempi successivi a  $\hat{t}$  la corrente torna a decrescere, per poi annullarsi asintoticamente.

Nel caso particolare in cui

$$\tau_L \equiv \frac{L}{R} \ll \tau_C \equiv RC \quad (5.3.312)$$

ecco che risulta

$$\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}} = \sqrt{1 - 4\frac{\tau_L}{\tau_C}} \approx 1 - 2\frac{\tau_L}{\tau_C} = 1 - \frac{2L}{R^2C} \quad (5.3.313)$$

e quindi

$$\lambda_1 = \frac{-R + R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}}{2L} \approx \frac{-R + R(1 - \frac{2L}{R^2C})}{2L} = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau_C} \quad (5.3.314)$$

$$\lambda_2 \approx \frac{-R - R(1 - \frac{2L}{R^2C})}{2L} = \frac{-2R + \frac{2L}{RC}}{2L} = -\frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_C} \approx -\frac{1}{\tau_L} \quad (5.3.315)$$

per cui, nel particolare caso considerato, si ha

$$I(t) \approx \frac{\Delta V}{R} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_C}} - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right] \quad (5.3.316)$$

e questo risultato è particolarmente espressivo perché mostra come, nel caso in cui gli effetti induttivi siano trascurabili rispetto a quelli capacitivi, ovvero nel caso appunto in cui  $\tau_L \ll \tau_C$ , la corrente salga rapidamente, con la costante di tempo  $\tau_L$ , al valore che avrebbe acquistato immediatamente in assenza di termine induttivo (cioè a  $\frac{\Delta V}{R}$ ), per poi decrescere fino a zero con scala temporale data da  $\tau_C$ .

### Caso c)

L'ultimo caso che ci resta da considerare è quello in cui il discriminante  $\Delta = R^2(1 - \frac{4L}{R^2C})$  è strettamente negativo.

Evidentemente, in questo caso, le due soluzioni  $\lambda_{1,2}$  restano distinte ma non sono più reali, bensì sono complesse coniugate.

Se introduciamo allora la quantità reale, positiva  $\Omega$  così definita

$$\Omega \equiv \frac{R\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}{2L} \quad (5.3.317)$$

ecco che risulta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R + R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}}{2L} = \frac{-R \pm iR\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}{2L} = -\frac{1}{2\tau_L} \pm i\Omega \quad (5.3.318)$$

Formalmente, la soluzione è la stessa che nel caso b) precedente, con l'unica differenza che  $\lambda_{1,2}$  sono adesso complesse coniugate.

Le condizioni iniziali impongono, di nuovo, che

$$Q(t) = C \Delta V \left[ 1 + \frac{\lambda_2 L}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 L}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} e^{\lambda_2 t} \right] \quad (5.3.319)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= C \Delta V \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_2 L}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2 \lambda_1 L}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} e^{\lambda_2 t} \right] = \\ &= \frac{\Delta V}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}] \end{aligned} \quad (5.3.320)$$

ovvero

$$Q(t) = C \Delta V \left[ 1 + \frac{\lambda_2}{2i\Omega} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{2i\Omega} e^{\lambda_2 t} \right] = C \Delta V \left\{ 1 + \frac{i}{2\Omega} [\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}] \right\} \quad (5.3.321)$$

$$I(t) = \frac{\Delta V}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}] = \frac{\Delta V}{2iL\Omega} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} [e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}] = \frac{\Delta V}{\Omega L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \sin \Omega t \quad (5.3.322)$$

Il risultato ottenuto in particolare per la corrente  $I(t)$  mostra esplicitamente l'insorgenza di oscillazioni smorzate nel circuito quando il discriminante dell'equazione di secondo grado è negativo, ovvero quando accade che il termine dissipativo è tale che  $R^2 < \frac{4L}{C}$ . La costante di smorzamento risulta essere

$$2\tau_L = \frac{2L}{R} \quad (5.3.323)$$

mentre la pulsazione dell'oscillazione è data da

$$\Omega = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} \quad (5.3.324)$$

la quale, nel limite in cui l'oscillatore è debolmente smorzato, ovvero se

$$\frac{4L}{C} \gg R^2 \Leftrightarrow \tau_L \gg \tau_C \quad (5.3.325)$$

diventa

$$\Omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.3.326)$$

Analogamente, per quanto riguarda la carica, la soluzione ottenuta

- è reale;
- vale zero per  $t = 0$ , visto che  $1 + \frac{i}{2\Omega}[\lambda_1 - \lambda_2] = 0$ ;
- tende al valore asintotico  $C \Delta V$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Esplicitamente abbiamo

$$\begin{aligned} Q(t) &= C \Delta V \left\{ 1 + \frac{i}{2\Omega} [\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}] \right\} = \\ &= C \Delta V \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \left[ \frac{\sin \Omega t}{2\Omega\tau_L} + \cos \Omega t \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.3.327)$$

Osserviamo che se l'oscillatore è debolmente smorzato, risulta

$$\Omega\tau_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{L}{R^2C}} \gg 1 \quad (5.3.328)$$

e dunque, per tempi dell'ordine di  $t \approx \Omega^{-1} = \sqrt{LC}$ , poiché

$$e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \approx e^{-\frac{\sqrt{LC}}{R}} = e^{-\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}} = e^{-\sqrt{\frac{R^2C}{4L}}} \approx 1 \quad (5.3.329)$$

$$\frac{\sin \Omega t}{2\Omega\tau_L} + \cos \Omega t \approx \cos \Omega t \quad (5.3.330)$$

la carica dipenderà dal tempo come

$$Q(t) \approx C \Delta V [1 - \cos \Omega t] \quad (5.3.331)$$

In queste condizioni, le ampiezze di oscillazione della corrente e della carica sono legate fra loro dalla relazione

$$\frac{1}{2} L \left( \frac{\Delta V}{\Omega L} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(C \Delta V)^2}{C} \quad (5.3.332)$$

che esprime la conservazione dell'energia, nel limite in cui il termine dissipativo risulti trascurabile. Osserviamo infatti che, se aspettiamo che il condensatore si sia caricato alla ddp  $\Delta V$  e poi mettiamo in corto circuito il generatore, l'equazione del circuito coincide con l'equazione omogenea, mentre le condizioni iniziali diventano

$$Q(0) = C \Delta V; \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = I(0) = 0 \quad (5.3.333)$$

e la soluzione è

$$\begin{aligned} Q(t) &= -C \Delta V \left[ \frac{1}{2} \frac{\lambda_2}{i\Omega} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{i\Omega} e^{\lambda_2 t} \right] = \\ &= C \Delta V e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \left[ \frac{\sin \Omega t}{2\Omega\tau_L} + \cos \Omega t \right] \end{aligned} \quad (5.3.334)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{-\Delta V}{R\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} \left[ e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right] = \\ &= -\frac{\Delta V}{\Omega L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (5.3.335)$$

ovvero, la corrente è semplicemente uguale e opposta all'espressione precedente, e così pure la carica, ma limitatamente alla sola parte dipendente dal tempo (naturalmente il termine indipendente dal tempo, adesso, non è più presente, essendo l'equazione del circuito omogenea...).

Potendo trascurare la dissipazione, nei due casi l'ampiezza che descrive il termine oscillante di carica  $C \Delta V$  e di corrente  $\frac{\Delta V}{\Omega L}$  coincidono.

D'altronde, se prendiamo l'equazione omogenea e la moltiplichiamo per la corrente, si ha

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 &\Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow I L \frac{dI}{dt} + RI^2 + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = 0 &\quad (5.3.336) \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) + RI^2 = 0 \quad (5.3.337)$$

la quale esprime la conservazione dell'energia e stabilisce che, a parte il termine dissipativo, la somma dell'energia magnetica ed elettrostatica sono costanti nel tempo: siccome corrente e carica sono sfasate di 90 gradi per cui quando è zero una è massima l'altra e viceversa, ne segue che le loro ampiezze  $I_0$  e  $Q_0$  devono appunto soddisfare la condizione

$$\frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad (5.3.338)$$

## 5.4 Le correnti alternate

Fin'ora abbiamo sempre assunto che i generatori producessero fem costanti nel tempo. Assumiamo adesso, invece, che ci sia dipendenza dal tempo, ovvero che  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ .

Più precisamente, diremo che un generatore produce una fem alternata se

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$  è una funzione periodica, ovvero  $\exists T : \forall t \quad \mathcal{E}(t + T) = \mathcal{E}(t)$ ;
- $\mathcal{E}$  ha media nulla, ovvero  $\int_0^T dt \mathcal{E}(t) = 0$ .

Cominceremo con il considerare il caso semplice in cui  $\mathcal{E}(t)$  sia una funzione cosinusoidale del tempo, ovvero del tipo  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ , dove

- $\mathcal{E}_0$  è l'ampiezza, una quantità reale definita positiva;
- $\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \equiv 2\pi \nu$  è la pulsazione (*rad/s*);
- $\phi$  è la fase del segnale cosinusoidale;
- $\nu$  è la frequenza del segnale ( $s^{-1} \equiv Hz$ ).

Immaginiamo di possedere un siffatto generatore<sup>20</sup> (potrebbe essere una spira che ruota con velocità costante in un campo magnetico uniforme ...) e di chiuderlo su una resistenza  $R$  come in fig.5.21.

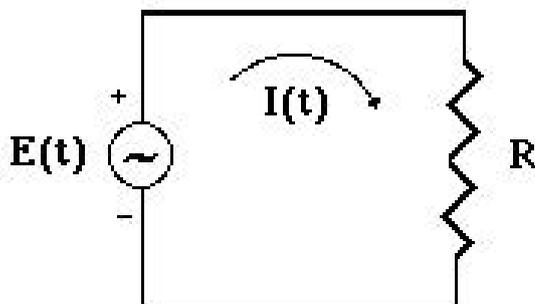


Figura 5.21: *Circuito resistivo in c.a.*

Se la frequenza non è troppo elevata, o meglio se il periodo  $T$  è molto maggiore del tempo che una perturbazione elettromagnetica impiega per propagarsi nel circuito, potremo considerare come *istantanea* la propagazione del campo elettrico nel circuito stesso (funzionamento quasi-statico). Se questa condizione è rispettata, poiché, come abbiamo visto nel modello di Drude,

<sup>20</sup>Il simbolo usato per il generatore indica che è sinusoidale e dice, quando l'argomento del coseno è nullo, qual è il polo positivo e quale quello negativo.

i tempi caratteristici degli urti fra elettroni in un metallo, sono sulla scala dei  $10^{-14}$  s, ci possiamo aspettare che la resistenza continui a comportarsi in corrente alternata così come si comporta in corrente continua, ovvero che permanga a ogni istante la proporzionalità fra corrente e tensione.

Questo significa che continuerà a valere la legge di Ohm per la quale abbiamo

$$\mathcal{E}(t) = RI(t) \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t + \phi) \equiv I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4.339)$$

Dunque, nel caso di una fem sinusoidale chiusa su una resistenza, avremo che, in condizioni quasi-statiche (ovvero, come abbiamo detto, nell'ipotesi di propagazione *istantanea* del campo elettrico nel circuito), la corrente è

- sinusoidale;
- di ampiezza  $I_0$  proporzionale a quella della fem:  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ ;
- con la stessa fase della fem.

Passiamo adesso a considerare il comportamento in c.a. di un altro dispositivo che abbiamo già studiato sia in regime statico che impulsivo, cioè il condensatore.

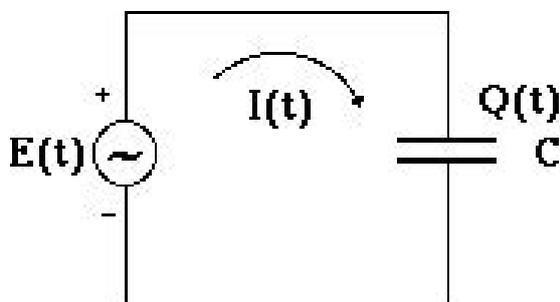


Figura 5.22: *Circuito capacitivo in c.a.*

L'equilibrio del circuito, assunto idealmente privo di resistenza, richiede che, istante per istante, (sempre assumendo che la frequenza sia tale per cui ci si trovi in condizione quasi-statica) risulti

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (5.4.340)$$

dove  $Q(t)$  è la carica sull'armatura positiva del condensatore, ed  $\mathcal{E}(t)$  la ddp fra quella armatura e l'altra. Ne segue dunque che

$$Q(t) = C \mathcal{E}(t) = C \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4.341)$$

Siccome la carica del condensatore non è costante nel tempo, deve quindi esserci una corrente nel circuito che la modifica, la quale è data da

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\omega C \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi) = \omega C \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (5.4.342)$$

Come si vede, in questo caso la corrente è

- sinusoidale,
- di ampiezza  $I_0$  proporzionale a quella della fem:  $I_0 = \omega C \mathcal{E}_0$ ;
- sfasata di  $\frac{\pi}{2}$  in anticipo rispetto alla tensione.

Veniamo infine a considerare che cosa accade quando il generatore ideale di fem cosinusoidale è chiuso su un'induttanza pura  $L$ .

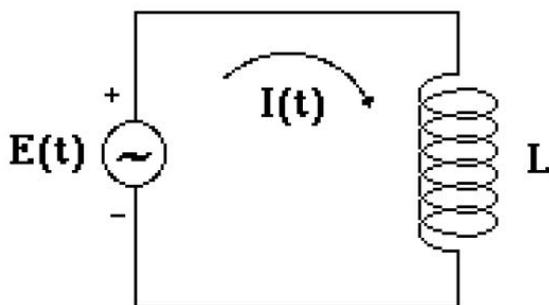


Figura 5.23: Circuito puramente induttivo in c.a.

In questo caso, la fem del generatore sarà bilanciata, istante per istante, dalla fem autoindotta nell'induttanza; ovvero avremo

$$\mathcal{E}(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4.343)$$

Integrando, abbiamo quindi che

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \phi) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) \quad (5.4.344)$$

Abbiamo quindi che, nel caso del circuito puramente induttivo, la corrente è

- sinusoidale;
- di ampiezza  $I_0$  proporzionale a quella della fem:  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}$ ;
- sfasata di  $\frac{\pi}{2}$  in ritardo rispetto alla tensione.

In tutti i casi esaminati, a parte il caso resistivo, la corrente e la tensione, pur avendo ampiezze proporzionali, non sono proporzionali istante per istante, a causa del fatto che risultano sfasate fra loro. Un metodo per visualizzare la situazione, anche e soprattutto per quanto riguarda gli sfasamenti, è il metodo cosiddetto *dei vettori rotanti*.

Un segnale cosinusoidale  $A_0 \cos(\omega t + \phi)$  può essere visto come la proiezione sull'asse delle ascisse di un vettore applicato nell'origine, avente lunghezza  $A_0$ , il quale ruota nel piano con velocità angolare  $\omega$  e forma, al tempo  $t = 0$ , un angolo  $\phi$  con il suddetto asse. Usando questa rappresentazione, per le tre situazioni esaminate, abbiamo la situazione rappresentata nella figura 5.24.

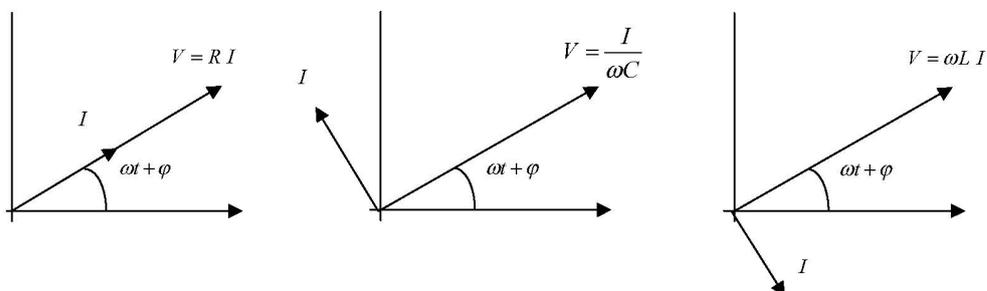


Figura 5.24: Rappresentazioni del comportamento in c.a. di  $R$ ,  $C$  e  $L$  con il metodo dei vettori rotanti

Ma un vettore nel piano può essere visto come un numero complesso e la rotazione sarà descritta semplicemente dalla moltiplicazione di questo numero per il fattore di fase  $e^{i\omega t}$ . In questo modo, se prendiamo, per esempio, la fem prodotta del generatore  $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , risulta naturale associarle la funzione complessa

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)} \equiv \mathcal{E} e^{i\omega t} \quad (5.4.345)$$

dove l'ampiezza complessa  $\mathcal{E}$  è stata definita come

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_0 e^{i\phi} \quad (5.4.346)$$

Resta comunque inteso che la fem *fisica* coincide con la parte reale di quella funzione complessa.

In modo analogo si può procedere per la corrente, associando alla funzione reale che descrive la corrente  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi)$  la funzione complessa

$$\mathcal{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \psi)} \equiv \mathcal{I} e^{i\omega t} \quad (5.4.347)$$

dove

$$\mathcal{I} \equiv I_0 e^{i\psi} \quad (5.4.348)$$

Risulta allora

- a): Caso resistivo

Avevamo visto che il legame corrente-tensione era tale che

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) = R I_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \mathcal{E} e^{i\omega t} = R \mathcal{I} e^{i\omega t} \Leftrightarrow \mathcal{E} = R \mathcal{I} \quad (5.4.349)$$

In termini delle funzioni complesse di cui sopra abbiamo dunque ancora proporzionalità<sup>21</sup> a ogni istante fra corrente e tensione.

- b): Caso capacitivo

Nel caso della capacità abbiamo

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega C \mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathcal{I} e^{i\omega t} = \omega C \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{I} e^{i\omega t} = \omega C \mathcal{E} e^{i\omega t} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega C e^{i\omega t} \Leftrightarrow \mathcal{I} = i\omega C \mathcal{E} \end{aligned} \quad (5.4.350)$$

Anche nel caso della capacità, per le funzioni complesse che descrivono la tensione e la corrente, abbiamo trovato una condizione di proporzionalità valida a ogni istante: questo è dovuto al fatto che i numeri complessi, essendo definiti da un modulo e una fase, consentono di tener conto in modo naturale dello sfasamento fisso che abbiamo trovato tra le funzioni reali che descrivono la corrente e la tensione.

Al prezzo di introdurre l'impedenza complessa del condensatore

$$Z_C \equiv \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \quad (5.4.351)$$

possiamo scrivere anche per il condensatore la legge di Ohm (per le ampiezze e per le funzioni che ne descrivono l'evoluzione nel tempo) ovvero

$$\mathcal{E} = Z_C \mathcal{I} \quad (5.4.352)$$

- c): Caso induttivo

Anche nel caso dell'induttanza, essendo

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathcal{I} e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega L} \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{I} e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega L} \mathcal{E} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega L} \mathcal{E} e^{i\omega t} \Leftrightarrow \mathcal{I} = \frac{1}{i\omega L} \mathcal{E} \end{aligned} \quad (5.4.353)$$

abbiamo recuperato la proporzionalità a ogni istante fra le funzioni complesse che descrivono nel tempo la corrente e la tensione al prezzo di aver dovuto definire l'impedenza dell'induttanza come

$$Z_L = i\omega L \quad (5.4.354)$$

<sup>21</sup>Niente di strano in questo caso, visto che la proporzionalità era già presente fra le funzioni reali di partenza.

In questo modo, per quanto riguarda le ampiezze (e quindi le funzioni dipendenti dal tempo), abbiamo ancora che vale la legge di Ohm, ovvero

$$\mathcal{E} = Z_L \mathcal{I} \quad (5.4.355)$$

Risulta quindi che per una qualsiasi resistenza  $R$ , capacità  $C$ , o induttanza  $L$  si ha comunque che la caduta di tensione ai suoi capi e la corrente che la attraversa sono tali che  $\Delta\mathcal{V} = Z\mathcal{I}$ , con  $Z = R, i\omega L, \frac{1}{i\omega C}$  rispettivamente, dove questo significa semplicemente che

$$\Re[\Delta\mathcal{V} e^{i\omega t}] = \Re[Z \mathcal{I} e^{i\omega t}] \quad (5.4.356)$$

L'impedenza associata all'induttanza  $L$  e quella associata alla capacità  $C$  sono immaginarie pure, proprio per render conto dello sfasamento tensione/corrente di  $\pm\frac{\pi}{2}$  e inoltre esse dipendono dalla frequenza: l'impedenza dell'induttanza cresce con la frequenza, mentre quella della capacità diminuisce. Vogliamo comunque sottolineare ancora il fatto che le *grandezze fisiche sono quantità reali*.

Il passaggio al campo complesso rende formalmente semplice il legame fra le due grandezze fisiche tensione e corrente, consentendoci di recuperare un legame di semplice proporzionalità. Usando le grandezze complesse, la dipendenza temporale è contenuta nel fattore di fase  $e^{i\omega t}$  comune a tensione e corrente, che significa che entrambi questi vettori ruotano con la stessa velocità angolare. Resta inteso che, una volta risolto il circuito, cioè una volta ottenute l'ampiezza complessa, per esempio, della corrente, per averne l'effettiva dipendenza temporale, occorre moltiplicarla per il fattore di fase in questione e quindi prendere la parte reale della funzione complessa così ottenuta: la fase dell'ampiezza complessa genererà il suo sfasamento corretto...

Verifichiamo adesso che, fatte queste premesse, per le ampiezze complesse della corrente e della tensione valgono ancora le leggi di Kirchhoff.

Cominciamo dalla legge dei nodi.

Il fatto che nel nodo non possa accumularsi carica elettrica, garantisce che, dette

$$I_k(t) = I_{0k} \cos(\omega t + \phi_k) \quad (5.4.357)$$

le correnti (reali) divergenti<sup>22</sup> dal nodo, deve essere

$$\forall t : \sum_k I_k(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t : \sum_k I_{0k} \cos(\omega t + \phi_k) = 0 \quad (5.4.358)$$

<sup>22</sup>La scelta delle correnti divergenti è puramente convenzionale. Se volessimo usare correnti convergenti al nodo, basterebbe porre  $\phi_k \rightarrow \phi_k + \pi$ .

Derivando la (5.4.358) rispetto al tempo si ha

$$\forall t : -\omega \sum_k I_{0k} \sin(\omega t + \phi_k) = 0 \quad (5.4.359)$$

Ma allora, dividendo questa espressione per  $-\omega$  e moltiplicandola per il coefficiente immaginario, otteniamo

$$\forall t : i \sum_k I_{0k} \sin(\omega t + \phi_k) = 0 \quad (5.4.360)$$

che, sommata alla (5.4.358), fornisce

$$\begin{aligned} \forall t : \sum_k I_{0k} [\cos(\omega t + \phi_k) + i \sin(\omega t + \phi_k)] = 0 &\Rightarrow \forall t : \sum_k \mathcal{I}_k e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_k \mathcal{I}_k = 0 &\quad (5.4.361) \end{aligned}$$

ovvero che la somma delle ampiezze complesse delle correnti divergenti da un nodo deve essere nulla.

Analogamente, per quanto riguarda la seconda legge di Kirchhoff, si ha che, a ogni tempo, la somma algebrica delle fem presenti nella maglia (contate con il segno positivo se attraversate dal polo negativo  $-$  al polo positivo  $+$ , nel verso di circolazione della maglia) deve eguagliare la somma delle ddp ai capi delle impedenze che si trovano sulla maglia stessa: procedendo come sopra, si ha di nuovo che

$$\sum_k Z_k \mathcal{I}_k e^{i\omega t} = \sum_k \mathcal{E}_k e^{i\omega t} \Rightarrow \sum_k Z_k \mathcal{I}_k = \sum_k \mathcal{E}_k \quad (5.4.362)$$

Siccome le due leggi di Kirchhoff erano la base per la risoluzione dei circuiti in corrente continua, il fatto che continuino a valere anche in regime di corrente alternata al solo prezzo di dover usare grandezze complesse, ci consente di affrontare i circuiti in ca con gli stessi metodi usati in corrente continua.

In particolare avremo che, per elementi in serie, l'impedenza equivalente sarà la somma delle impedenze, mentre per impedenze in parallelo dovremo calcolare l'inverso della somma degli inversi

$$Z_{serie} = Z_1 + Z_2 + \dots; \quad Z_{parallelo} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots} \quad (5.4.363)$$

Veniamo ora a studiare un fenomeno che non ha equivalente in corrente continua, cioè quello della risonanza: ci limiteremo allo studio della risonanza *serie*, ovvero quella che si manifesta in un circuito *RLC* in cui tutti gli elementi sono disposti in serie fra loro. L'impedenza di questo circuito, per

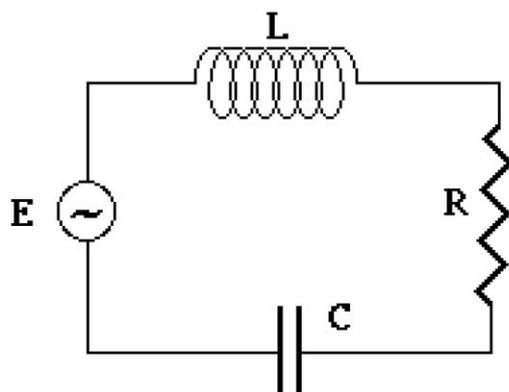


Figura 5.25: *Circuito RLC-serie*

quanto detto sopra, vale

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} \quad (5.4.364)$$

Come si vede, i due termini immaginari sono di segno opposto e quindi tendono a compensarsi. Nel caso in cui

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (5.4.365)$$

l'impedenza del circuito assume il suo valore minimo<sup>23</sup>, pari al valore della sola resistenza  $R$ . In particolare, per il valore di  $\omega$  sopra riportato, l'impedenza è reale e quindi corrente e tensione risultano in fase. Questa particolare condizione di lavoro è detta *condizione di risonanza* del circuito.

Accade che la ddp ai capi dell'induttanza e quella ai capi del condensatore sono uguali e opposte, per cui la loro somma è nulla qualunque sia la corrente nel circuito: è come se non fossero presenti. Come conseguenza, la corrente

<sup>23</sup>Dalla (5.4.364) segue, in generale, che per questo circuito *RLC-serie*, il valore del modulo dell'impedenza vale

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (5.4.366)$$

e quindi esso assume il valore minimo uguale a  $R$  quando è soddisfatta la (5.4.365).

(fissata la fem) assume il suo valor massimo, limitata solamente dalla resistenza. Si noti inoltre che le ddp ai capi di  $L$  e  $C$  possono essere anche molto maggiori dell'ampiezza della fem presente nel circuito, infatti

$$|V_L| = \omega L |I| = \omega L \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \mathcal{E}_0 \frac{\omega L}{R} \quad (5.4.367)$$

$$|V_C| = \frac{|I|}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega RC} \quad (5.4.368)$$

che, naturalmente, possono anche essere maggiori di  $\mathcal{E}_0$ .

Un altro aspetto che differenzia il comportamento di un circuito in cc da quello in ca è quello della potenza.

Supponiamo di considerare una impedenza  $Z = |Z| e^{i\theta}$  e assumiamo che sia collegata a una fem di ampiezza complessa  $\mathcal{E} e^{i\omega t}$  dove  $\mathcal{E} = |\mathcal{E}| e^{i\phi}$ .

La corrente nel circuito è data da

$$\mathcal{I} e^{i\omega t} = \frac{1}{Z} \mathcal{E} e^{i\omega t} = \left| \frac{\mathcal{E}}{Z} \right| e^{i(\phi-\theta)} e^{i\omega t} \quad (5.4.369)$$

ovvero, la funzione reale che descrive la corrente nell'impedenza data è

$$I(t) = \left| \frac{\mathcal{E}}{Z} \right| \cos(\phi - \theta + \omega t) \equiv I_0 \cos(\phi - \theta + \omega t) \quad (5.4.370)$$

mentre la ddp ai suoi capi vale, ovviamente

$$V(t) = |\mathcal{E}| \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4.371)$$

Ne segue che la potenza istantanea dissipata nell'impedenza vale

$$\begin{aligned} W(t) &= V(t)I(t) = |\mathcal{E}| \cos(\omega t + \phi) \left| \frac{\mathcal{E}}{Z} \right| \cos(\phi - \theta + \omega t) = \\ &= \frac{|\mathcal{E}|^2}{|Z|} \cos(\omega t + \phi) \cos(\phi - \theta + \omega t) \end{aligned} \quad (5.4.372)$$

D'altronde, dalla trigonometria elementare sappiamo che il prodotto dei due coseni può essere scritto come

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (5.4.373)$$

e dunque

$$\cos(\omega t + \phi) \cos(\phi - \theta + \omega t) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + 2\phi - \theta) + \cos \theta] \quad (5.4.374)$$

per cui la potenza oscilla, a frequenza angolare  $2\omega$  intorno al valor medio

$$\langle W \rangle = \frac{|\mathcal{E}|^2 \cos \theta}{|Z|} \frac{1}{2} = \frac{\mathcal{E} I_0}{2} \cos \theta \quad (5.4.375)$$

Nel caso resistivo, per cui  $\theta = 0$ , questa potenza media vale

$$\langle W \rangle = \frac{\mathcal{E}I_0}{2} = \frac{I_0^2}{2} R \quad (5.4.376)$$

mentre nei casi induttivo e capacitivo essa è nulla !

Gli elementi  $L$  e  $C$  sono detti, per questo, *elementi reattivi*: essi non dissipano potenza, bensì la assorbono e la restituiscono in modo tale che la media sul periodo risulta nulla.

Solitamente, per recuperare l'analogia formale con quanto trovato in cc, si definiscono i *valori efficaci* della corrente e della fem in modo che

$$V_{eff} \equiv \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{2}}; \quad I_{eff} \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (5.4.377)$$

In questo modo

$$\langle W \rangle = \frac{V_{eff}^2}{|Z|} \cos \theta = V_{eff} I_{eff} \cos \theta = I_{eff}^2 |Z| \cos \theta \quad (5.4.378)$$

così che, in particolare, nel caso puramente resistivo risulta

$$\langle W \rangle = \frac{V_{eff}^2}{R} = V_{eff} I_{eff} = I_{eff}^2 R \quad (5.4.379)$$

## 5.5 Magnetismo nella materia

Se misuriamo l'induttanza  $L$  di una bobina quando essa è immersa in un mezzo materiale, troviamo in genere un valore diverso dal valore  $L_0$  che misuriamo in vuoto. Esistono mezzi per cui

- $L \leq L_0$ : sono i mezzi diamagnetici;
- $L \geq L_0$ : sono i mezzi paramagnetici;
- $L \gg L_0$ : sono i mezzi ferromagnetici.

Per capire come mai accade questo, occorre rifarci alla struttura atomica della materia.

L'idea classica che abbiamo di un atomo è che esso sia costituito da un nucleo il quale è circondato da elettroni che gli girano intorno, un po' come un sistema solare in miniatura, in cui il nucleo sia il Sole e gli elettroni i pianeti. Consideriamo allora, per comodità di analisi, un sistema fatto da una sferetta di massa  $m$  e carica  $-q_0 < 0$ , legata a un punto fisso  $O$  da una corda di lunghezza  $R$ , attraverso la quale viene trasmessa la forza centripeta necessaria per tenere la carica in rotazione alla velocità periferica costante  $v_0$ .

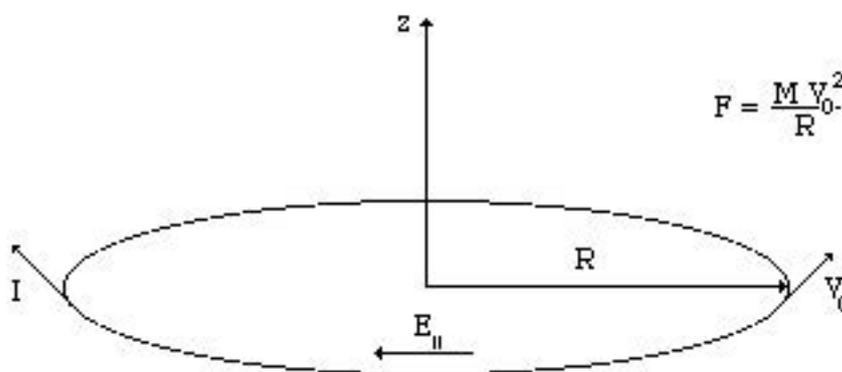


Figura 5.26: Schema classico di un atomo

Questo sistema equivale a una spira di raggio  $R$ , percorsa da una corrente  $I$  che circola nel verso opposto a quello in cui viaggia la carica (che abbiamo supposto negativa e ruotante in verso antiorario ...), il cui modulo è dato da

$$I = \frac{q_0}{T} = q_0 \frac{v_0}{2\pi R} = q_0 \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.5.380)$$

A questa corrente è dunque associato un momento magnetico<sup>24</sup>  $\vec{\mu}$  pari a

$$\vec{\mu} = -\pi R^2 I \vec{k} = -\pi R^2 q_0 \frac{v_0}{2\pi R} \vec{k} = -q_0 \frac{Rv_0}{2} \vec{k} \quad (5.5.383)$$

dove  $\vec{k}$  è il versore dell'asse  $z$ .

Supponiamo ora che il sistema considerato si trovi immerso in un campo magnetico prodotto, per esempio, da un solenoide avente  $z$  come asse.

Facciamo crescere l'intensità del campo magnetico  $B$  dal valore  $B = 0$  al valore  $B_0$

$$\vec{B}: (0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, B_0) \quad (5.5.384)$$

Durante il tempo in cui questo accade, sarà presente, tangenzialmente alla spira, un campo elettrico  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel}$  tale che

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad (5.5.385)$$

La componente di questo campo elettrico  $E_{\parallel}$ , parallela alla traiettoria della carica e orientata nel senso di circolazione antiorario, che, per ipotesi, è quello della velocità  $\vec{V}_0$ , vale dunque

$$2\pi R E_{\parallel} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E_{\parallel} = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt} \quad (5.5.386)$$

Esso produce sulla carica una forza elettrica tangente alla traiettoria, e dunque una accelerazione tangenziale pari a

$$a_{\parallel} = \frac{-q_0 E_{\parallel}}{m} = \frac{q_0 R}{2m} \frac{dB}{dt} \quad (5.5.387)$$

la quale è nello stesso verso della velocità ( $dB/dt \geq 0$ ). Integrando si ottiene infine

$$v_{fin} - v_0 = \frac{q_0 R B_0}{2m} > 0 \quad (5.5.388)$$

e questo *indipendentemente* dalle modalità con cui il campo magnetico è passato dal valore nullo a  $B_0$ .

<sup>24</sup>Si osservi che questa carica in rotazione possiede un momento angolare pari a

$$\vec{L} = m v_0 R \vec{k} \quad (5.5.381)$$

per cui ne risulta

$$\vec{\mu} = \vec{L} \frac{q}{2m} \quad (5.5.382)$$

e si può dimostrare che questo risultato è di validità generale, indipendentemente dalla forma della distribuzione di carica in rotazione.

Per un elettrone legato in un atomo, abbiamo  $R \approx 0.5 \times 10^{-10} m$ ;  $q_0 = 1.6 \times 10^{-19} C$ ;  $V_0 \approx \frac{3}{137} 10^8 m/s$ , per cui ne risulta  $|\vec{\mu}| \approx 0.9 \times 10^{-23} A m^2$ .

Prima di continuare, proviamo a valutare l'ordine di grandezza di questa variazione di velocità in un atomo: si ha

$$\Delta v \approx \frac{B \times 1.6 \cdot 10^{-19} \times 0.5 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-30}} \approx 4B \text{ m/s} \quad (5.5.389)$$

Anche in campi molto intensi ( $E_s. : 10 T$ ), la variazione di velocità resta estremamente piccola in paragone a quella già posseduta dall'elettrone, che è dell'ordine di  $\alpha c \approx 2 \times 10^6 \text{ m/s}$ .

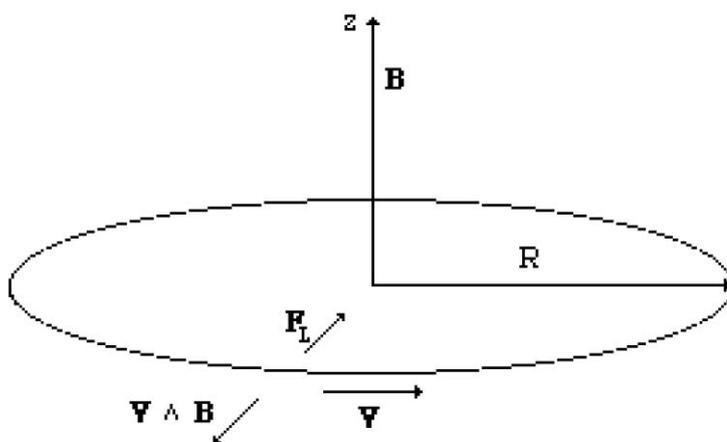


Figura 5.27: Forze agenti sulla carica

Circa la forza centripeta, essendo comunque aumentata la velocità finale, essa dovrà essere maggiore. Limitandoci, per quanto visto sopra, al primo ordine perturbativo in  $\frac{\Delta v}{v_0}$ , risulta

$$F = m \frac{v_{fin}^2}{R} \approx \frac{m}{R} (v_0^2 + 2v_0 \Delta v) = \frac{m}{R} v_0^2 + \frac{2m}{R} v_0 \Delta v \quad (5.5.390)$$

D'altronde, nello stato finale, oltre alla corda del nostro modello, sulla carica in moto agirà anche la forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = -q_0 \vec{v}_{fin} \wedge \vec{B}_0 \quad (5.5.391)$$

e questa forza è diretta verso il centro e ha una intensità pari a

$$F_L = q_0 v_{fin} B_0 \quad (5.5.392)$$

Ma abbiamo visto che

$$v_{fin} - v_0 \equiv \Delta v = \frac{q_0 R B_0}{2m} \Rightarrow B_0 = \frac{2m \Delta v}{q_0 R} \quad (5.5.393)$$

dunque, sostituendo nella (5.5.392), otteniamo

$$F_L = q_0 v_{fin} \frac{2m \Delta v}{q_0 R} \approx \frac{2m}{R} v_0 \Delta v \quad (5.5.394)$$

ovvero la forza di Lorentz corrisponde esattamente all'aumento di forza centripeta necessario a causa dell'aumento di velocità: in altri termini, la corda del nostro modellino continua a trasmettere la stessa forza di prima anche se la carica va più veloce ... La conseguenza è che se invece di una corda inestensibile, la forza è esercitata in altro modo, dipendente dalla distanza (per esempio, dal campo coulombiano del nucleo ...), la distanza fra la carica e il centro di attrazione, nonostante varii la velocità, non cambia.

Poiché, comunque, a raggio costante, è cambiata la velocità, significa che è cambiata la corrente nella spira

$$I = q_0 \frac{v}{2\pi R} \Rightarrow I + \Delta I, \text{ dove } \Delta I = q_0 \frac{\Delta v}{2\pi R} \quad (5.5.395)$$

e dunque anche il momento magnetico da essa generato, della quantità

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\mu} &= -\vec{k} R q_0 \frac{\Delta v}{2} = -\vec{k} R q_0 \frac{1}{2} \frac{q_0 R B_0}{2m} = \\ &= -\vec{k} R^2 q_0^2 \frac{B_0}{4m} \end{aligned} \quad (5.5.396)$$

Nel caso dell'elettrone legato al nucleo, il modulo della variazione del suo momento magnetico vale

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{m}| &= B_0 (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \times (0.5 \cdot 10^{-10})^2 \frac{1}{4 \cdot 10^{-30}} \approx \\ &\approx B_0 \times 0.16 \cdot 10^{-28} \text{ A/m}^2 \end{aligned} \quad (5.5.397)$$

Si noti che questa variazione di momento magnetico è opposta a  $B_0$ , comunque ruoti la carica. Questo discende dal fatto che l'applicazione del campo  $B_0$  produce sulle orbite degli elettroni una variazione di velocità angolare (di Larmor)

$$\Delta \omega = \frac{\Delta v}{R} = \frac{q_0 B_0}{2m} \quad (5.5.398)$$

la quale è indipendente dal verso in cui essi ruotano. Di conseguenza, anche se la densità di momento magnetico  $\vec{M}$  era inizialmente nulla, dopo l'applicazione del campo  $B_0$ , essa non lo sarà più, e diviene

$$\vec{M} = n \Delta \vec{\mu} = -n R^2 e^2 \frac{B_0}{4m} \vec{k} = -n R^2 e^2 \frac{\vec{B}_0}{4m} \quad (5.5.399)$$

dove  $n$  è il numero di elettroni per unità di volume.

Vediamo ora quali sono le conseguenze osservabili dovute alla nascita di una

densità di momento magnetico  $\vec{M}$  nella materia o, come si usa dire, della presenza di una *densità di magnetizzazione*.

Abbiamo visto che il potenziale vettore prodotto da un dipolo magnetico  $\vec{m}$  nell'origine del sistema di riferimento è

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (5.5.400)$$

per cui, in presenza di una distribuzione di dipoli magnetici, per il principio di sovrapposizione, avremo

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{M} \wedge (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{M} \wedge \vec{\nabla}_y \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \quad (5.5.401)$$

Ma in generale se sono date la funzione  $f = f(\vec{x})$  e il campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ , accade che

$$\vec{\nabla} \wedge (f \vec{v}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{v} + f \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (5.5.402)$$

e dunque, nel nostro caso

$$\begin{aligned} \vec{M} \wedge \vec{\nabla}_y \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) &= -\vec{\nabla}_y \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \wedge \vec{M} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{\nabla} \wedge \vec{M} - \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{M}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{rot_y \vec{M}}{|\vec{x} - \vec{y}|} - rot_y \left( \frac{\vec{M}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \end{aligned} \quad (5.5.403)$$

D'altronde l'integrazione su tutto lo spazio del secondo termine, essendo fatto da somme di derivate spaziali, se il campo della magnetizzazione  $\vec{M}$  è limitato al finito, dà contributo nullo, per cui possiamo concludere che il potenziale vettore prodotto dalla distribuzione di magnetizzazione  $\vec{M}$  è dato da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{\nabla}_y \wedge \vec{M}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.5.404)$$

D'altronde noi sappiamo che, in generale, il potenziale vettore prodotto da una densità di corrente di conduzione  $\vec{J}(\vec{x})$  è dato da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.5.405)$$

ne segue che la presenza di una densità di momento magnetico  $\vec{M}(\vec{y})$  equivale, dal punto di vista del campo magnetico generato, alla presenza di una distribuzione di corrente descritta dalla densità di *corrente di magnetizzazione*

$$\vec{J}(\vec{y}) = rot \vec{M}(\vec{y}) \equiv \vec{\nabla}_y \wedge \vec{M}(\vec{y}) \quad (5.5.406)$$

Quindi dobbiamo aspettarci che la quarta equazione di Maxwell, in presenza di magnetizzazione, in condizioni stazionarie, diventi<sup>25</sup>

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\text{rot}\vec{M} \Rightarrow \text{rot}(\vec{B} - \mu_0\vec{M}) = \mu_0\vec{J}_{\text{conduzione}} \quad (5.5.409)$$

Così come nel caso dell'elettrostatica nei mezzi materiali, dove avevamo definito il vettore *spostamento elettrico*  $\vec{D}$  come

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (5.5.410)$$

in modo da "eliminare" formalmente dall'equazione

$$\text{div}\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\rho_{\text{conduzione}}}{\epsilon_0} \quad (5.5.411)$$

la carica di polarizzazione

$$\rho_{\text{polarizzazione}} = \text{div}\vec{P} \quad (5.5.412)$$

nello stesso modo, nel caso del magnetismo nella materia, possiamo introdurre il vettore ausiliario  $\vec{H}$  nel modo seguente<sup>26</sup>

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B} - \mu_0\vec{M}}{\mu_0} \quad (5.5.414)$$

in modo da recuperare l'equazione

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J}_{\text{conduzione}} \quad (5.5.415)$$

Il teorema di Ampère per il campo  $\vec{H}$  stabilisce allora che

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{concatenata}} \quad (5.5.416)$$

<sup>25</sup>Vogliamo osservare che, dal punto di vista dimensionale, effettivamente la quantità  $\mu_0 M$  ha le dimensioni di  $B$ . Infatti

$$[m] = A m^2 \Rightarrow [M] = \frac{[m]}{m^3} = A m^{-1} \quad (5.5.407)$$

mentre le dimensioni di  $\mu_0$  si ottengono dalla legge di Ampère, secondo la quale

$$[B]m = [\mu_0]A \Rightarrow [\mu_0] = [B] m A^{-1} \Rightarrow [\mu_0 M] = [B] m A^{-1} A m^{-1} = [B] \quad (5.5.408)$$

<sup>26</sup>L'unità di misura della grandezza  $H$  è *Ampère-spire/metro*. Quanto a  $B$ , che nella *SI* si misura in *Tesla* ( $T$ ), dalla definizione dell'Ampère otteniamo

$$[B] A m = \text{Newton} \equiv K g m s^{-2} \Rightarrow [B] = K g A^{-1} s^{-2} \quad (5.5.413)$$

In tutti i casi in cui  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$  sono proporzionali, potremo definire la costante di *suscettività magnetica* del materiale  $\chi$  nel modo seguente (si tratta di un numero puro)

$$\mu_0 \vec{M} = \chi \vec{B} \quad (5.5.417)$$

Risulta allora che

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} = \frac{\vec{B} - \chi \vec{B}}{\mu_0} = \vec{B} \frac{1 - \chi}{\mu_0} \quad (5.5.418)$$

ovvero

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{1 - \chi} \vec{H} \equiv \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (5.5.419)$$

dove, per definizione, il coefficiente di permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$  è definito appunto come

$$\mu_r \equiv \frac{1}{1 - \chi} \approx 1 + \chi \quad \text{se } \chi \ll 1 \quad (5.5.420)$$

### Esempio

Ritorniamo adesso al caso che abbiamo considerato, dove abbiamo dimostrato la nascita di una densità di magnetizzazione tale che

$$\mu_0 \vec{M} = \mu_0 n \Delta \vec{m} = -\mu_0 n \frac{R^2 e^2}{4m} \vec{B}_0 \equiv \chi \vec{B}_0 \quad (5.5.421)$$

Poiché, nel caso considerato dell'elettrone possiamo assumere

$$R = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (5.5.422)$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (5.5.423)$$

$$m = 1 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \quad (5.5.424)$$

abbiamo che risulta

$$\begin{aligned} \chi &= -\mu_0 n \frac{R^2 e^2}{4m} = -4\pi \cdot 10^{-7} \times n \times \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2 (0.5 \cdot 10^{-10})^2}{4 \times 10^{-30}} = \\ &\approx 2.0 \cdot 10^{-35} \times n \end{aligned} \quad (5.5.425)$$

Riguardo al valore della densità di elettroni  $n$ , osserviamo che, poichè in un atomo la massa si trova nei protoni e nei neutroni (hanno circa la stessa massa) e c'è circa un protone per ogni neutrone ed esattamente un elettrone ogni protone, ne segue che se  $\mathcal{N}$  è il numero di Avogadro, poichè 1 grammo di materia contiene  $\mathcal{N}$  nucleoni, risulta che

$$1 \text{ kg di materia} \rightarrow \frac{1000}{2} \mathcal{N} \text{ elettroni} \Rightarrow n \approx 3 \cdot 10^{26} \delta \quad (5.5.426)$$

dove  $\delta$  è la densità del materiale considerato ( $kg/m^3$ ).  
Assumendo per il materiale la densità dell'acqua, risulta

$$n \approx 3. \times 10^{29} \text{ elettroni}/m^3 \quad (5.5.427)$$

e dunque, sostituendo nell'espressione (5.5.425), otteniamo<sup>27</sup>

$$\chi \approx -6. \times 10^{-6} \quad (5.5.429)$$

Riprendendo ora l'argomento generale, abbiamo visto che

$$\text{rot}(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}_{\text{conduzione}} \equiv \mu_0 \vec{J}_c \quad (5.5.430)$$

Se la magnetizzazione  $\vec{M}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  sono proporzionali, abbiamo poi che

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{B} - \chi \vec{B}) &= \mu_0 \vec{J}_c \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{rot} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{1 - \chi} \vec{J}_c \approx \mu_0 (1 + \chi) \vec{J}_c \equiv \mu_0 \mu_r \vec{J}_c \end{aligned} \quad (5.5.431)$$

Poiché, come abbiamo visto,  $\chi$  è tipicamente una quantità negativa, ne segue che  $\mu_r \leq 1$ , ovvero, a parità di correnti di conduzione,  $B$  è un poco più piccolo nella materia piuttosto che nel vuoto: è il fenomeno del *diamagnetismo*, la cui spiegazione sta appunto nella comparsa di una debole densità di momento di dipolo magnetico, dovuto alla azione del campo magnetico sul moto degli elettroni.

Ma perché il momento magnetico dovuto al moto<sup>28</sup> primario degli elettroni, che abbiamo visto essere di gran lunga maggiore del momento  $\Delta m$  indotto dal campo, finisce per essere ininfluenza ?

La ragione è che lo stato di minima energia di due dipoli magnetici (elettrici) si ha quando i due dipoli sono opposti l'uno con l'altro, ovvero quando tendono a cancellarsi: nell'atomo i vari elettroni si dispongono (si accoppiano) in modo da rendere minimo il momento magnetico complessivo da

<sup>27</sup>In realtà, poiché non tutti gli elettroni ruotano nel piano ortogonale a  $\vec{B}$ , tenendo conto anche della loro distribuzione spaziale isotropa, risulta piuttosto

$$\chi \approx -1. \times 10^{-6} \quad (5.5.428)$$

<sup>28</sup>Occorre altresì ricordare che, oltre al momento magnetico dovuto al suo moto orbitale, l'elettrone ha anche un momento magnetico intrinseco, pari a

$$|m_s| = \frac{|e|}{2m} \hbar = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{2 \times 10^{-30}} 1.05 \times 10^{-34} \approx 10^{-23} \text{ A m}^2 \quad (5.5.432)$$

detto *di spin*. Le considerazioni fatte per gli accoppiamenti orbitali, tali da cancellare l'effetto di un elettrone con un altro, si applicano pari pari anche allo spin: infatti, di solito, in ciascun stato quantico, si dispongono due elettroni con spin opposti.

essi prodotto. Il risultato è che, al più, in genere, solo un elettrone (quando sono dispari) resta spaiato, e allora l'atomo possiede un momento magnetico residuo, che però, in valore assoluto, non eccede quello dovuto a un singolo elettrone (se poi l'atomo forma una molecola biatomica, essa, per lo stesso motivo energetico di cui sopra, finisce per avere momento magnetico complessivo nullo).

Resta comunque possibile che un atomo o una molecola possa avere un momento magnetico intrinseco non nullo, dell'ordine, come abbiamo visto di  $|\vec{m}| \approx 10^{-23} \text{ A m}^2$ . Che cosa accade in questo caso? In presenza di un campo magnetico esterno, esso tende a orientarsi nel verso del campo, infatti su di lui agisce una coppia

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (5.5.433)$$

che tende a orientarlo in modo che l'energia potenziale di interazione con il campo

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (5.5.434)$$

sia minima. Come nel caso elettrostatico, l'orientamento sarebbe completo se non ci fosse l'agitazione termica. Per determinare quantitativamente questo allineamento, procederemo nello stesso modo che abbiamo seguito quando si è trattato il problema dei dielettrici con momento di dipolo intrinseco.

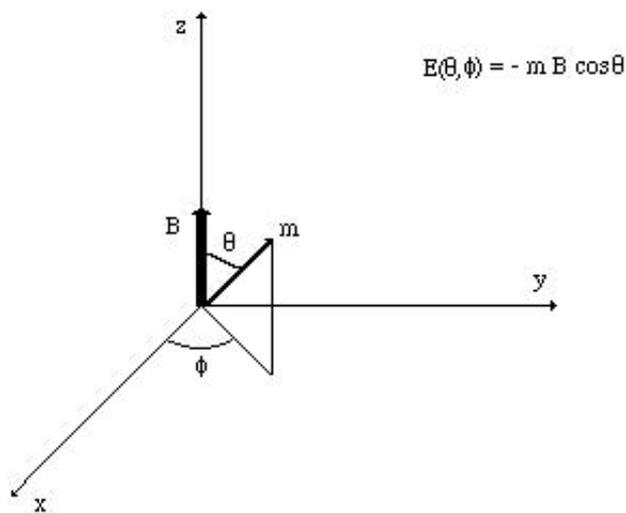


Figura 5.28: Orientamento dei dipoli magnetici

Ricordiamo che, dato uno stato fisico a cui corrisponde l'energia  $W$ , all'equilibrio termico la popolazione  $n(U)$  di quello stato è proporzionale a

$$n(U) \propto e^{-\frac{U}{kT}} \quad (5.5.435)$$

dove  $k = 1.38 \times 10^{-23} J/^\circ K$  è la costante di Boltzmann.

Ne segue che, per un momento magnetico orientato in modo da formare gli angoli  $(\theta, \phi)$  con il campo magnetico  $\vec{B}$ , avremo che la probabilità che sia così orientato vale

$$\mathcal{P}(\vec{m}) \propto e^{-\frac{U}{kT}} = e^{\frac{\vec{m} \cdot \vec{B}}{kT}} = e^{\frac{mB}{kT} \cos \theta} \quad (5.5.436)$$

Più precisamente, se definiamo la costante di normalizzazione<sup>29</sup>

$$C^{-1} \equiv \int d\Omega e^{\frac{\vec{m} \cdot \vec{B}}{kT}} = \int e^{\frac{mB}{kT} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.5.439)$$

avremo

$$\mathcal{P}(\vec{m}) = C e^{\frac{mB}{kT} \cos \theta} \quad (5.5.440)$$

Ne segue allora che, detta  $\langle \vec{M} \rangle$  la densità di momento di dipolo magnetico indotta (densità di magnetizzazione), se  $N$  è la densità di dipoli presenti (numero di dipoli per unità di volume), risulta

$$\begin{aligned} \langle \vec{M} \rangle &= CN \int \vec{m} e^{\frac{\vec{m} \cdot \vec{B}}{kT}} d\Omega = \\ &= CNm \int (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) e^{\frac{mB}{kT} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.5.441) \end{aligned}$$

L'integrazione nell'angolo azimutale  $\phi$  consente di concludere immediatamente che l'unica componente della magnetizzazione diversa da zero può essere solo quella lungo l'asse  $z$ , cioè nella direzione del campo magnetico, risultando

$$\langle M_z \rangle = 2\pi CNm \int e^{X \cos \theta} \cos \theta d(-\cos \theta) \quad (5.5.442)$$

Ma, per quanto abbiamo visto nel calcolo della costante di normalizzazione  $C^{-1}$ , risulta

$$\begin{aligned} \int e^{X \cos \theta} \cos \theta d(-\cos \theta) &= \frac{d}{dX} \int e^{X \cos \theta} d(-\cos \theta) = \\ &= \frac{d}{dX} \left( 2 \frac{\sinh X}{X} \right) = 2 \frac{X \cosh X - \sinh X}{X^2} \quad (5.5.443) \end{aligned}$$

<sup>29</sup>Esplicitamente, posto

$$X \equiv \frac{mB}{kT} \quad (5.5.437)$$

risulta

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \int e^{\frac{mB}{kT} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = \int e^{X \cos \theta} d(-\cos \theta) d\phi = 2\pi \int_1^{-1} e^{X \cos \theta} d(-\cos \theta) = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 dy e^{-Xy} = 2\pi \left. \frac{e^{-Xy}}{-X} \right|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{-X} (e^{-X} - e^X) = \frac{2\pi}{X} (e^X - e^{-X}) = \\ &= 4\pi \frac{\sinh X}{X} \quad (5.5.438) \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
 \langle M_z \rangle &= 2\pi C N m \left( 2 \frac{X \cosh X - \sinh X}{X^2} \right) = \\
 &= 4\pi N m \frac{X}{4\pi \sinh X} \frac{X \cosh X - \sinh X}{X^2} = \\
 &= N m \frac{X \cosh X - \sinh X}{X \sinh X} = N m \left( \coth X - \frac{1}{X} \right) \quad (5.5.444)
 \end{aligned}$$

Nel caso usuale in cui  $X = \frac{mB}{kT} \ll 1$ , essendo

$$\sinh X \approx X + \frac{1}{6}X^3 + \dots \quad (5.5.445)$$

$$\cosh X \approx 1 + \frac{1}{2}X^2 + \dots \quad (5.5.446)$$

abbiamo

$$\frac{X \cosh X - \sinh X}{X \sinh X} \approx \frac{1}{3}X \quad (5.5.447)$$

ovvero, nel limite in cui  $X \ll 1$ , risulta

$$\langle M_z \rangle = N m \left( \coth X - \frac{1}{X} \right) \approx N m \frac{X}{3} = N \frac{m^2 B}{3kT} \quad (5.5.448)$$

che può essere riscritta sotto forma vettoriale, tenendo conto che le componenti  $x$  e  $y$  sia di  $\vec{B}$  come di  $\langle \vec{M} \rangle$  sono nulle, nel modo seguente

$$\langle \vec{M} \rangle = N \frac{|\vec{m}|^2}{3kT} \vec{B} \quad (5.5.449)$$

Ricordando adesso la definizione data della suscettività magnetica  $\chi$

$$\mu_0 \vec{M} = \chi \vec{B} \quad (5.5.450)$$

in questo caso, avremo

$$\chi = N \mu_0 \frac{|\vec{m}|^2}{3kT} \quad (5.5.451)$$

Cerchiamo ora di valutare l'ordine di grandezza di questa quantità per un solido a temperatura ambiente. Abbiamo già visto che, per l'elettrone, è

$$|\vec{m}| = |e| \frac{|\vec{L}|}{m} = |e| \frac{\hbar}{2m} = 1.6 \cdot 10^{-19} \times \frac{1.05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-30}} \approx 10^{-23} \text{ A m}^2 \quad (5.5.452)$$

D'altronde, poiché le distanze interatomiche tipiche in un solido sono di  $\approx 2 \cdot 10^{-10} m$ , risulta

$$N \approx [2 \cdot 10^{-10}]^{-3} \approx 10^{29} m^{-3} \quad (5.5.453)$$

per cui si ha

$$\chi \approx 10^{29} \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{(10^{-23})^2}{3 \times 1.38 \cdot 10^{-23} \times 300} \approx 10^{-3} \quad (5.5.454)$$

da cui ne risulta che il coefficiente di permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$  del materiale vale

$$\mu_r = \frac{1}{1 - \chi} \approx 1 + \chi \approx 1 + 10^{-3} \quad (5.5.455)$$

Esso è leggermente superiore all'unità: si tratta del valore tipico della permeabilità magnetica di un *solido paramagnetico*.

Il paramagnetismo è dovuto infatti all'orientamento in campo esterno del momento magnetico intrinseco (elettronico...) degli atomi che compongono il materiale. Osserviamo che, a differenza del diamagnetismo, in questo caso la suscettività magnetica dipende dall'inverso della temperatura.

Fino ad ora, abbiamo sempre visto situazioni in cui

$$\vec{M} \propto \vec{B} \quad (5.5.456)$$

ovvero nessun effetto magnetico in assenza di campi esterni !

E allora i magneti permanenti? Essi possiedono un momento magnetico anche in assenza di campo magnetico esterno ...

Questo fenomeno ha a che fare con il *ferromagnetismo*.

Anche in questo caso possiamo trattare il fenomeno in termini della relazione fra il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  presente nel materiale e il campo esterno  $\vec{H}$ , detto anche *di eccitazione*, definito in modo tale che

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{conduzione}} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{concatenata}} \quad (5.5.457)$$

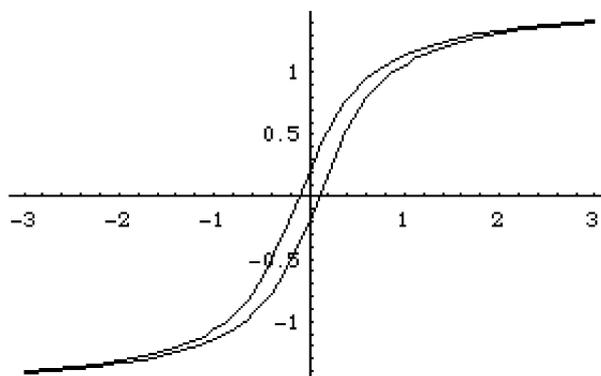
Per definizione

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (5.5.458)$$

A differenza però con quanto accadeva sia nei materiali diamagnetici che paramagnetici, qui il legame fra  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  non è lineare. Questo fatto potrebbe essere ancora "recuperato dicendo che

$$\mu_r = \mu_r(H) \quad (5.5.459)$$

In realtà accade che la funzione  $\mu_r(H)$  non è ben definita in quanto sperimentalmente si osserva che il legame fra  $B$  e  $H$  non è univoco: se rappresentiamo infatti graficamente la funzione  $B = B(H)$  determinata sperimentalmente, scopriamo che non si viene a descrivere una curva, bensì un ciclo: è il *ciclo di isteresi*.



$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

Figura 5.29: *Ciclo di isteresi*

Nella pratica, anche per i materiali ferromagnetici si parla comunque di permeabilità magnetica: è il valore ottenuto mediando sul ciclo !

Si ottiene naturalmente che, per questi materiali è

$$\mu_r = \mu_r(H) \quad (5.5.460)$$

e risulta, tipicamente

$$\mu_r \gg 1 \quad (5.5.461)$$

Ma perchè i ferromagneti si comportano così ?

La ragione è che, per motivi che si sono potuti capire solo con la Meccanica Quantistica, nel Ferro, Nichel e Cobalto, un elettrone di ogni atomo, a temperatura ambiente, si accoppia con gli altri elettroni vicini, producendo così un corpo completamente magnetizzato.

$$\vec{M} = N\vec{m} \Rightarrow |\vec{M}| = N|\vec{m}| \approx 10^{29} \times 10^{-23} = 10^6 \text{ A m}^2 \quad (5.5.462)$$

Questo fenomeno accade però in zone di dimensioni dell'ordine di alcuni micron, detti domini di Weiss. In ogni dominio  $\vec{M}$  ha una direzione assegnata, ma da dominio a dominio essa cambia in modo casuale, per cui, in generale,

$$\langle \vec{M} \rangle = 0 \quad (5.5.463)$$

Appena però c'è un campo esterno, ecco che i domini in cui  $\vec{M}$  è parallelo a  $\vec{B}$  tendono ad ingrandirsi a spese degli altri, per cui accade che

$$\langle \vec{M} \rangle \neq 0 \quad (5.5.464)$$

Questo accade finchè non si raggiunge l'orientamento completo, dopo di che c'è completa saturazione del fenomeno...

Essa si raggiunge per

$$|\vec{M}| \approx 10^6 \text{ A m}^2 \Rightarrow |\vec{B}| \approx \mu_0 |\vec{M}| \approx 4\pi \times 10^{-7} \times 10^6 \approx 1.3 \text{ Tesla} \quad (5.5.465)$$

Se si diminuisce il campo esterno, la smagnetizzazione non avviene, in genere, in modo completo: resta un campo  $B_{residuo}$  che è la caratteristica del magnete permanente.

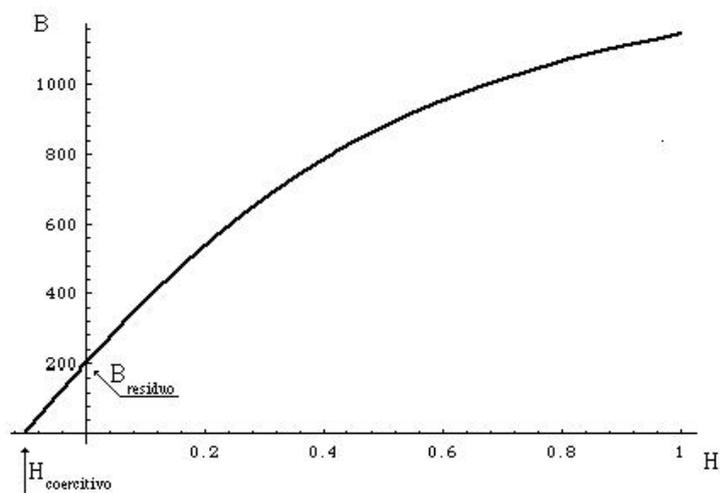


Figura 5.30: *Curva di smagnetizzazione in un magnete permanente*

Volendo smagnetizzare il materiale, occorre applicare un campo esterno di verso opposto a quello da cui si era partiti: è il *campo coercitivo*  $H_c$ .

Una proprietà molto importante dei materiali ferromagnetici è che, sopra una certa temperatura, detta *temperatura di Curie*, essi perdono la caratteristica di essere ferromagnetici per tornare a essere semplicemente paramagnetici (naturalmente, la riacquistano non appena si torna al di sotto di quella temperatura, che, per il Ferro è di circa  $770^{\circ}\text{C}$ , mentre per il Nichel è di soli  $358^{\circ}\text{C}$ ).

Sopra la temperatura di Curie, infatti, il legame fra gli elettroni degli atomi vicini, responsabile del ferromagnetismo, si rompe definitivamente.